arXiv:2603.05562v1 [cs.LO] 5 Mar 2026

描述逻辑概念的模型变更

Ana Ozaki[1], Jandson S. Ribeiro [2]挪威
奥斯陆大学[2]英国卡迪夫大学
ana.ozaki@uib.no,
ribeiroj@cardiff.ac.uk

摘要

我们研究如何根据以带点解释表示的模型修改描述逻辑概念这一问题。我们将这种设定称为模型变更，并区分三种主要变更：驱逐，即只移除模型；接收，即纳入模型；以及修订，即在单次操作中结合移除和纳入模型。我们提出了修订的形式化概念，并指出，与直觉相反，它不能简化为驱逐和接收的简单组合。我们针对 EL⊥ 和 ALC 描述逻辑概念的驱逐与接收的兼容性，以及 ALC 概念修订的兼容性，给出了正反两方面的结果。

1 引言

保持信念更新是知识表示中的一个核心问题，已在不同逻辑和应用的背景下得到研究。在信念变化研究的主流中，信念库是有限的，而表达如何修改信念库的信息，则表示为底层逻辑中的公式集合（Hansson, 1999; G¨ardenfors, 1988; Alchourr´on 等, 1985）。

然而，在许多情境中，使用模型集来描述观察到的变化，比使用公式更合适。在从解释中学习 （De Raedt，1997）的背景下，这一点已得到充分研究，其目标是找到一个简洁的公式，与标记为正面或负面的模型一致。在描述逻辑（DL）的背景下，构建本体的过程通常分为若干阶段：创建本体的人会研究世界的可能模型，在证明某些模型为假后将其舍弃，并加入此前未考虑过的新模型。接下来的例子将说明描述逻辑概念的模型变更操作。

示例 1. *Araci* 正在澳大利亚的一家动物园参观，对澳大利亚动物知之甚少。她知道鸭嘴兽是一种会产卵的哺乳动物，她对鸭嘴兽的认知是

$$\mathsf{Platypus} \equiv \mathsf{Mammal} \sqcap (\exists \mathsf{lays}.\mathsf{Egg}).$$

她看到一只鸭嘴兽‘*d*’，但对它们的饮食一无所知。因此，她考虑以下两个

可能世界$(\mathcal{I}_1,d)$和$(\mathcal{I}_2,d)$，其中$\{d,e\} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} = \Delta^{\mathcal{I}_2}$:

$$\mathcal{I}_1: \boxed{\begin{array}{r} d \in \mathsf{Mammal}^{\mathcal{I}_1} \\ d \notin \mathsf{Herbivore}^{\mathcal{I}_1} \\ (d,e) \in \mathsf{lays}^{\mathcal{I}_1} \\ e \in \mathsf{Egg}^{\mathcal{I}_1} \end{array}} \quad \mathcal{I}_2: \boxed{\begin{array}{r} d \in \mathsf{Mammal}^{\mathcal{I}_2} \\ d \in \mathsf{Herbivore}^{\mathcal{I}_2} \\ (d,e) \in \mathsf{lays}^{\mathcal{I}_2} \\ e \in \mathsf{Egg}^{\mathcal{I}_2} \end{array}}$$

她看到鸭嘴兽正在吃一只小昆虫，这让 *Araci* 撤回了带点解释 $(\mathcal{I}_2,d)$。于是，她将自己关于鸭嘴兽的概念信念改为

$$\mathsf{Platypus} \equiv \mathsf{Mammal} \sqcap (\exists \mathsf{lays}.\mathsf{Egg}) \sqcap \neg \mathsf{Herbivore}.$$

定理 1 展示了从概念中移除一个模型的过程，从而得到一个更接近现实世界的概念。这种改变操作称为驱逐 (Guimar˜aes 等，2023b)，并且应当尽可能少地修改概念。下一个例子展示了它的对偶：添加一个模型的过程，称为接收。

例 2. *Araci* 知道袋鼠和考拉是有袋动物，但对袋獾知之甚少。因此，她关于有袋动物的信念是有袋动物 $\equiv$ 考拉 $\sqcup$ 袋鼠。在袋獾展区，她看到一只袋獾*"d'"*，并读到一块牌子上写着袋獾是有袋动物。于是，她现在承认一个世界$(\mathcal{I}_3,d')$，在这个世界中

$$\mathcal{I}_3: \boxed{d' \in \mathsf{TasDevil}^{\mathcal{I}_3},\ d' \in \mathsf{Carnivore}^{\mathcal{I}_3},\ d' \in \mathsf{Marsupial}^{\mathcal{I}_3}}$$

她改变自己的概念信念，以符合 $(\mathcal{I}_3,d')$:

$$\mathsf{Marsupial} \equiv \mathsf{Koala} \sqcup \mathsf{Kangaroo} \sqcup \mathsf{TasDevil}.$$

在这两个例子中，Araci 对她的概念做了最小改变。对于鸭嘴兽，她只修改了与饮食相关的概念；对于袋獾，她只修改了与有袋动物和恶魔相关的概念；没有进一步对袋鼠或考拉相关的概念做出改变。在这种情况下确保最小改变是一项挑战，因为并非总能撤回或纳入单个输入模型（Guimar˜aes et al., 2023b）。定理 3 展示了第三种更复杂的操作，其中必须在单个步骤中添加和删除模型。

例 3. *Araci* 认为考拉是非胎盘类的有袋哺乳动物。因此，她关于考拉的概念是:

$$\mathsf{Koala} \equiv \mathsf{Mammal} \sqcap \mathsf{Marsupial} \sqcap \neg \mathsf{Placental}.$$

她在动物园里看到一只考拉*"d''"*，因此她认为$(\mathcal{I}_4,d'')$是可能的，但$(\mathcal{I}_5,d'')$则不是。

$$\mathcal{I}_4: \boxed{\begin{array}{l} d'' \in \mathsf{Mammal}^{\mathcal{I}_4} \\ d'' \in \mathsf{Marsupial}^{\mathcal{I}_4} \\ d'' \notin \mathsf{Placental}^{\mathcal{I}_4} \end{array}} \quad \mathcal{I}_5: \boxed{\begin{array}{l} d'' \in \mathsf{Mammal}^{\mathcal{I}_5} \\ d'' \in \mathsf{Marsupial}^{\mathcal{I}_5} \\ d'' \in \mathsf{Placental}^{\mathcal{I}_5} \end{array}}$$

她读到一块告示，得知考拉实际上属于胎盘类。因此她不得不接受$(\mathcal{I}_5, d'')$，同时撤回$(\mathcal{I}_4, d'')$。于是，她将自己的信念改为

$$\text{考拉} \equiv \text{哺乳动物} \sqcap \text{有袋动物} \sqcap \text{胎盘类}。$$

在定理 3 中，模型 (I_4, d'') 必须被移除，而 (I_5, d'') 则被添加。我们将这种更复杂的操作称为修订。在介绍预备知识（第 2 节）并回顾驱逐与接纳（第 3 节）之后，我们将介绍主要贡献，具体如下：

- 对 ALC 和 EL 中描述逻辑概念的驱逐与接纳进行理论研究$^\perp$（第 4 节）；以及
- 引入模型修订这一概念（第 5 节），并给出关于描述逻辑概念的一些结果（第 6 节）。

与直觉相反，正如本文所示，修订并不等同于将驱逐与接纳串行组合。一般而言，可能根本无法做到恰好且仅添加和移除输入中的模型。

相关工作我们的工作与 Guimar˜aes 等人（2023b）的研究最为接近，主要区别在于他们既未考虑修订，也未考虑描述逻辑概念。尽管他们关于描述逻辑本体驱逐与接纳的结果启发了我们的一些证明，但两者的研究设定有很大差异。我们在此提出的描述逻辑概念情形，或许更自然地契合概念建模过程，而概念建模是构建本体的基础。沿着这一思路，已有研究探讨了如何计算最小公共包含概念，以最小改变的方式概括一组概念（Baader 等（2007））。近期研究考察了如何通过带标签的带点解释（标记为正例和反例）学习描述逻辑概念表达式（ten Cate 等，2024）。在他们的研究中，正例和反例带点解释可视为我们设定中需要添加和移除的模型集。两项工作的区别在于，我们关注的是满足最小变化合理性公设的算子是否存在，而他们关注的是是否存在能够刻画某个描述逻辑概念的带标签模型集合；也就是说，这类集合可用于在描述逻辑概念语言中将特定概念与其他所有概念区分开来。Klarman 和 Britz（2015）研究了从解释中进行本体学习。其他研究则在数据检索设定（Funk 等，2021，2019）中、利用归纳逻辑程序设计（Lehmann，2009；Fanizzi 等，2008；Lehmann 和 Haase，2009；Lehmann 和 Hitzler，2010），以及借助反事实（Iannone 等，2007）探讨了描述逻辑概念的可学习性。我们还指出了一些关于学习、认知逻辑与信念修订之间联系的研究（Baltag 等，2019b,a；Ozaki 和 Troquard，2019；Schwind 等，2025）。

2 预备知识

集合 A 的幂集记作 $\wp(\mathrm{A})$，而 A 的所有有限子集构成的集合记作 $\wp_{\mathrm{f}}(\mathrm{A})$。给定论域 D 上的一个预序 $\leqslant \subseteq \mathrm{D} \times \mathrm{D}$，以及集合 $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{D}$，则 A 中关于 $\leqslant$ 的所有极大元素和极小元素分别为 $\max_{\leqslant}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{A} \mid$对所有 $\mathrm{y} \in \mathrm{A}$，若 $\mathrm{x} \leqslant \mathrm{y}$，则 $\mathrm{y} \leqslant \mathrm{x}\}$，以及 $\min_{\leqslant}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{A} \mid$对所有 $\mathrm{y} \in \mathrm{A}$，若 $\mathrm{y} \leqslant \mathrm{x}$，则 $\mathrm{x} \leqslant \mathrm{y}\}$。

我们用 $\wp^*(A)$ 表示 A 的非空子集。遵循 Aiguier等人（2018）；Delgrande等人（2018）以及 Guimar˜aes 等人（2023b）的做法，我们使用满足系统来定义逻辑。一个满足系统 是一个三元组 $\Lambda = (\mathrm{L}\ \mathfrak{M}, \models)$，其中 L 是一种非空（可能可数无限的）语言，$\mathfrak{M}$ 是一个模型集，而 $\models \subseteq \mathfrak{M} \times \wp(\mathrm{L})$ 是一个称为满足 关系的关系，用于将模型与语言的子集关联起来。我们使用中缀记法 $M \models \mathrm{B}$ 作为 $(M,\mathrm{B}) \in \models$ 的简写，并称M 满足B。L 的每个子集都称为一个基 （可以是有限或无限的），记作 B。我们用 $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathrm{B})$ 表示集合 $\{M \in \mathfrak{M} \mid M \models \mathrm{B}\}$。 当满足系统可由上下文明确时，我们写作 $\mathrm{mod}(\mathrm{B})$。

满足系统有助于推广某些并不依赖于该逻辑后承关系特定性质的结果。位于 Λ 内的模型集 $\mathbb{M} \subseteq \mathfrak{M}$ 是有限可表示的，当且仅当存在 $\mathrm{B} \in \wp_{\mathrm{f}}(\mathrm{L})$，使得 $\mathrm{mod}(\mathrm{B}) = \mathbb{M}$。令 $\mathrm{FR}(\Lambda)$ 表示所有位于 Λ 中的有限可表示模型集，即，

$$\mathrm{FR}(\Lambda) = \{\mathbb{M} \subseteq \mathfrak{M} \mid \exists \mathcal{B} \in \wp_{\mathrm{f}}(\mathcal{L}) : \mathrm{mod}(\mathcal{B}) = \mathbb{M}\}.$$

给定模型集 $\mathbb{M}$， $\mathbb{M}$ 的最大有限可表示子集与 $\mathbb{M}$ 的最小有限可表示超集分别由

$$\mathrm{MaxFRSubs}(\mathbb{M}, \Lambda) = \max_{\subseteq}(\{\mathbb{M}' \in \mathrm{FR}(\Lambda) \mid \mathbb{M}' \subseteq \mathbb{M}\}),$$
$$\mathrm{MinFRSups}(\mathbb{M}, \Lambda) = \min_{\subseteq}(\{\mathbb{M}' \in \mathrm{FR}(\Lambda) \mid \mathbb{M} \subseteq \mathbb{M}'\}).$$

我们称公式集 $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{L}$ 是有限可表示的，当且仅当存在 $\mathrm{B}' \in \wp_{\mathrm{f}}(\mathrm{L})$，使得 $\mathrm{mod}(\mathrm{B}) = \mathrm{mod}(\mathrm{B}')$。我们用 $\times$ 表示两个集合的笛卡尔积。此外，我们将满足系统 Λ 中某个基的逻辑闭包记为 Cn_Λ，并在上下文清楚时省略下标。

描述逻辑概念 设 $\mathrm{N_C}$ 与 $\mathrm{N_R}$ 分别为可数且两两不相交的概念名称集与角色名称集。在本文中，$\mathrm{N_C}$ 与 $\mathrm{N_R}$ 可以是有限的或无限的。当这些被称为签名的集合为有限时，我们会明确指出（否则默认其为无限）。EL 概念按如下规则构造：$\mathrm{C,D} ::= \top \mid \mathrm{A} \mid (\mathrm{C} \sqcap \mathrm{D}) \mid (\exists \mathrm{r}.\mathrm{C})$，其中 $\mathrm{A} \in \mathrm{N_C}$，且 $\mathrm{r} \in \mathrm{N_R}$。$\mathrm{EL}_\bot$ 概念通过允许 $\bot$（解释为空集）来扩展 EL。ALC 概念通过规则 $\neg \mathrm{C}$ 扩展 EL 概念（注意 $\mathrm{C} \sqcap \neg \mathrm{C}$ 等价于 $\bot$，因此 ALC 扩展了 $\mathrm{EL}_\bot$）。我们可以将 $\exists \mathrm{r}^n.\top$（其中 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$）作为 n 个存在量词嵌套的简写（即 $\exists \mathrm{r}^{n+1}.\top = \exists \mathrm{r}.(\exists \mathrm{r}^n.\top)$），以及 $\exists \mathrm{r}^0.\top = \top$。

语义 EL、$\mathrm{EL}_\bot$ 和 ALC 概念的语义使用带点解释定义（Baader等人，2017；Agi等人，2003）。解释 I 是一个有序对 $(\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$，其中 $\Delta^{\mathcal{I}}$ 是一个非空集合，称为论域；$\cdot^{\mathcal{I}}$ 是一个函数，它将每个 $\mathrm{A} \in \mathrm{N_C}$ 映射到 $\Delta^{\mathcal{I}}$ 的一个子集，并将每个 $\mathrm{r} \in \mathrm{N_R}$ 映射到 $\Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$的一个子集。若 $\Delta^{\mathcal{I}}$是有限集，则该解释是有限的。带点解释是一个有序对 (I,d)，其中 $\mathrm{I} = (\cdot^{\mathcal{I}}, \Delta^{\mathcal{I}})$ 是一个解释，且 $\mathrm{d} \in \Delta^{\mathcal{I}}$。带点解释 (I,d) 满足概念 C，当且仅当 $\mathrm{d} \in \mathrm{C}^{\mathcal{I}}$。我们使用展开的概念来定义树形带点解释，这一概念由 Dummett 和 Lemmon（1959）提出（另见 Konev 等人（2016））。若对于所有（基于该签名的）带点解释 (I,d)，$\mathrm{d} \in \mathrm{C}^{\mathcal{I}}$ 蕴含 $\mathrm{d} \in \mathrm{D}^{\mathcal{I}}$，则称概念 C 蕴含概念 D。两个概念 C、D 等价，记作 $\mathrm{C} \equiv \mathrm{D}$，当且仅当 C 蕴含 D 且 D 蕴含 C。给定一个

固定但任意的 $r \in \mathsf{N_R}$，我们定义 $M^n = (\mathbb{N},\ \cdot^{M^n})$，其中 $r^{M^n} = \{(i,\ i+1) \mid i \in \mathbb{N},\ 0 \leq i < n\}$；类似地，$M^\infty = (\mathbb{N},\ \cdot^{M^\infty})$，其中 $r^{M^\infty} = \{(i,\ i+1) \mid i \in \mathbb{N}\}$。

满足系统中的描述逻辑概念在满足系统中，我们用“基”一词指逻辑语言中的一组公式。我们将一组概念与由该组元素合取形成的概念视为等同。因此，我们可以将一个基称为一个概念，也可以称为一个有限的概念集（后一种说法指由这些概念合取形成的概念）。满足系统中的“模型”这一概念对应于带点解释这一概念。

3 模型接纳与驱逐

本节讨论如何根据一个模型集修改有限基这一问题，如定理 1 和定理2所示。我们将这类算子称为模型变更算子。Guimar˜aes等人（2023b）区分了两种主要的模型变更算子：

驱逐：从基 B 中移除一组 $\mathbb{M}$ 模型，即将 B 转换为一个基 B′，使其模型不属于 $\mathbb{M}$;

接收：将集合 $\mathbb{M}$ 中的所有模型纳入基 B，也就是说，将 B 变为基 B′，使得 $\mathbb{M}$ 中的所有模型都满足 B′。

在某些情境下，并非所有模型集都需要考虑。例如，某些描述逻辑具有有限模型性或树形性。因此，考虑仅纳入此类模型类的模型变更算子也有意义。形式上，满足系统 $\Lambda = (\mathrm{L}\ \mathfrak{M},\ \models)$ 上的模型类是一个集合 $\mathsf{C} \subseteq \wp(\mathfrak{M})$，其中包含若干解释集合。因此，模型变更算子是在给定的模型类上定义的。

定义4。 模型类 $\mathcal{C}$ 中的模型变更算子是一个函数 $\circ : \wp_{\mathrm{f}}(\mathcal{L}) \times \mathcal{C} \to \wp_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$，它将每个有限基 $\mathcal{B}$ 映射为有限基 $\mathcal{B}'$，并以一个模型集为依据。

为简洁起见，如果上下文已明确类 C 所指的模型类，我们可以省略对此模型类的指称。模型变更算子的主要挑战在于保证新基的有限性，这带来了两个主要难题：

1. 某些模型集无法唯一地添加到某些基中或从中移除，正如下文定理 5 所示。
2. 简单地添加或移除模型集可能无法有限可表示。这是因为逻辑语言的表达能力不足以区分集合中的所有模型与不属于该集合的模型。定理 6 展示了这一问题。

例 5. 考虑 $\mathcal{EL}$ 概念 $\exists r^3.\top$，其中 $\mathsf{N_C} = \varnothing$、$\mathsf{N_R} = \{r\}$，以及点模型 $(\mathcal{I}_1, d_1)$ 和 $(\mathcal{I}_2, d_1)$，其论域分别为 $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \{d_1, d_2\}$ 和 $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \{d_1, d_2, d_3\}$，其中

$$\mathcal{I}_1 : \boxed{r^{\mathcal{I}_1} = \{(d_1, d_2)\}} \quad \mathcal{I}_2 : \boxed{r^{\mathcal{I}_2} = \{(d_1, d_2), (d_2, d_3)\}}$$

（I_1,d_1）和（I_2,d_1）都不是 $\exists r^3.\top$ 的模型。假设我们想将（I_1,d_1）加入 $\exists r^3.\top$ 的模型中。然而，在 $EL_\bot$ 中，（I_1,d_1）和 $mod(\exists r^3.\top)$ 满足的每个概念，（I_2,d_1）也都满足。不存在能够将（I_2,d_1）与 $mod(\exists r^3.\top) \cup \{(I_1,d_1)\}$ 区分开的概念。

例 6。设 $B = \{\exists r.\top\}$ 是一个 EL概念，签名为 $N_C = \{A\}, N_R = \{r\}$。我们要驱逐点模型 (I,d)，其中 $\Delta^{\mathcal{I}} = \{d\}$、$r^{\mathcal{I}} = \{(d,d)\}$，且 $A^{\mathcal{I}} = \varnothing$。可知 (I,d) 满足 B。从 $mod(B)$ 中移除 (I,d) 后，得到的基 $B' = \{\exists r.A\ \exists r^2.A \cdots, \exists r^n.A \cdots\}$ 并非有限可表示。

在情形 1 和情形 2 中，分别如定理 5 和定理6 所示，都必须添加/移除额外的模型，才能得到有限基。此类添加/移除应尽可能少，因此只考虑那些确实有助于实现有限性的模型。在这种情况下，可以得到一个“最接近”的有限基。此类极小性准则通过理性公设得到恰当刻画。本文确定了所有遵循此类公设的驱逐/接收算子的适当类别。

我们证明，在若干模型类中，无法保证最小性原则；这是因为不存在“最接近”的有限基，这一现象称为相容性问题（Guimar˜aes 等，2023b）。我们将在第 3.1 节和第 3.2 节分别简要回顾接收和驱逐。

