arXiv:2603.05609v1 [math.NT] 5 Mar 2026

林尼克问题的联合

VALENTIN BLOMER、FARRELL BRUMLEY 与 MAKSYM RADZIWI-L-L

ABSTRACT. 我们证明了 Michel–Venkatesh 关于不同林尼克问题之联合的一个猜想，其背景是具有足够多小分裂素数的虚二次域的同时四元数嵌入。已知该分裂条件对直至 X 的所有判别式均成立，至多除去 $O((\log\log X)^{1+o(1)})$ 个例外。我们还处理了 Aka–Einsiedler–Shapira 提出的该猜想的一种非等变形式，它尤其适用于将球面上的林尼克点与模曲面上的复乘点联合起来的经典高斯构造。

1. INTRODUCTION

林尼克型问题，例如 $\mathbb{Z}^3$ 中大范数点投影到单位球面上的等分布，以及模曲线上大判别式复乘点的等分布，长期以来一直是发展遍历理论与解析数论工具的沃土，由 Linnik 开创 [Li] ，并最终由 Duke 予以解决 [Du]。

Michel和Venkatesh提出了新一代的等分布问题 [MV1] ，涉及Duke定理的同时版本，即联合。在[BB], 中，前两位作者利用源自自守形式和解析数论的技术，特别是Soundararajan的高矩方法，对两个不同林尼克问题的联合取得了部分结果 [So] ，其研究对象是 L-函数的中心值。这些结果依赖于两个重要假设：广义黎曼猜想（GRH）适用于次数不超过8的自守 L-函数，以及测试函数具有尖点性。

本文中，我们从一个新的视角重新审视这一问题，该视角侧重于磨光、周期公式与谱理论。这些技术使我们能够大幅放宽 [BB] 关于同时等分布的主要假设，以至于除小素数的定量分裂行为外，不再保留任何自守假设。最值得注意的是，我们用一个弱得多的条件取代了广义黎曼猜想，该条件大致等价于二次狄利克雷特征不存在西格尔零点。此外，我们成功处理了连续谱，从而消除了 [BB] 中当两个因子之一非紧时的尖点性限制。例如，这适用于Gauß的正交补构造，其中将球面上的整数点与模曲面上的复乘点相联结，正如 Aka–Einsiedler–Shapira [AES]所研究的那样。

2010 数学主题分类。主要分类：11F67、11F70、11M41。关键词和短语。环面周期、同时等分布、L-函数、西格尔零点。第一作者获得德国研究联合会通过SFB-TRR 358和EXC-2047/1 - 390685813提供的资助，以及欧洲研究理事会高级资助项目101054336的资助。第二作者获得法国大学研究院和ANR-FNS资助项目 ANR-24-CE93-0016的资助。第三作者获得美国国家科学基金会NSF DMS-2401106资助。

我们的主要结果是定理2.5，我们将其非正式地概述如下；完整细节及一个有效版本将在第2节中给出。

定理 1.1. *Michel–Venkatesh* 的同时等分布猜想，以及 *Aka–Einsiedler–Shapira* 提出的二次变体，对 $\mathbb{Q}$上几乎极大层的四元数簇成立，并对判别式 $-D$ 成立，只要二次 *Dirichlet* L-函数$L(s,\ \chi_{-D})$ 在 $|s-1| \leqslant \psi(D)/\log D$ 中对某个 $\psi(D) \to \infty$没有零点。

根据密度定理 [Ga], 应用于形如 $[Y,\ Y^2)$的区间，定理 1.1 对除至多 $O((\log\log X)^{1+o(1)})$ 个之外的、所有不超过 X的判别式成立。

我们将 ψ 视为可任意缓慢地增长，从而关于 $L(s,\ \chi_{-D})$ 的假设可视为 $o(1)$-强化，亦即无 Siegel 零点条件的一种加强。我们将该条件视为二次数域中小分裂素数丰富性的一种解析表述。因此，它以定量方式刻画了处理这一问题的遍历方法中出现的各类分裂条件，下文将对此加以讨论。值得注意的是，我们的零点自由区域与 Linnik 声称（未给出证明）可借以去掉其关于球面上本原整数点等分布的同余条件的那一类相同 [Li，定理 2]。

