arXiv:2603.05580v1 [math.CA] 5 Mar 2026

利用超振荡逼近魏尔斯特拉斯函数

F. COLOMBO、I. SABADINI 和 D. C. STRUPPA

摘要。魏尔斯特拉斯函数是连续但处处不可微函数的经典例子，其定义为一系列高频复指数函数之和。本文遵循 M.V. Berry 的建议，研究 Berry 的超振荡逼近截断魏尔斯特拉斯函数的收敛性质。我们为这种逼近给出精确的显式误差估计，并分析相关双重极限微妙的收敛性质。

AMS 分类 35A20

Ke关键词：超振荡、魏尔斯特拉斯函数、截断魏尔斯特拉斯函数 .

1. 引言

过去 10–20 年间，超振荡已成为数学家 [4, 6, 23] 以及对量子力学和光学感兴趣的物理学家[1, 5, 7, 13, 14, 15, 17, 18, 19]的重要研究对象。关于该领域最新进展的全面介绍（至少截至几年前）见《超振荡路线图》 [11]。

粗略地说，超振荡是指在一个小区间内振荡速度远高于其最高傅里叶频率分量的函数。这种看似矛盾的性质源于各个频率之间近乎完美的相消干涉；而函数一旦离开超振荡区域便会以指数级速度增长，这使得这种性质成为可能。

超振荡的典型例子（几乎每篇相关论文都会提及）由以下表达式给出，其中 n是一个整数， α 是一个较大的正实参数：

$$F_n(x;\alpha) := \left(\cos\frac{x}{n} + i\alpha \sin\frac{x}{n}\right)^n. \tag{1}$$

将三角函数表示为指数函数后，不难看出，该函数可改写为：

$$F_n(x;\alpha) = \sum_{j=0}^{n} C_j(n;\alpha) e^{ix\lambda_{j,n}}, \tag{2}$$

F. Colombo 与 I. Sabadini 得到意大利大学与研究部卓越系 2023-2027 项目的资助。D.C. Struppa 感谢帕克·肯尼迪数学讲席对其研究的支持。

其中 $C_j(n;\,\alpha) := \binom{n}{j}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{n-j}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{j}$ and $\lambda_{j,n} := 1-\frac{2j}{n}$. 因此， F_n 是由频率介于 -1 和 1 之间的波简单叠加而成的。显然，当 x 较小时，该函数可近似为：

$$F_n(x;\alpha) \approx \left(1+i\frac{\alpha x}{n}\right)^n \approx e^{i\alpha x}. \tag{3}$$

公式 (2)、(3) 解释了超振荡这一术语：我们有一个函数，其傅里叶频率在 $[-1,1]$ 中有界，却能逼近一个频率 α 任意大的函数。为研究这一行为，Berry 引入了局域波数[7],这一概念；它本质上就是相位梯度，定义如下：

$$k_{loc}(x) = \partial_x \arg(F_n(x)) = \partial_x \mathrm{Im}(\log(F_n(x))) = \frac{\alpha}{\cos^2\frac{x}{n}+\alpha^2\sin^2\frac{x}{n}}. \tag{4}$$

当 $|k_{loc}(x)| > 1$ 时，就会出现超振荡，而 $k_{loc}(x)$ 则描述了这种效应的强度。简单计算可知，超振荡区域为$|x| < n$反正切函数$(1/\sqrt{\alpha})$（假设 $\alpha > 1$），其中 $k_{loc}(x) > 1$。

Berry 及其合作者后来探讨了超振荡能否表示分形函数 [10, 9]。具体而言，在 [10], 中，Berry 和 Morley-Short 考察了魏尔斯特拉斯-曼德布罗分形函数，并指出，若将其截断于任意精细的尺度，就可以用超振荡函数以任意所需的精度表示。

[10] 中使用的具体例子是如下定义的魏尔斯特拉斯分形：

$$W(x,D,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\gamma^n x)}{\gamma^{n(2-D)}} \quad (\gamma > 1, 1 < D < 2), \tag{5}$$

其中 D 是分形维数， γ 是缩放因子 [21]。为了构造带限近似，他们将高频项$\cos(\gamma^n x)$替换为实部：

$$S(x,\gamma^n,N) = \mathrm{Re}\left[\left(\cos\frac{x}{N} + i\gamma^n \sin\frac{x}{N}\right)^N\right] \tag{6}$$

即标准超振荡函数 [3]的实部。他们证明，这为截断魏尔斯特拉斯函数提供了极好的近似。要使该近似在区间 $[-X,X]$上成立，参数 N必须满足 $N \gg X^2(\gamma^{2n}-1)$。

作者提出了一种超振荡分形函数 WS，其构造方式是将S 代入魏尔斯特拉斯和：

$$WS(x,D,\gamma;X,K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(x,\gamma^n,K(X,\gamma^n))}{\gamma^{n(2-D)}}, \tag{7}$$

其中 K 随频率 γ^n 缩放，以确保近似成立。数值模拟表明， WS 能够忠实地再现 W 的自相似分形结构，直至非常精细的尺度。然而， WS 在目标区间之外呈指数增长，数值可高达 10^{11}, , 这意味着对噪声 [8]极为敏感。

在论文的结尾，作者指出：“..... WS 在极限 $K \to \infty$ 下表示 W 的确切数学含义，将是一个有趣的研究课题.....”