3.1 接收

我们将与接收相关的信念变更算子记为 rcp。Guimar˜aes 等人（2023b）提出了以下用于规范接收的理性公设

（成功性） $\mathbb{M} \subseteq$ 模型（rcp（$\mathcal{B}$ $\mathbb{M}$））

（持久性） 模型（$\mathcal{B}$） $\subseteq$模型（rcp（$\mathcal{B}$ $\mathbb{M}$））

（有限节制） $\mathbb{M}' \notin$ 有限可表示（Λ），若 模型（$\mathcal{B}$）$\cup \mathbb{M} \subseteq \mathbb{M}'$且 $\mathbb{M}' \subset$模型（rcp（$\mathcal{B}$ $\mathbb{M}$））

(一致性) mod(rcp(B $\mathbb{M}$)) =mod(rcp(B′, $\mathbb{M}'$)), 若 MinFRSups(mod(B)$\cup\mathbb{M}$, Λ) = MinFRSups(mod(B′)$\cup\mathbb{M}'$, Λ) 。

成功性确保必须纳入来自 $\mathbb{M}$ 的每个模型。接收的目的是容纳新的模型。持久性 确保在此过程中不会移除任何模型。有限节制 确保尽量减少额外模型的添加，只添加有助于达到有限基的模型。一致性 确保接收既不受语法影响，也不受模型结构影响。

例如，在定理 5 中，带点解释 (I_1,d_1) 在存在 B 的模型时无法与 (I_2,d_1) 区分，因此，B 对集合 {(I_1,d_1)} 和 {(I_1,d_1)，(I_2,d_1)} 的接收必须相同。

模型类 C 上的 接收算子 是一个满足 成功性 的模型变更算子 rcp $\wp_f$(L) × C $\to \wp_f$(L)。满足所有理性公设的接收算子称为 理性的。当 mod(B) $\cup \mathbb{M}$ 不存在有限基时，为了满足有限性，必须额外加入一些模型。根据有限节制性的要求，此类额外移除必须最小化。这相当于选取一个最小的有限可表示

mod(B) $\cup \mathbb{M}$ 的超集，也就是从 MinFRSups(mod(B) $\cup \mathbb{M}, \Lambda$) 中选取一个集合。然而，对于某些模型类，不存在这样的最小有限可表示超集，也就是说，MinFRSups(mod(B)$\cup \mathbb{M}, \Lambda$) isempty。在这种情况下，无法满足有限节制性，这意味着不存在理性接收算子。存在此类最小有限可表示超集的模型类称为接收兼容的。

定义 7。 满足系统 Λ 上的模型类 $\mathcal{C}$ 是接收兼容的，当且仅当对于所有 $\mathbb{M} \in \mathcal{C}$ 和基 $\mathcal{B} \in \wp_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$，$\mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cup \mathbb{M}, \Lambda) \neq \varnothing$。

正如我们在第 4 节所示，若干个由所有模型构成的类并非接收兼容。例如，在 DL $\mathrm{EL}^{\bot}$ 中，其所有模型构成的类并非接收兼容，定理 8 说明了这一点。

例 8。 考虑 $\mathcal{EL}^{\bot}$ 中的概念 $\bot$，以及一个包含 $\mathsf{N_R} = \{r\}$ 的签名。假设 $\mathbb{M}^{+} = \{(M^{\infty}, 0)\}$（参见第 *2* 节中的定义）。我们希望纳入一个指向无限链的解释，但不要求纳入有限链 M^n。不存在能够最佳表示将此集合加入 $\bot$ 的 $\mathcal{EL}^{\bot}$ 概念。给定一个概念 $\exists r^n.\top$，总能构造出另一个概念 $\exists r^{n+1}.\top$，它包含 $\mathbb{M}^{+}$，但其模型严格更少：$\mathsf{mod}(\exists r.\top) \supset \mathsf{mod}(\exists r^2.\top) \supset \cdots \supset \mathsf{mod}(\exists r^n.\top) \supset \cdots$。

定理 9 说明了一种接收操作。

例 9.（续定理 *5*）。回想一下，我们想要的是 $\exists r^3.\top$ 与 $(\mathcal{I}_1, d_1)$ 的接收。$\exists r^2.\top$ 和 $\exists r.\top$ 都比 $\exists r^3.\top$ 更一般。在这些之中，包含 $(\mathcal{I}_1, d_1)$ 的最接近者是 $\exists r.\top$。因此，$\mathsf{rcp}(\{\exists r^3.\top\}, \{(\mathcal{I}_1, d_1)\}) = \{\exists r.\top\}$。

在模型的接纳相容类上，Guimar˜aes 等人（2023b）提出了极大选择接纳算子族，它从 MinFRSups 中选择一个有限可表示基。极大选择接纳算子与所有理性的接收算子重合。

3.2 驱逐

驱逐算子（记为 evc）由以下公设所约束：

（成功性） $\mathbb{M} \cap \mathsf{mod}(\mathsf{evc}(\mathcal{B}\ \mathbb{M})) = \varnothing$。

（包含） $\mathsf{mod}(\mathsf{evc}(\mathcal{B}\ \mathbb{M})) \subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B})$。

（有限保留） $\mathbb{M}' \notin$ 有限可表示(Λ)，如果 $\mathsf{mod}(\mathsf{evc}(\mathcal{B}\ \mathbb{M})) \subset \mathbb{M}'$ 且 $\mathbb{M}' \subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathbb{M}$。

（一致性） $\mathsf{mod}(\mathsf{evc}(\mathrm{B}\ \mathbb{M})) = \mathsf{mod}(\mathsf{evc}(\mathrm{B}', \mathbb{M}'))$, 如果 $\mathrm{MaxFRSubs}(\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \setminus \mathbb{M}, \Lambda) = \mathrm{MaxFRSubs}(\mathsf{mod}(\mathrm{B}') \setminus \mathbb{M}', \Lambda)$

成功性确保来自 $\mathbb{M}$ 的每个模型都必须被放弃。由于驱逐的目的是移除模型，包含确保不添加任何模型。一致性与接收一样，保证驱逐既不语法敏感，也不对模型结构敏感。有限保留确保额外模型的移除被最小化，

仅收回那些有助于达到有限基的模型。类 C 模型上的驱逐算子是满足成功性的模型变更算子 evc : $\wp_f(L) \times C \to \wp_f(L)$。满足所有理性公设的驱逐算子称为理性的。在最佳情形下，要从有限基 B 中驱逐模型集 $\mathbb{M}$，只需为集合 $\text{mod}(B) \setminus \mathbb{M}$ 确定一个基。然而，由于并非所有模型集都是有限可表示的，按照有限保留的要求，为了有限性还必须最小限度地移除另一些模型。这对应于从 $\text{mod}(B) \setminus \mathbb{M}$ 中选取一个最大有限可表示子集，即从最大有限可表示子集$(\text{mod}(B) \setminus \mathbb{M}, \Lambda)$ 中选取一个集合。该集合一般不是单元素集，必须在最合理的候选者中作出选择。与接收一样，这一选择由选择函数实现。与接收类似，取决于底层的模型类 C，最大有限可表示子集$(\text{mod}(B) \setminus \mathbb{M}, \Lambda)$可能为空。在这种情形下，有限保留无法得到满足，这意味着在此类模型类中不存在理性驱逐算子。存在最大有限可表示子集的模型类称为驱逐相容。

定义 10. 在满足系统 Λ 上，模型类 $\mathcal{C}$ 是驱逐相容的，当且仅当对于所有 $\mathbb{M} \in \mathcal{C}$ 以及基 $\mathcal{B} \in \wp_f(\mathcal{L})$，最大有限可表示子集$(\text{模型}(\mathcal{B}) \setminus \mathbb{M}, \Lambda) \neq \varnothing$。

对于驱逐相容的模型类，Guimar˜aes 等人（2023b）提出了极大选择驱逐算子族，该算子族从有限可表示集合 FR 中选择一个基。极大选择接收算子由接收的所有理性公设刻画。

4 驱逐与接纳：描述逻辑概念

在此，我们研究描述逻辑概念上的驱逐与接收，重点关注典型的描述逻辑 ALC 和 EL。下文中，我们用 $\Lambda(\text{EL}^{\bot\text{concepts}})$ 和 $\Lambda(\text{ALC}^{\text{concepts}})$ 表示以带点解释为模型的 EL$_\bot$ 和 ALC 概念的满足系统。表 1 总结了我们的结果。

满足系统	驱逐	接收
$\Lambda(\text{EL}_{\bot con.})$	是（定理 11）	否（定理 13）
$\Lambda(\text{EL}_{\bot con.})^\dagger$	是（定理 11）	是（定理 14）
$\Lambda(\text{ALC}_{con.})$	否（定理 12）	否（定理 13）
$\Lambda(\text{ALC}_{con.})^\ddagger$	是（定理 16）	是（定理 16）

表 1：描述逻辑概念的驱逐兼容性与接收兼容性。† 表示带点解释只能是树形的情形，‡ 表示带点解释只能是树形、签名有限且模型集只能是有限的情形。

定理 11。 Λ（$\mathcal{EL}^{\bot concepts}$）是驱逐相容的。

定理 11 不适用于 EL（不含 $\bot$），因为任何无法表达不一致性的语言都不具备驱逐相容性（Guimar˜aes 等，2023b）。ALC 也不具备驱逐兼容性。

定理 11。 Λ（$\mathcal{ALC}^{concepts}$）不具备驱逐相容性。

下一个定理表明，接收相容性对 $\mathrm{EL}_{\bot}$ 和 ALC 概念都不成立。

定理 11. $\Lambda(\mathcal{EL}_{\bot}^{concepts})$ 和 $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 都不具备接收相容性。即使将范围限制为（可能无限的）树形带指定点的解释集合类，或者限制为基于同一个有限签名的带点解释集合类，结论仍然成立。

现在我们着重寻找一个受限的概念类，使接收相容性成立。

定理 11. $\Lambda(\mathcal{EL}_{\bot}^{concepts})$ 在（可能无限的）有限树形带点解释集合类中（其签名可能无限）具备接收相容性。

定理 12 和定理 13 促使我们考察更受限的模型类，以便为 ALC 得到肯定结果。限制这一类有两种自然方式：将范围限制为有限的有限树形解释集合，或限制为具有有限签名的有限树形解释。下一个定理表明，仅采取这些限制仍不足以确保 ALC 的接收相容性。

定理 15. $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 既不在（可能无限）签名上有限个有限树形带点解释的集合类中接收兼容，也不在某个（唯一）有限签名上的（可能无限）有限树形带点解释集合类中接收兼容。

定理 16. $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 在任意有限签名上有限个有限树形带点解释的集合类中，既接收兼容又驱逐相容。

5 模型修订

本节中，我们介绍一种新型的模型变更操作，称为模型修订。模型修订会纳入一组模型，同时保证另一组模型被移除。例如，在定理 3 中，必须移除 $(\mathfrak{I}_4, d'')$，而必须添加 $(\mathfrak{I}_5, d'')$。修订无法通过组合接收和驱逐来定义，因为接收可能会添加必须驱逐的模型，反之亦然。对于修订，我们考虑定义在类 $\mathsf{C} \subseteq \wp(\mathfrak{M}) \times \wp(\mathfrak{M})$ 上的变更算子，其中该类由模型对构成。模型对的类称为二元类。

例 17. 设 $\mathcal{B} = \{\exists r.\top\}$ 是签名 $\mathsf{N_C} = \{A\}$ 与 $\mathsf{N_R} = \{r\}$ 上的一个 $\mathcal{EL}_{\bot}$ 概念。设 $(\mathcal{I}_1, d_1)$ 与 $(\mathcal{I}_2, d_1)$ 是带有 $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \{d_1, d_2\}$ $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \{d_1, d_2, d_3\}$ 的带指示点模型，且

$$\mathcal{I}_1 : \boxed{A^{\mathcal{I}_1} = \{d_2\}, r^{\mathcal{I}_1} = \{(d_1, d_2)\}}$$

$$\mathcal{I}_2 : \boxed{A^{\mathcal{I}_2} = \{d_1\}, r^{\mathcal{I}_2} = \{(d_1, d_2), (d_2, d_3)\}}$$

我们希望用$(\{(\mathcal{I}_1, d_1)\}, \{(\mathcal{I}_2, d_1)\})$修订$\mathcal{B}$，也就是说，接收$(\mathcal{I}_1, d_1)$ 并驱逐$(\mathcal{I}_2, d_1)$。无论以何种顺序结合理性驱逐与理性接收，都不足以

实现修订。用(I_2,d_1)理性驱逐B，得到$B' = \{\exists r^3.\top\}$。然而，将$(I_1,d_1)$纳入其中，又会得到基$\{\exists r.\top\}$，其中包含$(I_2,d_1)$。另一方面，用$(I_1,d_1)$接收$B$不会改变$B$，因为$(I_1,d_1)$是 $\exists r.\top$的一个模型。用(I_2,d_1)驱逐B，得到 $\exists r^3.\top$，其中不包含(I_1,d_1)。

定义 18. 在二元类 $\mathcal{C}$ 上，修订算子是一个函数 $\text{rev} : \wp_f(\mathcal{L}) \times \mathcal{C} \to \wp_f(\mathcal{L})$，它满足公设

成功性 $\mathbb{M}^- \cap \text{mod}(\text{rev}(B\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) = \varnothing$ 且 $\mathbb{M}^+ \subseteq \text{mod}(\text{rev}(B\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。

为清楚起见，我们将 $\mathbb{M}^-$ 记为要移除的模型集，而将 $\mathbb{M}^+$ 记为要添加的模型集。成功性 保证移除 $\mathbb{M}^-$ 中的所有模型，同时添加 $\mathbb{M}^+$ 中的所有模型。显然，不能要求添加并移除同一个模型。如果 $\mathbb{M}^+$ 和 $\mathbb{M}^-$ 不互不相交，则无法对 $(B\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$ 满足成功性。遗憾的是，成功性是否可实现并不只取决于判断 $\mathbb{M}^+$ 和 $\mathbb{M}^-$ 是否互不相交，还取决于逻辑所基于的满足系统。例如，对于 ALC 概念，模型在互模拟下封闭（Goranko and Otto, 2007; Blackburn et al., 2007），这意味着某些彼此不同但双模拟等价的带点解释 (I_1,d_1) 和 (I_2,d_2) 满足完全相同的公式。因此，要求纳入 (I_1,d_1) 并移除 (I_2,d_2) 的修订无法实现。为满足成功性，修订至少必须定义在这样的模型对类上：纳入 $\mathbb{M}^+$ 不会与移除 $\mathbb{M}^-$ 相冲突。我们将此类称为修订可实现的。

定义 19. 二元模型类 $\mathcal{C}$ 是修订可实现的，当且仅当对于所有 $(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) \in \mathcal{C}$，都存在一个有限可表示的模型集 $\mathbb{M}$，使得 $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathbb{M}$ 且 $\mathbb{M}^- \cap \mathbb{M} = \varnothing$。

为简洁起见，除非另有明确说明，我们假设所有二元模型类都是修订可实现的。成功性 本身不足以使修订具有理性。我们引入其他理性公设，以刻画修订的最小改变原则。我们从以下内容开始

空扩展：如果 $\mathbb{M}^+ \subseteq \text{mod}\ (B)$，那么 $\text{mod}(\text{rev}(B\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \subseteq \text{mod}\ (B)$,

空删除：如果 $\mathbb{M}^- \cap \text{mod}\ (B) = \varnothing$，那么 $\text{mod}\ (B) \subseteq \text{mod}(\text{rev}(B\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。

如果 $\mathbb{M}^+$ 的所有模型都是 B 的模型，那么只需排除 $\mathbb{M}^-$（空扩展）。另一方面，如果 $\mathbb{M}^-$ 中没有任何模型满足 B（空删除），我们要做的就是添加模型。如果 $\mathbb{M}^+$ 中的所有模型都满足 B，且 $\mathbb{M}^-$ 中没有任何模型违反 B，那么基 B 应保持不变。我们称之为惰性。

惰性：若 $\mathbb{M}^+ \subseteq \text{mod}(B)$ 且 $\mathbb{M}^- \cap \text{mod}(B) = \varnothing$，则 $\text{rev}(B\ \mathbb{M}^+,\ \mathbb{M}^-) = \text{mod}(B)$。

命题 11。 若修订算子满足空扩展和 空删除，则其满足惰性。

这三条公设概括了修订最根本的特征。然而，这些公设还不够，因为它们允许大幅删除和增加模型。例如，如果 $\mathbb{M}^+$ 中的某些模型不满足 B，且 $\mathbb{M}^-$中的某个模型违反 B，

那么**空扩展** 和**空删除** 允许删除 B 的所有模型。不过，理想情况下，应尽量减少变化。

在对 $\mathbb{M}^-$ 进行平凡移除以及对 $\mathbb{M}^+$ 进行平凡添加能够得到有限可表示集 $\mathbb{M}$ 的情形下，修订应对应于 $\mathbb{M}$，因为有限性可以平凡地获得。然而，如果未能通过这种方式达到有限性，那么为了实现有限性，就必须移除并添加一些额外的解释。这些添加和移除必须最小化。这种最小改变原则被概念化为**审慎性** 公设。

审慎性：如果X^+，X^- ϵC 是不相交的集合，并且下面的条件 (1) 至 (3) 同时满足，则条件 (4) 也满足：

1. $X^- \subseteq (\text{mod(B)} \setminus \text{mod(rev(B } \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$, 且 $\mathbb{M}^- \cap \text{mod(B)} \subseteq X^-$2. $\mathbb{M}^+ \setminus \text{mod(B)} \subseteq X^+ \subseteq (\text{mod(rev(B } \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \setminus \text{mod(B)}$ 且 3. $((\text{mod(B)} \setminus X^-) \cup X^+) \neq \text{mod(rev(B } \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$ 4. $((\text{mod(B)} \setminus X^-) \cup X^+) \notin \text{FR}(\Lambda)$。

上文的**审慎性**中，集合X^-（条件1）表示要移除的额外解释，而X^+（条件2）表示修订过程中要添加的额外解释。这些额外的添加和移除只能以实现有限性为目的，且每一项都必须是实现有限性所必需的。因此，任何更小的移除或添加组合都无法形成满足有限性的修订候选（条件3）（条件4）。公设**审慎性**体现了**惰性**。

命题 11。若修订算子满足审慎性，则它满足惰性。

在信念变化领域，已证明定义能够满足最小改变原则的算子是一项挑战。在某些逻辑中，甚至无法定义满足最小改变原则的算子（Flouris，2006；Ribeiro 等人，2018；Guimar˜aes 等人，2023b）。这是由这些逻辑强有力的语义和性质所致。Guimar˜aes 等人（2023b）已表明，在某些逻辑的满足系统中，驱逐与接纳并不存在。修订方面也是如此。我们将致力于为与此类理性公设相容的模型类定义修订算子。

定义 22. 二元类 $\mathcal{C}$ 是修正相容的，当且仅当在 $\mathcal{C}$ 上存在一个修订算子，满足成功性、空扩展、空删除 和审慎性。

鉴于我们正在研究一个修正相容的二元模型类，我们想知道如何构造一个满足目前为止所提出的所有理性公设的修订算子。我们将精确定义满足这些公设的算子类。为此，我们需要定义一些辅助工具。令

$$\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) = \{Y \in \text{FR}(\Lambda) \mid \mathbb{M}^+ \subseteq Y \text{ and } \mathbb{M}^- \cap Y = \varnothing\},$$

是一个集合，其中恰好包含所有满足以下条件的有限基：给定集合$\mathbb{M}^+$ 中的所有模型都满足它，而 $\mathbb{M}^-$中的所有模型都违反它。可以将 χ_Λ($\mathbb{M}^+$，$\mathbb{M}^-$)视为所有潜在候选项的集合，用于通过二元组($\mathbb{M}^+$，$\mathbb{M}^-$)修订一个基。

然而， $\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$中的并非所有集合都适合用于修订给定的基 B，因为其中一些集合可能会增加或删除超出**审慎性**允许范围的内容。如果我们能够“度量”为了得到一个有限可表示模型集而对 mod(B) 所做的更改，那么只需选择所引起更改最小的有限可表示模型集即可。两个集合A 和B 的对称差恰好表示将一个集合转换为另一个集合所需进行的更改。要将集合A 转换为集合B，我们只需添加B 中不属于A的元素，并删除A 中不属于B的元素。因此，我们可以用对称差来“度量”解释集合之间的更改，并选择更改最小的集合。对于每个解释集合 $\mathbb{M}$，我们定义关系 $\leq_{\mathbb{M}} \subseteq \wp(\mathfrak{M}) \times \wp(\mathfrak{M})$，使得$\mathbb{M}_1 \leq_{\mathbb{M}} \mathbb{M}_2$ 当且仅当$(\mathbb{M} \oplus \mathbb{M}_1) \subseteq (\mathbb{M} \oplus \mathbb{M}_2)$。

直观地说， $\mathbb{M}_1 \leqslant_{\mathbb{M}} \mathbb{M}_2$ 意味着，将 $\mathbb{M}$ 变为 $\mathbb{M}_2$ 所造成的变化，至少不小于将 $\mathbb{M}$ 变为 $\mathbb{M}_1$所造成的变化。这意味着，将 $\mathbb{M}$ 变为 $\mathbb{M}_1$ 的代价不高于将 $\mathbb{M}$ 变为 $\mathbb{M}_2$的代价。我们可以利用这种接近关系，通过一对（$\mathbb{M}^+$，$\mathbb{M}^-$）修订基 B。

由于修订必须使变化最小，我们从 χ_Λ（$\mathbb{M}^+$，$\mathbb{M}^-$）中选择一个与 mod(B) 最接近的选项，即从 $\min^{\leq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$ 中选择一个。要用这一策略定义修正函数，我们需要满足以下条件：对于每个基 B 和每一对（$\mathbb{M}^+$，$\mathbb{M}^-$），$\min_{\leq}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$ 中至少存在一个选择；也就是说，对称差确实能使基到修订候选项的距离最小。该条件由修正相容性推出。

定理 11。若$\mathcal{C}$ 具有修正相容性，则对于任意有限基$\mathcal{B}$ 以及（$\mathbb{M}^+$、$\mathbb{M}^-$）$\in \mathcal{C}$，$\min^{\leq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+、\mathbb{M}^-)) \neq \varnothing$.