多项研究致力于利用齐性动力系统的方法，在一对分裂条件下证明 Michel–Venkatesh 的同时等分布猜想及其变体的若干版本 [AES, Kh, ALMW]。其中的关键要素是 Einsiedler 和 Lindenstrauss 的一个强有力的联合定理 [EL], ，该定理对在高秩可对角化子群作用下不变的测度进行分类。将其应用于与虚二次域扩张相关的环面 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$时，需要固定两个不同的素数 p_1, p_2，并要求它们在 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$中分裂。更一般地，可以固定一个有限素数集 $\{p_1, \ldots, p_k\}$，并限制在那些满足以下条件的平方自由 d上：存在 $1 \leqslant i < j \leqslant k$使得 p_i 和 p_j 在$\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$中分裂。尽管有这种灵活性，无论如何选择素数集 $\{p_1, \ldots, p_k\}$，上述构造都无法得到基数小于 $o(X)$的例外集。

最后，我们指出，当定理 1.1应用于两个不同的志村簇时，会推出 Andr´e–Oort 猜想的一个强形式。Yafaev 首先在广义黎曼猜想成立的假设下证明了这一形式，适用于 $L(s,\ \chi_{-D})$ 但他以等分布 [取代了], 扎里斯基稠密性。

2. Examples, historical context, and the main theorem

本节将精确陈述我们的主要结果，即定理 2.5，并阐述其中的新思路和方法。在此之前，我们先介绍两个具体例子（定理 2.1 和 2.3），以展示本研究的诸多新特点。

2.1. Gauß 的正交补。 对于正平方自由整数 d ，令 $\mathrm{R}(d) = \{x \in \mathbb{Z}^3 : \|x\|^2 = d\}$表示 d 作为三个平方之和的整数表示集合。Legendre 和 Gauß 的经典定理指出，当且仅当 d局部可容许时，$\mathrm{R}(d)$ 非空；也就是说， d 不存在显然的模 8 同余障碍。另一方面，对于负基本判别式 $-D$ ，考虑由判别式为 $-D$的本原二元二次型构成的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-等价类集合 $\mathcal{Q}_{-D}$ 。

在 [Gau，第 291], 节中，Gauß 发现了这两种情形之间一个优美的联系。对于 $x \in \mathrm{R}(d)$ ，他考虑秩 2 正交格 $\Lambda_x = x^\perp \cap \mathbb{Z}^3$。固定 $\mathbb{Z}^3$ 的标准定向，并通过与 Λ_x 的楔积赋予 x诱导定向。二次型

ϕ_x 将 $(\|x\|^2,\ \mathbb{Z}^3)$ 限制到 Λ_x（若该型为偶型，则再乘以 $1/2$）所得到的二次型，其判别式为 $-D=\mathrm{disc}(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$。具体而言，若 $(B,\ \overline{C})$ 是 Λ_x 的一个正向 $\mathbb{Z}$ 基，则有 $\phi_x(t,\ u)=\|Bt+Cu\|^2$ 或 $\frac{1}{2}\|Bt+Cu\|^2$，分别取决于 $d\equiv 1,\ 2 \bmod 4$ 还是 $d\equiv 3 \bmod 8$。令 $[\phi_x]\in\mathcal{Q}_{-D}$ 表示 ϕ_x 的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 等价类。高斯构造可下降到等价类 $\mathcal{R}(d):=\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{R}(d)$，从而得到映射

$$\mathrm{Orth}(d):\mathcal{R}(d)\to\mathcal{Q}_{-D},\quad [x]\mapsto[\phi_x],$$

其像包含于单个属中（取决于 d）。

数值示例。在 [Gau, Art. 292] Gauß 以数值方式计算了这种对应关系，所考察的情形为 $d=770=2\cdot 5\cdot 7\cdot 11$。一方面，我们有 $|\mathcal{R}(770)|=16$，并且可将元素按 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})$-等价列出如下

$$(15,16,17),\ (1,12,25),\ (8,9,25),\ (4,15,23),\ (3,19,20),\ (4,5,27),\ (9,17,20),\ (5,13,24)$$

