多模电路量子电动力学系统中光-物质耦合的原位表征

Kellen O'Brien，[1, 2, *] Won Chan Lee，[1,2] Alexandra Behne，[2,3] Ali Fahimniya，[2,3] 王语馨（Yu-Xin Wang），[3] Maya Amouzegar，[1, 2, †] Alexey V. Gorshkov，[2,3] 和 Alicia J. Kollár[1,2,4]

[1]马里兰大学物理系，美国马里兰州科利奇帕克，*MD 20742*[2]联合量子研究所，美国国家标准与技术研究院/马里兰大学，美国马里兰州科利奇帕克，*20742*[3]量子信息与计算机科学联合中心，美国国家标准与技术研究院/马里兰大学，美国马里兰州科利奇帕克，*20742*[4]马里兰量子材料中心，马里兰大学物理系，美国马里兰州科利奇帕克，*MD 20742*（日期：2026年3月5日）

多模腔量子电动力学系统可用于探索广泛的物理现象；然而，复杂的多模环境使光-物质相互作用难以进行系统表征。本文提出一种通用测量协议，适用于原子腔量子电动力学和人工腔量子电动力学系统，可用于确定各个光子模式的耦合。该方法利用交流斯塔克效应和克尔效应的测量结果，以及已知的失谐依赖关系，从而无需具备单光子分辨能力，也无需进行独立的光子数标定或插入损耗标定。我们利用一个与一维微波谐振器晶格耦合的超导transmon量子比特演示了该方法。我们验证了在多个量子比特失谐下确定的光-物质耦合 g ，以及从三个光子模式的自克尔和交叉克尔频移中得到的结果之间的一致性；这些频移为三个模式各自提供了独立的测量结果 g 。

arXiv:2603.05583v1 [quant-ph] 5 Mar 2026

多模腔量子电动力学系统可用于探索广泛的物理现象，从相变 [1, 2] 到量子自旋模型 [3–5]。单个类原子自由度与光子模式之间的耦合，是已实现系统动力学的基础 [6]；然而，由于系统中存在种类繁多的频率分裂和耦合强度，要在多模系统中确定这些耦合颇具挑战。

本文提出一种测量协议，可在多模腔量子电动力学系统中确定光-物质与各个模式的耦合，而无需单光子分辨 [7–11]，独立的光子数标定 [12–15]，或插入损耗标定 [13, 16]。相反，我们的方法利用光-物质相互作用的基本形式，借助两种不同的非线性效应：驱动一个光子模式时，在非共振原子/量子比特上产生的交流斯塔克频移 [17] ，以及同一驱动在光子模式上引起的克尔频移 [18] 。比较这两种效应随功率的变化，即可消除未知光子数的影响。借助第二个辅助光子模式，只需测量该辅助模式，便可确定所选模式的光-物质耦合；辅助模式可独立于关注的模式进行选择。因此，本文提出的方法适用于所有模式，包括欠耦合或局域光学模式，以及混合声子-腔量子电动力学系统中难以直接测量的声子模式 [11, 14, 15, 19–21] 。

我们使用一种超导传输子量子比特 [22] ，它位于一个多模共面波导（CPW）谐振器晶格中，该晶格包含 54 个模式，首次见于参考文献 [23]。我们提出了一个简单的双模模型，用于描述量子比特与多模器件中选定的两个模式之间的耦合，并推导出消除光子数依赖性以及提取与选定模式的耦合强度g_j 的方程。我们从器件中选取三个模式，并表明所有可能模式对的测量结果均给出一致的 g_j值。此外，我们将传输子量子比特与光子模式之间的失谐从400兆赫调整至 800 兆赫，并表明提取的 g_j 值在整个范围内均保持一致。这些结果表明，即使在高度多模的系统中，本文提出的简单方法和模型也能准确确定光-物质耦合强度。

CPW 晶格器件。—嵌入传输子量子比特的共面波导（CPW）谐振器晶格 [24, 25] 是一个很有潜力用于自旋-玻色子模型模拟量子模拟的平台。通过工程化设计，谐振器阵列可以呈现范围广泛的奇异能带结构和谐振器连通性，其几何结构可从一维、二维延伸至非欧几里得几何 [26–28]，；嵌入其中的传输子量子比特与光子能带发生强耦合，并经历遵循谐振器阵列连通性的光子介导相互作用 [4, 6, 29]。由于所形成的光子能带结构包含大量具有不同耦合强度和不同局域化程度的模式 [26, 28]，，依赖单光子分辨色散位移 [7]或真空拉比分裂 [8]来确定光-物质耦合强度的方法，需要非常强的光-物质耦合或彼此充分分离的模式，因此难以系统地应用。由此，该系统成为检验本文所述协议的理想平台；该协议基于交流斯塔克位移和克尔频移测量的结合。

* kobrie@umd.edu

†现地址：约翰斯·霍普金斯应用物理实验室，劳雷尔，马里兰州 20723，美国。

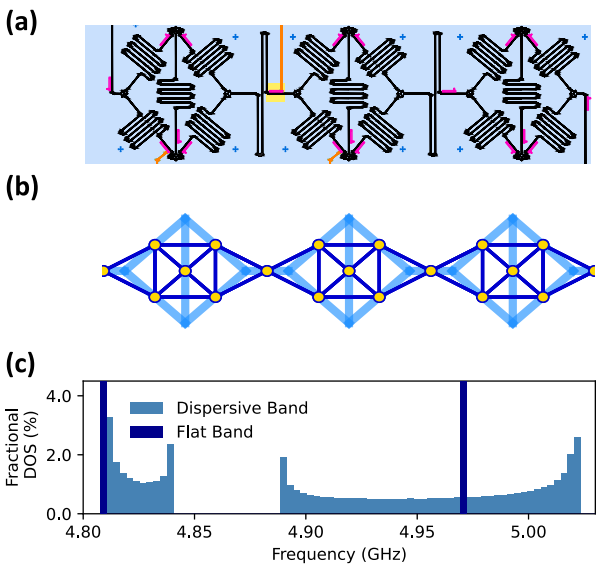

图 1. *CPW* 晶格。 (a) 本研究所用 CPW 晶格器件中九个元胞的其中三个的计算机辅助设计图。构成晶格的谐振器以黑色显示，用于执行该协议的量子比特则以黄色方框突出显示。（完整器件的计算机辅助设计图见补充材料中的图 S1 。）(b) 该器件实现的紧束缚晶格示意图，叠加在谐振器链的物理布局上。金色圆点表示晶格位点，深蓝色线条表示最近邻耦合。背景中的浅蓝色线条表示物理谐振器。(c) (b) 中所示准一维紧束缚晶格在无限延伸情况下的预期态密度。色散带以浅蓝色显示，延伸至图示范围之外的平带以深蓝色显示。该协议使用频率介于 4.96 和 5.00 吉赫兹的晶格模式，以及频率介于 ~ 4.2 和 ~ 4.6 吉赫兹的量子比特来演示。

在详细介绍理论模型之前，我们先简要描述实施该协议所使用的特定 CPW 晶格器件 [23]。该谐振器阵列由九个元胞组成，每个元胞包含六个谐振器；谐振器通过三端电容器首尾相连，并与最近邻谐振器耦合。图 1（a）展示了该器件中三个元胞的计算机辅助设计（CAD）图。该阵列可以用玻色紧束缚模型进行良好描述，其中各位点对应晶格内的谐振器。位点谐振器频率主要由其长度决定，而跃迁强度由耦合电容决定 [24, 30]。图 1（b）中，该器件实现的紧束缚晶格叠加在谐振器链示意图上；图 1（c）展示了该晶格无限延拓版本的态密度。该器件包含三个电容耦合的磁通可调跨蒙量子比特 [23]，其中只有一个 [在图 1（a）中以高亮显示]，并用于本研究。

背景。——为了确定量子比特与晶格中所选模式之间的耦合，该协议采用两个 非简并光子模式，并观察它们对外部驱动的响应。我们提取耦合时，关键在于交流斯塔克频移作用于量子比特，以及外部驱动在光子模式上引起的克尔频移：比较这两种效应随功率的变化，即可消除驱动光子模式的任何未知输入耦合。为阐明这些频移的来源，我们先介绍描述共面波导晶格中与两个模式耦合的传输子量子比特的哈密顿量，再全面讨论测量协议。

对于任意选定的一对模式，其中一个称为“驱动”模式（D），将对其施加强驱动音调；另一个称为“监测”模式（M），用于检测。量子比特与这两个模式的总哈密顿量为 [22]

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{tot}} &= H_0 + H_{\mathrm{int}}, && (1)\\
H_0 &= \omega_D d^\dagger d + \omega_M m^\dagger m + \omega_q q^\dagger q - \frac{\alpha}{2} q^\dagger q^\dagger q q, && (2)\\
H_{\mathrm{int}} &= g_D(q^\dagger d + d^\dagger q) + g_M(q^\dagger m + m^\dagger q). && (3)
\end{aligned}
$$

这里，$d^\dagger$ 和 d（$m^\dagger$ 和 m）表示模式 D（M）的玻色子升降算符，ω_D（ω_M）是模式 D（M）的频率，g_D（g_M）是量子比特与模式 D（M）之间的耦合。传输子实际上是一个频率为 ω_q、非谐性为 α，且升降算符为 $q^\dagger/q$ 的非谐振子。尽管在大多数情形下，传输子被视为二能级系统，但这里明确纳入了其更高能级，因为交流斯塔克效应和克尔效应的大小取决于非谐性。

在量子比特与光子模式远失谐的色散极限下，量子比特与光子模式之间的相互作用可以微扰地处理。腔内光子数较低时，只有交流斯塔克频移等二阶效应才 relevant。为了观测四阶克尔效应，系统被刻意驱动至较高的腔内光子数。计入这些高阶效应后，有效相互作用哈密顿量为

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{int}} \approx\ & \tilde{\chi}_D d^\dagger d q^\dagger q + \frac{\chi_{DD}}{2} d^\dagger d^\dagger d d \\
& + \tilde{\chi}_M m^\dagger m q^\dagger q + \frac{\chi_{MM}}{2} m^\dagger m^\dagger m m \\
& + \chi_{DM} d^\dagger d m^\dagger m. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

此处，$\tilde{\chi}_D(\tilde{\chi}_M)$ 是与模式 $D(M)$ 相关的色散耦合（AC-斯塔克）系数，$\chi_{DD}(\chi_{MM})$ 是模式 D (M) 的自克尔系数，而 χ_{DM} 是模式 D 和 M 的交叉克尔系数。

交流斯塔克系数和克尔系数为 [22,31, 32]

$$
\tilde{\chi}_j = \frac{2g_j^2\alpha}{\Delta_j(\alpha-\Delta_j)}, \quad j = D, M; \qquad (5)
$$

$$
\chi_{jj} = \frac{2g_j^4\alpha}{\Delta_j^3(\alpha-2\Delta_j)}, \quad j = D, M; \qquad (6)
$$

and

$$\chi_{DM} = \frac{2\alpha g_D^2 g_M^2(\Delta_D + \Delta_M)}{\Delta_D^2 \Delta_M^2(\alpha - \Delta_D - \Delta_M)}, \tag{7}$$

其中 $\Delta_j \equiv \omega_q - \omega_j$。在 $|\alpha| \to \infty$ 极限下，上述表达式可简化为量子比特-谐振器耦合的著名结果：$\tilde{\chi}_j \propto g_j^2/\Delta_j$、$\chi_{jj} \propto g_j^4/\Delta_j^3$ 和$\chi_{DM} \propto g_D^2 g_M^2($ $\Delta_D + \Delta_M)/(\Delta_D^2 \Delta_M^2)$。在附录中，我们给出一种推导这些著名系数的算符形式的一般方法，从而能够系统地计算二能级系统或传输子的基态，以及传输子的任意激发能级对应的系数。

式（5-7）中的系数表示量子比特和正规模频率的每光子频移。除量子比特-模式耦合外，这三个系数都只涉及传输子非谐性和失谐，这些参数可以独立校准。然而，为了从实验频移中提取这些系数，我们还需要精确掌握腔内光子数，而校准腔内光子数的成本可能很高。相比之下，实验中可以直接测得每单位驱动功率对应的频移。