我们从对称差得到修订算子。

定义24。 在二元模型类$\mathcal{C}$上，朴素的关系修订算子是映射$\mathrm{rev}^{\oplus} : \wp_{\mathrm{f}}(\mathcal{L}) \times \mathcal{C} \to \wp_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$ 使得$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}^{\oplus}_{\mathrm{sel}}(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \in \min^{\leq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。

朴素算子会最小化基 B′ 的模型与所有满足 $\mathbb{M}^+$ 且被 $\mathbb{M}^-$中的所有模型违反的基之间的距离。事实上，朴素修订算子与**审慎性**密切相关。

定理 11。 修订算子满足审慎性 当且仅当它是一个朴素的关系修订算子。

尽管朴素修订算子刻画了**审慎性**，但它们过于弱，无法满足空删除 和空扩展，如定理26所示。

例26。 设$\mathcal{B} = (B \sqcap C)$ 是一个$\mathcal{EL}$ 概念，并考虑解释$\mathcal{I}_i = (\Delta^{\mathcal{I}_i}, \cdot^{\mathcal{I}_i})$，其中 $i \in \{1,2,3,4\}$，其中 $\Delta^{\mathcal{I}_i} = \{d\}$，且每个 $\cdot^{\mathcal{I}_i}$ 如下所示。

$A^{\mathcal{I}_1} = \{d\}$	$A^{\mathcal{I}_2} = \varnothing$	$A^{\mathcal{I}_3} = \varnothing$	$A^{\mathcal{I}_4} = \varnothing$
$B^{\mathcal{I}_1} = \varnothing$	$B^{\mathcal{I}_2} = \varnothing$	$B^{\mathcal{I}_3} = \varnothing$	$B^{\mathcal{I}_4} = \{d\}$
$C^{\mathcal{I}_1} = \{d\}$	$C^{\mathcal{I}_2} = \varnothing$	$C^{\mathcal{I}_3} = \{d\}$	$C^{\mathcal{I}_4} = \{d\}$

根据定义，$(\mathcal{I}_4, d)$ 是$\mathcal{B} = (B \sqcap C)$的一个模型。假设我们要修订$\mathcal{B}$，修订内容为$(\{(\mathcal{I}_1, d)\}, \{(\mathcal{I}_2, d)\})$，也就是接纳$(\mathcal{I}_1, d)$，同时放弃$(\mathcal{I}_2, d)$。由于

$d \notin (B \sqcap C)^{\mathcal{I}_2}$，根据空删除，我们只应向$B$添加模型。仅添加$(I_1,d)$是不可能的，因为$(I_4,d)$是$B$的一个模型，并且同时被$(I_4,d)$和$(I_1,d)$满足的每一个$EL$概念也被$(I_3,d)$满足。因此，每一个满足空删除的修订都包含集合$\{(I_1,d),(I_3,d),(I_4,d)\}$。这对应于将$B = (B \sqcap C)$修订为$C$。如果我们想避免添加$(I_3,d)$，可以移除$(I_4,d)$，从而违反空删除，并只保留$(I_1,d)$。因此，一个朴素¨的修订算子可以将$(A \sqcap C)$作为修订$(B \sqcap C)$的一个解输出。

在定理 26 中，空删除 被违反了，因为当 $\mathbb{M}^-$ 不违反 B 时，该算子会从 B 中删除更多模型。此外，当 $\mathbb{M}^+$ 满足 B 时，朴素算子允许添加更多模型。我们对朴素算子加以强化。

定义 27。 我们将模型二元类$\mathcal{C}$上的对称差修订函数定义为函数 $\mathsf{rev} : \wp_{\mathrm{f}}(\mathcal{L}) \times \mathcal{C} \to \wp_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$，使得对于所有 $(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) \in \mathcal{C}$，$\mathsf{mod}(\mathsf{rev}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) = \mathbb{M}$ 其中，

(i) 若 $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B})$，则

$$\mathbb{M} \in \min_{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}))))$$

(ii) 若 $\mathbb{M}^+ \not\subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B})$，但 $\mathbb{M}^- \cap \mathsf{mod}(\mathcal{B}) = \varnothing$，则

$$\mathbb{M} \in \min_{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+ \cup \mathsf{mod}(\mathcal{B}), \mathbb{M}^-))$$

(iii) 否则，$\mathbb{M} \in \min^{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。

对于情形 (i)，当 $\mathbb{M}^+$ 满足基时，根据空扩展，不能纳入任何解释。这对应于要求将 B 的所有反模型与 $\mathbb{M}^-$ 一并删除。

对于情形 (ii)，与情形 (i) 类似，只要所有模型 $\mathbb{M}^-$ violate B，按照空删除，就不应删除 B 的任何模型。这相当于要求将 mod(B) 的所有模型与 $\mathbb{M}^+$一并纳入。至于情形 (iii)，情形 (i) 和 (ii) 已为空删除 和空扩展提供了充分保障。因此，在其他任何情形下，我们只需进行一次朴素修订。对称差修订算子由修订的理性公设刻画。

定理 11. 修订算子 rev 满足**成功性**、**空扩展**、**空删除** 和**审慎性**，当且仅当它是对称差修订算子。

修正相容性与接收相容性和驱逐兼容性都紧密相关。在 $\mathbb{M}^-$ 为空的情形下，用$(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$修订一个基，直观上对应于执行一次接收，因为**空删除** 会禁止删除解释。类似地，如果 $\mathbb{M}^+$ 为空，那么用$(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$进行修订（其中 $\mathbb{M}^-$非空）将对应于驱逐 $\mathbb{M}^-$，因为**空扩展**会禁止添加解释。从这个角度看，我们可以追溯修正相容性与驱逐兼容性以及接收相容性之间的重要联系。为了建立这一联系，底层模型类必须涵盖我们可以执行形如$(\mathbb{M}^+, \varnothing)$和$(\varnothing, \mathbb{M}^-)$的修订的情形，也就是涵盖仅添加或删除解释的可能性。我们将此类称为可分解的模型类。

定义 29. 二元模型类$\mathcal{C}$ 是可分解的，当且仅当对所有$(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)\in\mathcal{C}$，$(\mathbb{M}^+,\varnothing)\in\mathcal{C}$ 且$(\varnothing,\mathbb{M}^-)\in\mathcal{C}$。

给定一个二元模型类 C，令 $\mathsf{C}^+=\{\mathbb{M}^+\in\mathfrak{M}\mid(\mathbb{M}^+,\ \mathbb{M}^-)\in\mathsf{C}\}$，且，$\mathsf{C}^-=\{\mathbb{M}^-\in\mathfrak{M}\mid(\mathbb{M}^+,\ \mathbb{M}^-)\in\mathsf{C}\}$。集合 C^+ 是具有接收候选的 C 的最大子类，而 C^- 是具有驱逐候选的最大子类。每个理性修订算子都会诱导一个驱逐算子和一个接收算子。因此，修订相容性意味着同时与接收和驱逐相容。

定理 11。设$\mathcal{C}$ 是一个可分解的修正相容二元模型类。以下结论对$\mathcal{C}$成立。

1. $\mathcal{C}^+$ 接收兼容，且$\mathcal{C}^-$ 驱逐相容。*2.* 若evc 是$\mathcal{C}^-$上的一个驱逐算子，则存在一个$\mathcal{C}$上的修订算子rev，满足所有理性公设，且$\mathsf{evc}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^-)=\mathsf{rev}(\mathcal{B}\ \varnothing,\mathbb{M}^-)$。*3.* 若$\mathcal{C}^+$上的rcp 是一个接收算子，则存在一个$\mathcal{C}$上的修订算子rev，满足所有理性公设，且$\mathsf{rcp}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^+)=\mathsf{rev}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^+,\varnothing)$。

根据定理30，驱逐与接纳是修订的特例；而修订只能在同时与接纳和驱逐相容的模型类中进行。修订与驱逐、接纳之间的这种联系，使我们能够将驱逐和接纳的（不）相容性结果转化为修订的结果，正如我们在第 6 节中所见。

6 修订：描述逻辑概念

这里，我们简要考察描述逻辑概念的修订。由定理30和表 1 中的结果可知，一般而言，$\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot}\text{concepts})$ 和 $\Lambda(\mathrm{ALC}^{\text{concepts}})$ 均不具备修正相容性。我们证明，即使将范围限制为有限树形带点解释，这些满足系统也仍不具备修正相容性。

定理 11。 $\Lambda(\mathcal{EL}^{\bot concepts})$和 $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 在有限树形带点解释的二元类中不具备修正相容性。即使将范围限制为有限模型集，或限制为有限签名，这一结论仍然成立。

因此，我们进一步缩小所考虑的二元模型类。我们考虑由有限模型集的有限树形带点解释构成的二元类与其互模拟闭包的并集，并且这些解释基于有限签名。我们论证该类具有修正相容性。我们称两组带点解释互模拟不相交，当且仅当其中一组不存在任何带点解释与另一组中的某个带点解释双模拟等价。

定理 11。 $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 在以下带点解释集合的二元类中具有修正相容性：该类由基于（唯一）有限签名的有限树形带点解释的有限集合经互模拟闭包得到。

关于 $\mathrm{EL}^{\bot}$ 的情形，我们无法像在 ALC 中那样，利用相同的表达能力来限制一个概念所满足的模型。我们将其留作一个开放问题。根据表 1 中关于 $\mathrm{EL}^{\bot}$ 和 ALC 的某些模型类的驱逐与接纳的正向结果，我们得到了定理30中修订算子的存在性。

7 结论

我们研究了描述逻辑概念的驱逐与接纳，并在考虑不同模型类的基础上建立了多项结果。我们发现，对于某些模型类，ALC 和 EL⊥ 概念都具有驱逐与接纳兼容性。事实证明，对于 ALC 获得正向结果的模型类，远比对于 EL⊥ 获得正向结果的模型类受到更多限制。我们还引入了模型修订的概念，并将各种公设与修订操作联系起来。修订不能被视为驱逐与接纳的简单组合，描述逻辑概念的负向结果证明了这一点。未来，可以在更实际的环境中研究描述逻辑概念的模型驱逐、接纳与修订，并将我们的工作扩展到表达能力更强的描述逻辑。

致谢

Ozaki 获挪威研究理事会项目（316022、322480）资助。本研究还获得了挪威研究理事会的资助，项目为 Integreat——挪威知识驱动机器学习中心（332645）。

参考文献

Agi, K., Wolter, F., Zakharyaschev, M., and Gabbay, D. (2003). 多维模态逻辑：理论与应用. Elsevier North Holland, Amsterdam Boston.

Aiguier, M.、Atif, J.、Bloch, I. 和 Hudelot, C.（2018）。信念修订、最小改变与松弛：一种基于满足系统的通用框架及其在描述逻辑中的应用。《人工智能》，256：160–180。Alchourr´on, C. E.、G¨ardenfors, P. 和 Makinson, D.（1985）。理论变更逻辑：部分交集收缩与修订函数。《符号逻辑杂志》，50(2)：510–530。Baader, F.、Horrocks, I.、Lutz, C. 和 Sattler, U.（2017）。《描述逻辑导论》。剑桥大学出版社。Baader, F.、K¨usters, R. 和 Molitor, R.（1999）。计算带有存在限制的描述逻辑中的最小公共包含概念。载于 Dean, T. 编，*IJCAI*，第 96–103 页。Morgan Kaufmann。Baader, F.、Sertkaya, B. 和 Turhan, A.（2007）。关于背景术语计算最小公共包含概念。*J. Appl. Log.*，5(3)：392–420。¨Baltag, A.、Gierasimczuk, N.、Ozg¨un, A.、Sandoval, A. L. V. 和 Smets, S.（2019a）。一种用于学习理论的动态逻辑。*J. Log.AlgebraicMethods Program.*，109。Baltag, A.、Gierasimczuk, N. 和 Smets, S.（2019b）。通过信念修订进行真值追踪。*StudLogica*，107(5)：917–947。

Blackburn, P.、de Rijke, M. 和 Venema, Y.（2001）。模态逻辑，《剑桥理论计算机科学专著丛书》第 53 卷。剑桥大学出版社。Blackburn, P.、van Benthem, J. F. A. K. 和 Wolter, F. 编（2007）。模态逻辑手册，《逻辑与实践推理研究》第 3 卷。北荷兰出版社。Bolander, T. 和 Burigana, A.（2024）。更优的有界双模拟收缩。载于 Ciabattoni, A.、Gabelaia, D. 和 Sedl´ar, I. 编，模态逻辑进展，*AiML*，第 249–268 页。College Publications。De Raedt, L.（1997）。概念学习的逻辑设置。《人工智能》，95(1)：187–201。Delgrande, J. P.、Peppas, P. 和 Woltran, S.（2018）。一般信念修订。《*ACM* 学报》，65(5)：29:1–29:34。Dummett, M. A. E. 和 Lemmon, E. J.（1959）。介于 S4 和 S5 之间的模态逻辑。《数学逻辑季刊》，5(14-24)：250–264。Fanizzi, N.、d'Amato, C. 和 Esposito, F.（2008）。描述逻辑中的 DL-FOIL 概念学习。载于 Zelezn´y, F. 和 Lavrac, N. 编，*ILP*，《计算机科学讲义》第 5194 卷，第 107–121 页。施普林格。Flouris, G.（2006）。关于本体演化中的信念变化。《人工智能通信》，19(4)：395–397。Funk, M.、Jung, J. C. 和 Lutz, C.（2021）。在 ELR 本体下主动学习概念和合取查询。载于 Zhou, Z. 编，*IJCAI*，第 1887–1893 页。ijcai.org。Funk, M.、Jung, J. C.、Lutz, C.、Pulcini, H. 和 Wolter, F.（2019）。学习描述逻辑概念：正例和反例何时能够分离？载于 Kraus, S. 编，*IJCAI*，第 1682–1688 页。ijcai.org。G¨ardenfors, P.（1988）。《变化中的知识：认知状态动态性的建模》。麻省理工学院出版社。Goranko, V. 和 Otto, M.（2007）。模态逻辑的模型论。载于 Blackburn, P.、van Benthem, J. F. A. K. 和 Wolter, F. 编，模态逻辑手册，《逻辑与实践推理研究》第 3 卷，第 249–329 页。北荷兰出版社。Guimar˜aes, R.、Ozaki, A. 和 Ribeiro, J. S.（2023a）。描述逻辑本体的驱逐与接纳（初步结果）。载于 Sauerwald, K. 和 Thimm, M. 编，*NMR*，《*CEUR* 研讨会论文集》第 3464 卷，第 43–51 页。CEUR-WS.org。Guimar˜aes, R.、Ozaki, A. 和 Ribeiro, J. S.（2023b）。通过模型实现有限基收缩与扩张。载于 *AAAI*，第 6389–6397 页。Hansson, S. O.（1999）。《信念动态学教程：理论变化与数据库更新》。应用逻辑丛书。克卢维尔学术出版社。

Iannone, L., Palmisano, I., and Fanizzi, N.（2007）。一种基于反事实的语义网概念学习算法。*Appl. Intell.*，26(2):139–159。Klarman, S. and Britz, K.（2015）。在轻量级描述逻辑中从解释中学习本体。载于 Inoue, K., Ohwada, H., and Yamamoto, A. 编，*ILP*，第 9575 卷《计算机科学讲义》，第 76–90 页。施普林格。Konev, B., Lutz, C., Wolter, F., and Zakharyaschev, M.（2016）。描述逻辑 TBox 的保守可重写性。载于 Kambhampati, S. 编，*IJCAI*，第 1153–1159 页。IJCAI Press。Lehmann, J.（2009）。Dl-learner：描述逻辑中的概念学习。*J. Mach. Learn.Res.*，10:2639–2642。Lehmann, J. and Haase, C.（2009）。*EL* 描述逻辑中的理想向下细化。载于 Raedt, L. D. 编，*ILP*，第 5989 卷《计算机科学讲义》，第 73–87 页。施普林格。Lehmann, J. and Hitzler, P.（2010）。使用细化算子在描述逻辑中进行概念学习。*Mach. Learn.*，78(1-2):203–250。Ozaki, A. and Troquard, N.（2019）。运用认知推理学习本体：*E\!L* 情形。载于 Calimeri, F., Leone, N., and Manna, M. 编，*JELIA*，第 11468 卷《计算机科学讲义》，第 418–433 页。施普林格。Ribeiro, J. S., Nayak, A., and Wassermann, R.（2018）。迈向无紧致性的信念收缩。载于 *KR 2018*，第 287–296 页。AAAI Press。Schwind, N., Inoue, K., Konieczny, S., and Marquis, P.（2025）。迭代信念变化即学习。载于 *IJCAI*，第 4669–4677 页。ijcai.org。ten Cate, B., Koudijs, R., and Ozaki, A.（2024）。描述逻辑概念示例的能力与局限。载于 *IJCAI*，第 3567–3575 页。ijcai.org。

A 第2节的补充材料

这里我们介绍有关描述逻辑的语法与语义的其他概念、基本理论工具，以及后续各节证明所需的结果。

书写 ALC 概念时，我们不失一般性地可以使用析取（$C \sqcup D \equiv \neg(\neg C \sqcap \neg D)$）和全称量化（$\forall r.C \equiv \neg(\exists r.\neg C)$）作为 ALC 语法的一部分。若不会造成混淆，可以省略括号。概念C是概念D的子概念，当且仅当它出现在D中（因此，每个概念都是自身的子概念）。我们归纳地定义概念的（角色）深度 。不包含任何角色的概念深度为 0。形如（$\exists r.C$）或（$\forall r.C$）的概念，其深度是C的深度加 1。（$C \sqcap D$）或（$C \sqcup D$）的深度是C,D的深度中的最大值。

若解释 J 满足 $\Delta^{\mathcal{J}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$，则称其为 I 的子解释，当且仅当对所有$A \in \mathsf{N_C}$，都有$A^{\mathcal{J}} = A^{\mathcal{I}} \cap \Delta^{\mathcal{J}}$，且对所有$r \in \mathsf{N_R}$，都有$r^{\mathcal{J}} = r^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{J}} \times \Delta^{\mathcal{J}})$。给定解释 I 和角色名称$r \in \mathsf{N_R}$，若$e \in \Delta^{\mathcal{I}}$在 I 中是$d \in \Delta^{\mathcal{I}}$的一个$r$-后继，则$d,e \in r^{\mathcal{I}}$。

典范模型 给定一个可满足的 $\mathcal{EL}^{\bot}$ 概念 D，我们归纳定义树形带点解释 $(\mathsf{I}_D,\mathsf{d}_D)$，称为 D的典范模型，其根记为 d_D，定义如下。当 D 为 $\top$ 时，我们将 $(\mathsf{I}_\top,\mathsf{d}_\top)$ 定义为带点解释，其中 $\Delta^{\mathcal{I}_\top} := \{\mathsf{d}_\top\}$，且所有概念名与角色名称均解释为空集。对于概念名称 $\mathsf{A} \in \mathsf{N_C}$ 所构成的概念 D，我们将 $(\mathsf{I}_A,\mathsf{d}_A)$ 定义为带点解释，其中 $\Delta^{\mathcal{I}_A} := \{\mathsf{d}_A\}$，$\mathsf{A}^{\mathcal{I}_A} := \{\mathsf{d}_A\}$，且所有其他概念名与角色名称均解释为空集。对于 $\mathsf{D} = \exists \mathsf{r}.\mathsf{C}$，我们将 $(\mathsf{I}_D,\mathsf{d}_D)$ 定义为带点解释，其中 $\Delta^{\mathcal{I}_D} := \{\mathsf{d}_D\} \cup \Delta^{\mathcal{I}_C}$。所有概念名与角色名称的解释均与 $(\mathsf{I}_C, \mathsf{d}_C)$ 中的相同，并将 $(\mathsf{d}_D,\mathsf{d}_C)$ 加入 $\mathsf{r}^{\mathcal{I}_D}$，且假设 d_D 是新鲜的（即不属于 $\Delta^{\mathcal{I}_C}$）。最后，对于 $\mathsf{D} = \mathsf{D}_1 \sqcap \mathsf{D}_2$，我们定义 $\Delta^{\mathcal{I}_D} := \Delta^{\mathcal{I}_{D_1}} \cup (\Delta^{\mathcal{I}_{D_2}} \setminus \{\mathsf{d}_{D_2}\})$，并假设 $\Delta^{\mathcal{I}_{D_1}}$ 与 $\Delta^{\mathcal{I}_{D_2}}$ 不相交；所有概念名与角色名称的解释均与 $(\mathsf{I}_{D_1},\mathsf{d}_{D_1})$ 和 $(\mathsf{I}_{D_2},\mathsf{d}_{D_2})$ 中的相同，唯一区别是，我们将 d_{D_1} 与 $\Delta^{\mathcal{I}_{D_2}}$ 中的元素按照 d_{D_2} 在 $(\mathsf{I}_{D_2},\mathsf{d}_{D_2})$ 中与这些元素相连的方式连接起来。换句话说，我们在 $\Delta^{\mathcal{I}_{D_2}}$中将 d_{D_1} 与 d_{D_2} 视为同一个元素。