本文探讨的正是这个问题。我们证明，尽管一般而言， WS 在极限 $K \to \infty$ 下未必表示W ，但我们可以施加适当的条件，确保这种表示存在。我们首先分析最初的魏尔斯特拉斯函数，该函数旨在证明连续但处处不可微函数 [24]的存在：

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \cos(b^m \pi x), \tag{8}$$

其中 $0 < a < 1$, b 是奇整数，且 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$。本文聚焦于其复值版本：

$$W(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m e^{ib^m \pi x}. \tag{9}$$

我们逼近索引为 N 的截断级数：

$$W_N(x) = \sum_{m=0}^{N} a^m e^{ib^m \pi x}. \tag{10}$$

通过替 换每个高频项 $e^{i(b^m \pi)x}$ 为序列 $F_n(x; b^m \pi)$，我们定义 e:

$$\mathcal{W}_{N,n}(x) = \sum_{m=0}^{N} a^m \left[\cos\left(\frac{x}{n}\right) + i(b^m \pi)\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n. \tag{11}$$

当 $n \to \infty$ 且 N 固定时，我们得到截断魏尔斯特拉斯函数 $W_N(x)$.

本文结构如下。在第2节中，我们为截断魏尔斯特拉斯函数的超振荡近似建立若干尖锐且显式的误差估计：这些估计对于证明我们的主要结果至关重要。在第3节中，我们证明：若固定截断魏尔斯特拉斯函数中对指数函数的超振荡近似，再令截断极限趋于无穷，则一般不能恢复魏尔斯特拉斯函数；换言之，尽管截断魏尔斯特拉斯函数可由超振荡逼近，但对魏尔斯特拉斯函数本身并非如此。然而，在第4节中，我们证明了一个定理，希望它能回答Berry与Morley-Short最初提出的问题，并表明：若令指数函数的超振荡表示的近似指标与魏尔斯特拉斯函数的截断指标按精确比例同时趋于无穷，则确实可以得到魏尔斯特拉斯函数的超振荡近似。本文最后对采用不同超振荡序列（而不必是本引言开头所述的典型序列）实施类似程序的可能性作若干评述。

2. 超振荡下截断魏尔斯特拉斯函数的估计

在证明主要逼近定理之前，我们先对超振荡序列收敛到其极限给出一个精确且显式的估计。下面给出一些预备性的初等不等式。

引理 2.1。 设 $\gamma > 0$ 和 $y > -1$。则有如下估计：

$$|(1+y)^\gamma - 1| \leq \gamma |y| e^{\gamma |y|}$$

证明。 根据 y 的符号，我们分两种情况讨论。注意，若 $y = 0$，两边均为 0，不等式显然成立。

情况 1： $y > 0$。由于 $y > 0$，我们有 $1 + y \leq e^y$。因为 $\gamma > 0$，我们可以将两边提升到 γ 次方：

$$(1+y)^\gamma \leq (e^y)^\gamma = e^{\gamma y}.$$

两边同时减去 1，得到：

$$(1+y)^\gamma - 1 \leq e^{\gamma y} - 1.$$

我们使用不等式 $e^x - 1 \leq x e^x$，它对所有 $x \geq 0$ 均成立（由 $e^x - 1 = \int_0^x e^t dt \leq \int_0^x e^x dt = x e^x$ 推得）。令 $x = \gamma y$：

$$(1+y)^\gamma - 1 \leq \gamma y e^{\gamma y}.$$

由于 $y > 0$，我们有 $y = |y|$ 且 $(1+y)^\gamma - 1 > 0$。因此：

$$|(1+y)^\gamma - 1| \leq \gamma |y| e^{\gamma |y|}.$$

情形 2： $-1 < y < 0$。我们使用微积分基本定理。定义

$$f(t) = (1+t)^\gamma.$$

于是：

$$(1+y)^\gamma - 1 = f(y) - f(0) = \int_0^y f'(t)\, dt = \int_0^y \gamma (1+t)^{\gamma - 1}\, dt.$$

取绝对值：

$$|(1+y)^\gamma - 1| = \left| \int_0^y \gamma (1+t)^{\gamma - 1}\, dt \right|.$$

由于 $y < 0$，区间为 $[y, 0]$。我们可以将积分的绝对值改写为：

$$\left| \int_0^y \gamma (1+t)^{\gamma - 1}\, dt \right| = \gamma \int_y^0 (1+t)^{\gamma - 1}\, dt.$$

我们假设 $\gamma \geq 1$ 以得到一致界（因为 $\gamma < 1$ 在 $y = -1$ 处的奇点需要单独处理）。若 $\gamma \geq 1$，则 $\gamma - 1 \geq 0$。对于 $t \in [y, 0]$，我们有 $1 + t \leq 1$。因此：

$$(1+t)^{\gamma - 1} \leq 1^{\gamma - 1} = 1.$$

将此界代入积分：

$$\gamma \int_y^0 (1+t)^{\gamma - 1}\, dt \leq \gamma \int_y^0 1\, dt = \gamma (0 - y) = \gamma (-y) = \gamma |y|.$$

由于对于任意实数自变量， $e^{\gamma |y|} \geq 1$ 都成立，因此我们必然有 $\gamma |y| \leq \gamma |y| e^{\gamma |y|}$。于是：

$$|(1+y)^\gamma - 1| \leq \gamma |y| e^{\gamma |y|}.$$

综合这两种情况，该估计成立。 □

定理 2.2（显式误差估计）。令 $M > 0$ 为一个固定的实数，并令 $\alpha \in \mathbb{R}$。定义常数：

$$K(\alpha) = \frac{|\alpha^2 - 1|M^2}{2} \quad and \quad J(\alpha) = 2|\alpha(1-\alpha^2)|M^3.$$