这里我们将说明，无需单独校准光子数，即可利用单位功率对应的频移提取 g_D 和 g_M。为产生这些频移，我们向模式 D施加功率可变的共振驱动信号，使其处于相干态。随着驱动功率 P 增加，模式 $\bar{n}_D \equiv \langle d^\dagger d \rangle$ 中的平均腔内光子数 D 也随之增加。根据式（4），光子数增加会导致量子比特和谐振器模式的频移。腔内光子数与施加的驱动功率之间相差一个常数因子 $\bar{n}_D = \beta P$。若 β 已精确知晓，则可直接将交流斯塔克位移后的量子比特频率测量值换算为对 $\tilde{\chi}_D$的测量值。然而，通常并不清楚给定驱动模式对应的 β 精确值，因为它取决于输入衰减和模式匹配等多种较大的系统效应。

交流斯塔克频移产生一个新的有效量子比特频率 $\omega_q' = \omega_q + \tilde{\chi}_D \bar{n}_D = \omega_q + \tilde{\chi}_D \beta P$，自克尔频移产生一个有效驱动模式频率 $\omega_D' = \omega_D + \chi_{DD}\bar{n}_D = \omega_D + \chi_{DD}\beta P$，交叉克尔频移产生一个有效监测模式频率 $\omega_M' = \omega_M + \chi_{DM}\bar{n}_D = \omega_M + \chi_{DM}\beta P$。监测模式中固定光子数的贡献被假定为可忽略，或已被吸收进裸模式频率。单位驱动功率下的频移 $\partial_P \omega' = \partial \omega'/\partial P$ 可从不同驱动功率下的测量中直接确定，取这些比值可消除所有 β 依赖。由式（5–7）可得

$$\frac{\partial_P \omega_D'}{\partial_P \omega_q'} = \frac{\beta\chi_{DD}}{\beta\tilde{\chi}_D} = \frac{-g_D^2(\alpha - \Delta_D)}{\Delta_D^2(\alpha - 2\Delta_D)} \tag{8}$$

and

$$\frac{\partial_P \omega_M'}{\partial_P \omega_q'} = \frac{\beta\chi_{DM}}{\beta\tilde{\chi}_D} = \frac{-g_M^2(\Delta_D + \Delta_M)(\alpha - \Delta_D)}{\Delta_D \Delta_M^2(\alpha - \Delta_D - \Delta_M)}. \tag{9}$$

由于传输子非谐性与失谐可由标准光谱测量确定，量子比特-模式耦合 g_D 和 g_M 可直接由式（8）和（9）提取。

测量协议.—为确定交流斯塔克位移后的量子比特频率，我们采用一种泵浦-探测光谱学方法 [33] ，该方法基于对超导量子比特的色散读出 [22]。量子比特的非线性与强光-物质耦合相结合，会在宿主谐振器上产生不可忽略的量子比特态依赖频移 $\tilde{\chi}_j$。因此，探测光子模式的微波信号会根据量子比特状态产生振幅和相位变化。扫描泵浦音，并测量泵浦与量子比特共振时探测信号的非线性响应，这种称为双音谱学的测量方案 [33],仅通过直接测量谐振器，即可用光谱学方法确定量子比特频率。

双音谱学通常用于测量与单个谐振器强耦合的强非谐量子比特，而同一机制也可直接用于确定两个弱非谐模式之间的自克尔频移和交叉克尔频移 [32, 34]。与量子比特的情形一样，在驱动产生的自克尔频移作用下，一个模式的有效频率可通过使第二个模式产生最大频移的泵浦频率来确定 [35, 36]。特别是，这种方法能够通过与易于测量且透射率高的模式耦合，对透射率极低的模式（例如局域平带模式）进行表征。同时，还可以根据探测音的振幅和相位变化幅度提取第二个模式上的交叉克尔频移（见补充材料中的第S2 节）。

为获得方程 (8–9) 中的偏导数，我们向模式 D 施加驱动信号，并改变其功率 P，同时进行两类测量。情况 1 中，如图 2(a) 的示意图所示，将驱动施加到模式 D，使量子比特频率发生交流斯塔克频移。情况 2 中，驱动功率更强，并施加到模式 D，使模式 D 和模式 M均产生克尔频移，如图 2(d) 的示意图所示。情况 1 中，我们在量子比特上施加泵浦，利用双音谱学测量 ω_q' 随 P 的变化，并确定 $\partial_P \omega_q'$（详细信息见补充材料的 S3 节）。这一过程的样例数据见图 2(b) 和 (c)。在这些中间 P值下，二阶交流斯塔克频移不可忽略，而模式 D 上的四阶自克尔频移可以忽略不计。情况 2 中，施加到模式 D 的强驱动会在模式 D 中产生自克尔频移，并在模式 M 中产生大小相当的交叉克尔频移。为确保在很宽的驱动功率范围内 β 保持恒定，我们在每个功率下扫描模式 D 上的驱动，以确定存在自克尔频移时修正后的共振频率 ω_D'（见补充材料的 S6 节）；该频率对应于产生最大交叉克尔频移的驱动频率。在该共振驱动频率下，同时获得 ω_M'。样例数据见图 2(e) 和 (f)。

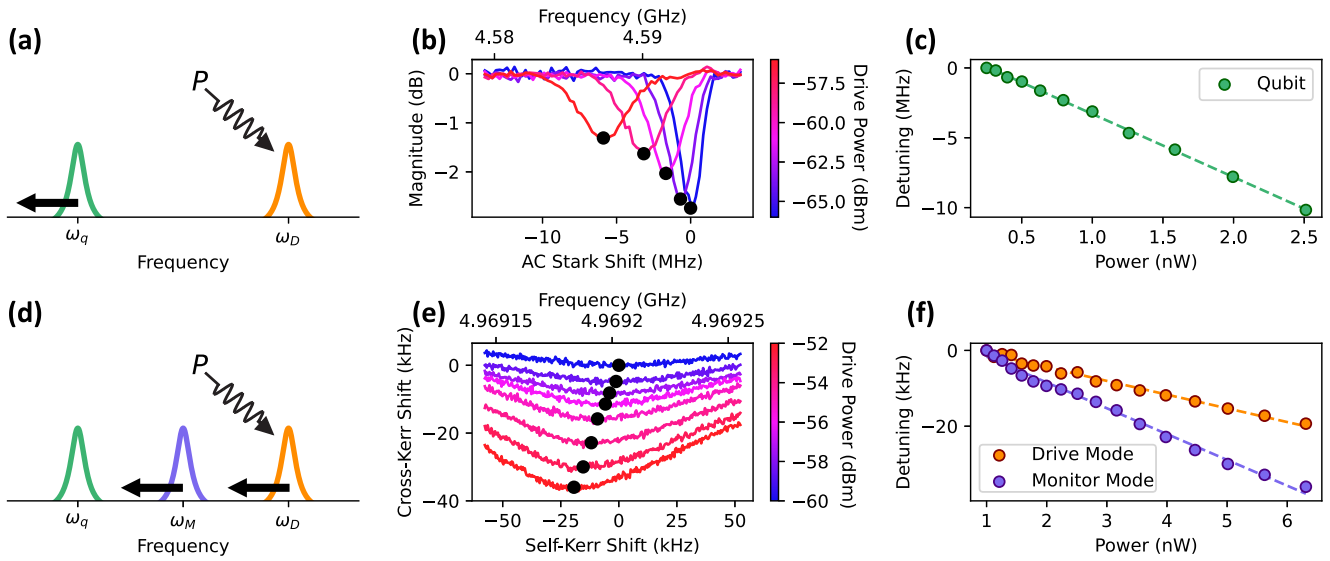

图 2. 交流斯塔克频移和克尔频移。 使用频率为 $\omega_D/2\pi = 4.997$ 吉赫兹的驱动模式、频率为 $\omega_M/2\pi = 4.969$ 吉赫兹的监测模式，以及调谐至 $\omega_q/2\pi = 4.593$ 吉赫兹的量子比特进行的交流斯塔克频移和克尔频移测量。(a) 交流斯塔克频移测量示意图。驱动模式 D，同时测量量子比特频率的交流斯塔克频移 ω'_q。(b) 对量子比特进行的双音谱学测量 [22]，其中改变施加于模式 D的驱动功率。（有关测量细节，请参见补充材料第 S2 节。）随着驱动功率增大，有效量子比特频率（以黑点标示）相应地向下发生交流斯塔克频移。(c) 测得的量子比特频移随驱动功率的变化。对这些数据进行线性拟合所得的斜率为 $\partial_P\omega'_q/2\pi = -32.2$ 兆赫/纳瓦。(d) 克尔频移测量示意图。驱动模式 D，同时测量由量子比特介导的模式 ω'_D和 ω'_M上的自克尔频移和交叉克尔频移。(e) 对驱动模式 D进行的双音谱学测量：测量探测音经模式 M透射后的信号，同时改变施加于模式 D的驱动信号功率。随着驱动功率增大，驱动模式的有效频率（以黑点标示）相应地向下发生自克尔频移。监测模式上的交叉克尔频移根据该频点的响应强度推断得出。(f) 测得的驱动模式和监测模式频移随驱动功率的变化。对自克尔数据进行线性拟合得到斜率 $\partial_P\omega'_D/2\pi = -32.0$ 千赫/纳瓦；同理，交叉克尔数据的斜率为 $\partial_P\omega'_M/2\pi = -42.1$ 千赫/纳瓦。

参见 S3 节，了解确定 ω'_D 和 ω'_M 以及将监测信号透射转换为频移的详细信息。

协议演示。— 上文介绍的测量协议所依据的模型仅包含一个与两个模式耦合的传输子。然而，完整的 CPW 晶格器件包含数十个光子模式，其频率介于 4.8和 5.1吉赫兹之间。为验证尽管存在多模环境，从模型中提取的量子比特-模式耦合仍然一致，我们对三个晶格模式执行测量协议，涵盖驱动模式与监测模式配对的全部六种可能组合。图2展示了其中一组配对的测量数据和协议输出：驱动模式的频率为$\omega_D/2\pi = 4.969$ 吉赫兹，监测模式的频率为$\omega_M/2\pi = 4.960$ 吉赫兹，传输子量子比特则调谐至频率 $\omega_q/2\pi = 4.593$ 吉赫兹，非谐性为$\alpha/2\pi = 113$ 兆赫。在此配置下，量子比特与频率最低的晶格模式相差超过 200兆赫 [（参见图 1（c））]。其余五组配对的结果见补充材料第 S4节。

为观察交流斯塔克频移，在九种驱动功率下进行了量子比特的双音谱学测量，其中一部分结果显示于图2(b)中。通过对图2(c)所示提取的量子比特频率进行线性拟合，得到所选量子比特和驱动模式的单位功率交流斯塔克位移为 $\partial_P\omega'_q/2\pi = -4.52 \pm 0.05$ 兆赫/纳瓦。对于模式 D和 M，同时追踪其自克尔频移和交叉克尔频移后的频率的双音谱学测量是在 17 种驱动功率下进行的，其中一部分结果显示于图2(e)中。通过对图2(f)所示提取的模式频率进行线性拟合，得到单位功率自克尔位移和单位功率交叉克尔位移分别为 $\partial_P\omega'_D/2\pi = -3.62\pm0.09$ 千赫兹/纳瓦和 $\partial_P\omega'_M/2\pi = -6.8\pm0.2$ 千赫兹/纳瓦。根据公式（8）和（9），得到量子比特-模式耦合分别为：驱动模式为 $g_D = 14.2 \pm 0.6$ 兆赫，监测模式为$g_M = 13.4 \pm 0.5$ 兆赫。对 g 的误差条通过重复性测量确定。结果发现，系统变化（可能是由量子比特漂移导致）超过统计误差（详情见补充材料第S5节）。