及其相反数。另一方面，$\mathrm{disc}(\mathbb{Q}(\sqrt{-770}))=-3080$ 而 Gauß 计算得出 $|\overline{\mathcal{Q}_{-3080}}|=32$。共有 $8=2^{4-1}$ 个属，每个属的大小为 4。Gauß 证明，$\mathrm{Orth}(770)$ 的像包含于由以下真等价类组成的属中

$$\phi_\pm=6t^2\pm 4tu+129u^2,\quad \phi'_\pm=19t^2\pm 6tu+41u^2.$$

例如，若 $x=\pm(15,\mathbf{16},17)$，则 $\Lambda_x=\{y\in\mathbb{Z}^3:\ 15y_1+16y_2+17y_3=0\}$ 允许取，$\pm C)=((1,-2,1),\pm(8,\mathbf{1},-8))$ 作为定向的 $\mathbb{Z}$-基，且 $\|Bt\pm Cu\|^2=\phi_\mp(t,u)$。

现在我们转而关注 $\mathcal{R}(d)$ 和 $\mathcal{Q}_{-D}$的渐近分布，分别考察它们以及联合考察。

对于 d 局部可容许的情形，高斯、狄利克雷和西格尔的联合工作表明 $|\mathcal{R}(d)|=d^{1/2+o(1)}$。20世纪中叶，Linnik [Li] 运用其遍历方法研究了这类解的角分布。设 S^2 为 $\mathbb{R}^3$中的单位球面，并赋予均匀概率测度 μ_{S^2}。设 $\mathcal{S}^2=\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash S^2$ 并考虑

$$\mathrm{Arg}:\mathcal{R}(d)\to\mathcal{S}^2,\quad [x]\mapsto \mathrm{Arg}_{[x]}=\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z}).(d^{-1/2}x).$$

Linnik 证明，对于任意固定的辅助素数 $p>2$，集合 $\{\mathrm{Arg}_{[x]}:\ [x]\in\mathcal{R}(d)\}$相对于商测度 $\mathcal{S}^2$ 在 $\mu_{\mathcal{S}^2}$ 上等分布；当 $d\to\infty$ 沿着满足局部可容许条件的无平方因子整数趋于无穷，且 $p>2$ 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$中分裂时，这一结论成立。Duke [Du] 和戈卢别娃–福缅科[GF]随后去除了 Linnik 的分裂条件，并运用自守方法以及 Iwaniec [Iw] 在半整数权全纯模形式的傅里叶系数界方面的突破，给出了具有幂次节省的收敛速率。

类似地，对于负基本判别式 $-D$，可以考察集合 $\mathscr{H}_D=\{\tau_{[\phi]}:\ [\phi]\in\mathcal{Q}_{-D}\}$ 判别式为 $-D$ 的复乘点，其中$\tau_{[\phi]}\in Y_0(1)$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 轨道，即 $\phi(z$ 的唯一根的轨道，$1)$ 且该根位于上半平面。Linnik 的学生 Skubenko [Sk] 证明了，在限制于满足某个固定辅助素数 $\mathscr{H}_D$ 在 $Y_0(1)$ 中分裂的那些$\mu_{Y_0(1)}$的条件下，集合 D 相对于归一化双曲测度 p 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$上等分布。Duke 将 Iwaniec 对非全纯半整数权模形式的界加以推广，[Du] 从而去除了 Skubenko 的辅助同余条件，并且与上述结果一样，给出了幂级节省收敛速率。事实上，Duke 的结果适用于更小的集合，即限制在固定属中的复乘点。

高斯正交补的图 $\mathrm{Orth}(d)$ 可以实现为

$$\Gamma_d = \{(\mathrm{Arg}_{[x]}, \tau_{[\phi_x]}) : [x] \in \mathcal{R}(d)\} \subset \mathcal{S}^2 \times Y_0(1). \tag{2.1}$$

由于 Γ_d 在每个因子上的投影都按 $d \to \infty$等分布，因此自然会问 Γ_d 是否会在积空间中等分布。在 [AES，猜想 11] 猜测了这一点，且对 $d \to \infty$ 除了局部可表性外不作任何限制。我们的第一个主要定理为这一猜想取得了进展。

定理 2.1. 集合 Γ_d 按乘积测度$\mu_{\mathcal{S}^2} \otimes \mu_{Y_0(1)}$在 $\mathcal{S}^2 \times Y_0(1)$ 中等分布，当 $d \to \infty$ 沿着满足 $L(s、\chi_{-D})$ 在 $|s-1| \leqslant \psi(D)/\log D$ 中无零点（其中某个 $\psi(D) \to \infty$）的无平方局部可容许整数 d 变化时。