同态与同构 设 $(\mathsf{I},\mathsf{d}_0)$ 和 $(\mathsf{J},\mathsf{e}_0)$ 是两个带指定点的解释。从 $(\mathsf{I},\mathsf{d}_0)$ 到 $(\mathsf{J},\mathsf{e}_0)$ 的同态是满足以下条件的函数 $\mathsf{h} : \Delta^{\mathcal{I}} \to \Delta^{\mathcal{J}}$：（i）$\mathsf{h}(\mathsf{d}_0) = \mathsf{e}_0$；（ii）对于所有 $\mathsf{A} \in \mathsf{N_C}$，若 $\mathsf{d} \in \mathsf{A}^{\mathcal{I}}$，则 $\mathsf{h}(\mathsf{d}) \in \mathsf{A}^{\mathcal{J}}$；（iii）对于所有 $\mathsf{r} \in \mathsf{N_R}$，若 $(\mathsf{d},\mathsf{d}') \in \mathsf{r}^{\mathcal{I}}$，则 $(\mathsf{h}(\mathsf{d}),\mathsf{h}(\mathsf{d}')) \in \mathsf{r}^{\mathcal{J}}$。$(\mathsf{I},\mathsf{d}_0)$ 与 $(\mathsf{J},\mathsf{e}_0)$ 之间的同构是满足以下条件的双射函数 $\mathsf{h} : \Delta^{\mathcal{I}} \to \Delta^{\mathcal{J}}$：（i）$\mathsf{h}(\mathsf{d}_0) = \mathsf{e}_0$；（ii）对于所有 $\mathsf{A} \in \mathsf{N_C}$，$\mathsf{d} \in \mathsf{A}^{\mathcal{I}}$ 当且仅当 $\mathsf{h}(\mathsf{d}) \in \mathsf{A}^{\mathcal{J}}$；（iii）对于所有 $\mathsf{r} \in \mathsf{N_R}$，$(\mathsf{d},\mathsf{d}') \in \mathsf{r}^{\mathcal{I}}$ 当且仅当 $(\mathsf{h}(\mathsf{d}),\mathsf{h}(\mathsf{d}')) \in \mathsf{r}^{\mathcal{J}}$。

展开与双模拟 我们在若干技术引理中使用 Dummett 和 Lemmon (1959) 的经典展开概念（例如，参见 Konev 等人 (2016) 在描述逻辑语境中的定义）。解释 I 中的路径 p 是序列 $\mathsf{d}_0 \cdot \mathsf{r}_0 \ldots \mathsf{r}_{n-1} \cdot \mathsf{d}_n$，使得 $\mathsf{d}_i \in \Delta^{\mathcal{I}}$、$\mathsf{r}_i \in \mathsf{N_R}$，并且对所有 $0 \leq \mathsf{i} < \mathsf{n}$，有 $(\mathsf{d}_i,\mathsf{d}_{i+1}) \in \mathsf{r}_i^{\mathcal{I}}$。路径 $\mathsf{d}_0 \cdot \mathsf{r}_0 \ldots \mathsf{r}_{n-1} \cdot \mathsf{d}_n$ 的路径长度为 n（重复计入）。我们用 tail(p) 表示 p 的末元素。给定带点解释 (I,d)，(I,d) 的展开记为 $(\mathsf{I}^u,\mathsf{d})$，是如下定义的带点解释：

- $\Delta^{\mathcal{I}_u}$ 是从d出发的所有路径的集合；

- $p \in A^{\mathcal{I}^u}$ if $\mathsf{tail}(p) \in A^{\mathcal{I}}$;
- $r^{\mathcal{I}^u} := \{(p, p \cdot r \cdot f) \mid p, p \cdot r \cdot f \in \Delta^{\mathcal{I}^u}(\mathsf{tail}(p), f) \in r^{\mathcal{I}}\}$.

若(I,d)与(I^u,d)同构，则带点解释(I,d)是树形的。每个有限的树形带点解释(I,d)都同构于一个EL概念C的典范模型。(I,d)的深度即C的深度。

定义 A.1（互模拟）。 设$\mathcal{I}$和$\mathcal{J}$是签名 Σ上的解释。I与J之间的互模拟 是一个非空关系 $Z \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{J}}$，满足：对于所有满足（$d$,$e$） $\in Z$ 的 $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$和 $e \in \Delta^{\mathcal{J}}$、Σ中的每个概念名称 A，以及Σ中的每个角色名称 r：

- （原子）$d \in A_{\mathcal{I}}$ 当且仅当 $e \in A_{\mathcal{J}}$;
- （向前条件）若（d,d'） $\in r_{\mathcal{I}}$，则存在 e' $\in \Delta_{\mathcal{J}}$，使得（e,e'） $\in r_{\mathcal{J}}$且（d',e'） $\in Z$;
- （反向条件）若（e,e'） $\in r_{\mathcal{J}}$，则存在 d' $\in \Delta_{\mathcal{I}}$，使得（d,d'） $\in r_{\mathcal{I}}$且（d',e'） $\in Z$。

如果带点解释 (I，d) 和 (J，e) 之间存在一个包含 (d，e) 的I与J之间的互模拟，我们就称这两个带点解释双模拟等价 。根据定义，I与I之间存在一个包含 (d，d) 的互模拟 ^{u}（例如参见 Blackburn等（2007）第15页）。

为证明定理B.14，我们使用以下技术结果。

引理A.2（Blackburn等（2007）第3章引理9）。 给定一个带点解释 （$\mathcal{I}$,d），展开 （$\mathcal{I}^u$,d）是一个树形指向解释，并且满足：

- （$\mathcal{I}$,d）与（$\mathcal{I}u$,d）双模拟等价;
- 对于所有$\mathcal{ALC}$概念C，均有 $d \in C_{\mathcal{I}}$ 当且仅当 $d \in C_{\mathcal{I}^u}$。

定义A.3（k-互模拟）。 设$\mathcal{I}$、$\mathcal{J}$是两个解释（基于同一签名）。设$Z_0 \subseteq \ldots \subseteq Z_k \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{J}}$是$\mathcal{I}$和$\mathcal{J}$的论域上的二元关系。若非空二元关系组（$Z_0$,...,$Z_k$）是$\mathcal{I}$与$\mathcal{J}$之间的$k$-互模拟，则对于每个 $0 \leq i \leq k$以及（d,e） $\in Z_i$，以下条件均成立：

- $d \in A_{\mathcal{I}}$ 当且仅当 $e \in A_{\mathcal{J}}$对所有 $A \in \mathsf{N_C}$;
- 若 $i < k$，则对于所有 $r \in \mathsf{N_R}$ 以及 (d,d') $\in r_{\mathcal{I}}$，都存在 (e,e') $\in r_{\mathcal{J}}$，使得 (d',e') $\in Z_{i+1}$;

与（向前条件）对称。

我们将 $\mathrm{I}^u_{\restriction k}$ 记为从 $\Delta^{\mathcal{I}^u}$ 中移除长度大于k 的所有路径后，由 I^u 诱导出的子解释。根据定义，$\mathrm{I}^u_{\restriction k}$ 与 I^{u}之间存在一个k-互模拟，其中包含有序对 (d,d)；此外，根据定理A.2，I 与 I^{u}之间存在一个模拟。因此，以下引理成立。

引理A.4（Blackburn 等人（2001）；Goranko 和 Otto（2007）（另见 Bolander和Burigana（2024）中的命题2.6））。 对于所有深度为 k 的$\mathcal{ALC}$ 概念 C，以及所有带点解释（$\mathcal{I}$,d），都有 $d \in C^{\mathcal{I}}$ 当且仅当 $d \in C^{\mathcal{I}^u_{\restriction k}}$。

引理 A.5。 *[Blackburn* 等人（*2001*）；*Goranko* 和 *Otto*（*2007*）*]*若（$Z_0,...,Z_k$） 是两个解释$\mathcal{I}$和$\mathcal{I}'$之间的 k-互模拟，则对于所有 $0 \leq k' \leq k$，（$Z_0,...,Z_{k'}$）是$\mathcal{I}$ 和$\mathcal{I}'$之间的 k'-互模拟。

引理 A.6（Blackburn 等人（2001）；Goranko 和 Otto（2007））。 对于所有带指定点的解释 （$\mathcal{I},d$）和（$\mathcal{J},d'$），以下两者等价：*(1)* $\mathcal{I}$ 和$\mathcal{J}$ 之间存在一个 k-互模拟，其中包含（d,d'）；*(2)* 对于深度至多为 k 的所有 $\mathcal{ALC}$ 概念 C，$d \in C^{\mathcal{I}}$ 当且仅当 $d' \in C^{\mathcal{J}}$。

B 第 4 节的补充材料

定理 B.7（Guimar˜aes 等人（2023b）定理 16）。 一个满足系统 Λ 是驱逐相容的，当且仅当对于每个 $\mathbb{M} \subseteq \mathfrak{M}$，以下条件之一成立：*(i)* $\mathbb{M} \in$有限可表示（Λ）；*(ii)* $\mathbb{M}$ 在（有限可表示（Λ）$\cup\{\mathbb{M}\}$ $\subset$）中有一个直接前驱；或 *(iii)* 不存在满足 $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{M}'$ 的 $\mathbb{M}' \in$有限可表示（Λ）。

我们还使用以下两个技术引理。

引理 B.8（改编自 Baader 等人（1999））。 对于所有可满足的$\mathcal{EL}_\bot$ 概念 C 和 D，$\models C \sqsubseteq D$ 当且仅当存在一个从（$\mathcal{I}_D,d_D$）到（$\mathcal{I}_C,d_C$）的同态。

引理 11。 对于所有可满足的$\mathcal{EL}_\bot$ 概念 C，若 C 可满足，则存在一个$\mathcal{EL}_\bot$概念 C'，使得 $\models \bot \sqsubset C' \sqsubset C$。

证明。 设n 为表示C的树形标记结构的深度。若取C' 作为概念$C \sqcap \exists r^{n+1}.\top$，则 $\models \bot \sqsubset C' \sqsubset C$。注意，若$C$ 可满足，则$C \sqcap \exists r^{n+1}.\top$ 也可满足（由典范模型的归纳构造可知）。 □

定理 11. $\Lambda(\mathcal{EL}^{\bot concepts})$具有驱逐相容性。

证明。 我们证明，每个非空 $\mathbb{M} \subseteq \mathfrak{M}$ 在

$$(\mathrm{FR}(\Lambda(\mathcal{EL}_{\bot\mathrm{concepts}})) \cup \{\mathbb{M}\}, \subset)$$

（ $\mathbb{M}$ 为空的情形很简单，因为 $\mathrm{EL}_\bot$ 有概念 $\bot$）。回顾一下，在此情形中， $\mathbb{M}$ 的直接前驱是一个模型集 $\mathbb{M}' \in \mathrm{FR}(\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot\mathrm{concepts}}))$，满足$\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$，并且不存在满足 $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}'' \subset \mathbb{M}$ 的 $\mathbb{M}''$。为此，我们证明，给定一个有限可表示的模型集 $\mathbb{M}$，不存在无限链

$$\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2 \subset \dots$$

在 $(\mathrm{FR}(\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot\mathrm{concepts}}))$ 中的模型集，使得 $\mathbb{M}_i \subset \mathbb{M}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都成立。事实上，给定 $\mathbb{M},\mathbb{M}' \in (\mathrm{FR}(\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot\mathrm{concepts}}))$，其中 $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$，令 C,D 为满足 $\mathrm{mod}(C) = \mathbb{M}$ 且 $\mathrm{mod}(D) = \mathbb{M}'$ 的 $\mathrm{EL}_\bot$ 概念。根据 $\mathrm{EL}_\bot$ 的语义，我们有 $\models D \sqsubset C$。我们要证明，满足以下条件的 $\mathrm{EL}_\bot$ 概念 E 有限多个：

$$\models D \sqsubset E \sqsubset C.$$

假设不存在满足 $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$ 且 $\mathbb{M}' \neq \varnothing$ 的 $\mathbb{M}' \in \mathrm{MaxFRSubs}(\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot}\mathrm{concepts}))$。也就是说，$\bot$ 是唯一满足 $\models \bot \sqsubseteq C$ 的 $\mathrm{EL}_{\bot}$ 概念；换言之，不存在满足以下条件的（可满足的）$\mathrm{EL}_{\bot}$ 概念C'：

$$\models \bot \sqsubset C' \sqsubset C.$$

然而，由于 $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$，我们有 $\mathbb{M} \neq \varnothing$，因此$C$ 是可满足的。根据定理B.9，这对于 $\mathrm{EL}_{\bot}$ 概念是不可能的。根据定理B.9，如果C 是可满足的，那么存在C'，使得

$$\models \bot \sqsubset C' \sqsubset C.$$

于是，存在 $\mathbb{M}' \in (\mathrm{FR}(\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot}\mathrm{concepts}))$，使得 $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$ 且 $\mathbb{M}' \neq \varnothing$，因此$D$ 是可满足的。设E 是一个 $\mathrm{EL}_{\bot}$ 概念，使得

$$\models D \sqsubset E \sqsubset C$$

（如果不存在这样的概念，那么我们就完成了）。由于 $\models \mathrm{D} \sqsubset \mathrm{E}$，我们知道 E 是可满足的。于是，根据引理 B.8，存在从 $(\mathrm{I}_E,\mathrm{d}_E)$ 到 $(\mathrm{I}_D,\mathrm{d}_D)$ 的同态。由于 D 是有限的，D 中出现的概念名与角色名的数量有限。记 sig(D) 为 D 中出现的概念名与角色名的集合。此外，从 $(\mathrm{I}_E,\mathrm{d}_E)$ 到 $(\mathrm{I}_D,\mathrm{d}_D)$ 的同态的存在，以及 I_E 和 I_D 的定义，意味着 E 中出现的概念名与角色名集合是 sig(D) 的子集。也就是说，E 中出现的概念名与角色名有限，且它们是 sig(D) 的子集。此外，根据 $(\mathrm{I}_E,\mathrm{d}_E)$ 和 $(\mathrm{I}_D,\mathrm{d}_D)$ 的定义，这些解释对应于树形标记结构（以根为指向点），其中 I_E（所对应的树）的深度小于或等于 I_D 的深度 n。由于 E 是任意一个满足 $\models \mathrm{D} \sqsubset \mathrm{E}$ 的 $\mathrm{EL}_{\bot}$ 概念，这对所有这样的概念都成立。由于在 sig(D) 中取符号且深度不超过 n 的树形标记结构只有有限多个，因此满足 $\models \mathrm{D} \sqsubset \mathrm{E}$ 的 $\mathrm{EL}_{\bot}$ 概念 E（在逻辑等价意义下）只有有限多个。于是，满足

$$\models D \sqsubset E \sqsubseteq C.$$

这意味着，根据定理 B.7，$\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot}\mathrm{concepts})$ 是驱逐相容的。 □

定理 11. $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$不具备驱逐相容性。

证明。 定理 12 的证明基于 Guimar˜aes 等人（2023b）。我们证明$\Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}})$ 不具备驱逐相容性（当签名有限或无限时，该证明均成立）。设 $C_{\top} := \top$，即 $\mathsf{mod}(C_{\top}) = \mathfrak{M}_{\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}}}$。令 $\mathbb{M}$ 为所有模型 $(M,0)$ 的集合，其中存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $0 \in (\forall r^n.\bot)^M$。也就是说，从 0 出发，没有通过角色 r 连接的元素所构成的环或无限链。根据 $\mathbb{M}$的定义，$(M^{\infty},0) \notin \mathbb{M}$，因为该模型中存在一条从 0 出发、由角色 r 连接的元素构成的无限链；而对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$(M^n,0) \in \mathbb{M}$。

为了证明 $\Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}})$ 不具有驱逐相容性，我们需要证明不存在这样的 ALC 概念 C：

$$\mathsf{mod}(C) \in \mathrm{MaxFRSubs}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}})),$$

也就是说，

$$\mathrm{MaxFRSubs}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}})) = \varnothing.$$

直观而言，我们想要证明，不存在一个极大 ALC 概念，能够有限表示从$C_\top$中移除模型 $\mathfrak{M}_{\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}}} \setminus \mathbb{M}$ 后的结果。首先，我们回顾以下断言。接下来的结果出自（Guimar˜aes 等，2023a）。

断言 B.10. 对于每个$\mathcal{ALC}$概念 C，若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得对所有 $m \geq n$（其中 $m \in \mathbb{N}$），都有 $0 \in C^{M^m}$，则 $0 \in C^{M^\infty}$。

现在我们准备好证明 $\Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}})$ 不具备驱逐相容性。反设存在一个 ALC 概念C，使得

$$\mathsf{mod}(C) \in \mathrm{MaxFRSubs}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}})).$$

若存在$n \in \mathbb{N}$使得 $0 \notin C^{M^n}$，则[1]

$$C' := C \sqcup (\exists r^{n+1}.\top \sqcap \neg \exists r^{n+2}.\top),$$

满足 $0 \in C'^{M^n}$。此外，$\mathsf{mod}(C) \subset \mathsf{mod}(C')$。根据$C'$和 $\mathbb{M}$的定义，我们还有 $\mathsf{mod}(C') \subseteq \mathbb{M}$。这与以下假设矛盾：

$$\mathsf{mod}(C) \in \mathrm{MaxFRSubs}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}})).$$

因此，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $0 \in C^{M^n}$。然后，根据断言 B.10，可得 $0 \in C^{M^\infty}$。由于如前所述，$M^\infty \notin \mathbb{M}$，这与以下假设矛盾

$$\mathsf{mod}(C) \in \mathrm{MaxFRSubs}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}})).$$

因此，

$$\mathrm{MaxFRSubs}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}})) = \varnothing.$$

□

定理 11. $\Lambda(\mathcal{EL}^{\bot concepts})$ 和 $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 不接收兼容。即使将范围限制为（可能是无限的）树形带指定点的解释集合，或者限制为基于唯一有限签名的带点解释集合，这一结论仍然成立。

证明。 我们针对 $\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot\mathrm{concepts}})$ 证明此定理；同样的论证也适用于$\Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}})$。设 $C_\bot := \bot$，即 $\mathsf{mod}(C_\bot) = \varnothing$。令 $\mathbb{M}$ be $\{(M^\infty, 0)\}$。为了证明 $\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot\mathrm{concepts}})$ 不接收兼容，我们需要证明不存在$C \in \wp_{\mathrm{f}}(\mathrm{L}^{\mathcal{EL}_{\bot\mathrm{concepts}}})$ 使得

$$\mathsf{mod}(C) \in \mathrm{MinFRSups}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{EL}_{\bot\mathrm{concepts}})).$$

换句话说，

$$\mathrm{MinFRSups}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{EL}_{\bot\mathrm{concepts}})) = \varnothing.$$

[1]回想一下，M^n 包含一条由r这一角色连接的$n+1$ 个元素组成的链。

命题 B.11. 对于所有可满足的 $\mathcal{EL}_{\bot}$ 概念 C，都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\not\models C \sqsubseteq \exists r^{n}.\top$。

这是由 EL 的语法和语义推得的：EL 只允许有限的概念，且存在量词的嵌套层数有限。

反设存在一个（可满足的）$C \in \wp_{f}(\mathrm{L}^{\mathcal{EL}_{\bot\text{concepts}}})$，使得

$$\mathrm{mod}(C) \in \mathrm{MinFRSups}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{EL}_{\bot\text{concepts}})).$$

由命题 B.11，存在 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ 使得 $\not\models \mathrm{C} \sqsubseteq \exists \mathrm{r}^{n}.\top$。于是 $\mathrm{C}' := \mathrm{C} \sqcap \exists \mathrm{r}^{n}.\top$ 满足 $\mathrm{mod}\,(\mathrm{C}') \subset \mathrm{mod}\,(\mathrm{C})$。注意，根据假设，$(\mathrm{M}^{\infty},0) \in \mathrm{mod}\,(\mathrm{C})$，且根据 C' 的定义，不会移除 $(\mathrm{M}^{\infty},0)$，因此 $(\mathrm{M}^{\infty},0) \in \mathrm{mod}\,(\mathrm{C}')$。这与 $\mathrm{mod}(\mathrm{C}) \in \mathrm{MinFRSups}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathrm{EL}^{\bot\text{concepts}}))$ 的假设矛盾。因此，$\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot\text{concepts}})$ 不接收兼容。 □