为了验证该分析能够准确计入传输子的频率依赖性 [见式（8）和（9）] 在存在多于两个模式的情况下，我们重复

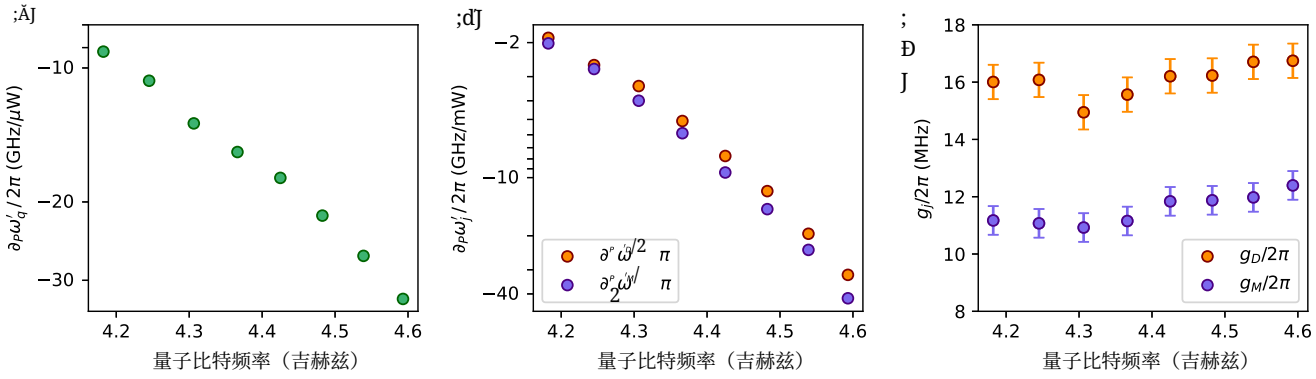

图3。 量子比特-模式耦合与失谐的一致性。 使用频率为 g 的驱动模式、频率为 $\omega_D/2\pi = 4.997$ 吉赫兹的监测模式，且将量子比特频率从 $\omega_M/2\pi = 4.960$ 吉赫兹扫描至 ~ 4.2 吉赫兹– ~ 4.6 吉赫兹，对 g验证协议进行重复迭代所得的结果。斜率 (a) $\partial_P\omega'_q$ 和 (b) $\partial_P\omega'_D$ 以及 $\partial_P\omega'_M$ 分别是在每个失谐处通过交流斯塔克位移和克尔频移测量确定的。拟合误差棒小于标记大小，因而未显示。(c) 计算得到的驱动模式（g_D）和监测模式（g_M）的量子比特-模式耦合。误差棒表示根据在两个固定失谐处的重复测量所确定的预期系统误差（见补充材料第 S5 节）。不同失谐处计算得到的耦合与驱动模式耦合 $g_D/2\pi$ 约为 16 兆赫以及监测模式耦合 $g_M/2\pi$ 约为 12 兆赫一致。

该协议，将量子比特调谐到一系列频率，并验证对 g_D 和 g_M的估计是一致的。这些结果如图3所示，采用频率为 $\omega_D/2\pi = 4.997$ 吉赫兹的驱动模式和频率为 $\omega_M/2\pi = 4.960$ 吉赫兹的监测模式。量子比特被调谐至8 个介于 ~ 4.2 与~ 4.6 吉赫兹之间的频率，并在每个失谐处从交流斯塔克与克尔位移测量中提取单位功率频移，分别显示于图3（a）和图3（b）。

尽管单位功率下的 AC-斯塔克位移和克尔位移随量子比特频率变化很大，这与方程（5–7）的预期一致，但图 3 (c) 所示不同失谐下计算得到的耦合，与约为 $g_D/2\pi$ 的驱动模式耦合相符，数值约为 16 兆赫；监测模式耦合 $g_M/2\pi$ 则约为 12 兆赫。尽管g 通常与 $\sqrt{\omega'_q}$ [37]成正比，但对于样品中相对较小的量子比特频率范围，耦合预计基本保持稳定，最高与最低频率之间仅相差5%。

讨论。——本文提出的协议扩展了多模腔量子电动力学的测量工具箱，并可用于表征广泛多模系统中的相互作用强度。本文通过与微波共面波导谐振器耦合的传输子量子比特展示了该方法，但只需在方程（5–7）中使用相应的 AC-Stark 和克尔系数版本，该方法即可轻松推广至与玻色子模式耦合的任意类原子对象。这些系数可通过文中介绍的一般算符值 Schrieffer-Wolff 方法计算，附录。此外，只需一个易于测量的辅助监测模式，即可表征与其他模式的耦合，而这些模式难以直接测量。例如，可利用具有高透射率的离域模式，提取与平带或莫尔系统中局域化／欠耦合模式的耦合；在混合声子-腔量子电动力学系统中，则可利用光学模式确定与声子模式的耦合 [11, 14, 15, 19–21],对于这类声子模式，目前尚无直接探测器技术。

致谢： 本研究获得了美国空军科学研究办公室（资助编号：FA9550-21-1-0129）、美国国家科学基金会（QLCI 资助项目 OMA-2120757、PHY2047732，以及 JQI 的 PFC 项目 PHY-1430094）、斯隆基金会和马里兰量子材料中心的支持。A.B.、A.F. 和 A.V.G. 部分获得了 ARL（W911NF-24-2-0107）、NSF QLCI（资助编号：OMA-2120757）、美国能源部科学办公室先进科学计算研究（ASCR）量子测试平台探路者计划（资助编号：DE-SC0024220）、ONR MURI、NSF STAQ 计划、AFOSR MURI、DARPA SAVaNT ADVENT 以及 NQVL:QSTD:Pilot:FTL 的支持。A.B.、A.F. 和 A.V.G. 还感谢美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心量子系统加速器项目（资助编号：DE-SCL0000121），以及美国能源部科学办公室量子计算加速研究项目——面向量子实用性的基础算法研究（FAR-Qu）提供的支持。Y.-X.W. 感谢 QuICS Hartree 博士后奖学金的资助。

[1] A. J. Kollár、A. T. Papageorge、V. D. Vaidya、Y. Guo、J. Keeling 和 B. L. Lev，《自然通讯》8，14386（2017）。

[2] S. Gopalakrishnan、B. L. Lev 和 P.M. Goldbart，《物理学》

《物理评论A》82 (2010)。[3] B. P. Marsh, D. A. Schuller, Y. Ji, H. S. Hunt, G. Z. Socolof, D. P. Bowman, J. Keeling, and B. L. Lev, 《物理评论快报》135, 160403 (2025)。[4] J. S. Douglas, H. Habibian, C.-L. Hung, A. V. Gorshkov, H. J. Kimble, and D. E. Chang, Nat. Phot. 9, 326–331 (2015)。[5] S. Gopalakrishnan, B. L. Lev, and P. M. Goldbart, 《物理评论快报》107, 277201 (2011)。[6] P. Bienias, I. Boettcher, R. Belyansky, A. J. Kollár, and A. V. Gorshkov, 《物理评论快报》128, 013601 (2022)。[7] D. I. Schuster, A. A. Houck, J. A. Schreier, A. Wallraff, J. M. Gambetta, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, B. John- son, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, 《自然》445, 515–518 (2007)。[8] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, 《自然》431, 162–167 (2004)。[9] R. J. Thompson, G. Rempe, and H. J. Kimble, 《物理评论快报》68, 1132 (1992)。[10] R. Miller, T. E. Northup, K. M. Birnbaum, A. Boca, A. D. Boozer, and H. J. Kimble, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics 38, S551 (2005)。[11] K. J. Satzinger, Y. P. Zhong, H.-S. Chang, G. A. Peairs, A. Bienfait, M.-H. Chou, A. Y. Cleland, C. R. Conner, É. Dumur, J. Grebel, I. Gutierrez, B. H. November, R. G. Povey, S. J. Whiteley, D. D. Awschalom, D. I. Schuster, and A. N. Cleland, 《自然》563, 661–665 (2018)。[12] M. Lee, K. Friebe, D. A. Fioretto, K. Schüppert, F. R. Ong, D. Plankensteiner, V. Torggler, H. Ritsch, R. Blatt, and T. E. Northup, 《物理评论快报》122, 153603 (2019)。[13] C. J. Hood, H. J. Kimble, and J. Ye, 《物理评论A》64, 033804 2001( )。[14] S. Weis, R. Rivière, S. Deléglise, E. Gavartin, O. Ar- cizet, A. Schliesser, and T. J. Kippenberg, Science 330, 1520 1523 2010– ( )。[15] A. Youssefi, S. Kono, M. Chegnizadeh, and T. J. Kip- penberg, Nature Physics 19, 1697–1702 (2023)。[16] J. N. Thomas, J. Hoffmann, N. E. Flowers-Jacobs, A. E. Fox, N. R. Jungwirth, R. L. Johnson-Wilke, P. D. Dressel- haus, and S. P. Benz, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques 73, 8942 (2025)。[17] D. A. Steck, Quantum and Atom Optics (2007)。[18] S. Haroche and J. M. Raimond, Exploring the Quantum (Oxford Univ. Press, Oxford, 2006)。[19] C. Lei, Z. Wang, C. Yang, Y. Liu, and J. Ren, The Journal of Physical Chemistry Letters 16, 7630 (2025)。[20] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, and F. Marquardt, Reviews of Modern Physics 86, 1391 (2014), 1303.0733。[21] G. Huang, A. Beccari, N. J. Engelsen, and T. J. Kippen- berg, 《自然》626, 512–516 (2024)。[22] A. Blais, A. L. Grimsmo, S. M. Girvin, and A. Wallraff, Rev. Mod. Phys. 93, 025005 (2021)。[23] K. O'Brien, M. Amouzegar, W. C. Lee, M. Ritter, and A. J. Kollár, PRX Quantum 7, 010321 (2026)。[24] S. Schmidt and J. Koch, Ann. Phys. 525, 395–412 (2013)。[25] A. A. Houck, H. E. Türeci, and J. Koch, Nat. Phys. 8, 292 299 2012– ( )。[26] A. J. Kollár, M. Fitzpatrick, P. Sarnak, and A. A. Houck, Commun. Math. Phys. 376, 1909–1956 (2019)。[27] D. L. Underwood, W. E. Shanks, J. Koch, and A. A. Houck, 《物理评论A》86, 023837 (2012)。[28] A. J. Kollár, M. Fitzpatrick, and A. A. Houck, 《自然》571, 45 (2019)。[29] N. M. Sundaresan, R. Lundgren, G. Zhu, A. V. Gorshkov, 和 A. A. Houck, 《物理评论 X 》 9，011 （ 2019 ）。[30] J. Koch, A. A. Houck, K. L. Hur, 和 S. M. Girvin, 《物理评论A》82，043811（2010）。[31] Y. Zhang, J. C. Curtis, C. S. Wang, R. J. Schoelkopf, 和 S. M. Girvin, 《物理评论A》105，022423（2022）。[32] M. Elliott, J. Joo, 和 E. Ginossar, 《新物理学杂志》20，023037 2018( )。[33] D. I. Schuster, A. Wallraff, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. M. Girvin, 和 R. J. Schoelkopf, 《物理评论快报》94，123602（2005）。[34] G. Kirchmair, B. Vlastakis, Z. Leghtas, S. E. Nigg, H. Paik, E. Ginossar, M. Mirrahimi, L. Frunzio, S. M. Girvin, 和 R. J. Schoelkopf, 《自然》495，205–209（2013）。[35] A. Peugeot, H. Riechert, S. Annabi, L. Balembois, M. Vil- liers, E. Flurin, J. Griesmar, E. Arrighi, J.-D. Pillet, 和 L. Bretheau, 《物理评论应用》22（2024），10.1103/physrevapplied.22.064027。[36] S. J. Bosman, M. F. Gely, V. Singh, A. Bruno, D. Bothner, 和 G. A. Steele，npj量子信息3（2017），10.1038/s41534-017-0046-y。[37] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, 和 R. J. Schoelkopf, 《物理评论A》76，042319（2007）。[38] G. Zhu, D. G. Ferguson, V. E. Manucharyan, 和 J. Koch，87，024510。[39] P. D. Drummond 和 D. F. Walls, 《物理学杂志A：数学与通论》13，725（1980）。[40] N. Bartolo, F. Minganti, W. Casteels, 和 C. Ciuti, 《物理评论A》94，033841（2016）。[41] D. Roberts 和 A. A. Clerk, 《物理评论X》10，021022（2020）。

附录

四阶 *Schrieffer-Wolff* 微扰理论。—我们将非简并微扰理论表述为一系列 Schrieffer-Wolff 变换，这些变换依次将哈密顿量 $H = H_0 + V$ 在更高阶微扰下对角化 V。我们将这一表述用于计算通过量子比特耦合的模式的自克尔效应和交叉克尔效应——首先考虑二能级系统，随后考虑传输子——并以封闭形式将其表示为适用于所有量子比特能级的算符。其他研究 [31, 32, 38]计算了通过量子比特耦合的模式的四阶修正，但未以封闭形式涵盖所有量子比特能级。我们采用的基底可对角化 $H_0 = \sum_j E_j |j\rangle\langle j|$，其中包含 E_j 未扰动本征能量和 $|j\rangle$ 未扰动本征矢。我们假设 V 在此基底中是非对角的。展开式为

$$e^{iG_4}e^{iG_3}e^{iG_2}e^{iG_1}He^{-iG_1}e^{-iG_2}e^{-iG_3}e^{-iG_4} = \sum_{n=0}^{4} H_n + O(V^5) \tag{10}$$

其中，G_n 是变换的 n阶厄米生成元，而 H_n 是未扰动哈密顿量 H_0的对角修正。

我们得到 H_n 截至 $n = 4$ 的表达式。对于每个 n，我们使用 10 式，将左端展开至 n阶，并利用 $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + [A, [A, B]]/2! + \cdots$，同时通过选择 G_n，使 H_n 为对角矩阵，从而令 n 阶项 $i[G_n, H_0]$（该项为非对角项）恰好抵消其余n阶项中的非对角部分。

我们首先回顾一阶微扰修正的教科书示例。令 10 式两边的一阶项相等，得到 $i[G_1, H_0] + V = H_1$. H_1 必须为对角矩阵，因此我们选择 G_1，使 $i[G_1, H_0] + V$ 的非对角部分为零。于是有

$$\langle j| G_1 |k\rangle = -\frac{i\langle j| V |k\rangle}{E_j - E_k} \text{ for } j \neq k. \tag{11}$$

请注意，为使生成元定义良好，H_0 的谱必须是非简并的。G_1 的对角元素尚未确定，我们可以自由选择 $\langle j| G_1 |j\rangle = 0$. 由于根据假设，$V$是非对角的，因此有 $H_1 = 0$. G_1 不会出现在 H_1的最终表达式中，但会出现在 H_n 与 $n \geq 2$的表达式中。事实证明，$i[G_1, H_0] + V = H_1 = 0$ 可用于减少方程（10）左侧展开式中的项数。

为使高阶修正的表达式更加简洁，我们定义算符在 H_0 本征基下对角部分的记号：$\text{diag}\, A = \sum_j |j\rangle\langle j| A |j\rangle\langle j|$.