于是，对于任意整数 $n \geq \frac{4M}{\pi}$，对所有 $|x| \leq M$，以下显式估计成立：

$$\left| \left(\cos\frac{x}{n} + i\alpha \sin\frac{x}{n} \right)^n - e^{i\alpha x} \right| \leq \frac{1}{n} \sqrt{K(\alpha)^2 e^{2K(\alpha)/n} + \frac{J(\alpha)^2}{n^2} e^{K(\alpha)/n}}. \tag{12}$$

证明。令 $w := F_n(x, \alpha) = \left(\cos\frac{x}{n} + i\alpha \sin\frac{x}{n}\right)^n$，以及 $z := e^{i\alpha x}$。我们的目标是估计复平面中的欧几里得距离 $|w - z|$。将这两个数分别表示为极坐标形式$w = \rho_w e^{i\theta_w}$ 和 $z = \rho_z e^{i\theta_z}$，可得：

$$\begin{aligned}
\rho_w &= \left(\cos^2\frac{x}{n} + \alpha^2 \sin^2\frac{x}{n} \right)^{n/2} = \left(1 + (\alpha^2 - 1)\sin^2\frac{x}{n} \right)^{n/2}, \\
\theta_w &= n \arctan\left(\alpha \tan\frac{x}{n} \right), \\
\rho_z &= 1, \quad \theta_z = \alpha x.
\end{aligned}$$

由复平面中的卡诺定理：

$$|w - z|^2 = \rho_w^2 + 1 - 2\rho_w \cos(\theta_w - \theta_z) = (\rho_w - 1)^2 + 2\rho_w(1 - \cos(\theta_w - \theta_z)). \tag{13}$$

Us应用标准泰勒不等式 $1 - \cos y \leq \frac{y^2}{2}$（对所有 $y \in \mathbb{R}$ 均成立），我们得到 ：

$$|w - z|^2 \leq (\rho_w - 1)^2 + \rho_w(\theta_w - \theta_z)^2. \tag{14}$$

我们利用不等式 $|(1+y)^\gamma - 1| \leq \gamma|y|e^{\gamma|y|}$（当 $\gamma > 0$ 且 $y > -1$ 时）估计 ρ_w 的模。令 $\gamma = n/2$，并令 $y = (\alpha^2 - 1)\sin^2(x/n)$，注意到 $|\sin u| \leq |u|$，可得：

$$|\rho_w - 1| \leq \frac{n}{2}|\alpha^2 - 1| \frac{x^2}{n^2} \exp\left(\frac{n}{2}|\alpha^2 - 1| \frac{x^2}{n^2} \right) \leq \frac{|\alpha^2 - 1|M^2}{2n} \exp\left(\frac{|\alpha^2 - 1|M^2}{2n} \right).$$

代入 $K(\alpha) = \frac{|\alpha^2 - 1|M^2}{2}$，我们得到：

$$|\rho_w - 1| \leq \frac{K(\alpha)}{n} e^{K(\alpha)/n}. \tag{15}$$

此外，由于 $\rho_w = (\rho_w - 1) + 1 \leq |\rho_w - 1| + 1$，根据指数函数的增长可知 $\rho_w \leq e^{K(\alpha)/n}$。

现在我们估计相位差 $\Delta\theta = \theta_w - \theta_z$ define

$$h(u) = n \arctan(\alpha \tan u) - n\alpha u,$$

使得 $\Delta\theta = h(x/n)$。令 $g(u) =$ 反正切函数$(\alpha \tan u) - \alpha u$。其导数为：

$$g'(u) = \frac{1}{1 + (\alpha \tan u)^2} \cdot \alpha \sec^2 u - \alpha = \alpha \left(\frac{\sec^2 u - (1 + \alpha^2 \tan^2 u)}{1 + \alpha^2 \tan^2 u} \right) = \frac{\alpha(1 - \alpha^2)\tan^2 u}{1 + \alpha^2 \tan^2 u}.$$

根据中值定理，存在 ξ 介于 0 和 x/n 之间，使得

$$|g(x/n) - g(0)| = |x/n||g'(\xi)|.$$

由于 $n \geq 4M/\pi$，我们有 $|\xi| < |x/n| \leq \pi/4$。在此范围内，$\tan^2 \xi \leq 2\xi^2$（因为 $\tan \xi \approx \xi$且 $1 + \alpha^2 \tan^2 \xi \geq 1$）。因此：

$$|g'(\xi)| \leq |\alpha(1-\alpha^2)| \tan^2 \xi \leq 2|\alpha(1-\alpha^2)|\xi^2 \leq 2|\alpha(1-\alpha^2)|\frac{x^2}{n^2}.$$

Then

$$|\Delta\theta| = n|g(x/n)| \leq n \cdot \frac{|x|}{n} \cdot 2|\alpha(1-\alpha^2)|\frac{x^2}{n^2} \leq \frac{2|\alpha(1-\alpha^2)|M^3}{n^2}.$$

令 $J(\alpha) = 2|\alpha(1-\alpha^2)|M^3$，得到 $|\Delta\theta| \leq \frac{J(\alpha)}{n^2}$。

将这些估计代入 (14)：

$$|w-z|^2 \leq \left(\frac{K(\alpha)}{n} e^{K(\alpha)/n}\right)^2 + e^{K(\alpha)/n}\left(\frac{J(\alpha)}{n^2}\right)^2.$$