定理 B.12（定理 16 Guimar˜aes 等（2023b））。满足系统 Λ 是接收兼容的，当且仅当对于每个 $\mathbb{M} \subseteq \mathfrak{M}$，以下条件之一成立：*(i)* $\mathbb{M} \in$有限可表示(Λ)；*(ii)* $\mathbb{M}$ 在(有限可表示$(\Lambda) \cup \{\mathbb{M}\}$ $\subset$)中有一个直接后继；或者 *(iii)* 不存在满足 $\mathbb{M}' \subseteq \mathbb{M}$ 的 $\mathbb{M}' \in$有限可表示(Λ)。

定理 11。 $\Lambda(\mathcal{EL}^{\bot concepts})$ 在（可能无限的）有限树形带点解释集合类（基于可能无限的签名）中是接收兼容的。

证明。 定理 B.12 的条件 (iii) 永不成立，因为我们可以使用 $\bot$ 在 $\mathrm{EL}_{\bot}$ 中表达不可满足概念。我们论证，对于这个模型类，(i) 或 (ii) 总是成立。我们首先考虑 $\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot\text{concepts}})$。令 $\mathfrak{M}$ 为所有有限树形带点解释构成的类。给定 $\mathbb{M} \subseteq \mathfrak{M}$，如果 $\mathbb{M} \in \mathrm{FR}(\Lambda)$，那么问题就解决了。假设情况并非如此。接下来需要证明，$\mathbb{M}$ 在 $(\mathrm{FR}(\Lambda) \cup \{\mathbb{M}\}\ \subset)$ 中有一个直接后继。

令 (I, d) 为 $\mathbb{M}$ 中深度最小为 k 的树形指向解释。这样的 (I, d) 和 k 存在，因为 $\mathbb{M}$ 中的带点解释都是有限且树形的（我们知道 $\mathbb{M} \neq \varnothing$，因为我们假设情形 (i) 不成立，且 $\varnothing \in (\mathrm{FR}(\Lambda))$。对于任意 $\mathrm{EL}_{\bot}$ 概念C，如果 $(\mathrm{I}, d) \in \mathrm{mod}(C)$，则 C 的深度至多为 k。此外，如果 $\mathbb{M} \subseteq \mathrm{mod}(C)$，则$C$ 中出现的符号（即概念名与角色名）是 $\mathbb{M}$ 中各元素所出现符号交集的子集。由于 $\mathbb{M}$ 中的每个元素都是有限的，这样的交集也必然有限。因此，至多相差逻辑等价，满足 $\mathbb{M} \subseteq \mathrm{mod}(C)$ 的 $\mathrm{EL}_{\bot}$ 概念C 只有有限多个。这意味着 $\mathbb{M}$ 在 $(\mathrm{FR}(\Lambda) \cup \{\mathbb{M}\}\ \subset)$ 中有一个直接后继。 □

定理 15 可由定理 B.13 和定理 B.14 推出。

定理 B.13。 $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 在签名（可能是无限的）上的有限树形带点解释的有限集合类中并非接收兼容。

证明。 假设签名 Σ 包含形如 A_i 的符号，其中对所有 $i \in \mathbb{N}$均成立。假设基概念为 $\bot$，并且我们想要添加一个模型 (I,d)，其中有一个论域元素 d 属于 A_0 的外延，但不属于任何其他 A_i的外延。令 $\mathbb{M}$ 为包含此类模型的单元素集。定理 B.12 的条件 (i) 和 (iii) 对 $\mathbb{M}$不成立。事实上，条件 (i) 不成立，因为对于任何满足 (I,d) 的概念C，总存在一个A_i 未在其中出现（因为C 是有限的，而 Σ 不是）；并且若将 d 加入A_i 的外延，则所得带点解释 (I',d) 仍满足C。条件 (iii) 不成立，因为

我们可以取 $\mathbb{M}'$ 为 empty set，它属于 FR(Λ(ALC$^{\text{concepts}}$))，因为 $\bot$ 是一个 ALC 概念。从条件 (i) 的论证中，我们已经可以看出条件 (ii) 也不成立。也就是说，$\mathbb{M}$ 没有直接后继，因为对于满足 $\mathbb{M} \subseteq \text{mod}(C)$ 的C，总存在一个A_i未在C中出现，而$C' := C \sqcap \neg A_i$将满足 $\mathbb{M} \subseteq \text{mod}(C')$ 且 $\text{mod}(C') \subset \text{mod}(C)$。 □

定理 B.14. $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 在（可能无限的）有限树形带点解释集合类上并非接收兼容的，其定义在一个（唯一的）有限签名上。

证明。 考虑一个包含两个符号的签名：一个角色名称 r 和一个概念名称A。假设 $\mathbb{M}$ 是所有形如 $(M^n,0)$ 且 $n \in \mathbb{N}$ 的带点解释的集合。反设 Λ(ALC$^{\text{concepts}}$) 在有限树形带点解释类上是接收兼容的。也就是说，假设存在一个 ALC 概念C，使得

$$\text{mod}(C) \in \text{MinFRSups}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{ALC}_{\text{concepts}})).$$

假设m是C的深度。取$k = m+1$，并令C_k如下

$$\bigsqcup_{i=1}^{k}(\exists r^i.\forall r.\bot \sqcap \prod_{j<i}(\forall r^j.\exists r.\top) \sqcap (\prod_{l=1}^{i}\forall r^l.\neg A)) \sqcup ((\exists r^{k+1}.\top) \sqcap$$

$$(\prod_{l=1}^{k+1}\forall r^l.\neg A))$$

我们断言 $\text{mod}(C_k) \subset \text{mod}(C)$ 且 $\mathbb{M} \subseteq \text{mod}(C_k)$，这与 $\text{mod}(C) \in$MinFRSups($\mathbb{M}$,Λ(ALC$^{\text{concepts}}$) 的假设矛盾。事实上，我们先证明 $\mathbb{M} \subseteq \text{mod}(C_k)$。为此，只需注意$C_k$有两部分:

$$C_k^1 = \bigsqcup_{i=1}^{k}(\exists r^i.\forall r.\bot \sqcap \prod_{j<i}(\forall r^j.\exists r.\top) \sqcap (\prod_{l=1}^{i}\forall r^l.\neg A)) \text{ and}$$

$$C_k^2 = ((\exists r^{k+1}.\top) \sqcap \prod_{j<k+1}(\forall r^j.\exists r.\top) \sqcap (\prod_{l=1}^{k+1}\forall r^l.\neg A)).$$

我们有，对所有 $0 \le n < k$，$0 \in (C_n^1)^{M^n}$ 成立，并且对所有 $n \ge k$，$0 \in (C_n^2)^{M^n}$成立。根据$\mathbb{M}$的定义，这意味着 $\mathbb{M} \subseteq \text{mod}(C_k)$。

我们现在证明 $\text{mod}(C_k) \subset \text{mod}(C)$。我们首先证明 $\text{mod}(C_k) \subseteq \text{mod}(C)$。我们论证，若带点解释 (I,$d$) 满足$C_k$，则存在一个包含 ($d$,0) 的、I 与 $M^{k'}$ 之间的 k'-互模拟，其中某个 $k' \le k$。事实上，若 $d \in (C_k^1)^{\mathcal{I}}$，则根据 C_k^1的定义，在 I 中存在一条从 d 出发、长度为 $k' \le k$ 的 r-后继链，所有 r-后继链都具有这样的长度 $k' \le k$，并且这些

链（或多条链）中的元素都不在 A 的外延中。由于 $0 \in C^{M^{k'}}$，根据定理 A.6，$d \in C^{\mathcal{I}}$。换言之，(I,d) 满足 C。否则，$d \in (C_k^2)^{\mathcal{I}}$。于是，根据 C_k^2 的定义，I 中从 d 出发存在一条由r-后继构成的链，其长度至少为 $k+1$；所有由r-后继构成的链长度都至少为 $k+1$，且直到长度为 $k+1$ 时，链上的元素均不属于A的外延。因此，I 与 M^k 之间存在一个包含.....的 k-互模拟

$(d,0)$，其中某个 $k \le k$。由于 $0 \in C^{\mathcal{M}^k}$，根据定理 A.6，$d \in C^{\mathcal{I}}$。换言之，我们也有 (I,d) 满足C。

接下来需要证明，存在一个带点解释满足C但不满足C_k。令M_A^{m+1}为在M^{m+1}的外延中加入元素$m+1 \in \mathbb{N}$后得到的结果。根据假设，对于所有$n \in \mathbb{N}$，$0 \in C^{M^n}$。于是，$0 \in C^{M^{m+1}}$；并且根据定理 A.4 和定理 A.5，$0 \in C^{M_A^{m+1}}$，因为M^{m+1}与M_A^{m+1}之间存在m-互模拟。由于$k = m+1$，根据C_k的定义，$0 \notin (C_k)^{M_A^{m+1}}$。因此，$\mathsf{mod}(C_k) \subset \mathsf{mod}(C)$。这与我们的假设矛盾，即

$$\mathsf{mod}(C) \in \mathrm{MinFRSups}(\mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}})).$$

□

对于 ALC 概念的正向结果，我们使用以下概念。给定有限签名 Σ 上的有限树形带点解释 (I,d)，令$C_{\mathcal{I}}$ 为满足 I 与其典范模型同构的 $\mathcal{EL}_\bot$ 概念。我们定义一个 ALC 概念 $(C_{\mathcal{I}})^\dagger$，使得

- 如果 (J, e) 满足 $(C_{\mathcal{I}})$†，那么 (J, e) 与 (I, d) 之间存在一个包含 (e, d) 的互模拟（在 Σ上）。

我们按如下方式归纳地构造 $(C_{\mathcal{I}})^\dagger$。

定义 B.15. 给定一个可满足的 $\mathcal{EL}_\bot$ 概念 C，记$(C)^\dagger$ 为将 C 按如下方式翻译成 $\mathcal{ALC}$ 概念的结果。将$\mathsf{N_C}$ 和$\mathsf{N_R}$ 视为有限。无损失一般性地，假设一个$\mathcal{EL}_\bot$ 概念 C 的形式为

$$\bigsqcap_{A \in S} A \sqcap \bigsqcap_{r \in T} \bigsqcap_{l=1}^{m_r} \exists r.C_r^l$$

对某个 $S \subseteq \mathsf{N_C}$、某个 $T \subseteq \mathsf{N_R}$，且每个 C_r^l都是一个$\mathcal{EL}_\bot$ 概念。于是，我们将$(C)^\dagger$定义为：

$$\bigsqcap_{A \in S} A \sqcap \bigsqcap_{B \in \mathsf{N_C} \setminus S} \neg B \sqcap \bigsqcap_{r \in T} \Big(\bigsqcap_{l=1}^{m_r} \exists r.(C_r^l)^\dagger \sqcap \forall r.\Big(\bigsqcup_{l=1}^{m_r} (C_r^l)^\dagger\Big)\Big)$$
$$\sqcap \bigsqcap_{s \in \mathsf{N_R} \setminus T} \forall s.\bot$$

在定理 B.15 中，将合取和析取的空情形视为 $\top$。

例 B.16. 设$\mathsf{N_C} = \{A,B\}$ 且$\mathsf{N_R} = \{r,s\}$。令 $C = B \sqcap \exists r.(A \sqcap B)$。则 $C^\dagger$ 为

$$\neg A \sqcap B \sqcap \big(\exists r.(A \sqcap B \sqcap \forall r.\bot \sqcap \forall s.\bot) \sqcap$$
$$\forall r.(A \sqcap B \sqcap \forall r.\bot \sqcap \forall s.\bot)\big) \sqcap \forall s.\bot$$

引理 B.17. 设有限签名 Σ 上的有限树形带点解释$(\mathcal{I},d)$，令 $C_{\mathcal{I}}$ 为与其典范模型$(\mathcal{I},d)$ 同构的 $\mathcal{EL}_\bot$ 概念。那么

1. $(\mathcal{I},d)$满足$(C_{\mathcal{I}})^{\dagger}$;

2. 如果带点解释 $(\mathcal{J},e)$ 满足 $(C_{\mathcal{I}})^{\dagger}$ ，那么 $(\mathcal{J},e)$ 与 $(\mathcal{I},d)$ 之间存在包含 (e,d)的互模拟。

证明。 根据假设，I 是有限签名 Σ 上的有限树形解释，且$C_{\mathcal{I}}$ 是与其典范模型同构的 $\mathrm{EL}_{\bot}$ 概念。

我们对$C_{\mathcal{I}}$ 的角色深度（即$C_{\mathcal{I}}$中存在量词的嵌套次数）进行归纳，以证明引理中的两个条目。当角色深度为 0 时，$C_{\mathcal{I}}$的形式为

$$\bigsqcap_{A\in S} A$$

对某个 $S \subseteq \mathsf{N_C}$。那么，$(C_{\mathcal{I}})^{\dagger}$ 的形式为

$$\bigsqcap_{A\in S} A \sqcap \bigsqcap_{B\in \mathsf{N_C}\setminus S} \neg B \sqcap \bigsqcap_{r\in \mathsf{N_R}} \forall r.\bot$$

我们先讨论条目（1）。它成立，因为 (I,d) 是一个带点解释，对所有 $r^{\mathcal{I}} = \varnothing$，都有 $r \in \mathsf{N_R}$，且对所有 $A^{\mathcal{I}} =$，都有 $\{d\}$，其中 $A \in S$，并且对所有 $B^{\mathcal{I}} = \varnothing$，都有 $B \in \mathsf{N_C} \setminus S$。因此，它满足 $(C_{\mathcal{I}})^{\dagger}$。对于条目（2），假设 (J,e) 满足 $(C_{\mathcal{I}})^{\dagger}$。令 Z 为关系 $\{(e,d)\}$。原子条件成立，因为我们只向Z 添加满足原子条件的元素对（注意，$\mathsf{N_C}$ 是有限的，因此有限的 ALC 概念可以强制满足原子条件）。后向与前向条件显然成立。

现在假设概念$C_{\mathcal{I}}$ 具有如下形式

$$\bigsqcap_{A\in S} A \sqcap \bigsqcap_{r\in T} \bigsqcap_{l=1}^{m_r} \exists r.C_r^l$$

对于某些 $S \subseteq \mathsf{N_C}$ 和 $T \subseteq \mathsf{N_R}$。假设该引理的两个条目对于C_r^l均成立。我们希望证明，对于 $(C_{\mathcal{I}})^{\dagger} =$

$$\bigsqcap_{A\in S} A \sqcap \bigsqcap_{B\in \mathsf{N_C}\setminus S} \neg B \sqcap \bigsqcap_{r\in T} \Big(\bigsqcap_{l=1}^{m_r} \exists r.(C_r^l)^{\dagger} \sqcap \forall r.\Big(\bigsqcup_{l=1}^{m_r} (C_r^l)^{\dagger}\Big)\Big)$$

$$\sqcap \bigsqcap_{s\in \mathsf{N_R}\setminus T} \forall s.\bot$$

我们有：(1) (I,d) 满足 $(C_{\mathcal{I}})^{\dagger}$；以及 (2) (J,e) 与 (I,d) 之间存在一个包含 (e,d) 的互模拟，其中 (J,e) 是满足 $(C_{\mathcal{I}})^{\dagger}$ 的带点解释。我们从条目（1）开始。根据假设，对于C_r^l 的每个子概念$C_{\mathcal{I}}$，都有 (I_r^l,d_r^l) 满足 $(C_r^l)^{\dagger}$，且 (I_r^l,d_r^l) 与C_r^l的典范模型同构。设 (I,d) 为如下带点解释，其

- 论域是所有 I_{lr} 的论域的并集（不妨假设这些论域两两不相交），并包含一个新元素d；并且
- 概念名与角色名的外延与每个 I_{lr} 中的相同，只是对于所有 $r \in T$，我们将（d, d_{lr}）加入 $r^{\mathcal{I}}$，并且对于所有 $A \in S$，将 d 加入 $A^{\mathcal{I}}$。

根据定义，（I,d）与$C_{\mathcal{I}}$ 的典范模型同构。它满足（$C_{\mathcal{I}}$）†，因为我们恰好将 d 加入未在（$C_{\mathcal{I}}$）† 中被否定的概念名称的外延，并将 d 与元素 d_r^l 相连；根据归纳假设，$d_r^l \in (C_r^l)^{\mathcal{I}}$ 在这些元素上成立。至此，条目（1）的证明完成。

现在继续讨论条目（2）。根据假设，对于 C_r^l 的每个子概念 $C_{\mathcal{I}}$，在一个带点解释 $(\mathrm{I}^{C_r^l}, d^{C_r^l})$（它与 C_r^l 的典范模型同构）与满足 $(C_r^l)^{\dagger}$ 的每个子解释 $(\mathrm{J}^{C_r^l}, e^{C_r^l})$（其中 $(e, e^{C_r^l}) \in r^{\mathcal{J}}$）之间，都存在一个互模拟 Z_r^l。我们将 Z 定义为

$$\{(e,d)\} \cup \bigcup_{r \in T, l \in \{1,\dots,m_r\}} Z_r^l.$$

根据定义，(e,d) 满足原子条件。由于假设每个 Z_r^l 都是一个互模拟，e 和 d 的后继满足回返、向前条件和原子条件。 □

定理 16 由接下来的两个定理推出。

定理 B.18. $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 在任意有限签名上的有限树形带点解释类中是接收兼容的。

证明。令 $\mathbb{M}$ 为一组树形带点解释 $(\mathrm{I}_1,d_1)\dots,(\mathrm{I}_n,d_n)$，它们基于一个有限签名 Σ；令 C 为 Σ 上的一个 ALC 概念。我们需要证明 $\mathrm{MinFRSups}(\mathrm{mod}(C) \cup \mathbb{M}, \Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}})) \neq \emptyset$。令 D_i 为 $\mathrm{EL}_{\top}$ 概念，其中 I^{D_i} 与 I_i 同构。我们论证 $\mathrm{mod}(C \sqcup \bigsqcup_{i=1}^n (D_i)^{\dagger})$ 属于

$$\mathrm{MinFRSups}\big(\mathrm{mod}(C) \cup \mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}})\big),$$

其中 $(D_i)^{\dagger}$ 与定理 B.15 中相同，对所有 $1 \le i \le n$ 均成立。根据定理 B.17，$\mathbb{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathrm{mod}((D_i)^{\dagger})$。这意味着

$$\mathrm{mod}(C) \cup \mathbb{M} \subseteq \mathrm{mod}\Big(C \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{n} (D_i)^{\dagger}\Big).$$

此外，根据定理 B.17，如果一个带点解释属于 $\mathrm{mod}(C \sqcup \bigsqcup_{i=1}^n (D_i)^{\dagger})$，但不属于 $\mathrm{mod}(C) \cup \mathbb{M}$，那么它与 $\mathbb{M}$ 中的一个模型双模拟等价。由于 ALC 在双模拟下不变，因此不存在 $\mathbb{M}'$ 使得 $\mathbb{M}' \in \mathrm{FR}(\Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}}))$ 且

$$\mathbb{M} \subseteq \mathbb{M}' \subset \mathrm{mod}\Big(C \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{n} (D_i)^{\dagger}\Big).$$

因此，$\mathrm{mod}(C \sqcup \bigsqcup_{i=1}^n (D_i)^{\dagger}) \in \mathrm{MinFRSups}(\mathrm{mod}(C) \cup \mathbb{M}, \Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}}))$，如所要求。 □

下一个定理可以用类似的方法证明。

定理 B.19. $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 在有限签名上有限树形带点解释的有限集合类中是驱逐相容的。

证明。设 $\mathbb{M}$ 是一组有限签名 Σ 上的树形指向解释 $(\mathrm{I}_1,d_1)\dots$，(I_n, d_n)，并设C 是 Σ 上的一个 ALC 概念。我们需要证明

MaxFRSubs(mod(C) $\setminus \mathbb{M}$, $\Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}})$) $\neq \varnothing$。设 D_i 是满足 I^{D_i} 与 I_i 同构的 $\mathrm{EL}_\top$ 概念。我们论证 mod($C \sqcap \prod_{i=1}^{n} \neg(D_i)^\dagger$) 属于

$$\mathrm{MaxFRSubs}\big(\mathsf{mod}(C) \setminus \mathbb{M}, \Lambda(\mathcal{ALC}_{\mathrm{concepts}})\big),$$

其中 $(D_i)^\dagger$ 如定理 B.15 所述，对所有 $1 \le i \le n$。由定理 B.17，$\mathbb{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathsf{mod}((D_i)^\dagger)$。这意味着

$$\mathsf{mod}\big(C \sqcap \prod_{i=1}^{n} \neg(D_i)^\dagger\big) \subseteq \mathsf{mod}(C) \setminus \mathbb{M}.$$

此外，由定理 B.17，如果一个带点解释属于 mod(C) $\setminus \mathbb{M}$ 但不属于 mod($C \sqcap \prod_{i=1}^{n} \neg(D_i)^\dagger$)，则它与 $\mathbb{M}$ 中的某个模型双模拟等价。由于 ALC 是双模拟不变的，不存在 $\mathbb{M}'$ 使得 $\mathbb{M}' \in$ 有限可表示($\Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}})$) 且

$$\mathsf{mod}\big(C \sqcap \prod_{i=1}^{n} \neg(D_i)^\dagger\big) \subset \mathbb{M}' \subseteq \mathbb{M}.$$

因此 mod($C \sqcap \prod_{i=1}^{n} \neg(D_i)^\dagger$) $\in$最大有限可表示子集(mod(C) $\setminus \mathbb{M}, \Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}})$)。 □

C 第 5 节补充材料

命题 11. 如果一个修订算子满足空扩展和 空移除，则它满足惰性。

证明。 设 rev 是定义在模型二元类 C 上的修订可实现修正函数，并且同时满足**空扩展** 和**空删除**。设 B 是一个有限基，($\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-$) $\in$ C，且 $\mathbb{M}^+ \subseteq$ mod(B) 和 $\mathbb{M}^- \cap$ mod(B) $= \varnothing$。根据**空扩展**，mod(rev(B $\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-$)) $\subseteq$ mod(B)；而根据**空删除**，有 mod(B) $\subseteq$mod(rev(B $\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-$))。因此，mod(rev(B $\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-$)) $=$ mod(B)。 □

命题 11。 如果一个修订算子满足审慎性，那么它也满足惰性。

证明。 为导出矛盾，假设 rev 满足**审慎性**，但不满足**惰性**。因此，对于某个有限基 B 以及互不相交的模型集合 $\mathbb{M}^+$和 $\mathbb{M}^-$，mod(B) $\neq$mod(rev(B $\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-$))。设$X^- = \varnothing$ 且$X^+ = \varnothing$。由**审慎性** 可得

$$(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ \notin \mathrm{FR}(\Lambda).$$

由于 $X^+ = X^- = \varnothing$，我们有

$$(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ = \mathsf{mod}(\mathcal{B}).$$

因此，mod(B)$\notin$FR(Λ)，这与 B 是有限基这一假设相矛盾。 □

引理 C.20。 设 Z、Z' 是模型集，且 $\mathcal{B}$ 是有限基，使得 $\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \oplus Z' \subset \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \oplus Z$。以下各项均成立：

1. 如果 $\mathbb{M}^- \cap Z' = \varnothing$，那么 $\mathbb{M}^- \cap \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z'$；
2. 模（$\mathcal{B}$）$\setminus Z' \subseteq$模（$\mathcal{B}$）$\setminus Z$;

3. $Z' \setminus \text{模}(\mathcal{B}) \subseteq Z \setminus \text{模}(\mathcal{B})$.