在二阶重复这一过程可得

$$H_2 = i[G_2, H_0] + \frac{i[G_1, V]}{2} = \frac{i\,\text{diag}[G_1, V]}{2}, \tag{12}$$

$$\langle j| G_2 |k\rangle = \frac{\langle j| [G_1, V] |k\rangle}{2(E_j - E_k)} \text{ for } j \neq k. \tag{13}$$

与 G_1 一样，G_2 的对角元素未确定，因此我们选取 $\text{diag}\, G_2 = 0$.

进一步展开后，我们得到三阶修正

$$H_3 = -\frac{\text{diag}[G_1, [G_1, V]]}{3}, \tag{14}$$

以及四阶修正

$$H_4 = -\,\text{diag}\left(\frac{i[G_1, [G_1, [G_1, V]]]}{8} + \frac{[G_2, [G_1, V]]}{4}\right). \tag{15}$$

在接下来的章节中，我们将应用方程 (15) 来计算分别与一个量子比特耦合的两个模式的克尔系数。首先讨论最简单的情形——二能级系统，然后讨论更符合实际的传输子。

经由二能级系统耦合的两个模式之间的交叉克尔项和自克尔项.—设 $\sigma^\dagger = |1\rangle\langle 0|$ 为二能级系统的自旋升算符，其基态为 $|0\rangle$、激发态为 $|1\rangle$，且 $\sigma_z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|$。我们用哈密顿量 $H = H_0 + V$描述经由二能级系统耦合的两个模式，其中

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \omega_q \frac{\sigma_z}{2} \tag{16}$$

and

$$V = g_a(a\sigma^\dagger + a^\dagger\sigma) + g_b(b\sigma^\dagger + b^\dagger\sigma) \tag{17}$$

它是旋波近似下各模式与二能级系统之间 Jaynes–Cummings 型耦合的总和。这里，$a^\dagger$ 和 $b^\dagger$ 分别是频率为 ω_a 和 ω_b的光子的玻色产生算符，而 $\sigma = |0\rangle\langle 1|$ 是二能级系统的自旋降算符。当失谐处于色散区时，微扰理论成立：$|\Delta_a|$，$|\Delta_b| \gg g_a$，g_b，其中 $\Delta_{a(b)} = \omega_q - \omega_{a(b)}$ 是二能级系统相对于模式 a (b)的失谐。

我们将上述建立的一般形式体系应用于此哈密顿量。一阶生成元为

$$G_1 = -ig_a\left(\frac{a\sigma^\dagger}{\Delta_a} - \frac{a^\dagger\sigma}{\Delta_a}\right) - ig_b\left(\frac{b\sigma^\dagger}{\Delta_b} - \frac{b^\dagger\sigma}{\Delta_b}\right). \tag{18}$$

为得到 H_2，我们计算 $i[G_1, V]/2$。收集对角项（在 H_0 本征基中），并略去一个常数后，我们得到二阶修正

$$H_2 = \left[\frac{g_a^2}{\Delta_a}\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{g_b^2}{\Delta_b}\left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right)\right]\sigma_z, \tag{19}$$

这恰好是玻色模式耦合二能级系统的色散哈密顿量的两份拷贝。二阶时不会出现模式间相互作用。

三阶修正为零，即 $H_3 = 0$。这是因为哈密顿量在变换 $(g_a, g_b, a, b) \rightarrow -(g_a, g_b, a, b)$ 下保持不变。

这一论证意味着，对于所有奇数 n，都有 $H_n = 0$。二阶生成元为

$$G_2 = -\frac{ig_a g_b}{2(\Delta_a - \Delta_b)}\left(\frac{1}{\Delta_a} + \frac{1}{\Delta_b}\right)(a^\dagger b - a b^\dagger)\sigma_z. \quad (20)$$

完整的四阶修正为

$$\begin{aligned} H_4 = {} & \omega_a^{(4)} a^\dagger a + \omega_b^{(4)} b^\dagger b + \omega_q^{(4)} \sigma^\dagger \sigma \\ & + \chi_a^{(4)} a^\dagger a \sigma^\dagger \sigma + \chi_b^{(4)} b^\dagger b \sigma^\dagger \sigma \\ & + \frac{1}{2} O_{aa} a^\dagger a^\dagger a a + \frac{1}{2} O_{bb} b^\dagger b^\dagger b b \\ & + O_{ab} a^\dagger a b^\dagger b, \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$O_{aa} = -\frac{2g_a^4}{\Delta_a^3}\sigma_z, \quad (22)$$

$$O_{ab} = -\frac{2g_a^2 g_b^2}{\Delta_a \Delta_b}\left(\frac{1}{\Delta_a} + \frac{1}{\Delta_b}\right)\sigma_z. \quad (23)$$

投影到二能级系统的基态后，得到

$$\chi_{aa} = \langle 0 | O_{aa} | 0 \rangle = \frac{2g_a^4}{\Delta_a^3}, \quad (24)$$

$$\chi_{ab} = \langle 0 | O_{ab} | 0 \rangle = \frac{2g_a^2 g_b^2}{\Delta_a \Delta_b}\left(\frac{1}{\Delta_a} + \frac{1}{\Delta_b}\right). \quad (25)$$

方程（24、25）是对由量子比特耦合的两个模式所诱导的自克尔效应和交叉克尔效应的一阶近似。在下一节中，我们将二能级系统替换为传输子，以提高模型的复杂度和准确性。

通过传输子耦合的两个模式的交叉克尔项和自克尔项。——在旋波近似下，通过传输子耦合的两个模式的哈密顿量为$H = H_0 + V$其中

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \omega_q c^\dagger c - \frac{\alpha}{2} c^\dagger c^\dagger c c \quad (26)$$

and

$$V = g_a(c^\dagger a + c a^\dagger) + g_b(c^\dagger b + c b^\dagger). \quad (27)$$

这里， $a^\dagger$ 和 $b^\dagger$ 分别是频率为 ω_a 和 ω_b的光子的玻色产生算符， $c^\dagger$ 是传输子的玻色产生算符， α 是传输子的非谐性。每个模式都以速率 g_a （g_b）与传输子耦合，但两个模式之间没有直接耦合。传输子在两个模式之间介导的相互作用，直到微扰理论的四阶才会出现。与两个模式和二能级系统的情形一样，微扰理论在色散区内有效。

一阶生成元现在写作 [参见方程（11）]

$$G_1 = -ig_a a c^\dagger \frac{1}{\Delta_a - \alpha c^\dagger c} - ig_b b c^\dagger \frac{1}{\Delta_b - \alpha c^\dagger c} + \text{H.c.}. \quad (28)$$

该算符包含传输子数算符的有理函数 $c^\dagger c$，因为方程（11）的分母取决于传输子的占据数。

我们引入记号 $x + \{a \leftrightarrow b\}$，表示 x 与其置换之和，其中与模式 a 相关的所有量均与模式 b 相关的所有量互换。二阶修正为

$$\begin{aligned} H_2 = -g_a^2 \Bigg[& a^\dagger a \left(\frac{1}{\Delta_a - \alpha c^\dagger c} + c^\dagger \frac{1}{\Delta_a - \alpha(c^\dagger c + 1)} c \right) \\ & - (a^\dagger a + 1) c^\dagger \frac{1}{\Delta_a - \alpha c^\dagger c} c \Bigg] + \{a \leftrightarrow b\}. \end{aligned} \quad (29)$$

三阶修正为零： $H_3 = 0$。同样，这是因为哈密顿量在变换 $(g_a,\ g_b,\ a,\ b) \to -(g_a,\ g_b,\ a,\ b)$ 下保持不变。此论证表明，对所有奇数 n，均有 $H_n = 0$。为简洁起见，我们定义算符

$$f_{i,\mu} = \frac{1}{\Delta_i - \alpha(c^\dagger c + \mu)}, \quad (30)$$

$$h_{ij,\mu} = \frac{1}{\Delta_i + \Delta_j - \alpha(2c^\dagger c + 1 + \mu)}. \quad (31)$$

二阶生成元为

$$\begin{aligned} G_2 = \frac{1}{2}[& -ig_a^2 a a c^\dagger c^\dagger (f_{A,1} - f_{A,0}) h_{aa,0} \\ & - ig_a g_b a b c^\dagger c^\dagger (f_{B,1} - f_{B,0}) h_{ab,0} \\ & + ig_a g_b a b^\dagger (f_{B,0} + c^\dagger [f_{B,1} - f_{B,0}] c) \frac{1}{\Delta_a - \Delta_b} \\ & + \{a \leftrightarrow b\}] + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (32)$$

四阶修正的形式为

$$\begin{aligned} H_4 = {} & \omega_a^{(4)} a^\dagger a + \omega_b^{(4)} b^\dagger b + O_q + O_a a^\dagger a + O_b b^\dagger b \\ & + \frac{1}{2} O_{aa} a^\dagger a^\dagger a a + \frac{1}{2} O_{bb} b^\dagger b^\dagger b b \\ & + O_{ab} a^\dagger a b^\dagger b. \end{aligned} \quad (33)$$

O_{aa} 是模式 a 的自克尔项，而 O_{ab} 是模式 a 与模式 b之间的交叉克尔项。关于 O_{aa}和 O_{ab}的完整表达式——即通过传输子耦合的两个模式的自克尔项和交叉克尔项，适用于传输子的所有能级，且为闭式表达——见补充材料。据我们所知，这是一个新结果。传输子处于基态时的克尔系数已为人所知 [31, 32]。投影到传输子基态后得到

$$\chi_{aa} = \langle 0 | O_{aa} | 0 \rangle = -\frac{2\alpha g_a^4}{\Delta_a^3(2\Delta_a - \alpha)}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \chi_{ab} &= \langle 0 | O_{ab} | 0 \rangle \\ &= -\frac{2\alpha g_a^2 g_b^2}{\Delta_a \Delta_b (\Delta_a + \Delta_b - \alpha)}\left(\frac{1}{\Delta_a} + \frac{1}{\Delta_b}\right), \end{aligned} \quad (35)$$

[参见正文中的方程（6、7）]。在极限 $\alpha \to \infty$下，我们得到方程（24、25），即二能级系统的结果。在极限 $\alpha \to 0$ 下，我们恢复线性（即 χ_{aa} 和 $\chi_{ab} \to 0$）。

补充材料：多模电路量子电动力学系统中光-物质耦合的原位表征

目录

S1. CPW 晶格器件 9S2. 双音谱学 9S3. 实验测量协议 11S4. 模式对比较 13S5. 测量可重复性 14S6. 受驱阻尼克尔谐振器的半经典解 15S7. 克尔测量拟合 17S8. O_{aa} 和 O_{ab} （传输子） 18