注 2.2. 事实上，正交补构造适用于任意整三元二次型 [Gau，Art. 280]。我们的方法使我们能够证明类似定理，适用于由 $\mathbb{Q}$上的四元数代数的约化范数所导出的二次型，且将其限制在极大序的迹零元上。我们将在下文讨论定号和不定号情形。

在定号情形中，我们可以取形式 $f(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2$ 为例，并对正平方自由整数 d考虑集合 $\mathrm{R}_f(d) := \{x \in \mathbb{Z}^3 : f(x) = d\}$。集合 $\mathrm{R}_f(d)$ 非空，当且仅当 d 避开模 8 同余类 3 和模 5 同余类 1 的局部同余障碍，。令 $\mathcal{R}_f(d) := \mathrm{SO}_f(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{R}_f(d)$。与之前相同的步骤定义了一个映射

$$\mathrm{Orth}_f(d) : \mathcal{R}_f(d) \to \mathcal{Q}_{-D},\ [x] \mapsto [\phi_x],$$

其像是一个单一的属（取决于 d）。定义椭球 $E^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 1\}$及其商 $\mathcal{E}^2 = \mathrm{SO}_f(\mathbb{Z})\backslash E^2$。令 $\mu_{\mathcal{E}^2}$为 $\mathcal{E}^2$上的测度，它是 E^2上唯一的概率归一化 $\mathrm{SO}_f(\mathbb{R})$-不变博雷尔测度的商。与球面的情形一样，我们有一个范数为 1 的投影映射

$$\mathrm{Arg} : \mathcal{R}_f(d) \to \mathcal{E}^2, \quad [x] \mapsto \mathrm{Arg}_{[x]} = \mathrm{SO}_f(\mathbb{Z}).(d^{-1/2}x).$$

在 [DSP] 中，已证明 $\{\mathrm{Arg}_{[x]} : [x] \in \mathcal{R}_f(d)\}$ 相对于 $\mathcal{E}^2$，在$\mu_{\mathcal{E}^2}$沿着局部可容许的无平方因子整数$d \to \infty$ 时，在 Γ_d 上等分布。令 Γ_d 按照（2.1）类似地定义，则将定理2.1 中的 $\mathcal{S}^2$ 替换为 $\mathcal{E}^2$ 后的对应结论成立，并且可由我们的定理2.5推出。

在不定号情形中，相应的映射 $\mathrm{Orth}_f(d) : \mathcal{R}_f(d) \to \mathcal{Q}_{-D}$定义在双曲面上整数点的等价类上。根据所表示的整数 d的符号，$[\phi_x] \in \mathcal{Q}_{-D}$ 的像在 $Y_0(1)$中将对应于一个 CM点或一条闭测地线。我们的定理2.5涵盖了这一情形，只要 f 是各向异性的。然而，迷向行列式型$x_2^2 - x_1x_3$ 不在该定理的适用范围内，因为要从两个不完全艾森斯坦级数中进行抽样，需要采用不同的技术。我们计划在未来的论文中，利用乘性高斯混沌以及 Adam Harper 的工作来研究这一问题。

2.2. **同时等分布**。 我们可以用四元数代数、最优嵌入和类群作用来重新阐述前面的讨论。这一更具结构性的框架将使我们能够陈述主要结果，从而给出 Michel– Venkatesh 同时等分布猜想的具体实例 [MV1，第 6.4 节。1]。

我们以定理 2.1 的例子为重点。令 $\mathbf{B}^{(2,\infty)}$ 表示定义在 $\mathbb{Q}$ 上的唯一（在同构意义下）四元数代数，它在 2 和 8 处分歧，并令 $\mathbb{O}_{\mathrm{Hurw}}$ 表示由$\mathbf{B}^{(2,\infty)}(\mathbb{Q})$中的赫尔维茨四元数确定的极大序。在此情形下，射影单位群 $\mathbb{O}^\times{}_{\mathrm{Hurw}}/\{\pm 1\}$ 可与 $\mathrm{SO}_3^+(\mathbb{Z})$ 的唯一指数为 2 的子群 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})$等同。它