从整个表达式中提取公因子 $1/n^2$：

$$|w-z|^2 \leq \frac{1}{n^2}\left[K(\alpha)^2 e^{2K(\alpha)/n} + \frac{J(\alpha)^2}{n^2} e^{K(\alpha)/n}\right].$$

对两边开平方，得到所需的不等式。 □

我们研究复值截断魏尔斯特拉斯函数及其通过超振荡序列得到的近似。

定义 2.3 （截断魏尔斯特拉斯函数）。 设 $0 < a < 1$ 和 b 为满足 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$的奇整数。对于固定的整数 $N \in \mathbb{N}$，截断魏尔斯特拉斯函数$W_N(x)$定义如下：

$$W_N(x) = \sum_{m=0}^{N} a^m e^{i\alpha_m x}, \quad \text{where } \alpha_m = b^m \pi. \tag{16}$$

定义 2.4 （超振荡近似）。 截断魏尔斯特拉斯函数的 n 阶超振荡近似定义如下：

$$\mathcal{W}_{N,n}(x) = \sum_{m=0}^{N} a^m \left[\cos\left(\frac{x}{n}\right) + i\alpha_m \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n. \tag{17}$$

容易验证，由基本极限 $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{i\alpha x}{n} + O(n^{-2}))^n = e^{i\alpha x}$，我们可恢复该函数：

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_{N,n}(x) = W_N(x). \tag{18}$$

定理 2.5（全局近似误差）。设 $M > 0$ 与 N 固定。设 $\alpha_m = b^m\pi$并定义最大常数

$$K_{\max} = \frac{(\alpha_N^2 - 1)M^2}{2}.$$

对于任意整数 $n \geq \max\left(\frac{4M}{\pi}, K_{\max}\right)$，近似误差满足：

$$\sup_{|x|\leq M} |W_N(x) - \mathcal{W}_{N,n}(x)| \leq \frac{e}{n}\mathcal{S}_1 + \frac{\sqrt{e}}{n^2}\mathcal{S}_2, \tag{19}$$

其中 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 定义如下：

$$\mathcal{S}_1(N) = \frac{M^2}{2}\left[\pi^2\frac{(ab^2)^{N+1} - 1}{ab^2 - 1} - \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}\right], \tag{20}$$

$$\mathcal{S}_2(N) = 2M^3\left[\pi^3\frac{(ab^3)^{N+1} - 1}{ab^3 - 1} - \pi\frac{(ab)^{N+1} - 1}{ab - 1}\right]. \tag{21}$$

证明。定义逐点误差函数 $E_{N,n}(x) = |W_N(x) - \mathcal{W}_{N,n}(x)|$。通过代入定义 (16) 和 (17)，并应用三角不等式，我们将总误差界定为各项误差之和：

$$E_{N,n}(x) \leq \sum_{m=0}^{N} a^m \left|e^{i\alpha_m x} - \left(\cos\frac{x}{n} + i\alpha_m \sin\frac{x}{n}\right)^n\right|. \tag{22}$$

对每个频率 α_m应用定理 2.2，可得：

$$E_{N,n}(x) \leq \sum_{m=0}^{N} a^m \left[\frac{1}{n}\sqrt{K_m^2 e^{2K_m/n} + \frac{J_m^2}{n^2}e^{K_m/n}}\right],$$

其中 $K_m = \frac{|\alpha_m^2 - 1|M^2}{2}$和 $J_m = 2|\alpha_m(1 - \alpha_m^2)|M^3$。利用平方根的次可加性，对于非负的 A, B，有 $\sqrt{A^2 + B^2} \leq A + B$，可得：

$$E_{N,n}(x) \leq \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{N} a^m \left(K_m e^{K_m/n} + \frac{J_m}{n}e^{K_m/2n}\right).$$

在约束条件 $n \geq K_{\max} \geq K_m$ 下，可得 $K_m/n \leq 1$。因此，$e^{K_m/n} \leq e$ 和$e^{K_m/2n} \leq \sqrt{e}$。将这些常数从求和式中提取出来：

$$\sup_{|x|\leq M} E_{N,n}(x) \leq \frac{e}{n}\sum_{m=0}^{N} a^m K_m + \frac{\sqrt{e}}{n^2}\sum_{m=0}^{N} a^m J_m.$$

现在通过代入 $K_m = \frac{M^2}{2}(\pi^2 b^{2m} - 1)$ 计算 $\mathcal{S}_1$：

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{m=0}^{N} a^m \frac{M^2}{2}(\pi^2 b^{2m} - 1) = \frac{M^2\pi^2}{2}\sum_{m=0}^{N}(ab^2)^m - \frac{M^2}{2}\sum_{m=0}^{N} a^m.$$

应用几何级数公式 $\sum_{k=0}^{N} r^k = {}^{r^{N+1}-1}_{r-1}$ ：

$$\mathcal{S}_1 = \frac{M^2\pi^2}{2}\left(\frac{(ab^2)^{N+1}-1}{ab^2-1}\right) - \frac{M^2}{2}\left(\frac{a^{N+1}-1}{a-1}\right).$$

对 $M^2/2$ 进行因式分解并调整符号，即可得到定理中的表达式。为计算$\mathcal{S}_2$，我们代入 $J_m = 2M^3(\pi^3 b^{3m} - \pi b^m)$：