S1. CPW 晶格器件

本研究所呈现的数据采集自图 S1(a) 所示的准一维共面波导（CPW）谐振器晶格器件，该器件嵌入了传输子量子比特。CPW 谐振器通过光刻工艺定义在一层 200 nm 的钽薄膜上，该薄膜镀覆于 $25.4\times25.4\,\mathrm{mm}^2$ 蓝宝石衬底晶圆上。晶格由九个元胞组成，每个元胞包含六个谐振器；第一个元胞与输入端口耦合，最后一个元胞与输出端口耦合。器件中的所有谐振器均通过三路电容器与相邻谐振器端对端耦合。三个频率可调的传输子量子比特通过电容耦合到晶格中的各个独立谐振器。传输子的电容极板与 CPW 谐振器一同通过光刻工艺在钽薄膜上定义；约瑟夫森结则由两层铝和其间的绝缘氧化铝层构成，并通过双角度蒸镀沉积到芯片上。本研究的数据仅使用了三个传输子中的一个，该传输子在图 S1(a) 中以黄色方框标出。另外两个传输子与相关简正模的频率失谐 ~ 5 GHz，以确保它们对观测到的克尔频移的贡献可以忽略不计。有关该器件的更详细说明，包括其制造工艺和电路参数，参见文献 [23]。

尽管该器件中的谐振器均被设计为具有相同频率，最近邻电容耦合仍会解除这一简并。在没有量子比特的情况下，共面波导谐振器阵列可近似由紧束缚哈密顿量描述，

$$H = \omega_0 \sum_n a_n^\dagger a_n - t \sum_{\langle n,n'\rangle} a_n^\dagger a_{n'}, \tag{S1}$$

其中 ω_0 为谐振器频率，主要由共面波导的长度决定，而 t 为耦合谐振器之间的有效跳跃率，主要由耦合电容决定。每个谐振器的玻色产生/湮灭算符 $a^\dagger/a$，以整数 n 为下标，且 $\langle n、\ n'\rangle$ 表示共用一个耦合器的相邻谐振器。因此，简正模的频率高度依赖于耦合几何。准一维晶格器件的模式谱通过高功率双音谱学测得，所用传感器模式位于 4.960 吉赫兹，如图 S1（b）所示。

S2. 双音谱学

本节对双音谱学作了更详细的描述；该技术即贯穿整个测量协议、用于确定量子比特-模式耦合的扫描泵浦-探测技术。尽管双音谱学是

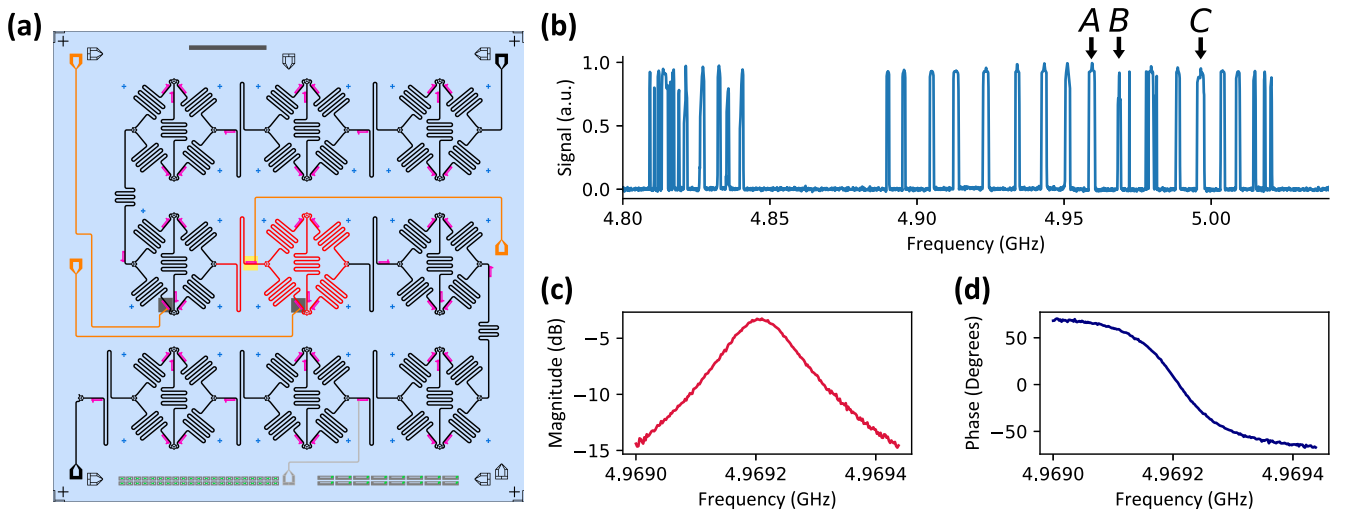

图 S1. 器件布局与光子模式。 (a) 本研究所用 CPW 晶格器件的计算机辅助设计图，添加了颜色以突出显示细节。晶格谐振器以黑色显示，但中央元胞中的谐振器以红色显示。每个 CPW 侧边开设的、可用于添加量子比特的凹槽以粉色显示。三个嵌入式磁通可调跨蒙量子比特以方框突出显示。本研究中用于采集数据的磁通可调跨蒙量子比特以黄色方框突出显示，另外两个跨蒙量子比特以灰色方框突出显示。对应的磁通偏置线以橙色显示。器件左下角和右上角的输入/输出端口可用于微波传输测量。(b) CPW 晶格谱的高功率双音谱学测量（该测量技术的详细说明见参考文献 [23]）。用于测试耦合验证协议的三个模式以灰色箭头标出（$\omega_A/2\pi = 4.960$ 吉赫兹、 $\omega_B/2\pi = 4.969$ 吉赫兹、 $\omega_C/2\pi = 4.997$ 吉赫兹）。(c)–(d) 模式 B 的传输谱学，分别显示透射微波信号的幅度和相位随信号频率的变化。对测得的该模式相位响应进行校正，以补偿传输线引起的线性相位延迟。

电路量子电动力学领域中用于进行量子比特测量的常用技术 [22], 克尔测量中用于探测其他非线性模式的方法则不太常见，值得进一步讨论 [35, 36]。为确保下文对双音谱学的描述完全具有一般性，并同时适用于交流斯塔克位移和克尔频移测量，我们引入两个新术语：传感器模式和目标特征。（更一般的目标/传感器术语与正文中所用驱动/监测术语之间的联系见图S2 及第S3节。）

测量过程中，将探测音以与传感器模式共振的频率输入，同时在目标特征（量子比特或另一种光子模式）附近扫描泵浦音的频率。当泵浦音使目标特征中布居了光子时，传感器模式会偏离与探测信号的共振，从而改变探测信号通过器件的透射。通过测量透射探测信号随泵浦频率的变化，可以确定目标特征的频率。

为解释这一过程，我们首先更明确地定义传感器模式与目标特征之间的关系。传感器模式的有效频率为

$$\omega_s' = \omega_s + \chi n_t = \omega_s + \delta\omega_s, \tag{S2}$$

其中 ω_s 是传感器的未受扰频率，而 n_t 是目标特征中的平均光子数。根据目标特征的性质，参数 χ 可以是传输子的色散频移，也可以是第二个正则模的交叉克尔系数。我们将传感器模式频率的变化记为$\delta\omega_s \equiv \omega_s' - \omega_s = \chi n_t$。为简单起见，式（S2）中省略了传感器模式内探测光子导致的传感器频率自克尔频移。

因此，探测音经传感器透射的情况取决于泵浦是否已在目标特征中激发出光子。传感器对探测信号的响应是 ω_{pr} 和 ω_s') 的函数，我们将其记为$\mathcal{R}(\omega_{\mathrm{pr}},\ \omega_s')$。具体而言，在本文中，我们使用传感器模式的透射响应。由于响应仅取决于探测信号与有效传感器频率之间的失谐，因此可将其改写为 $R(\omega_s' - \omega_{\mathrm{pr}})$。由于探测信号与未扰动传感器模式（$\omega_{\mathrm{pr}} = \omega_s$）谐振，这一表达式还可进一步简化为 $R(\delta\omega_s)$，仅取决于传感器的频移。当泵浦与目标谐振时，$\omega_{\mathrm{pump}} = \omega_t$，目标特征中的光子数（$n_t$）和传感器频移（$\delta\omega_s$）均达到最大，从而使传感器响应的变化最大

，$|\delta R| = |R(\delta\omega_s) - R(0)|$。因此，通过光谱测量找到能使探测信号透射变化最大的泵浦频率，即可确定目标的频率。

根据同样的逻辑，如果目标特征受到交流斯塔克位移或克尔位移的影响，双音谱学可以识别目标特征的有效频率。我们将在图 S2 和第 S3节中介绍如何诱导交流斯塔克位移和克尔频移的细节。目前，我们考虑这样一种抽象情形：目标特征存在频移 $\delta\omega_t$，使得目标特征的有效频率为

$$\omega_t' = \omega_t + \delta\omega_t. \tag{S3}$$

目标特征的光子数最高（因此传感器响应的变化最大）时，满足$\omega_{\text{pump}} = \omega_t'$，这意味着也可以通过这种方法追踪目标的有效频率。图S2（a）展示了如何根据探测信号的透射来识别目标频率。

若已知传感器响应函数，则可以根据对 $|\delta R|$ 的观测提取传感器上的频移 $\delta\omega_s$。光子模式响应 $R(\delta\omega_s)$ 是一个复值函数，它同时描述输出信号的振幅和相位。由于共振附近的幅度响应较为平坦，此处我们仅考虑透射响应的相位，其表达式为 [17]

$$\phi(\omega_s' - \omega_{pr}) = \arctan\left[2Q(\omega_s' - \omega_{\text{pr}})/\omega_s'\right], \tag{S4}$$

其中 Q 为传感器模式的品质因数。再次考虑共振探测信号的情况，$\omega_{\text{pr}} = \omega_s$，相位响应可简化为 $\phi(\delta\omega_s) =$ 反正切 $[2Q\delta\omega_s/\omega_s']$。通过在双音谱学测量期间测量探测信号的相位并对该表达式求逆，可以提取泵浦音在传感器上引起的频移 $\delta\omega_s$。图S2(a) 和 (b) 展示了相位响应示意图。

S3. 实验测量方案

这里我们详细描述完整的量子比特-模式耦合测量方案。具体而言，我们将交流斯塔克频移和克尔频移的测量作为一般双音谱学测量的扩展进行介绍，并对用于拟合数据的模型作更深入的说明。此外，我们还讨论用于表征光子模式响应函数的测量。

首先，简要重述正文中对该方案的高层次描述。从完整的器件频谱中选取两个与传输子量子比特均耦合的模式：监测模式（M）和驱动模式（D）。在第一次测量中，对 D 施加微波驱动，并改变驱动功率 P，使模式中填充光子，并观测传输子频率上单位功率交流斯塔克位移 $\frac{\partial\omega_q'}{\partial P} = \beta\tilde{\chi}_D$。在第二次测量中，再次对模式 P 施加功率更大的微波驱动，并跟踪模式 D 频率上的单位功率自克尔位移 D，$\frac{\partial\omega_D'}{\partial P} = \beta\chi_{DD}$以及模式 M频率上的单位功率交叉克尔位移 $\frac{\partial\omega_M'}{\partial P} = \beta\chi_{DM}$。利用比值 $\beta\tilde{\chi}_D/\beta\chi_{DD}$和 $\beta\tilde{\chi}_D/\beta\chi_{DM}$消除驱动模式未知的功率到光子数转换因子 β 的影响，并结合方程（5-7），确定量子比特与驱动模式和监测模式之间的耦合，分别为 g_D 和 g_M。

现在详细介绍该协议的各个步骤。在进行交流斯塔克频移和克尔频移测量之前，先对模式 D 和 M 进行传输谱学测量，以确定 ω_D 和 ω_M，并校准监测模式的相位响应。对相位进行线性校正，以补偿输入/输出传输线长度引入的相移后，将透射信号的相位拟合至公式（S4）。之后在克尔频移测量中，利用这一拟合函数将与模式 M 谐振的探测音的相位转换为该模式所经历的交叉克尔频移的大小。图 4.9692 吉赫兹处晶格模的幅度和相位响应测量结果见图 S1(c) 和 (d)。

现在介绍该协议中的双音谱学部分，首先是交流斯塔克频移的表征。根据第 S2 节定义的一般双音谱学术语，模式 D 充当传感器，而量子比特充当目标特征。因此，在泵浦音频率扫过量子比特频率时，测量透过模式D 的探测音幅度。在本研究收集的数据中，探测音同时充当驱动信号，为模式 D 填充光子以产生交流斯塔克频移；并且在不同测量之间改变探测/驱动信号的功率 P。使探测音透射变化最大的泵浦频率对应于有效量子比特频率 ω_q'。对每个 P 值，通过对探测信号的测量透射率进行高斯拟合并取其中心位置，确定该频率。交流斯塔克频移测量的示例数据见图 S3。