使用模 $\mathrm{SO}_3^+(\mathbb{Z})$的 $\mathrm{R}(d)$ 上更精细的等价关系会更方便。因此，我们记作 $\widetilde{\mathcal{R}}(d) = \mathrm{SO}_3^+(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{R}(d)$。那么，每个 $x \in \mathrm{R}(d)$ 都确定了从整数环$\mathscr{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}$ 到 $\mathbb{O}_{\mathrm{Hurw}}$ 的一个最优嵌入，而这些嵌入的等价类~将 $\mathcal{R}(d)$ 实现为类群 Cl_D作用下的一个或两个主齐性空间的不交并，具体取决于 $d \equiv 1$是 2 mod 4 还是 $d \equiv 3$ mod 8。类似地，若 Mat_2 表示定义在 $\mathbb{Q}$上的分裂四元数代数，则任意判别式为 $-D$ 的二元二次型ϕ 都确定了从 $\mathscr{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}$ 到极大序 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$的一个最优嵌入。这类嵌入的等价类将 $\mathcal{Q}_{-D}$ 实现为类群 Cl_D作用下的一个主齐性空间；更多详情请参见 [EMV]。

~映射 $\mathcal{R}(d) \to \mathcal{Q}_{-D}$，由 Orth 得到$(d)$，并经由投影~映射 $\mathcal{R}(d) \to \mathcal{R}(d)$进行因子分解，它不与相应的类群作用相容。~我们以 $d \equiv 1$ 的情形（模 4 同余于 2）为例说明，其中 $\mathcal{R}(d)$ 是 Cl_D下的单个轨道。选取一个基点 $[x] \in \widetilde{\mathcal{R}}(d)$。那么，对任意 $[\mathfrak{a}] \in \mathrm{Cl}_D$，我们都有 $[\phi_{[\mathfrak{a}].[x]}] = [\mathfrak{a}]^2.[\phi_x]$; 参见[EMV，第 4 节。2]。因此，对于 $d \equiv 1$，模 4 同余于 2 的情形，我们有如下参数化

$$\Gamma_d = \left\{(\mathrm{Arg}_{[\mathfrak{a}].[x]}, \tau_{[\mathfrak{a}]^2.[\phi_x]}) : [\mathfrak{a}] \in \mathrm{Cl}_D\right\}. \tag{2.2}$$

因此，Cl_D 在两个分支上的作用“速度不同”。对于 $d \equiv$模 8 同余于 3 的情形也是如此，且两个类群轨道分别如此。

从类群作用的角度进行这种阐释，使我们能够提出一些相关的新问题，而这些问题超出了高斯正交补过程的范围。

有鉴于此，我们考虑第二个具体例子，其中涉及两个定四元数代数以及一个等变类群作用。除了先前考虑的$\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}^{(2,\infty)}$ 之外，我们现在令$\mathrm{B}_2 = \mathrm{B}^{(5,\infty)}$ 表示 $\mathbb{Q}$ 上在5与 ∞处分歧的唯一四元数代数。B_1 与B_2 的类数均为一。令 $\mathbb{O}_1 \subset \mathrm{B}_1(\mathbb{Q})$ 为赫尔维茨四元数，并选取一个极大序 $\mathbb{O}_2 \subset \mathrm{B}_2(\mathbb{Q})$。当限制于 $\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2$ 的迹零元素时，两个约化范数型分别由 $f_1 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \mathbb{Z}^3)$ 与 $f_2 = (2x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2, \mathbb{Z}^3)$,~给出。类群$\mathrm{Cl}_D$ 在 $\mathcal{R}_{f_i}(d)$ $(i = 1, 2)$上自由作用。~ ~$\mathcal{R}_{f_1}(d)$ 的轨道结构已经讨论过。对于$\mathcal{R}_{f_2}(d)$，根据 $d$mod 40 [Sh，定理4.2]上的显式同余条件，存在1、2或4条轨道。

定理 2.3。令 $\mathbb{D}$ 表示避开模 4 同余于 3 和~1、模 5 同余于 4的正的无平方因子数集合。对于 $d \in \mathbb{D}$，固定基点 $[x_i] \in \mathcal{R}_{f_i}(d)$ $(i = 1、 2)$。该集合

$$\left\{(\mathrm{Arg}_{[\mathfrak{a}].[x_1]}, \mathrm{Arg}_{[\mathfrak{a}].[x_2]}) : [\mathfrak{a}] \in \mathrm{Cl}_D\right\}$$