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{m=0}^{N} a^m[2M^3(\pi^3 b^{3m} - \pi b^m)] = 2M^3\pi^3 \sum_{m=0}^{N}(ab^3)^m - 2M^3\pi \sum_{m=0}^{N}(ab)^m.$$

再次使用几何级数求和：

$$\mathcal{S}_2 = 2M^3\pi^3\left(\frac{(ab^3)^{N+1}-1}{ab^3-1}\right) - 2M^3\pi\left(\frac{(ab)^{N+1}-1}{ab-1}\right).$$

至此完成详细推导。 □

3. 固定n极限的发散

在本节中，我们证明：虽然截断魏尔斯特拉斯函数可以用超振荡来逼近，但如果保持超振荡指标 n固定，则魏尔斯特拉斯函数不能被逼近。

定理 3.1（极限的发散 $N \to \infty$）。设 $n \geq 1$ 为一个固定整数，并设 $M > 0$ 满足 $M < n\pi$。考虑由部分和定义的函数序列：

$$\mathcal{W}_{N,n}(x) = \sum_{m=0}^{N} a^m \left[\cos\left(\frac{x}{n}\right) + i\alpha_m \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n, \tag{23}$$

其中 $\alpha_m = b^m\pi$、$0 < a < 1$ 和 $b > 1$。于是，无穷级数 $\lim_{N\to\infty} \mathcal{W}_{N,\,n}(x)$ 的表现如下：

（1）对于 $x = 0$，该级数绝对收敛到 ${}^{1}_{1-a}$。（2）对于任意 $x \in [-M, M] \setminus \{0\}$，该级数发散。

证明。记 $u_m(x)$ 为该级数的一般项：

$$u_m(x) = a^m \left[\cos\left(\frac{x}{n}\right) + ib^m\pi \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n.$$

情形 1：$x = 0$。将 $x = 0$ 代入 $u_m(x)$ 的表达式中，注意到 $\cos(0) = 1$ 且 $\sin(0) = 0$。该项化简为：

$$u_m(0) = a^m[1 + i(0)]^n = a^m \cdot 1^n = a^m.$$

该级数变为 $\sum_{m=0}^{\infty} a^m$。由于 $0 < a < 1$，这是一个收敛的几何级数。其和由众所周知的公式给出：

$$\mathcal{W}_{\infty,n}(0) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m = \frac{1}{1-a}.$$

情况 2： $x \neq 0$。设 $x \in [-M, M] \setminus \{0\}$。由于 $M < n\pi$，我们有 $0 < |x/n| < \pi$，这意味着 $\sin(x/n) \neq 0$。为了研究 $\sum u_m(x)$ 的收敛性，我们使用比值判别法考察通项模的极限。设 $\rho_m(x)$ 为相邻两项模的比值：

$$\rho_m(x) = \left| \frac{u_{m+1}(x)}{u_m(x)} \right| = \frac{a^{m+1}}{a^m} \left| \frac{\cos(x/n) + ib^{m+1}\pi \sin(x/n)}{\cos(x/n) + ib^m \pi \sin(x/n)} \right|^n.$$

我们化简模内的表达式：

$$\rho_m(x) = a \left(\frac{|\cos(x/n) + ib^{m+1}\pi \sin(x/n)|}{|\cos(x/n) + ib^m \pi \sin(x/n)|} \right)^n,$$

and

$$\rho_m(x) = a \left(\sqrt{\frac{\cos^2(x/n) + b^{2m+2}\pi^2 \sin^2(x/n)}{\cos^2(x/n) + b^{2m}\pi^2 \sin^2(x/n)}} \right)^n.$$

为了求 $m \to \infty$ 时的极限，我们将平方根内分子和分母同时除以主导项 b^{2m}：

$$\rho_m(x) = a \left(\sqrt{\frac{\frac{\cos^2(x/n)}{b^{2m}} + b^2\pi^2 \sin^2(x/n)}{\frac{\cos^2(x/n)}{b^{2m}} + \pi^2 \sin^2(x/n)}} \right)^n.$$

当 $m \to \infty$ 时，含有 $1/b^{2m}$ 的项趋于零，因为 $b > 1$。因此：

$$L = \lim_{m\to\infty} \rho_m(x) = a \left(\sqrt{\frac{b^2\pi^2 \sin^2(x/n)}{\pi^2 \sin^2(x/n)}} \right)^n = a(\sqrt{b^2})^n = ab^n.$$

根据魏尔斯特拉斯条件 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$，显然 $ab > 1$。由于 $b > 1$ 和 $n \geq 1$，我们有：

$$L = ab^n \geq ab > 1.$$

根据比值判别法，如果模的比值极限严格大于 1，则级数 $\mathcal{W}_{N,\ n}(x)$ 对任意 $x \neq 0$ 都发散。□

我们研究一种逐次极限：先令振荡参数 n 趋于无穷，再令截断阶数 N趋于无穷。这一操作顺序对应于先近似每个单独的频率分量，再对整个级数求和。

定理 3.2 (迭代极限的收敛)。令 $\mathcal{W}_{N,n}(x)$ 为魏尔斯特拉斯函数的超振荡近似，其定义如下：

$$\mathcal{W}_{N,n}(x) = \sum_{m=0}^{N} a^m \left[\cos\left(\frac{x}{n}\right) + i(b^m\pi) \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right]^n, \tag{24}$$

其中 $0 < a < 1$ 且 $b > 1$。那么，对于任意 $x \in \mathbb{R}$，迭代极限收敛到魏尔斯特拉斯函数 $W(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m e^{ib^m \pi x}$：

$$\lim_{N\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_{N,n}(x) \right) = W(x). \tag{25}$$