上述交流斯塔克频移测量适用于模式 D 的响应可通过透射谱学轻易观测到的系统，但并非所有系统都满足这一条件。例如，在 CPW 晶格器件中，

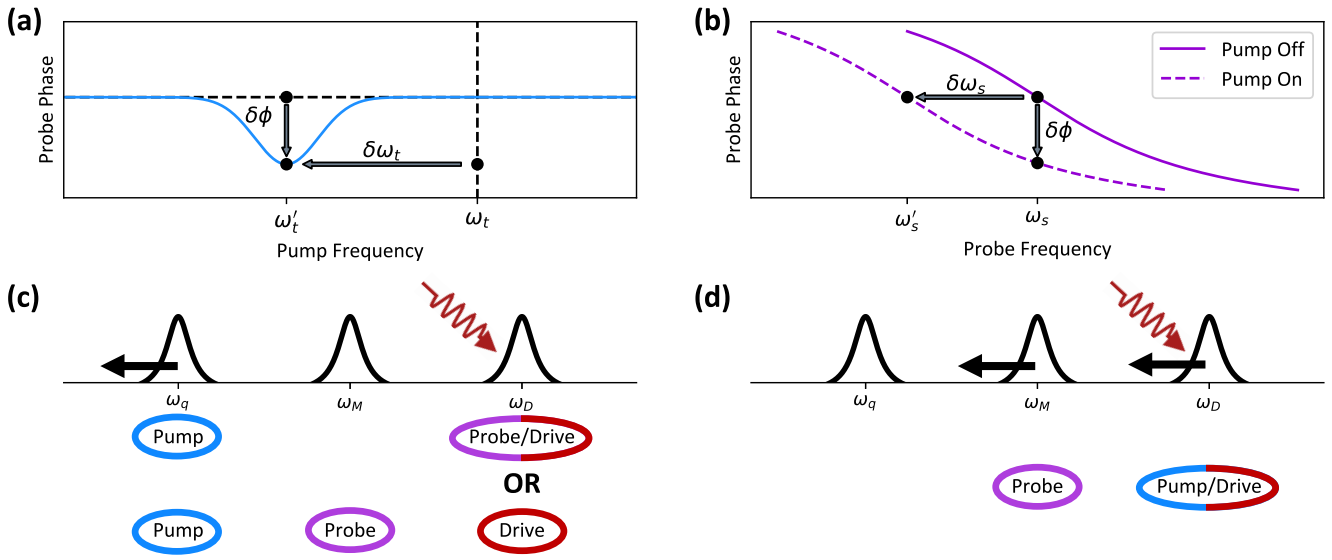

图 S2. 广义双音谱学。 (a) 描绘一般双音光谱测量的示意图。在将泵浦音的频率扫过目标特征（量子比特或第二正则模）的同时，测量透过传感器模式的探测音相位。最强相位响应 $\delta\phi$出现在泵浦频率与目标的有效频率共振之时 ω_t'，表明目标频率偏移了 $\delta\omega_t$ ，偏离其原始频率 ω_{to}。 (b) 描绘传感器模式对探测音的相位响应函数的示意图，包含两种情形：(i) 未向目标特征施加泵浦音（实线）；(ii) 施加与目标特征共振的泵浦音（虚线），使被探测模式的中心频率偏移 $\delta\omega_s$ ，偏离其原始值 ω_{so}。由于测量之前已知传感器的预期响应，双音谱学中观测到的相位差 $\delta\phi$ 用于确定$\delta\omega_{so}$。 (c) 交流斯塔克频移测量的示意图，突出所涉及微波音的作用。图中展示了用于跟踪有效量子比特频率的双音谱学测量的两种变体：(i) 本工作中用于采集所示数据的方法；(ii) 针对驱动模式透射信号可忽略的系统所作的改动。在第一种情形中，模式 D 充当传感器模式，透过该模式的探测音同时充当驱动，在量子比特频率上产生交流斯塔克频移。在第二种情形中，模式 M 充当传感器模式；探测音经模式 M 发送，并向模式 D施加专用驱动信号。在两种情形中，量子比特均为目标特征，并由泵浦音激发。(d) 克尔频移测量的示意图，突出所涉及微波音的作用。探测音以与模式 M共振的频率发送，该模式充当传感器模式。模式 D 充当目标特征，泵浦音的频率在该模式上扫描。该泵浦音同时充当驱动，在模式 D 上产生自克尔频移，并在模式 M上产生交叉克尔频移。

可能存在高度局域化的模式，它们与输入或输出端口的耦合较弱，因此无法通过透射观测到 [23]。对于模式 D 无法观测到的情况，可以轻松修改测量方案，改用模式 M作为传感器。在此配置中，弱探测信号通过模式 M传输，泵浦用于激发量子比特，另一个用作驱动的第三微波信号则施加在与模式 D共振的频率上。每次测量时都会改变该第三个信号的功率 P，以产生所需的交流斯塔克频移；随后按照与上述相同的方式，利用传感器进行识别ω_q'。图 S2(c) 展示了进行交流斯塔克频移测量的两种可能微波信号组合。

为利用双音谱学进行克尔频移测量，模式 M 用作传感器模式，模式 D 则作为目标特征。在将泵浦音的频率扫过模式 D的同时，观测透过模式 M 的探测音的相位。此处，泵浦音同时充当驱动，使模式 D 填充光子。泵浦/驱动音的功率 P 在各次测量之间加以改变。当泵浦使模式 D填充光子时，它通过交叉克尔效应使模式 M 的频率偏离探测信号的共振，从而导致透射信号的相位发生变化。

通过找出在给定功率下产生最大相位响应的泵浦频率，可以确定有效驱动模式频率 ω_D' 。为准确确定该泵浦频率，进而 ω_D'，我们利用上述初始透射测量中确定的已知相位响应函数，将测得的相移转换为监测模式的频率。随后，将克尔振荡器的预期响应函数（由式（S20）给出）拟合到转换后的数据，并确定该函数的绝对最小值。该最小值对应的泵浦频率给出 ω_D'，而该最小值可用于提取 ω_M'。关于S2 节的

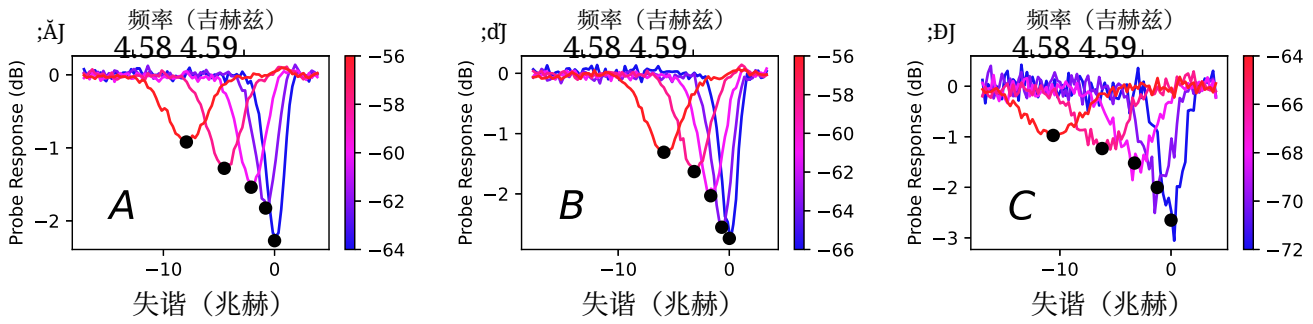

图 S3。 交流斯塔克频移。 (a) 使用模式 A 作为传感器对传输子进行双音谱学测量。针对不同的驱动功率（P）重复测量，以观察单位功率交流斯塔克位移。图中展示了五种驱动功率下的样本数据。通过高斯拟合确定的各功率下的量子比特频率以黑点标出。(b)-(c) 分别对施加于模式 B 和 C 的微波驱动进行类似测量。为便于与图 S4比较（该图展示了所有驱动/监测模式对的克尔测量），这些交流斯塔克测量所用的驱动模式（A、B 或 C）标注在各子图内。三个驱动模式的频率及其在晶格能带中的位置见图 S1(b)。

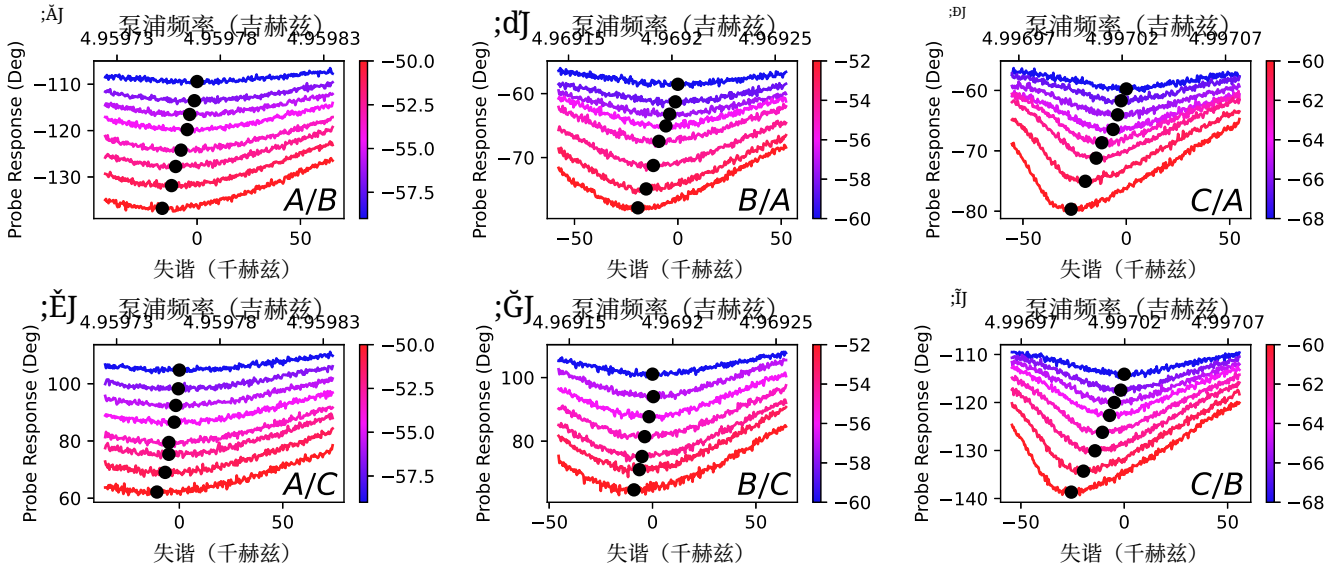

图 S4。 自克尔频移和交叉克尔频移 (a)-(f) 对所有可能的驱动模式与监测模式组合进行双音谱学测量。各子图所示的组合由右下角的标签标明：驱动模式（A、B、C）/监测模式（A、B、C）。图中展示了八种不同驱动功率下的样本数据。线条颜色表示所施加的驱动功率。通过拟合克尔频移振子的响应函数并找出拟合函数的极小值，得到驱动模式和监测模式的克尔频移后的频率；该极小值以黑点标出。极小值所在的泵浦频率（x，即黑点的坐标）确定驱动模式的自克尔频移后的频率，而探测响应的幅值（y，即黑点的坐标）确定监测模式的交叉克尔频移后的频率。三个驱动/监测模式的频率及其在晶格能带中的位置见图 S1(b)。

我们在双音谱学中追踪传感器和目标特征频率的方法，详见下文。用于进行克尔测量的双音谱学配置如图S2(d)所示，测量的样本数据见图S4。

S4. 模式对比较

在本节中，我们使用全部六种可能的驱动/监测模式配对，在三个晶格模式上展示该协议，以验证所预测的量子比特-模式耦合与测量所使用的模式配对无关。我们将用于此次比较的模式标记为 A、B 和 C，其频率分别为 $\omega_A/2\pi = 4.960$ 吉赫兹、$\omega_B/2\pi = 4.969$ 吉赫兹、