证明。 设Z, Z'是模型集，且 B 是一个有限基，使得 $\mathrm{mod(B)} \oplus Z' \subset \mathrm{mod(B)} \oplus Z$。

1. 假设 $\mathbb{M}^- \cap Z' = \varnothing$。设 $x \in \mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod(B)}$。我们将证明 $x \in \mathrm{mod(B)} \setminus Z'$。由于 $x \in \mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod(B)}$，可知 $x \in \mathrm{mod(B)}$，且 $x \in \mathbb{M}^-$。根据假设，$\mathbb{M}^- \cap Z' = \varnothing$，这意味着 $x \notin Z'$。因此，$x \in \mathrm{mod(B)}$，但$x \notin Z'$，这意味着 $x \in \mathrm{mod(B)} \setminus Z'$。

2. 设 $x \in \mathrm{mod(B)} \setminus Z'$。我们将证明 $x \in \mathrm{mod(B)} \setminus Z$。根据对称差的定义，我们有 $\mathrm{mod(B)} \oplus Z' = (\mathrm{mod(B)} \setminus Z') \cup (Z' \setminus \mathrm{mod(B)})$，这意味着

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z' \subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \oplus Z'.$$

因此，$x \in \mathrm{mod(B)} \oplus Z'$。根据假设，$\mathrm{mod(B)} \oplus Z' \subseteq \mathrm{mod(B)} \oplus Z$，这意味着 $x \in \mathrm{mod(B)} \oplus Z$。根据定义，$\mathrm{mod(B)} \oplus Z = (\mathrm{mod(B)} \setminus Z) \cup (Z \setminus \mathrm{mod(B)})$。因此，(a) $x \in \mathrm{mod(B)} \setminus Z$，或 (b) $x \in Z \setminus \mathrm{mod(B)}$。情形 (a) 显然成立，因为这正是我们要证明的条件。情形 (b) 会导致矛盾，因此我们得出证明结论。对于情形 (b)，有 $x \in Z$，但 $X \notin \mathrm{mod(B)}$，这与假设 $x \in \mathrm{mod(B)} \setminus Z'$ 矛盾。

3. 设 $x \in Z' \setminus \mathrm{mod(B)}$。我们将证明 $x \in Z \setminus \mathrm{mod(B)}$。根据对称差的定义，有 $\mathrm{mod(B)} \oplus Z' = (\mathrm{mod(B)} \setminus Z') \cup (Z' \setminus \mathrm{mod(B)})$，这意味着

$$Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \oplus Z'.$$

因此，如 $x \in \mathrm{mod(B)} \oplus Z'$。根据假设，$\mathrm{mod(B)} \oplus Z' \subseteq \mathrm{mod(B)} \oplus Z$，这意味着 $x \in \mathrm{mod(B)} \oplus Z$。根据定义，$\mathrm{mod(B)} \oplus Z = (\mathrm{mod(B)} \setminus Z) \cup (Z \setminus \mathrm{mod(B)})$。因此，(a) $x \in \mathrm{mod(B)} \setminus Z$，或 (b) $x \in Z \setminus \mathrm{mod(B)}$。情形 (b) 是显然的，因为这正是我们要证明的条件。情形 (a) 导致矛盾，因此证明得出。对于情形 (a)，我们有 $x \in \mathrm{mod(B)}$，这与假设 $x \in Z' \setminus \mathrm{mod(B)}$ 相矛盾。

□

引理 C.21。 如果修订算子rev 满足审慎性，那么

$$\mathsf{mod}(\mathsf{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \in \min_{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)).$$

证明。 为简洁起见，令

$$Z = \mathsf{mod}(\mathsf{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)).$$

为了得出矛盾，我们假设$Z \notin \min^{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\Lambda, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。因此，(i) $Z \notin \chi(\Lambda, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$，或者 (ii) $Z \in \chi(\Lambda, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$，但它并非模 $\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}$ 极小。情形 (i) 被排除，因为根据假设，rev 满足成功性。因此，情形 (ii) 必然成立。于是，存在某个$Z' \in \chi(\Lambda, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$，使得

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \oplus Z' \subset \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \oplus Z.$$

因此，

$$Z \neq Z'. \tag{1}$$

根据 χ 的定义，我们有 $\mathbb{M}^+ \subseteq Z'$. 因此，

$$\mathbb{M}^+ \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}), \tag{2}$$

and

$$Z' \in \mathrm{FR}(\Lambda). \tag{3}$$

根据定理 C.20（条目3），我们有

$$Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq Z \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}). \tag{4}$$

令 $X^+ = Z' \setminus \mathrm{mod(B)}$。将 (2) 和 (4) 中的 $X^+ = Z' \setminus \mathrm{mod(B)}$ 替换后，得到

$$\mathbb{M}^+ \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq X^+ \subseteq Z \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}). \tag{5}$$

根据 χ 的定义，

$$\mathbb{M}^- \cap Z' = \varnothing.$$

由此，根据定理 C.20（条目1）可得

$$\mathbb{M}^- \cap \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z'. \tag{6}$$

根据定理 C.20（条目2），我们得到

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z' \subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z. \tag{7}$$

设 $X^- = \mathrm{mod(B)} \setminus Z'$。将其代入 (6) 和 (7) 可得

$$\mathbb{M}^- \cap \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq X^- \subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z. \tag{8}$$

对每一集合对 A 与 B，均有 $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$，且 $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$。

注意

$$\begin{aligned}(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ &= \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus (\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z') \cup (Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B})) \\ &= (\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cap Z') \cup (Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B})) \\ &= Z'. \end{aligned} \tag{9}$$

由 (1) 和 (9) 可得

$$(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ \neq Z. \tag{10}$$

由于 (8)、(5) 和 (10)，由**审慎性** 可得 $(\mathrm{mod(B)} \setminus X^-) \cup X^+ \notin$ 有限可表示(Λ)。因此，由 (9) 可知 $Z' \notin$ 有限可表示(Λ)，这与 (3) 矛盾。

□

定理 11. 若 $\mathcal{C}$ 是修正相容的，则对所有有限基 $\mathcal{B}$ 以及 $(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)\in\mathcal{C}$，$\min^{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-))\neq\varnothing$.

证明。 设 C 是修正相容的，B 是有限基，且 $(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)\in$C。由于 C 是修正相容的，因此存在一个作用于 C 的修订算子满足 **circumspec-tion**，由定理 C.21 可知

$$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-))\in\min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)).$$

因此，$\min^{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-))\neq\varnothing$。 □

引理 C.22。若 $Z\in\min^{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-))$，且

1. $\mathbb{M}^-\cap\mathrm{mod(B)}\subseteq X^-\subseteq(\mathrm{mod(B)}\setminus Z)$ 且
2. $\mathbb{M}^+\setminus\mathrm{mod(B)}\subseteq X^+\subseteq Z\setminus\mathrm{mod(B)}$ 且
3. $((\mathrm{mod(B)}\setminus X^-)\cup X^+)\neq Z$;

则 $((\mathrm{mod(B)}\setminus X^-)\cup X^+)\notin$有限可表示(Λ)。

证明。 为导出矛盾，假设 $Z\in\min^{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-))$，条件 (1) 至 (3) 以及该陈述均成立，但 $((\mathrm{mod(B)}\setminus X^-)\cup X^+)\in$有限可表示(Λ)。为清晰起见，令

$$\begin{aligned}Z^-&=\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus Z\\ Z^+&=Z\setminus\mathrm{mod}(\mathcal{B})\\ Y&=\left(\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus X^-\right)\cup X^+\end{aligned}$$

注意，$Y\in$有限可表示(Λ)

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus Y&=\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus\left((\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus X^-)\cup X^+\right)\\ &=\left(\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus(\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus X^-)\right)\setminus X^+\end{aligned}\tag{11}$$

根据假设，$X^-\subseteq$mod(B)，由上面的式（11）可知

$$\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus Y=X^-\setminus X^+$$

根据假设，$X^-\cap X^+=\varnothing$。因此，

$$\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus Y=X^-$$

$$\begin{aligned}Y\setminus\mathrm{mod}(\mathcal{B})&=\left(\left(\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus X^-\right)\cup X^+\right)\setminus\mathrm{mod}(\mathcal{B})\\ &=\left((\mathrm{mod}(\mathcal{B})\setminus X^-)\setminus\mathrm{mod}(\mathcal{B})\right)\cup\left(X^+\setminus\mathrm{mod}(\mathcal{B})\right)\\ &=\varnothing\cup(X^+\setminus\mathrm{mod}(\mathcal{B}))\end{aligned}$$

因此，由于 $X^+ \cap \mathrm{mod}(\mathrm{B}) = \varnothing$，我们得到

$$Y \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B}) = X^+.$$

因此，$\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \oplus Y = X^- \cup X^+$。

类似地，我们证明$Z \oplus \mathrm{B} = Z^+ \cup Z^-$。由假设，$X^- \subseteq Z^-$ 且$X^+ \subseteq Z^+$。此外，根据假设，要么 $X^- \subset Z^-$，要么$X^+ \subset Z^+$。在任一情形下，我们得到$X^- \cup X^+ \subset Z^- \cup Z^+$。因此，$\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \oplus Y \subset \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \oplus Z$。

因此，$Z \notin \min^{\leq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$，这与$Z \in \min^{\leq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$这一假设相矛盾 □

定理 11. 一个修订算子满足审慎性 当且仅当它是*na¨ıve*关系修订算子。

证明. 设 C 为一个修正相容的二元模型类。

"⇐" 设 rev 为一个na¨ıve关系修订算子，且$(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) \in \mathrm{C}$。

- **成功性**。根据定义，对于所有$Y \in \chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$，$M^+ \subseteq Y$ 且$M^- \cap Y = \varnothing$。此外，根据定义，$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \in \chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$。因此，$M^+ \subseteq Y$ 且$M^- \cap Y = \varnothing$。

- **审慎性**。这可直接由定理 C.22 得出。

"⇒" 假设 rev 同时满足**成功性**和**审慎性**。根据定理 C.21，$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \in \min^{\leq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。

□

命题 C.23。每个对称差修订算子都满足**成功性**、**空扩展**、**空删除**和**审慎性**。

证明。 设 rev 是二元类 C 的模型上的一个对称差修订函数，且 $(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) \in \mathrm{C}$。

- **成功性**。根据定义，对于所有$Y \in \chi(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$，$M^+ \subseteq Y$ 且$M^- \cap Y = \varnothing$。此外，根据定义，$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \in \chi(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$。因此，$M^+ \subseteq Y$ 且$M^- \cap Y = \varnothing$。

- **空扩展**。设 $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，且 $\mathbb{M} \in \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。我们将证明 $\mathbb{M} \in \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。因此，根据 rev 的定义，我们有 $\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \in \min^{\leq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\Lambda, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B}))))$。所以，这些模型中没有一个属于

$$\min_{\leq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\Lambda, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B}))))$$

集合 $\mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B}))$。因此，$\mathbb{M} \in \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。

- **空删除：** 设 $\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod}\ (\mathrm{B}) = \varnothing$。以下情况二者必居其一：(a) $\mathbb{M}^+ \notin \mathrm{mod}(\mathrm{B})$ 或 (b)$\mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$

– (a) $\mathbb{M}^+ \not\subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。因此，根据 rev 的定义，我们有

$$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)) = \mathrm{sel}\big(\min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\Lambda,\mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod}(\mathcal{B}),\mathbb{M}^-))\big),$$

这意味着

$$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)) \in \chi(\Lambda,\mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod}(\mathcal{B}),\mathbb{M}^-).$$

根据 χ 的定义可知，对于每个 $Y \in \chi(\Lambda,X,X')$，$X \subseteq Y$。因此，由于 $\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)) \in \chi(\Lambda,\mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod}(\mathrm{B})\ \mathbb{M}^-)$，我们得到

$$\mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)),$$

这意味着 $\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)$。

– (b) $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。因此，根据 rev 的定义，我们有

$$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)) = \mathrm{sel}\big(\min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\Lambda,\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B}))))\big).$$

根据假设，$\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod}(\mathrm{B}) = \varnothing$。因此，由于 $\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B}) = \varnothing$，我们有 $\mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B})) = \varnothing$。再结合 $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$ 这一假设可知，$\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \in \chi(\Lambda,\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B})))$。因此，由于 $\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \oplus \mathrm{mod}(\mathrm{B}) = \varnothing$，我们得到

$$\min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\Lambda,\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B})))) = \{\mathrm{mod}(\mathcal{B})\}.$$

因此，$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)) = \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，这意味着 $\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-))$。

• **审慎性**。反证，假设存在某个朴素修订操作 rev 不满足**审慎性**。因此，存在一对集合 $(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)$ 和 X^- 以及 X^+ 满足**审慎性** 的第 1 至第 3 点，但违反了第 4 点，也就是说，

$$\big((\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+\big) \in \mathrm{FR}(\Lambda) \tag{12}$$

由于 rev 是一个朴素修正函数，因此我们有

$$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)) \in \min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)). \tag{13}$$

为清楚起见，令

$$\begin{aligned} Z^- &= \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)) \\ Z^+ &= \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)) \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \\ Y &= \big(\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-\big) \cup X^+ \end{aligned}$$

因此，由（12）可得，$Y \in$有限可表示(Λ)。

$$\begin{aligned} \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus Y &= \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus \Big((\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+\Big) \\ &= \big(\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus (\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-)\big) \setminus X^+ \end{aligned} \tag{14}$$

根据假设，$X^- \subseteq \mathrm{mod}(B)$，由此可根据上面的（14）得出

$$\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus Y = X^- \setminus X^+$$

根据假设，$X^- \cap X^+ = \varnothing$。因此，

$$\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus Y = X^-$$

$$\begin{aligned} Y \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B}) &= \Big(\big(\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-\big) \cup X^+\Big) \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \\ &= \Big(\big(\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-\big) \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B})\Big) \cup \big(X^+ \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B})\big) \\ &= \varnothing \cup (X^+ \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B})) \end{aligned}$$

因此，由于 $X^+ \cap \mathrm{mod}(B) = \varnothing$，我们得到

$$Y \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B}) = X^+.$$

因此，$\mathrm{mod}(B) \oplus Y = X^- \cup X^+$。

令 $Z = \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(B\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。类似地，我们证明 $Z \oplus B = Z^+ \cup Z^-$。根据假设，$X^- \subseteq Z^-$ 且 $X^+ \subseteq Z^+$。此外，根据假设，$X^- \subset Z^-$ 或 $X^+ \subset Z^+$。无论哪种情形，我们都得到 $X^- \cup X^+ \subset Z^- \cup Z^+$。因此，$\mathrm{mod}(B) \oplus Y \subset \mathrm{mod}(B) \oplus \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(B\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。

因此，

$$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \notin \min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(M^+, M^-)),$$

这与 (13) 矛盾。

□

命题 C.24。 如果修订算子 rev 满足**成功性**、**空扩展**、**空删除**和**审慎性**，那么rev 是非对称差分算子。

证明。 设 C 是一个修正相容的模型类，rev 是 C 上满足成功性、 空扩展、空删除 和审慎性的修订算子。

设 B 是一个有限基，且 $(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) \in C$。只需证明

- (a) $\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(B\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \in \min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(B))))$, 如果 $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod}(B)$;
- (b) $\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(B\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \in \min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod}(B)\ \mathbb{M}^-))$, 若 $\mathbb{M}^+ \notin \mathrm{mod}(B)$，但 $\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod}(B) = \varnothing$;
- (c) $\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(B\ \mathbb{M}^+,\ \mathbb{M}^-)) \in \min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\ \mathbb{M}^-))$, 若 $\mathbb{M}^+ \notin \mathrm{mod}(B)$ 且 $\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod}(B) \neq \varnothing$。

• (a) 假设 $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。因此，根据空扩张，

$$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{B}).$$

为简洁起见，令 $Z = \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。因此，

$$Z \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{B}). \tag{15}$$

为了得出矛盾，我们假设

$$Z \notin \min_{\leq \mathrm{mod}(\mathcal{B})}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B})))).$$

因此，存在某个 $Z' \in \chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B})))$，使得

$$Z' \oplus \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \subset Z \oplus \mathrm{mod}(\mathcal{B}). \tag{16}$$

由 χ 的定义可得

$$Z' \in \mathrm{FR}(\Lambda) \tag{17}$$

$Z' \cap \mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B})) = \varnothing$。因此，$Z' \cap (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B})) = \varnothing$，这意味着

$$Z' \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \tag{18}$$

由(15)可知，$Z \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，这意味着

$$Z \oplus \mathrm{mod}(\mathcal{B}) = \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z. \tag{19}$$

由 (18) 可知，$Z' \oplus \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，这意味着

$$Z' \oplus \mathrm{mod}(\mathcal{B}) = \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z'. \tag{20}$$

将 (19) 和 (20) 代入 (16)，我们得到

$$\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z' \subset \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z \tag{21}$$

根据假设，$Z' \in \chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B})))$。因此，

$$Z' \cap \mathbb{M}^- = \varnothing,$$

这意味着 $\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \setminus Z'$，这与 (20) 共同意味着

$$\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z' \subset \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z. \tag{22}$$

首先，回顾对于所有集合 A 和 B，$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$。因此，$\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \setminus (\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \setminus Z') = \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \cap Z'$。设

$$X^- = \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z'.$$

因此，$\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \setminus X^- = \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \cap Z'$。由 (20) 可得 $\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \cap Z' \neq Z$。因此，

$$(\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ \neq Z. \tag{23}$$

将 (22) 中的 $X^- = \mathrm{mod(B)} \setminus Z'$ 替换后，得到

$$\mathbb{M}^- \cap \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq X^- \subset \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z. \tag{24}$$

根据假设，$\mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod(B)}$，这意味着 $\mathbb{M}^+ \setminus \mathrm{mod(B)} = \varnothing$。因此，

$$\mathbb{M}^+ \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq X^+ \subseteq \mathsf{mod}(\mathsf{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \tag{25}$$

由 (24)、(25) 和 (23)，根据有限保留-温和性可得

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^- \notin \mathrm{FR}(\Lambda). \tag{26}$$

由于根据 (18)，$Z' \subseteq \mathrm{mod(B)}$，我们得到

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus (\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z') = Z'.$$

因此，$\mathrm{mod(B)} \setminus X^- = Z'$ 由此可根据 (26) 得出

$$Z' \notin \mathrm{FR}(\Lambda),$$

这与 (17) 矛盾。

- (b) 假设 $\mathbb{M}^+ \not\subseteq \mathrm{mod(B)}$，但 $\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod(B)}$。为简洁起见，令

$$Z = \mathsf{mod}(\mathsf{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)).$$

由于 $\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod(B)} = \varnothing$，根据空删除可得

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq Z.$$

因此，

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \oplus Z = Z \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}). \tag{27}$$