证明。 证明显而易见。 □

注 3.3 (极限的不可交换性)。 必须强调，极限的次序不可互换。根据先前的结果，对于任意固定的 n 和 $x \neq 0$，极限 $\lim_{N\to\infty} \mathcal{W}_{N,n}(x)$ 发散。因此：

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_{N,n}(x) \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mathcal{W}_{N,n}(x),$$

这说明当 $N \to \infty$ 时， n 中缺乏一致收敛会导致失效。

4. 联合收敛定理

本节回答 M. V. Berry 在 [10] 中提出的原始问题，并确立超振荡近似$\mathcal{W}_{N,n}(x)$ 收敛到魏尔斯特拉斯函数 $W(x)$ 的条件，其中截断阶数 N 和振荡参数n 同时趋于无穷大。

定理 4.1 (联合收敛)。 设 $M > 0$、 $0 < a < 1$和 $b > 1$ 为奇整数。令$W(x)$ $= \sum_{m=0}^{\infty} a^m e^{ib^m \pi x}$为魏尔斯特拉斯函数。若整数序列 $\{n_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 满足增长条件

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(ab^3)^N}{n_N} = 0, \tag{26}$$

那么，函数序列 $\mathcal{W}_{N,n_N}(x)$ 在区间$[-M, M]$上一致收敛到 $W(x)$:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{|x|\leq M} |\mathcal{W}_{N,n_N}(x) - W(x)| = 0. \tag{27}$$

证明。 设 $x \in [-M, M]$。我们将总误差定义为 $\mathcal{E}(N) = |\mathcal{W}_{N,n_N}(x) - W(x)|$。根据三角不等式，我们将此误差分解为两部分：

$$\mathcal{E}(N) \leq \underbrace{|\mathcal{W}_{N,n_N}(x) - W_N(x)|}_{E_1(N)} + \underbrace{|W_N(x) - W(x)|}_{E_2(N)}, \tag{28}$$

其中， $W_N(x) = \sum_{m=0}^{N} a^m e^{ib^m \pi x}$是魏尔斯特拉斯级数的第 N 个部分和。

截断误差的估计（E_2）。项 $E_2(N)$ 表示魏尔斯特拉斯级数的尾项。利用以下事实：对于任意 $\theta \in \mathbb{R}$， $|e^{i\theta}| = 1$：

$$E_2(N) = \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} a^m e^{ib^m \pi x} \right| \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} a^m = \frac{a^{N+1}}{1-a}.$$

由于 $0 < a < 1$，右端是一个零序列，这意味着 $\lim_{N\to\infty} E_2(N) = 0$在 $[-M, M]$ 上一致成立。

近似误差的估计（E_1）。根据此前建立的全局近似误差定理，对于 $n_N \geq \max(\frac{4M}{\pi}, K_{\max})$，我们有：

$$E_1(N) \leq \frac{e}{n_N} \mathcal{S}_1(N) + \frac{\sqrt{e}}{n_N^2} \mathcal{S}_2(N).$$

我们考察 $\mathcal{S}_1(N)$ 和 $\mathcal{S}_2(N)$ 的渐近增长。回顾其定义，另见 (20)、(21)：

$$\mathcal{S}_1(N) = \frac{M^2}{2}\left[\pi^2\frac{(ab^2)^{N+1}-1}{ab^2-1} - \frac{1-a^{N+1}}{1-a}\right] \sim O\left((ab^2)^N\right),$$
$$\mathcal{S}_2(N) = 2M^3\left[\pi^3\frac{(ab^3)^{N+1}-1}{ab^3-1} - \pi\frac{(ab)^{N+1}-1}{ab-1}\right] \sim O\left((ab^3)^N\right).$$

对于 $b>1$，$(ab^3)^N$ 的增长严格占优于$(ab^2)^N$。因此，存在正数常量 C_1, C_2，使得当 N充分大时：

$$E_1(N) \le \frac{C_1(ab^2)^N}{n_N} + \frac{C_2(ab^3)^N}{n_N^2}.$$

由于 n_N 必须至少以$(ab^3)^N$ 的速度增长才能满足 (26)，项$1/n_N^2$ 的衰减速度远快于 $1/n_N$。因此，我们可以用一个主导项来估计 $E_1(N)$：

$$E_1(N) \le C\frac{(ab^3)^N}{n_N},$$

对于某个 常量 $C>0$。根据假设 (26)，可得 $\lim_{N\to\infty} E_1(N) = 0$.

将两个估计代入 (28)，得到：

$$\sup_{|x|\le M} \mathcal{E}(N) \le C\frac{(ab^3)^N}{n_N} + \frac{a^{N+1}}{1-a}.$$

由于 $N\to\infty$，右侧两项均趋于零。因此，超振荡序列$\mathcal{W}_{N,\ n_N}(x)$ 在 $[-M,M]$上一致收敛于魏尔斯特拉斯函数 $W(x)$。□

4.1. **稳定性极限的解释**。考虑函数：

$$W(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m e^{ib^m\pi x}. \tag{29}$$

为了使用带限序列逼近 $W(x)$，我们将阶数为 $(N,\ n)$ 的超振荡逼近函数定义为：

$$\mathcal{W}_{N,n}(x) = \sum_{m=0}^{N} a^m\left[\cos\left(\frac{x}{n}\right) + i(b^m\pi)\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n. \tag{30}$$