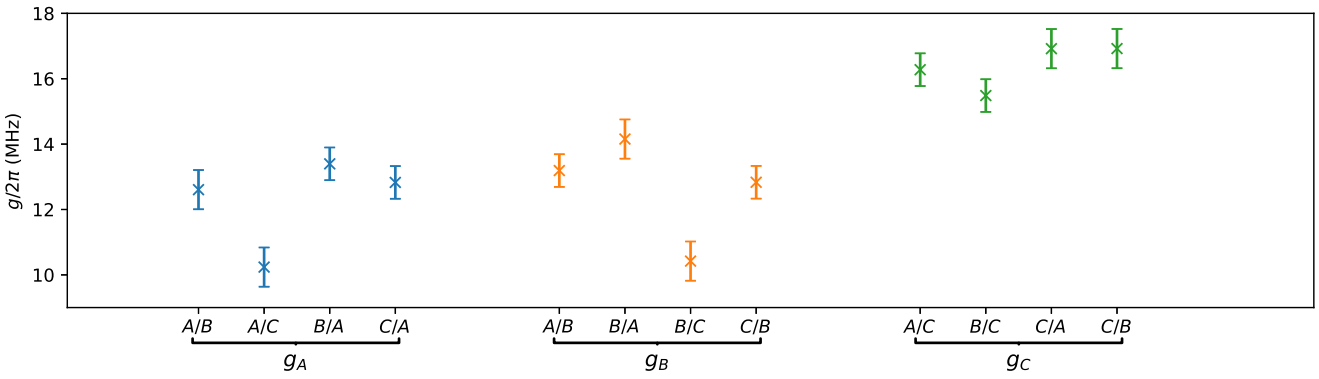

图 S5. 使用不同模式对预测的量子比特-模式耦合。 比较我们的测量协议针对晶格模式 A、 B和 C的全部六种可能驱动/监测组合所返回的量子比特-模式耦合。这些提取值的汇总也列于表 S1。

表 S1。 使用不同模式配对预测的量子比特-模式耦合。 通过使用所有可能的模式驱动/监测配对的协议测量得到的量子比特-模式耦合比较 A、 B和 C。这些数值的图示（包括系统误差条）见图 S5。

驱动/监测对	$g_A/2\pi$ （兆赫）	$g_B/2\pi$ （兆赫）	$g_C/2\pi$ （兆赫）
A/B	12.6	13.2	×
B/A	13.4	14.2	×
A/C	10.2	×	16.3
C/A	12.8	×	16.9
B/C	×	10.4	15.5
C/B	×	12.8	16.9

以及 $\omega_C/2\pi = 4.997$ 吉赫兹，传输子量子比特调谐至频率 $\omega_q/2\pi = 4.593$ 吉赫兹。所选模式标示于图S1（a）所示器件谱中。对每一种组合，该过程为每个单独模式返回四个独立的耦合预测：其中两个来自其作为驱动模式时的自克尔频移测量，另外两个来自其作为监测模式时的交叉克尔频移测量。协议针对这些驱动/监测配对返回的预测量子比特-模式耦合列于表S1 中，并图示于图S5。耦合的误差条由第S5节所述的可重复性测量确定。这些预测之间的一致性进一步验证了我们协议的输出。

对于每一对模式，均进行交流斯塔克频移测量和克尔频移测量，以测量单位功率对应的频移（见第S3节）。图S3展示了使用三种可能的驱动模式选择进行交流斯塔克频移双音谱学得到的数据。尽管为计算量子比特-模式耦合，针对每种可能的模式配对组合都采集了交流斯塔克数据，但图中只展示了其中三组，因为监测模式的选择不会影响这项测量。完整的克尔频移双音谱学测量结果见图S4。

S5. 测量可重复性

为确定测量协议所得量子比特-模式耦合的可重复性，我们在 27 小时内执行该协议十次，并分析预测耦合的离散程度。在此过程中，我们使用模式 C 作为驱动模式，并使用模式 A 作为监测模式。由于单位功率对应的交流斯塔克频移和克尔位移的幅度会随失谐增大而减小，因此预测耦合的离散程度预计会取决于量子比特频率。为考虑这种失谐依赖性，我们在两种不同的量子比特失谐下进行重复测量：一种情况下量子比特更接近模式，频率为 $\omega_q/2\pi = 4.60$ 吉赫兹；另一种情况下量子比特离模式更远，频率为 $\omega_q/2\pi = 4.18$ 吉赫兹。使用模式 C 作为驱动模式、模式 A 作为监测模式时，这些测量所预测的耦合如图S6所示。

在这些测量中，syst 预测耦合值的系统性变化被发现比统计误差影响更大 .

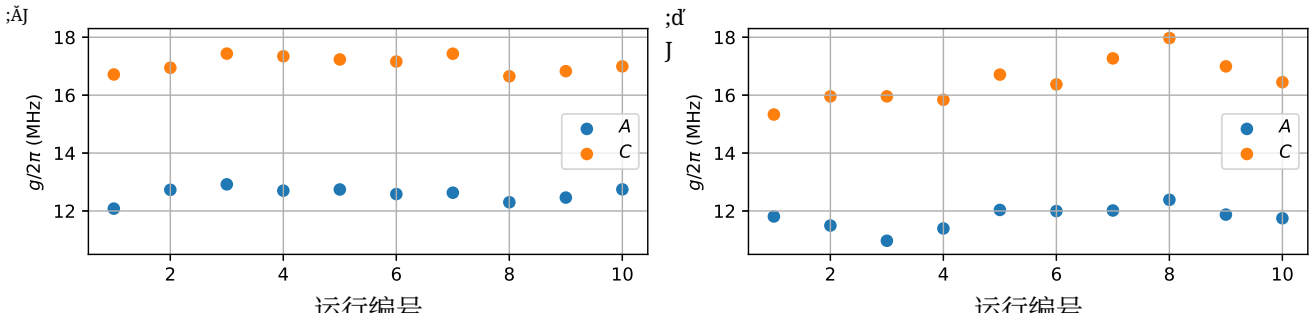

图 S6. 重复性测量。在 27 小时内重复执行该协议十次后，预测得到的量子比特-模式耦合；使用模式 C 作为驱动模式、模式 A 作为监测模式，并在两个固定的量子比特失谐下进行测量：(a) 将量子比特调谐至 $\omega_q/2\pi = 4.60$ 吉赫兹；(b) 将量子比特调谐至 $\omega_q/2\pi = 4.18$ 吉赫兹。

协议返回的 g_C 和 g_A 高度相关，这很可能是由于测量过程中发生了量子比特漂移。这些测量中观察到的漂移幅度用于确定协议返回的量子比特-模式耦合的误差条。发现各组耦合值的标准差为： g_C对应 600 千赫兹，该值被视为驱动模式耦合预测的误差； g_A对应 500 千赫兹，该值被视为监测模式耦合预测的误差。

S6. 驱动-阻尼克尔谐振器的半经典解

本节总结受驱耗散克尔谐振器的半经典解。正文中描述的光谱测量将依据本节的理论预测进行拟合，以提取克尔系数。

我们考虑一个受驱阻尼　　克尔振荡器，其动力学可由林德布拉德主方程描述：

$$\partial_t \rho = -i[H_{\rm tot}, \rho] + \kappa \mathcal{D}[a]\rho. \tag{S5}$$

这里我们假设采用相对于外部驱动频率 $\omega_{\rm dr}$ 定义的旋转参考系，因此哈密顿量可写为

$$H_{\rm tot} = -\Delta_{\rm dr} a^\dagger a - \frac{\eta_a}{2} a^\dagger a^\dagger a a + \left(\mathcal{E}_{\rm dr} a^\dagger + \text{H.c.}\right), \tag{S6}$$

其中失谐为　　$\Delta_{\rm dr} = \omega_{\rm dr} - \omega_q$。我们可以写出模式算符的量子朗之万方程　　as

$$\partial_t a = \left[-i(\Delta_{\rm dr} + \eta_a a^\dagger a) - \frac{\kappa}{2}\right] a + i\mathcal{E}_{\rm dr} + \sqrt{\kappa} a_{\rm in}. \tag{S7}$$

对于典型实验，我们有 $\kappa/2\pi \sim 100$ 千赫兹和 $\eta_a/2\pi \sim 10$ 赫兹。

方程（S5）的半经典极限已在光学双稳态的背景下得到广泛研究（参见参考文献 [39] 的引言）。另请注意，方程（S5）中驱动耗散克尔振荡器的稳态可以通过解析方法求解 [39–41]；不过，这种精确解涉及特殊函数，通常难以进行数值计算。

首先，我们可以采用半经典近似处理系统动力学，此时系统态完全由经典振幅 α 表征。更具体地说，腔内振幅与驱动振幅之间的关系为

$$\left[i(\Delta_{\rm dr} + \eta_a |\alpha|^2) + \frac{\kappa}{2}\right] \alpha = i\mathcal{E}_{\rm dr}, \tag{S8}$$

并且我们可以通过以下方程求解平均光子数 $\bar{n}_a = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha|^2$ （参见 [39] 的方程 (2.10)）：

$$\left[(\Delta_{\rm dr} + \eta_a |\alpha|^2)^2 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2\right] |\alpha|^2 = |\mathcal{E}_{\rm dr}|^2. \tag{S9}$$

对于给定的驱动振幅 $\mathcal{E}_{\rm dr}$ 和失谐 $\Delta_{\rm dr}$，方程 (S9) 在半经典近似下定义了平均光子数的隐函数$\bar{n}_a = |\alpha|^2$：

$$\left[\left(\bar{n}_a + \frac{\Delta_{\rm dr}}{\eta_a}\right)^2 + \left(\frac{\kappa}{2\eta_a}\right)^2\right]\bar{n}_a = \frac{|\mathcal{E}_{\rm dr}|^2}{\eta_a^2}. \tag{S10}$$

等价地，在半经典极限下，我们可以显式计算出获得稳态光子数 $\bar{n}_a = |\alpha|^2$ 所需的失谐，即

$$\Delta_{\rm dr} = -\eta_a\bar{n}_a \pm \sqrt{\frac{|\mathcal{E}_{\rm dr}|^2}{\bar{n}_a} - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2}. \tag{S11}$$

还可以证明，要使半经典方程具有多个实稳态解，所需的最小驱动振幅为

$$|\mathcal{E}_{\rm dr,crit}| = \sqrt{\frac{\kappa^3}{3^{\frac{3}{2}}\eta_a}}. \tag{S12}$$

此外，当式（S11）中的根式项为零时，腔内光子数达到最大值，这对应于以下参数组合

$$\bar{n}_a = |\alpha|^2 = \frac{|\mathcal{E}_{\rm dr}|^2}{\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2}, \quad \Delta_{\rm dr} = -\frac{\eta_a}{\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2}|\mathcal{E}_{\rm dr}|^2. \tag{S13}$$

T因此，在临界驱动功率下，腔内光子数的峰值为

$$\bar{n}_{a,\rm crit} = \frac{|\mathcal{E}_{\rm dr,crit}|^2}{\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} = \frac{4\kappa}{27\eta_a}. \tag{S14}$$

当腔内光子数远大于这一临界值时，半经典近似将失效，此时应求解完整的量子主方程（S5）。

实验测量透射信号的强度和相位。我们可以利用输入输出关系计算透射场，即

$$\alpha_{\rm out} = \kappa_{\rm out}\alpha = \frac{i\sqrt{\kappa_{\rm out}}\mathcal{E}_{\rm dr}}{\frac{\kappa}{2} + i(\Delta_{\rm dr} + \eta_a|\alpha|^2)}, \tag{S15}$$

其中，腔内光子数由方程（S10）的实数解给出，该方程是关于 $\bar{n}_a$ 的三次方程：

$$\left[\left(\bar{n}_a + \frac{\Delta_{\rm dr}}{\eta_a}\right)^2 + \left(\frac{\kappa}{2\eta_a}\right)^2\right]\bar{n}_a = \frac{|\mathcal{E}_{\rm dr}|^2}{\eta_a^2}. \tag{S16}$$

当光子数足够小时，满足以下条件

$$\eta_a\bar{n}_a \ll |\Delta_{\rm dr}|, \frac{\kappa}{2}, \tag{S17}$$

腔响应还可以进一步近似为线性响应

$$\bar{n}_a \simeq \frac{|\mathcal{E}_{\rm dr}|^2}{\Delta_{\rm dr}^2 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2}, \tag{S18}$$

这反过来对应于对驱动功率的以下约束：

$$\eta_a\frac{|\mathcal{E}_{\rm dr}|^2}{\Delta_{\rm dr}^2 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} \ll \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \Rightarrow |\mathcal{E}_{\rm dr}|^2 \ll \frac{\frac{\kappa}{2}\left[\Delta_{\rm dr}^2 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2\right]}{\eta_a}. \tag{S19}$$