假设存在矛盾，

$$Z \notin \mathsf{min}_{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+ \cup \mathsf{mod}(\mathcal{B}), \mathbb{M}^-)).$$

因此，存在 $Z' \in \chi_\Lambda(\mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod(B)}\ \mathbb{M}^-)$，使得

$$Z' \oplus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subset Z \oplus \mathsf{mod}(\mathcal{B}). \tag{28}$$

根据 χ 的定义，可得

$$Z' \in \mathrm{FR}(\Lambda), \text{ and} \tag{29}$$
$$\mathbb{M}^+ \cup \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq Z'. \tag{30}$$

因此，

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq Z',$$

这意味着

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \oplus Z' = Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}). \tag{31}$$

将 (27) 和 (31) 代入 (28) 得到

$$Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subset Z \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}). \tag{32}$$

因此,

$$Z \neq Z'$$

由 (30) 得

$$\mathbb{M}^+ \subseteq Z'$$
$$\mathbb{M}^+ \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}).$$

结合 (32) 可得

$$\mathbb{M}^+ \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq Z \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}).$$

令 $X^+ = Z' \setminus \mathrm{mod(B)}$。因此,

$$\mathbb{M}^+ \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq X^+ \subseteq Z \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}). \tag{33}$$

令 $X^- = \varnothing$。因此,

$$\mathbb{M}^- \cap \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq X^- \subseteq \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus Z. \tag{34}$$

由于 $\mathrm{mod(B)} \subseteq Z'$，我们有

$$\begin{aligned} \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cup (Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B})) &= Z' \\ \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cup X^+ &= Z' && (\text{from } X^+ = Z' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B})) \\ (\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ &= Z' && (\text{from } X^- = \varnothing) \end{aligned}$$

因此，由于 $Z \neq Z'$，我们得到

$$(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ \neq Z. \tag{35}$$

由（33）、（34）和（35），根据有限温和保留可得 $(\mathrm{mod(B)} \setminus X^-) \cup X^+ \notin \mathrm{FR}(\Lambda)$。因此，$Z' \notin \mathrm{FR}(\Lambda)$，这与（29）矛盾。

- (c) 假设 $\mathbb{M}^+ \not\subseteq \mathrm{mod(B)}$ 且 $\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod(B)} \neq \varnothing$。此情形可直接由定理 C.21 得出。

□

定理11. 修订算子rev 满足**成功性**、**空扩展**、**空移除** 和**审慎性**，当且仅当它是对称差修订算子。

证明。 由定理 C.23 和定理 C.24 可得。 □

命题 C.25。 设 $\mathcal{C}$ 为一个二元模型类，使得对于每个有限基 $\mathcal{B}$和 $(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-) \in \mathcal{C}$,

(i) 模型($\mathcal{B}$) $\cup \mathbb{M}^+$有限可表示，且

(ii) 模型($\mathcal{B}$) $\setminus \mathbb{M}^-$有限可表示。

C 上的修订算子是朴素关系算子，当且仅当它是对称差分算子。

证明。 设 C 是满足陈述中条件 (i) 和 (ii) 的二元模型类。设 rev 是 C 上的修订算子。

"⇐" 假设 rev 是对称差分算子。因此，根据定理28，rev 满足**审慎性**；由定理 25 可知，rev 是朴素关系算子。

"⇒"。假设 rev 是朴素关系算子。我们将证明 rev 满足**空删除** 和**空扩展**。设

$$Z = (\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cup \mathbb{M}^+) \setminus \mathbb{M}^-$$

So,

$$Z = (\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathbb{M}^-) \cup (\mathbb{M}^+ \setminus \mathbb{M}^-)$$

由于 rev 定义在 C 上，我们得到 C 是修订可实现的，这意味着$\mathbb{M}^+ \cap \mathbb{M}^- = \varnothing$。因此， $\mathbb{M}^+ \setminus \mathbb{M}^- = \mathbb{M}^+$，这意味着

$$Z = (\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathbb{M}^-) \cup \mathbb{M}^+. \tag{36}$$

根据假设，即陈述的第 (i) 项，mod(B) $\cup \mathbb{M}^+$是有限可表示的。设 B′ 为其有限基。因此，由陈述的第 (ii) 项，我们有 mod(B′) $\setminus \mathbb{M}^-$也是有限可表示的，这意味着 Z是有限可表示的。

我们将证明

$$\mathsf{min}_{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)) = \{Z\}$$

根据构造， $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathsf{mod}(Z)$ 且 $\mathbb{M}^- \cap \mathsf{mod}(Z) = \varnothing$。此外，$Z$是有限可表示的。因此，$Z \in \chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)$。我们为得出矛盾而假设

$$Z \notin \mathsf{min}_{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)).$$

那么，存在某个 $Z' \in \chi_\Lambda(\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-)$，使得

$$Z' \oplus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subset Z \oplus \mathsf{mod}(\mathcal{B})$$

因此，存在某个 $M \in Z \oplus$mod(B)，使得

$$M \notin Z' \oplus \mathsf{mod}(\mathcal{B}). \tag{37}$$

根据构造可知

$$Z \oplus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) = (\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cap \mathbb{M}^-) \cup (\mathbb{M}^+ \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}))$$

因此，(a) $M \in$mod(B) $\cap \mathbb{M}^-$或者 (b) $M \in \mathbb{M}^+ \setminus$mod(B)。

(a) $M \in \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \cap \mathbb{M}^-$。因此，$M \in \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。由于 $Z' \in \chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$，我们得到 $Z' \cap \mathbb{M}^- = \varnothing$。因此，由于 $M \in \mathbb{M}^-$，我们得到 $M \notin Z'$。所以，由于 $M \in \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，我们得到 $M \in \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \setminus Z'$，这意味着 $M \in Z' \oplus \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，与 (37) 矛盾。

- (b) $M \in \mathbb{M}^+ \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。因此 $M \in \mathbb{M}^+$ 且 $M \notin \mathrm{B}$。由于 $Z\prime \in \chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)$，我们得到 $\mathbb{M}^+ \subseteq Z\prime$，这意味着 $M \in Z\prime$。因此，由于 $M \notin \mathrm{B}$，$M \in Z\prime \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，这意味着 $M \in Z\prime \oplus \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，这与 (37) 矛盾。

无论是情形 (a) 还是 (b)，我们都会得到一个矛盾。因此，

$$Z \in \min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)).$$

为了证明 Z 的唯一性，我们假设存在某个不同的 $Z' \in \min^{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$，以导出矛盾。
因此，由于 Z 和 Z' 都是极小的，我们得到 $Z \oplus \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \not\subseteq Z' \oplus \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。于是，存在某个 $M \in Z \oplus \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，使得 $M \notin Z' \oplus \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。这与证明 Z 的极小性所用的论证相同。因此，使用相同的证明，我们得到一个矛盾。所以我们得出结论：Z 在 $\in \min^{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$ 中是唯一的，也就是说，

$$\min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) = \{Z\} \tag{38}$$

根据定义，

$$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \in \min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)),$$

由 (38) 可推出

$$\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) = Z. \tag{39}$$

空扩展。设 $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{B})$。
由于 $Z = \mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，可得 $Z = \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \setminus \mathbb{M}^-$，从而推出 $Z \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，再由 (39) 得到 $\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。
空删除。设 $\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod}(\mathrm{B}) = \varnothing$。因此，$\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \setminus \mathbb{M}^- = \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，由 (36) 可推出

$$Z = \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \cup \mathbb{M}^+.$$

因此，$\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \subseteq Z$，由 (39) 可推出 $\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。

由于 rev 是修订算子，因此满足成功性。因此，rev 满足成功性、**空扩展**、**空删除** 和**审慎性**，由此根据定理 28 可知，rev 是对称差分算子。

□

推论 C.26. 设 $\Lambda = (\mathcal{L}\ \mathfrak{M}, \vDash)$ 是一个满足系统，且 $\mathcal{C} \subseteq \wp(\mathfrak{M}) \times \wp(\mathfrak{M})$ 是 Λ 上的一个二元模型类。若对每个有限基 $\mathcal{B}$ 以及 $(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) \in \mathcal{C}$,

(i) $\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cup \mathbb{M}^+$有限可表示，*(ii)* $\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathbb{M}^-$有限可表示，并且

(iii) $\mathbb{M}^+$ 和 $\mathbb{M}^-$ 不相交，

则$\mathcal{C}$ 是修正相容的。

证明。 设 $\Lambda = (\mathrm{L}\ \mathfrak{M}, \models)$是一个满足系统，并且 $\mathrm{C} \subseteq \wp(\mathfrak{M}) \times \wp(\mathfrak{M})$是在 Λ 上满足陈述中条件 (i) 至 (iii) 的二元模型类。我们在 C 上定义如下修订算子：$\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) = (\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \cup \mathbb{M}^+) \setminus \mathbb{M}^-$。由于 $\mathbb{M}^+$和 $\mathbb{M}^-$ 不相交，$(\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \cup \mathbb{M}^+) \setminus \mathbb{M}^-$ 不会从 $\mathbb{M}^+$中移除任何模型，因此满足成功性。所以 rev 是一个修正函数。由于 $(\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \cup \mathbb{M}^+)$ 可由基 B′有限表示，根据条款 (ii)，可知 $\mathrm{mod}(\mathrm{B}') \setminus \mathbb{M}^-$ 是有限可表示的。因此，$(\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \cup \mathbb{M}^+) \setminus \mathbb{M}^-$ 可由某个有限基 B″有限表示。所以，添加 $\mathbb{M}^+$ 并移除 $\mathbb{M}^-$ 是获得有限表示所必需的最小改变，这意味着 $\min^{\preceq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) = \{\mathrm{mod}(\mathrm{B}'')\}$。因此，rev 是一个朴素关系修订算子。由此，根据定理 C.25，rev 是一个对称微分算子；因此，根据定理 28，它满足所有修正公设。故 C 是修正相容的。

□

引理 C.27. 设$\mathcal{C}$ 是一个可分解修正相容类。若rev 是$\mathcal{C}$上的修订算子，则$\mathsf{rcp}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^+) := \mathsf{rev}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^+, \varnothing)$ 在 $\mathcal{C}^+$ 上满足成功性、持久性、空性和有限节制。

证明。 定义操作 $\mathrm{rcp}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+) := \mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \varnothing)$。我们将证明它是一个接收操作，也就是说，它满足接收的所有公设：

- **成功性**：由 rev 的成功性可直接得出。
- **持久性**：根据空删除，我们有 $\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \varnothing))$。因此，$\mathrm{mod}(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{rcp}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+))$。
- **空性**：设 $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。根据空扩展，我们有 $\mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。因此，$\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+)\ \varnothing \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，这意味着 $\mathrm{rcp}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+) \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。
- **有限节制**：为证明矛盾，假设不满足有限节制。因此，存在某些 $\mathbb{M}$和 $\mathbb{M}\prime$，使得

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cup \mathbb{M} \subseteq \mathbb{M}' \subset \mathsf{mod}(\mathsf{rcp}(\mathcal{B}, \mathbb{M})),$$

但 $\mathbb{M}' \in \mathrm{FR}(\Lambda)$。令 $X^- = \varnothing$ 和 $X^+ = \mathbb{M}' \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B})$。对于修订而言，有限节制的条件1显然得到满足。对于条件2，注意到根据假设，$\mathbb{M}' \subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{rcp}(\mathrm{B}\ \mathbb{M})) = \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}, \varnothing))$，这意味着

$$\mathbb{M}' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subseteq \mathsf{mod}(\mathsf{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}, \varnothing)) \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}).$$

因此，由于$X^+ = \mathbb{M}' \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B})$，我们得到

$$X^+ \subseteq \mathsf{mod}(\mathsf{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}, \varnothing)) \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}).$$

因此，条件2得到满足。对于条件3，由于$X^- = \varnothing$，我们得到

$$(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ = \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cup X^+.$$

根据假设，$\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \cup \mathbb{M} \subseteq \mathbb{M}'$，这意味着 $\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \subseteq \mathbb{M}'$。因此，

$$\mathbb{M}' = (\mathbb{M}' \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B})) \cup \mathsf{mod}(\mathcal{B})$$

根据定义，$X^+ = (\mathbb{M}' \setminus \mathsf{mod}(\mathrm{B}))$。因此，

$$\mathbb{M}' = X^+ \cup \mathsf{mod}(\mathcal{B}).$$

根据假设，$\mathbb{M}' \subset \mathsf{mod}(\mathsf{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}, \varnothing))$。因此，

$$X^+ \cup \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \neq \mathsf{mod}(\mathsf{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}, \varnothing)).$$

因此，条件3也得到满足。于是，根据修正的有限节制性，$\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \cup X^+ \in$ 有限可表示(Λ)。因此，由于 $\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \cup X^+ = \mathbb{M}'$，我们得到 $\mathbb{M}' \in$有限可表示(Λ)，这与假设相矛盾。

□

引理C.28. 对于每个有限基$\mathcal{B}$ 和模型集 $\mathbb{M}^+$,

$$\mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cup \mathbb{M}^+) = \min_{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+ \cup \mathsf{mod}(\mathcal{B}), \varnothing)).$$

证明. 我们证明：(a) $\mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \cup \mathbb{M}^+) \subseteq \min^{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+ \cup \mathsf{mod}(\mathrm{B})\ \varnothing))$; 以及 (b)$\min^{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+ \cup \mathsf{mod}(\mathrm{B})\ \varnothing)) \subseteq \mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \cup \mathbb{M}^+)$。

(a) $\mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \cup \mathbb{M}^+) \subseteq \min^{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\Lambda,\ \mathbb{M}^+ \mathsf{mod}(\mathrm{B})\ \varnothing))$。令

$$X \in \mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \cup \mathbb{M}^+).$$

因此，$\mathbb{M}^+ \subseteq X$这意味着 $X \in \chi(\Lambda,\ \mathsf{mod}(\mathrm{B}) \cup \mathbb{M}^+,\ \varnothing)$。假设，为了导出矛盾，

$$X \notin \min_{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\Lambda, \mathbb{M}^+ \cup \mathsf{mod}(\mathcal{B}), \varnothing))$$

。因此，存在某个$Y \in \chi(\Lambda,\ \mathbb{M}^+,\ \varnothing)$，使得

$$\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \oplus Y \subset \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \oplus X.$$

由于 $\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \subseteq X$ 且 $\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \subseteq Y$，我们得到 $\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \oplus Y = Y \setminus \mathsf{mod}(\mathrm{B})$ 且 $\mathsf{mod}(\mathrm{B}) \oplus X = X \setminus \mathsf{mod}(\mathrm{B})$。因此，

$$Y \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}) \subset Y \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B}). \tag{40}$$

由于 $\mathsf{mod}(\mathrm{B})$ 是 X 和Y的子集，因此我们有

$$Y = (Y \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B})) \cup \mathsf{mod}(\mathcal{B}),\ \text{and}\ X \quad = (X \setminus \mathsf{mod}(\mathcal{B})) \cup \mathsf{mod}(\mathcal{B}).$$

结合式 (40)，可得

$$Y \subset X$$

由于$Y \in \chi(\Lambda, \mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod(B)}\ \varnothing)$，我们有$Y \in \mathrm{FR}(\Lambda)$，且$\mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod(B)}$，这意味着$Y \in \mathrm{FRSups}(\mathrm{mod(B)} \cup \mathbb{M}^+)$。然而，由于$Y \subseteq X$，这与$X \in \mathrm{MinFRSups}(\mathrm{mod(B)}\ \cup \mathbb{M}^+)$这一假设矛盾。

(b) $\min^{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathrm{mod(B)} \cup \mathbb{M}^+, \varnothing)) \subseteq \mathrm{MinFRSups}(\mathrm{mod(B)} \cup \mathbb{M}^+)$. 为了导出矛盾，我们假设该结论不成立。因此，存在$\mathbb{M} \in \min^{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod(B)}\ \varnothing))$，使得$\mathbb{M} \notin \mathrm{MinFRSups}(\mathrm{mod(B)} \cup \mathbb{M}^+)$。根据定义，$\mathrm{mod(B)} \cup \mathbb{M}^+ \subseteq \mathbb{M}$且$\mathbb{M}$是有限可表示的。因此，存在某个有限可表示的$\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$，使得$\mathrm{mod(B)}\ \cup \mathbb{M}^+ \subseteq \mathbb{M}'$。由于$\mathrm{mod(B)} \cup \mathbb{M}^+$同时包含于$\mathbb{M}$和$\mathbb{M}'$，且$\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$，可得

$$\mathbb{M}' \oplus (\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \cup \mathbb{M}^+) \subset \mathbb{M} \oplus (\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \cup \mathbb{M}^+),$$

这意味着 $\mathbb{M} \notin \min^{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathrm{mod(B)}\ \cup \mathbb{M}^+, \varnothing))$，这与假设相矛盾。

□

定理 11. 设$\mathcal{C}$ 为一个可分解二元模型类。若 $\mathcal{C}$ 是修正相容的，则$\mathcal{C}^+$ 是接收兼容的，且 $\mathcal{C}^-$ 是驱逐相容的。

证明. 设 C 是修正相容的。因此，在 C 上存在一个修订算子，满足审慎性、空扩展 与空删除。为了证明驱逐与接收相容性，只需证明存在

(a) C^+ 上的一个接收算子，以及

(b) C^-上的一个驱逐算子 evc。

我们将从 rev 的一个变体构造这样的驱逐与接纳算子。为了保证一**致性**公设，令 $\mathrm{sel} : \wp(\wp(\mathfrak{M})) \to \wp(\mathfrak{M})$ 为一个函数：给定由有限可表示集构成的集合X，它恰好选择其中之一，即 $\mathrm{sel}(X) \in X$，若 $X \neq \varnothing$。我们据此定义第二个修订算子 rev′，其中 $\mathrm{mod}(\mathrm{rev}'(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) = \mathbb{M}$ 使得

(i) 若 $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathrm{mod(B)}$，则

$$\mathbb{M} = \mathrm{sel}\Big(\min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\mathbb{M}^+, \mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(\mathcal{B}))))\Big)$$

(ii) 若 $\mathbb{M}^+ \not\subseteq \mathrm{mod(B)}$，但 $\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod(B)} = \varnothing$，则

$$\mathbb{M} = \mathrm{sel}\Big(\min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\Lambda, \mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod}(\mathcal{B}), \mathbb{M}^-))\Big)$$

（iii）否则，$\mathbb{M} = \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+,\ \mathbb{M}^-))$

注意，rev′ 满足对称差分定义中的三个条件，因此，rev′ 是一个对称差分函数。因此，它满足修订的所有理性公设。令

$$\mathsf{rcp}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+) = \mathsf{rev}'(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\varnothing)$$
$$\mathsf{evc}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+) = \mathsf{rev}'(\mathcal{B},\varnothing,\mathbb{M}^-)$$

我们将证明，它们分别是接收算子和驱逐算子。

1. (a) rcp 是一个接收算子。我们证明它满足接收算子的所有公设。根据定理 C.27，rcp 满足 **成功性**、持久性和有限节制性。接下来证明 一**致性**。假设

$$\mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathcal{B})\cup\mathbb{M},\Lambda) = \mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathcal{B}')\cup\mathbb{M}',\Lambda). \tag{41}$$

根据定义，rcp(B $\mathbb{M}$) =rev′(B $\mathbb{M}$，$\varnothing$)。要么 (I) $\mathbb{M}\subseteq$mod(B)，要么 (II) $\mathbb{M}\not\subseteq$mod(B)。

情形 (I)，mod(B) $\cup\mathbb{M}$ =mod(B)，而它是有限可表示的。因此，

$$\mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathcal{B})\cup\mathbb{M},\Lambda) = \{\mathsf{mod}(\mathcal{B})\cup\mathbb{M}\}. \tag{42}$$

So,

$$\min_{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M},\mathfrak{M}\setminus\mathsf{mod}(\mathcal{B})) = \{\mathsf{mod}(\mathcal{B})\cup\mathbb{M}\}.$$

因此，根据 rev′ 的构造，条件 (i),

$$\mathsf{mod}(\mathsf{rcp}(\mathcal{B},\mathbb{M})) = \mathsf{mod}(\mathcal{B})\cup\mathbb{M}$$

由 (41) 和 (42),

$$\mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathcal{B}')\cup\mathbb{M}',\Lambda) = \{\mathsf{mod}(\mathcal{B})\cup\mathbb{M}\}$$

根据持久性、成功性和有限节制性,

$$\mathsf{mod}(\mathsf{rcp}(\mathcal{B}',\mathbb{M}'))\in\mathrm{MinFRSups}(\mathsf{mod}(\mathcal{B}')\cup\mathbb{M}',\Lambda).$$

因此，mod(rcp(B′，$\mathbb{M}$′)) =mod(B) $\cup\mathbb{M}$，这意味着

$$\mathsf{mod}(\mathsf{rcp}(\mathcal{B},\mathbb{M})) = \mathsf{mod}(\mathsf{rcp}(\mathcal{B}',\mathbb{M}'))$$