将联合收敛定理 应用于函数 $\mathcal{W}_{N,\ n}(x)$ 时，需要在谱分辨率 N （其也对应于表达魏尔斯特拉斯函数的级数的截断）与计算复杂度 n之间取得微妙的平衡。

一致收敛条件 $N,\ n\to\infty$ 由振荡指标n_N 与谱增长（ab^3）^{N}之间的比值决定。严格来说，只有当该比值在极限下趋于无穷小，才能保证收敛。例如，取 $n_N = N(ab^3)^N$，可得：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(ab^3)^N}{n_N} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N} = 0. \tag{31}$$

发散墙 这一概念标志着数值稳定性与指数爆炸之间的转变。该临界阈值由渐近条件 $n_N \sim (ab^3)^N$定义。收敛的性质取决于比值$R_N = \frac{(ab^3)^N}{n_N}$ 的变化：

亚临界区制（$R_N \to \infty$）：复杂度 n 相对于采样频率增长得太慢。逼近式进入指数不稳定区域，误差会瞬间发散。

临界区制（$R_N \to C > 0$）：系统处于刀刃边缘。误差保持有界，但该序列无法一致收敛至零，因此未能捕捉分形细节。

超临界区制 ($R_N \to 0$)：复杂度主导谱增长。超振荡结构有效抑制了高频项的增长，从而确保在任意紧区间 $[-M, M]$ 上一致收敛。

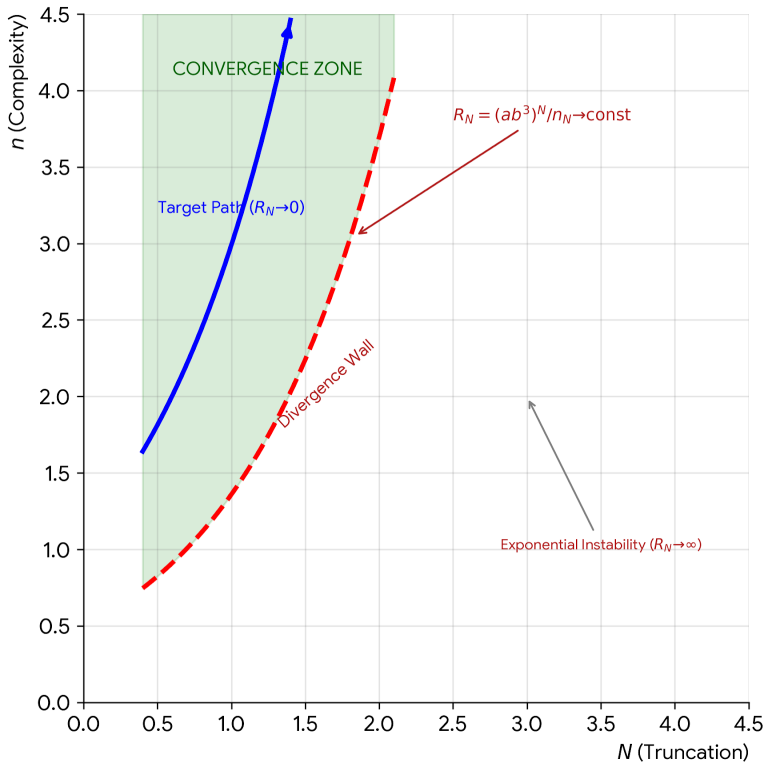

图 1. 稳定性相图，显示发散墙和一致收敛区域。

5. 结语

本文所得结果为魏尔斯特拉斯函数提供了伯恩斯坦型逼近。未来研究的一个自然延伸方向是研究基于拉格朗日型超振荡的逼近。由于拉格朗日插值的特性，这种方法更为复杂。

我们未来工作的目标是，将魏尔斯特拉斯函数中的高频指数函数 $e^{i\alpha_m x}$ 替换为其谱严格包含于带限区间 $[-1,1]$ 内、且由拉格朗日型超振荡给出的函数。

当我们考虑 $[-1,1]$ 中的一组互异节点 $\{h_j(n)\}_{j=0}^n$, $n\in\mathbb{N}$，并满足 $|\alpha|>1$时，就会出现这类超振荡。在 [2], 中，我们引入了序列

$$T_n(x;\alpha)=\sum_{j=0}^{n}\left[\prod_{k=0,k\neq j}^{n}\left(\frac{h_k(n)-\alpha}{h_k(n)-h_j(n)}\right)\right]e^{ih_j(n)x}. \tag{32}$$

并且在 [6] 中，我们证明了 $T_n(x;\alpha)$ 是超振荡的，并收敛于 $e^{i\alpha x}$。

接下来自然的一步是，将 $W_N(x)$ 中的每个指数项 $e^{ib^m\pi x}$ 替换为超振荡序列 $T_n(x;b^m\pi)$，并研究截断魏尔斯特拉斯函数的超振荡逼近。该函数记为 $\mathcal{W}_{N,\ n}(x)$，定义如下：

$$\mathcal{W}_{N,n}(x)=\sum_{m=0}^{N}a^m T_n(x;b^m\pi). \tag{33}$$

利用拉格朗日型系数，近似的显式形式为：

$$\mathcal{W}_{N,n}(x)=\sum_{m=0}^{N}a^m\sum_{j=0}^{n}\left[\prod_{k=0,k\neq j}^{n}\left(\frac{h_k(n)-b^m\pi}{h_k(n)-h_j(n)}\right)\right]e^{ih_j(n)x}. \tag{34}$$