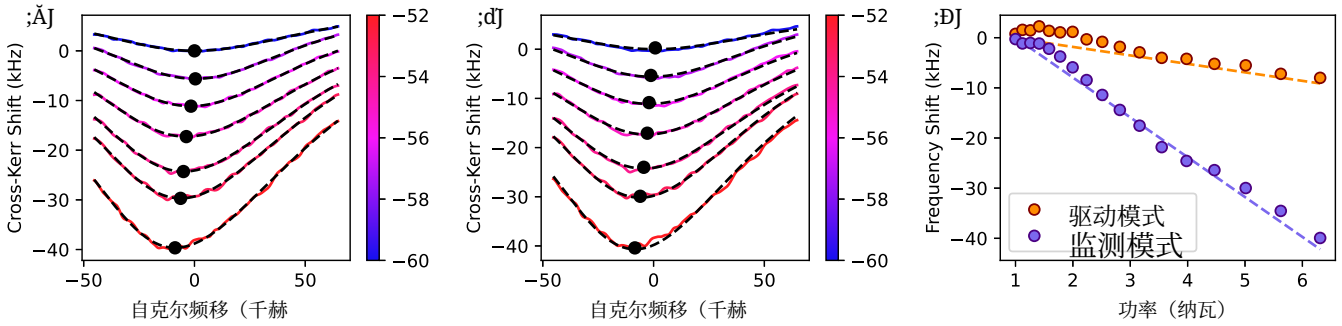

图 S7. 拟合方法的比较。 将一维拟合方法和二维拟合方法应用于克尔测量，以模式 C 作为驱动模式，以模式 B 作为监测模式。在拟合之前对数据施加高斯滤波器，以降低噪声对较为精细拟合的影响。(a) 七个所施加驱动功率下的滤波数据，以及在每个单独驱动功率下对式（S20）的最佳拟合曲线（黑色虚线），展示了一维拟合方法的拟合质量。拟合极小值以黑点标示。(b) 七个所施加驱动功率下的滤波数据，以及同时对所有驱动功率进行、并计入缓慢相位漂移的二维拟合最佳拟合（黑色虚线）。拟合极小值以黑点标示。(c) 两种拟合方法所提取的克尔频移随驱动功率变化的比较。彩色圆点表示由一维拟合方法确定的驱动模式和监测模式的提取频移。虚线表示由二维拟合提取的频移，其按构造要求为线性。

在实验测量中，我们通常处于临界驱动功率以下（即不存在双稳态），在这种情况下，我们可以微扰地计算腔内光子数：

$$\bar{n}_a = \frac{|\mathcal{E}_{\mathrm{dr}}|^2}{\eta_a^2\left[\left(\bar{n}_a + \frac{\Delta_{\mathrm{dr}}}{\eta_a}\right)^2 + \left(\frac{\kappa}{2\eta_a}\right)^2\right]}. \tag{S20}$$

实验中测得的交叉克尔频移与被驱动模式的腔内光子数成正比。将交叉克尔频移拟合到方程（S20）（假设转换系数未知），即可提取被驱动模式的自克尔系数。下一节将介绍该拟合的详细内容。

S7. 克尔测量拟合

在测量协议中测量克尔频移的部分，我们将克尔振荡器的预期响应 [方程（S20）]（在第S6 节推导）与驱动模式的实测响应进行拟合，以追踪自克尔和交叉克尔频移对驱动模式和监测模式频率的影响。本节将讨论两种用途不同的拟合方法：“一维”拟合，即将第S6节推导的模型针对每个驱动功率，分别拟合驱动频率对应的实测响应；以及“二维”拟合，即一次性将模型拟合到所有驱动功率和驱动频率下的全部实测响应。根据实验结果，我们发现一维拟合对实验误差具有稳健性，但无法得到一组能够描述所有驱动功率下数据的拟合参数。相反，二维拟合按其设计能够找到一组描述整个数据集的模式参数，但要使拟合收敛，则需要加入额外的经验拟合参数。

在一维拟合中，式（S20）分别对每个驱动功率下的测量进行拟合。模式 $|\mathcal{E}_{\mathrm{dr}}|^2$ 中的有效驱动功率针对每个功率独立确定，同时确定驱动模式的频率、线宽和自克尔系数。

二维拟合纳入了这些参数并非相互独立这一事实，以及所有数据集均来自单一的驱动模式频率、线宽和自克尔系数，并对应单一转换因子 $|\mathcal{E}_{\mathrm{dr}}|^2 = \zeta P$，用以联系有效腔内驱动功率与所施加的实验室功率。我们发现，只要向模型引入一项额外效应——探测音相位的缓慢漂移，统一的二维拟合就能整体刻画克尔数据集。该漂移在系统中可被经验观测，并会给监测模式频率上测得的交叉克尔频移引入系统误差。为在拟合中计入缓慢相位漂移，我们纳入独立的相位偏移，针对每个驱动功率；拟合在上述基本腔参数之外还确定这些偏移。对以模式 C 作为驱动、以模式 B 作为监测模式的克尔测量，一维拟合与二维拟合的比较见图S7。

纳入缓慢相位漂移的影响后，二维拟合结果与测量数据吻合良好，这支持了采用简单的单模克尔振荡器模型来描述我们多模

系统中各个模式的响应。然而，由于一维方法无需引入额外的自由参数即可可靠地拟合测得的模态响应极小值，正文及补充材料其他部分中的数据均仅通过一维方法进行拟合。

S8. 传输子的O_{aa} 与 O_{ab}

在附录中，我们计算了经由传输子量子比特耦合的两个模式的哈密顿量的四阶修正，即式（33），以及自克尔频移与交叉克尔频移 χ_{aa} 与 χ_{ab} （传输子处于基态时）。此处我们给出完整的频移算符 O_{aa} 与 O_{ab}，它们对应于任意电荷量子比特激发数，并作用于无限维电荷量子比特希尔伯特空间。附录中给出的频移为 $\chi_{aa}=\langle 0|O_{aa}|0\rangle$ 与 $\chi_{ab}=\langle 0|O_{ab}|0\rangle$。

整个电荷量子比特子空间上的自克尔算符为

$$O_{aa}=g_a^4(c^\dagger c^\dagger \xi_{aa,2}cc+c^\dagger \xi_{aa,1}c+\xi_{aa,0}), \tag{S21}$$

其中 [算符$f_{i,\mu}$ 与$h_{ij,\mu}$ 的定义见正文式（30、31）]

$$\begin{aligned}
\xi_{aa,0}&=2f_{a,0}^3-3f_{a,0}^2f_{a,1}+f_{a,0}f_{a,1}^2+(-f_{a,0}^2+2f_{a,0}f_{a,1}-f_{a,1}^2)h_{aa,0},\\
\xi_{aa,1}&=-2f_{a,0}^3+4f_{a,0}^2f_{a,1}-4f_{a,0}f_{a,1}^2+6f_{a,1}^3-6f_{a,1}^2f_{a,2}+2f_{a,1}f_{a,2}^2+(-2f_{a,1}^2+4f_{a,1}f_{a,2}-2f_{a,2}^2)h_{aa,1},\\
\xi_{aa,2}&=\frac{1}{2}[-f_{a,0}^2f_{a,1}+3f_{a,0}f_{a,1}^2-4f_{a,1}^3+4f_{a,1}^2f_{a,2}-4f_{a,1}f_{a,2}^2+4f_{a,2}^3-3f_{a,2}^2f_{a,3}+f_{a,2}f_{a,3}^2\\
&\quad+(f_{a,0}^2-2f_{a,0}f_{a,1}+f_{a,1}^2)h_{aa,0}+(-f_{a,2}^2+2f_{a,2}f_{a,3}-f_{a,3}^2)h_{aa,2}].
\end{aligned} \tag{S22}$$

第一激发态的矩阵元为

$$\langle 1|O_{aa}|1\rangle=g_a^4(\xi_{aa,1}|_{c^\dagger c=0}+\xi_{aa,0}|_{c^\dagger c=1})=\frac{2g_a^4\alpha[\Delta_a^3+5(\alpha\Delta_a^2-\alpha^2\Delta_a)+3\alpha^3]}{\Delta_a^3(\Delta_a-\alpha)^3(2\Delta_a-3\alpha)}. \tag{S23}$$

整个电荷量子比特子空间上的交叉克尔算符为

$$O_{ab}=g_a^2g_b^2(c^\dagger c^\dagger \xi_{2,ab}cc+c^\dagger \xi_{1,ab}c+\xi_{0,ab}), \tag{S24}$$

其中

$$\begin{aligned}
\xi_{ab,0}&=\frac{1}{2}[4f_{a,0}f_{b,0}^2-3f_{a,1}f_{b,0}^2-3f_{a,0}f_{b,0}f_{b,1}+f_{a,1}f_{b,0}f_{b,1}+f_{a,0}f_{b,1}^2\\
&\quad+(-f_{a,0}^2+2f_{a,0}f_{a,1}-f_{a,1}^2-f_{a,0}f_{b,0}+f_{a,1}f_{b,0}+f_{a,0}f_{b,1}-f_{a,1}f_{b,1})h_{ab,0}]+\{a\leftrightarrow b\},\\
\xi_{ab,1}&=-2f_{a,0}f_{b,0}^2+2f_{a,1}f_{b,0}^2+2f_{a,0}f_{b,0}f_{b,1}-2f_{a,1}f_{b,0}f_{b,1}-2f_{a,0}f_{b,1}^2+6f_{a,1}f_{b,1}^2-3f_{a,2}f_{b,1}^2\\
&\quad-3f_{a,1}f_{b,1}f_{b,2}+f_{a,2}f_{b,1}f_{b,2}+f_{a,1}f_{b,2}^2+\\
&\quad(-f_{a,1}^2+2f_{a,1}f_{a,2}-f_{a,2}^2-f_{a,1}f_{b,1}+f_{a,2}f_{b,1}+f_{a,1}f_{b,2}-f_{a,2}f_{b,2})h_{ab,1}+\{a\leftrightarrow b\},\\
\xi_{ab,2}&=\frac{1}{4}[-f_{a,1}f_{b,0}^2-f_{a,0}f_{b,0}f_{b,1}+3f_{a,1}f_{b,0}f_{b,1}+3f_{a,0}f_{b,1}^2-8f_{a,1}f_{b,1}^2+4f_{a,2}f_{b,1}^2+4f_{a,1}f_{b,1}f_{b,2}\\
&\quad-4f_{a,2}f_{b,1}f_{b,2}-4f_{a,1}f_{b,2}^2+8f_{a,2}f_{b,2}^2-3f_{a,3}f_{b,2}^2-3f_{a,2}f_{b,2}f_{b,3}+f_{a,3}f_{b,2}f_{b,3}+f_{a,2}f_{b,3}^2\\
&\quad+(f_{a,0}^2-2f_{a,0}f_{a,1}+f_{a,1}^2+f_{a,0}f_{b,0}-f_{a,1}f_{b,0}-f_{a,0}f_{b,1}+f_{a,1}f_{b,1})h_{ab,0}\\
&\quad+(-f_{a,2}^2+2f_{a,2}f_{a,3}-f_{a,3}^2-f_{a,2}f_{b,2}+f_{a,3}f_{b,2}+f_{a,2}f_{b,3}-f_{a,3}f_{b,3})h_{ab,2}]+\{a\leftrightarrow b\}.
\end{aligned} \tag{S25}$$

第一激发态的矩阵元为

$$\begin{aligned}
\langle 1|O_{ab}|1\rangle&=g_a^2g_b^2(\xi_{ab,1}|_{c^\dagger c=0}+\xi_{ab,0}|_{c^\dagger c=1})\\
&=-\frac{2g_a^2g_b^2\alpha[\Delta_a^2\Delta_b^2+2\alpha\Delta_a\Delta_b(\Delta_a+\Delta_b)-\alpha^2(8\Delta_a\Delta_b+\Delta_a^2+\Delta_b^2)+4\alpha^3(\Delta_a+\Delta_b)-3\alpha^4]}{\Delta_a\Delta_b(\Delta_a-\alpha)^2(\Delta_b-\alpha)^2(\Delta_a+\Delta_b-3\alpha)}\left(\frac{1}{\Delta_a}+\frac{1}{\Delta_b}\right).
\end{aligned} \tag{S26}$$

在二能级系统极限下，$\alpha\to\infty$ 方程（S23、S26）中的表达式趋近于方程（22、23）的 $\langle\sigma_z\rangle=1$ 情形。在 $\alpha\to 0$线性极限下，$f_{i,\mu}=1/\Delta_i$ 且$h_{ij,\mu}=1/(\Delta_i+\Delta_j)$，由此得到 $O_{aa}=O_{ab}=0$。