情形 (II)，$\mathbb{M}\not\subseteq$mod(B)。令

$$X = \mathsf{mod}(\mathsf{rcp}(\mathcal{B},\mathbb{M})). \tag{43}$$

因此，根据 rev′ 的构造，条目 (ii),

$$X = \mathrm{sel}\big(\min_{\leq_{\mathsf{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M}\cup\mathsf{mod}(\mathcal{B}),\varnothing))\big) \tag{44}$$

由定理 C.28,

$\mathrm{MinFRSups}(\mathrm{mod}(B) \cup \mathbb{M}) = \min_{\preceq_{\mathrm{mod}(B)}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M} \cup \mathrm{mod}(B)\ \varnothing))$。

由公式 (41) 可知,

$$\mathrm{MinFRSups}(\mathrm{mod}(\mathcal{B}') \cup \mathbb{M}') = \min_{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi_\Lambda(\mathbb{M} \cup \mathrm{mod}(\mathcal{B}), \varnothing)). \quad (45)$$

要么 $\mathbb{M}' \subseteq \mathrm{mod}(B')$，要么不是。在 $\mathbb{M}' \subseteq \mathrm{mod}(B')$ 的情形下，我们得到 $\mathrm{MinFRSups}(\mathrm{mod}(B') \cup \mathbb{M}')$ 是单元素集 $\{Y\}$。由成功性、持久性和有限保留可知，$\mathrm{mod}(\mathrm{rcp}(B', \mathbb{M}')) = Y$。这与 (45)、(44) 和 (43) 共同蕴含 $X = Y$。因此，$\mathrm{mod}(\mathrm{evc}(B\ \mathbb{M})) = \mathrm{mod}((\mathrm{evc}(B\ \mathbb{M}')))$。

在 $\mathbb{M}' \nsubseteq \mathrm{mod}(B')$ 的情形下，由 rev′ 的定义第 (ii) 项，我们得到 $\mathrm{mod}(\mathrm{rcp}(B', \mathbb{M}')) = \mathrm{sel}(\min^{\preceq_{\mathrm{mod}(\mathcal{B})}}(\chi(\Lambda, \mathbb{M}^+ \cup \mathrm{mod}(B)\ \mathbb{M}^-)))$。由 (44) 和 (43)，我们有 $\mathrm{mod}(\mathrm{rcp}(B', \mathbb{M}'))$，这蕴含 $\mathrm{mod}(\mathrm{evc}(B\ \mathbb{M})) = \mathrm{mod}((\mathrm{evc}(B\ \mathbb{M}')))$。

2. (b) 根据 rev′ 的成功性，可得成功性。对于包含，根据定义，$\mathrm{evc}(B\ \mathbb{M}^-) = \mathrm{rev}'(B\ \varnothing, \mathbb{M}^-)$；由 rev′ 的构造中的第 (i) 项可知，$\mathrm{evc}(B\ \mathbb{M}^-) \in \chi_\Lambda(\varnothing, \mathbb{M}^- \cup (\mathfrak{M} \setminus \mathrm{mod}(B))$。这意味着无法得到任何模型。因此，包含条件成立。

(有限保留) 令 $\mathrm{mod}(\mathrm{evc}(B\ \mathbb{M}^-)) \subset \mathbb{M} \subseteq \mathrm{mod}(B) \setminus \mathbb{M}^-$。我们将证明 $\mathbb{M}$ 不是有限可表示的。令

$$X^- = \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathrm{mod}(\mathbb{M}).$$

由假设可得

$$\mathbb{M} \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{B}), \text{ and}$$
$$(\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod}(\mathcal{B})) \cap \mathbb{M} = \varnothing.$$

因此,

$$\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^- = \mathbb{M} \quad (46)$$
$$\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathrm{mod}(\mathbb{M})$$
$$\mathbb{M}^- \cap \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \subseteq X^- \quad (47)$$

由假设可得,

$$\mathrm{mod}(\mathrm{evc}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^-)) \subset \mathbb{M} \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{B}),$$

这意味着

$$\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathrm{mod}(\mathbb{M}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{evc}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^-))$$
$$X^- \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{evc}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^-)) \quad (48)$$

请注意

根据 evc 的定义，evc(B $\mathbb{M}^-$) = rev′(B $\varnothing$, $\mathbb{M}^-$)。因此， $\mathbb{M}^+ = \varnothing$。令$X^+ = \varnothing$。因此，

$$(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ = (\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-),$$

由此可由（46）推出

$$(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ = \mathbb{M}.$$

因此，由于 mod(evc(B $\mathbb{M}^-$)) $\subset \mathbb{M}$，我们得到 $\mathbb{M} \neq$mod(evc(B $\mathbb{M}^-$))。因此，

$$(\mathsf{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ \neq \mathsf{mod}(\mathsf{evc}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^-)) \tag{49}$$

由（6）和（48），满足**审慎性** 的条件（1）。由于 $\mathbb{M}^+ = X^+ = \varnothing$, **审慎性** 的条件（2）也得到满足。而**审慎性** 的条件（3）由（49）得出。因此，由**审慎性** 可知， $\mathbb{M}$ 不是有限可表示的。

一致性。其证明与情形（a）中**一致性** 的证明类似。驱逐可归结为rev′的情形（i）。只要不包含$\mathbb{M}^-$ 的最近子集也相同，选择函数就能保证驱逐结果一致。因此，一致性得到满足。

□

命题 C.30. 设$\mathcal{C}$ 是一个可分解的修正相容模型类。若evc是$\mathcal{C}^-$上的驱逐算子，则存在$\mathcal{C}$ 上的修订操作rev，满足所有公设，并且evc($\mathcal{B}$ $\mathbb{M}$) =rev($\mathcal{B}$ $\varnothing$,$\mathbb{M}^-$)。

证明。 由于 C 修正相容，因此存在一个修订操作 rev′。我们固定这样一个操作。定义如下操作

$$\mathsf{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) = \begin{cases} \mathsf{evc}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^-) & \text{if } \mathbb{M}^+ = \varnothing \\ \mathsf{rev}'(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) & \text{otherwise} \end{cases}$$

根据定义，evc(B $\mathbb{M}^-$) =rev(B $\varnothing$, $\mathbb{M}^-$)。为了完成证明，我们必须证明 rev 是一个修正函数。对于 $\mathbb{M}^+ \neq \varnothing$，四条公设都显然成立，因为在这种情形下，rev(B $\mathbb{M}^+$, $\mathbb{M}^-$) =rev′(B $\mathbb{M}^+$, $\mathbb{M}^-$)，而根据假设，它满足全部四条公设。因此，我们接下来考虑$M^+ = \varnothing$的情形。

- **成功性**：由 rev′ 和 evc 的成功性可得。
- **空扩展**。设 $\mathbb{M}^+ \subseteq$mod(B)。若 $\mathbb{M}^+ \neq \varnothing$，则**空扩展**由 rev′的**空扩展** 可得。若 $\mathbb{M}^+ = \varnothing$，则 rev(B $\mathbb{M}^+$,$\mathbb{M}^-$) =evc(B $\mathbb{M}^-$)，由包含可推出 mod(evc(B $\mathbb{M}^-$)) $\subseteq$ mod(B)。因此， mod(rev(B $\mathbb{M}^+$,$\mathbb{M}^-$)) $\subseteq$mod(B)。

• **空删除**：设 $\mathbb{M}^- \cap \text{mod(B)} = \varnothing$。若 $\mathbb{M}^+ \neq \varnothing$，则**空删除** 可由 rev′的**空删除** 推出。若 $\mathbb{M}^+ = \varnothing$，则 $\text{rev(B } \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-) = \text{evc(B } \mathbb{M}^-)$。因此，由于 $\mathbb{M}^- \cap \text{mod(B)} = \varnothing$，我们有 $\text{evc(B } \mathbb{M}^-) = \text{mod(B)}$，故 $\text{mod(rev(B } \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-)) = \text{mod(B)}$。所以，$\text{mod(B)} \subseteq \text{mod(rev(B } \mathbb{M}^+, \mathbb{M}^-))$。

• **审慎性**：设X^- 和X^+ 为满足有限节制条件 (1) 至 (3) 的集合。我们将证明 $(\text{mod(B)} \setminus X^-) \cup X^+ \notin$ 有限可表示$_\Lambda$。根据包含，

$$\text{mod}(\text{evc}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^-)) \subseteq \text{mod}(\mathcal{B}), \tag{50}$$

并且根据条件 (1)，$X^- \subseteq \text{mod(B)}$，且 $\text{mod(evc(B } \mathbb{M}^-)) \cap X^- = \varnothing$。因此，

$$\text{mod}(\text{evc}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^-)) \subseteq \text{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^- \tag{51}$$

根据定义，$\text{rev(B } \varnothing, \mathbb{M}^-) = \text{evc(B } \mathbb{M}^-)$，由 (51) 可得

$$\text{mod}(\text{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^-)) \subseteq \text{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^- \tag{52}$$

并且由 (50) 可得，

$$\text{mod}(\text{rev}(\mathcal{B}, \varnothing, \mathbb{M}^-)) \subseteq \text{mod}(\mathcal{B}).$$

因此，

$$\text{mod}(\text{rev}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^-)) \setminus \text{mod}(\mathcal{B}) = \varnothing$$

根据有限温和保留的条件 (2)，这意味着

$$X^+ = \varnothing.$$

因此，由有限温和保留条件 (3) 可得 $\text{mod(B)} \setminus X^- \neq \text{mod(rev(B } \varnothing, \mathbb{M}^-))$，由 (52) 可推出

$$\text{mod}(\text{rev}(\mathcal{B}, \varnothing, \mathbb{M}^-)) \subset \text{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-. \tag{53}$$

由有限温和保留条件 (1)，$\text{mod(B)} \cap \mathbb{M}^- \subseteq X^- \subseteq \text{mod(B)}$。因此，

$$\text{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^- \subseteq \text{mod}(\mathcal{B}) \setminus (\text{mod}(\mathcal{B}) \cap \mathbb{M}^-)$$

因此，由于 $\text{mod(B)} \setminus (\text{mod(B)} \cap \mathbb{M}^-) = \text{mod(B)} \setminus \mathbb{M}^-$，我们得到

$$\text{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^- \subseteq \text{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathbb{M}^-. \tag{54}$$

因此，由 (53) 和 (54) 可得

$$\text{mod}(\text{rev}(\mathcal{B}, \varnothing, \mathbb{M}^-)) \subset \text{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^- \subseteq \text{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathbb{M}^-$$

根据定义，$\text{rev(B } \varnothing, \mathbb{M}^-) = \text{evc(B } \mathbb{M}^-)$，这意味着

$$\text{mod}(\text{evc}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^-)) \subset \text{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^- 1 \subseteq \text{mod}(\mathcal{B}) \setminus \mathbb{M}^-$$

因此，根据有限保留，我们得到 $\text{mod(B)} \setminus X^- \notin$ 有限可表示$_\Lambda$。

因此，由$X^+ = \varnothing$，我们得到 $(\text{mod(B)} \setminus X^-) \cup X^+ \notin$ 有限可表示。

□

命题 C.31. 设$\mathcal{C}$ 是一个可分解的修正相容模型类。若rcp 是$\mathcal{C}^+$上的接收算子，则存在$\mathcal{C}$ 上的修订操作rev ，满足所有公设，并且rcp($\mathcal{B}$ $\mathbb{M}$) =rev($\mathcal{B}$ $\mathbb{M}$,$\varnothing$)。

证明。 由于 C 是修正相容的，因此存在一个修订操作rev′。我们固定这样一个操作，并定义如下操作

$$\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-) = \begin{cases} \mathrm{rcp}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+) & \text{if } \mathbb{M}^- = \varnothing \\ \mathrm{rev}'(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\mathbb{M}^-) & \text{otherwise} \end{cases}$$

根据定义，rcp(B $\mathbb{M}^+$) = rev(B $\mathbb{M}^+$, $\varnothing$)。要完成证明，我们必须证明 rev 是一个修正函数。对于 $\mathbb{M}^- \neq \varnothing$，四条公设都显然成立，因为在这种情形下，rev(B $\mathbb{M}^+$, $\mathbb{M}^-$) =rev′(B $\mathbb{M}^+$, $\mathbb{M}^-$)，而根据假设，后者满足全部四条公设。因此，我们接下来考虑 $M^- = \varnothing$ 的情形。

- **成功性**：显然 $\mathbb{M}^- \cap$mod(rev(B $\mathbb{M}^+$, $\mathbb{M}^-$)) = $\varnothing$。根据接收的成功性可知 $\mathbb{M}^+ \subset$ mod(rcp)(B $\mathbb{M}^+$)，这意味着 $\mathbb{M}^+ \subset$mod(rev)(B $\mathbb{M}^+$, $\varnothing$)
- **空扩展**：令 $\mathbb{M}^+ \subseteq$mod(B)。因此，根据接收的空性，mod(rcp(B $\mathbb{M}^+$)) = mod(B)。于是，rev(B $\mathbb{M}^+$, $\varnothing$) = mod(B)，这意味着 rev(B $\mathbb{M}^+$, $\varnothing$) $\subseteq$ mod(B)

- **空删除**：根据持久性，mod(B) $\subset$ mod(rcp(B $\mathbb{M}^+$))。因此，mod(B) $\subseteq$rev(B $\mathbb{M}^+$, $\varnothing$)。
- **审慎性**：为进行矛盾证明，我们假设有限节制性不成立。因此，存在满足有限节制性条件 1 至 3 的X^+ 和X^- ，但是

$$(\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ \in \mathrm{FR}(\Lambda). \tag{55}$$

根据持久性，mod(B) $\subseteq$rcp(B $\mathbb{M}^+$)，这意味着

$$\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\varnothing) \tag{56}$$

根据条件 1，我们有$X^- \subseteq$mod(B) $\setminus$ mod(rev(B $\mathbb{M}^+$, $\varnothing$))。因此，$X^- = \varnothing$。于是，

$$(\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \setminus X^-) \cup X^+ = \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \cup X^+$$

此外，由于$X^- = \varnothing$，由 (55) 可得，

$$\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \cup X^+ \in \mathrm{FR}(\Lambda) \tag{57}$$

由条件2，$X^+ \subseteq$mod(rev(B $\mathbb{M}^+$, $\varnothing$)). 因此，

$$\begin{aligned} X^+ \cup \mathrm{mod}(\mathcal{B}) &\subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\varnothing)) \cup \mathrm{mod}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\varnothing) \\ &\subseteq \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathcal{B},\mathbb{M}^+,\varnothing)) \qquad \text{(from (56))} \end{aligned}$$

由条件3，$X^+ \cup \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \neq \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+,\ \varnothing))$，根据上文可推出 $X^+ \cup \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{mod}(\mathrm{rev}(\mathrm{B}\ \mathbb{M}^+,\ \varnothing))$。因此，

$$X^+ \cup \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \subset \mathrm{mod}(\mathrm{rcp}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+)$$

根据条件2，$\mathbb{M}^+ \setminus \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \subseteq X^+$。因此，

$$\mathrm{mod}(\mathcal{B}) \cup \mathbb{M}^+ \subseteq X^+ \cup \mathrm{mod}(\mathcal{B}) \subset \mathrm{mod}(\mathrm{rcp}(\mathcal{B}, \mathbb{M}^+)).$$

因此，根据接收的有限温和性，我们得到$X^+ \cup \mathrm{mod}(\mathrm{B}) \notin$ 有限可表示(Λ)，这与 (57) 矛盾。

□

定理C.32. 设$\mathcal{C}$ 是一个可分解修正相容模型类，

1. 若evc 是$\mathcal{C}^-$上的驱逐算子，则存在$\mathcal{C}$上的修订算子rev ，满足所有理性公设，使得$\mathrm{evc}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^-) = \mathrm{rev}(\mathcal{B}\ \varnothing, \mathbb{M}^-)$；*2.* 若rcp 是$\mathcal{C}^+$上的接收算子，则存在$\mathcal{C}$上的修订算子rev ，满足所有理性公设，使得$\mathrm{rcp}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^+) = \mathrm{rev}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^+, \varnothing)$。

证明。 条目1由定理C.30得出，而条目2由定理C.31得出 □

定理 11. 设$\mathcal{C}$ 是一个可分解的修正相容二元模型类。以下结论对$\mathcal{C}$成立。

1. $\mathcal{C}^+$ 是接收兼容的，$\mathcal{C}^-$ 是驱逐相容的。*2.* 若evc 是$\mathcal{C}^-$上的驱逐算子，则存在一个$\mathcal{C}$上的修订算子rev ，满足所有理性公设，且$\mathrm{evc}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^-) = \mathrm{rev}(\mathcal{B}\ \varnothing, \mathbb{M}^-)$。*3.* 若$\mathcal{C}^+$上的rcp 是接收算子，则存在一个$\mathcal{C}$上的修订算子rev ，满足所有理性公设，且$\mathrm{rcp}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^+) = \mathrm{rev}(\mathcal{B}\ \mathbb{M}^+, \varnothing)$。

证明。 由定理C.32和定理C.29可得。

□

D 第6节的补充材料

定理 11。 $\Lambda(\mathcal{EL}^{\bot concepts})$和 $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 在有限树形带点解释的二元类中不具备修正相容性。即使将范围限制为有限模型集，或限制为有限签名，这一结论仍然成立。

证明。 考虑以下情形：在有限签名上，(I, d) 和 (J, e) 是两个不同但双模拟等价的有限树形带点解释。由于 EL 和 ALC 在双模拟等价的带点解释下是不变的，因此不存在 $Y \in \mathrm{FR}(\Lambda(\mathrm{EL}^{\bot concepts}))$，也不存在 $Y \in \mathrm{FR}(\Lambda(\mathrm{ALC}^{concepts}))$，使得 $\{(\mathrm{I}, d)\} \subseteq Y$ 以及 $\{(\mathrm{J}, e)\} \cap Y = \varnothing$。由于我们无法满足 **成功性**，这意味着在有限模型集和有限签名的有限树形带点解释类中，$\Lambda(\mathrm{EL}^{concepts})$ 和 $\Lambda(\mathrm{ALC}^{concepts})$ 不是修正相容的（定理22）。

□

定理 11. $\Lambda(\mathcal{ALC}^{concepts})$ 对于由有限个有限树形带点解释构成的集合经互模拟闭包得到的带点解释二元类，是修正相容的；这些解释基于一个（唯一的）有限签名。

证明。设 $\{(I_1,d_1)\ ...,\ (I_n,d_n)\}$ 和 $\{(J_1,e_1)\ ...,\ (J_m,e_m)\}$ 是有限签名 Σ 上的互模拟不相交的有限树形带点解释的有限集合，并令$\mathbb{M}^+$ 和 $\mathbb{M}^-$ 为它们的互模拟闭包。令 D_i 为一个 $EL_\bot$ 概念，其中 I^{D_i}与 I_i同构；令 E j 为一个 $EL_\bot$ 概念，其中 J^{E_j}与 J_j同构。令 C 为 Σ上的一个 ALC 概念。由于 $(I_1,d_1)\ ...,\ (I_n,d_n)$ 和 $(J_1,e_1)\ ...,\ (J_m,e_m)$ 是有限签名上Σ 的互模拟不相交的有限树形带点解释的有限集合，并且 $\mathbb{M}^+$ 和 $\mathbb{M}^-$ 是它们的互模拟闭包，因此 $\mathbb{M}^+$ 和 $\mathbb{M}^-$ 不相交。我们论证如下：

$$\mathsf{mod}((\bigsqcup_{i=1}^{n}(D_i)^\dagger \sqcup C) \sqcap \prod_{j=1}^{m} \neg(E_j)^\dagger) = (\mathbb{M}^+ \cup \mathsf{mod}(C)) \setminus \mathbb{M}^-.$$

事实上，根据 ALC 语义，

$$\mathsf{mod}((\bigsqcup_{i=1}^{n}(D_i)^\dagger \sqcup C)) = \mathsf{mod}(\bigsqcup_{i=1}^{n}(D_i)^\dagger) \cup \mathsf{mod}(C).$$

根据引理 B.17 和D_i的定义，我们有

$$\mathsf{mod}(\bigsqcup_{i=1}^{n}(D_i)^\dagger) = \bigcup_{i=1}^{n}\mathsf{mod}((D_i)^\dagger) = \mathbb{M}^+.$$

此外，根据引理 B.17 和E_j的定义，我们有

$$\mathsf{mod}(\prod_{j=1}^{m}\neg(E_j)^\dagger) = \bigcap_{j=1}^{m}(\mathfrak{M} \setminus \mathsf{mod}((E_j)^\dagger)) = \mathfrak{M} \setminus (\bigcup_{j=1}^{m}\mathsf{mod}((E_j)^\dagger)) = \mathfrak{M} \setminus \mathbb{M}^-.$$

于是，

$$\mathsf{mod}((\bigsqcup_{i=1}^{n}(D_i)^\dagger \sqcup C) \sqcap \prod_{j=1}^{m}\neg(E_j)^\dagger) = (\mathbb{M}^+ \cup \mathsf{mod}(C)) \cap (\mathfrak{M} \setminus \mathbb{M}^-) = (\mathbb{M}^+ \cup \mathsf{mod}(C)) \setminus \mathbb{M}^-.$$

定理 C.26 的条件对该二元类成立，因此 $\Lambda(\mathrm{ALC}^{\mathrm{concepts}})$ 是修正相容的。

□