本研究的主要难点在于，我们没有超振荡的拉格朗日型近似的闭式表达式。

利益冲突。作者声明，他们在本文发表方面不存在任何利益冲突。

作者贡献。所有作者对本研究的贡献均相同，均已阅读并批准所提交稿件的最终版本。

可用数据情况。本文研究未涉及任何相关数据。

参考文献

[1] Y. Aharonov、D.Z. Albert、L. Vaidmann，1988，《自旋-$\frac{1}{2}$ 粒子的自旋分量测量结果如何可能是 100》，《物理评论快报》**60**（1988），1351-1354。[2] Y. Aharonov、F. Colombo、I. Sabadini、T. Shushi、D.C. Struppa、J. Tollaksen，2011，《一种生成超振荡函数和超移位的新方法》，《英国皇家学会会刊 *A* 辑》**477**。[3] Y. Aharonov、F. Colombo、I. Sabadini、D.C. Struppa、J. Tollaksen，2022，《超振荡的一些数学性质》，《物理学杂志 *A*》，**44** 365304（16 页）。

[4] Y. Aharonov、F. Colombo、I. Sabadini、D. C. Struppa 和 J. Tollaksen，2017，《超振荡数学》，《美国数学学会回忆录》，第 247 卷，第 1174 号。[5] Y. Aharonov、S. Popescu 和 D. Rohrlich，1990，《红外光子如何表现得像伽马射线？》，特拉维夫大学预印本，TAUP，
1847 90 - J. Behrndt、F. Colombo、P. Schlosser、D.C. Struppa，[6]
2023，《通过复博雷尔测度及其收敛性表示超振荡》，《美国数学会汇刊》376（2023），第 9 期，6315-6340。[7] M. V. Berry，《快于傅里叶》，1994 年，载于《量子相干性与实在》；纪念 Yakir Aharonov 60 岁诞辰（J. S. Anandan 和 J. L. Safko 编），World Scientific，新加坡，第 55–65 页。[8] M. V. Berry，2017，《噪声对超振荡的抑制》，《物理学杂志 A》bf 50，025003（9 页）。[9] M. V. Berry 和 Z. V. Lewis，1980，《论魏尔斯特拉斯-曼德尔布罗分形函数》Proc. R. Soc. A370 459–84[10] M. V. Berry 和 S. Morley-Short，2016，《用超振荡表示分形》，《物理学杂志 A：数学理论》49，065203。[11] M. V. Berry 等，2019，《超振荡路线图》，J. Opt. 21，053002（35 页）。[12] L. Chojnacki、A. Kempf，2016，49，505203，《生成超振荡的新方法》，J. Phys. A：Math. Gen.。[13] F. Colombo、E. Pozzi、I. Sabadini、B.D. Wick，2025，《阿哈罗诺夫–玻姆效应与超振荡》，J. Math. Phys. 66，第 7 期，论文编号 073501，16 页。[14] P. J. S. G. Ferreira、A. Kempf，2006，《超振荡：快于奈奎斯特速率》，IEEE Trans. Signal Processing，54（2006），3732–3740。[15] P. J. S. G. Ferreira、A. Kempf、M. J. C. S. Reis，2007，《Aharonov-Berry 超振荡的构造》，J. Phys. A 40，5141-5147。[16] Y. Fisher，1995，《分形图像压缩》（纽约：Springer）。[17] A.N. Jordan，2020，《利用超增长和强度对比成像实现超分辨率》，Quantum Stud.: Math. Found.，7(3)（2020）285-292。[18] A. N. Jordan、Y. Aharonov、D. C. Struppa、F. Colombo、I. Sabadini、T. Shushi、J. Tollaksen、J. C. Howell、A. N. Vamivakas，2024，《任意量子可观测量中的超现象》，Phys. Rev. A，第 110 卷，012206。[19] A. Kempf，2018，《超振荡的四个方面》，Quantum Stud. Math. Found.，5，477-484。[20] D. G. Lee 和 P. J. S. G. Ferreira，2014，《超振荡的直接构造》，IEEE Trans. Signal Process. 62，3125-34。[21] B. B. Mandelbrot，1982，《自然的分形几何》（美国加利福尼亚州旧金山：Freeman）。[22] M. Mansuripur 和 P. K. Jakobsen，2019，《构造超振荡函数的一种方法》，J. Phys. A：Math. Theor.。[23] 52 305202 E.

Pozzi、B. D. Wick，《薛定谔方程下超振荡的持久性》，Evol. Equ. Control Theory，11（2022），第 3 期，869-894。[24] K.Weierstrass，《关于实变量的连续函数：对于其自变量的任何取值都不存在确定导数》，[《关于在自变量的任何取值处都不具有确定导数的实变量连续函数》]，载于：《普鲁士皇家科学院》，Karl Weierstrass《数学著作集》（德国柏林：Mayer & Mueller，1895），第 2 卷，第 71–74 页。

(FC) 米兰理工大学，数学系，E. 博纳尔迪街 9 号，20133 米兰，意大利电子邮箱: fabrizio.colombo@polimi.it (IS) 米兰理工大学，数学系，E. 博纳尔迪街 9 号，20133 米兰，意大利电子邮箱: irene.sabadini@polimi.it (DCS) 查普曼大学唐纳德·布伦数学总统讲席，美国加利福尼亚州奥兰治市 92866电子邮箱: struppa@chapman.edu