当 $d \to \infty$ 沿着满足 $L(s、 \chi_{-D})$ 在 $|s-1| \leqslant \psi(D)/$ 对数 D 中对某个 $\psi(D) \to \infty$没有零点的 $d \in \mathbb{D}$变化时，按照乘积测度 $\mu_{\mathcal{S}^2} \otimes \mu_{\mathcal{E}^2}$在 $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{E}^2$ 中等分布。

注 2.4。定理 2.1 和 2.3 中的设定可以混合。例如，正如（2.2）中那样，我们可以允许定理2.3 中的类群以“双倍速度”作用于一个分量，并证明相应的等分布陈述

$$\left\{(\mathrm{Arg}_{[\mathfrak{a}].[x_1]}, \mathrm{Arg}_{[\mathfrak{a}]^2.[x_2]}) : [\mathfrak{a}] \in \mathrm{Cl}_D\right\}.$$

事实上，在这种情况下，$\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2$或 $\mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}^2$中也可以允许自乘积（即取相同的三元二次型），因为第二因子上的平方保证了避开对角线。

反过来，我们也可以在一种设定下得到等分布陈述，其中高斯正交补构造（2.2）被其等变对应构造所取代

$$\left\{(\mathrm{Arg}_{[\mathfrak{a}].[x]}, \tau_{[\mathfrak{a}].[\phi]}) : [\mathfrak{a}] \in \mathrm{Cl}_D\right\} \subseteq \mathcal{S}^2 \times Y_0(1)$$

~对于基点 $[x] \in \mathcal{R}(d)$ 和 $[\phi] \in \mathcal{Q}_{-D}$。

2.3. **一般背景**。 现在我们转向两个不同林尼克问题的联合这一一般框架，并以完全一般的形式陈述主要结果。我们将采用代数群的语言，这种表述方式的优点在于能够以统一的方式涵盖所有情形，并可特化以再现具有特定算术意义的经典情形。文献 [BB，第 3] 节以经典术语给出了一些具体例子。除了定理 2.1 和 2.3所述类型的结果外，这些例子还包括复乘椭圆曲线同时发生超奇异约化时的等分布，见 [ALMW]。

对于 $i = 1, 2$，设 $\mathbf{B}_i$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的四元数代数，并记 $\mathbf{G}_i = \mathbf{PB}_i^\times$ 。令 $\mathbf{Ram}(\mathbf{B}_i)$ 表示 $\mathbf{B}_i$ 分歧处的素数集。设 $\mathbb{O}_i$ 是 $\mathbf{B}_i(\mathbb{Q})$ 中的一个极大序。记 $\mathbf{G}_i(\mathbb{Z}_p)$ 为 $(\mathbb{O}_i \otimes \mathbb{Z}_p)^\times$ 在 $\mathbf{G}_i(\mathbb{Q}_p)$ 中的像。那么，当 $p \notin \mathbf{Ram}(\mathbf{B}_i)$ 时，$\mathbf{G}_i(\mathbb{Z}_p)$ 是 $\mathbf{G}_i(\mathbb{Q}_p)$ 的极大紧子群；当 $p \in \mathbf{Ram}(\mathbf{B}_i)$ 时，它是紧群 $\mathbf{G}_i(\mathbb{Q}_p)$ 的一个指数为 2 的子群。令 $\mathbf{G}_i(\mathbb{Z}) = \prod_p \mathbf{G}_i(\mathbb{Z}_p)$ ，并令 $K_{\infty,i} \subset \mathbf{G}_i(\mathbb{R})$ 为一个极大紧环面。于是我们可以定义四元数簇 $Y_i = \mathbf{G}_i(\mathbb{Q})\backslash \mathbf{G}_i(\mathbb{A})/K_i\widehat{,}$ 其中 $K_i = \mathbf{G}_i(\mathbb{Z})K_{\infty,i}$。子群 K_i 即为定理 1.1 中所述的“几乎极大”层结构。将其特化为 $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}^{(2,\infty)}$、$\mathbf{B}^{(5,\infty)}$ 或 $\mathbf{Mat}_2$ ，分别得到 $Y_i = \mathcal{S}^2$、 $\mathcal{E}^2$ 或 $Y_0(1)$。我们在 Y_i 上赋予测度 μ_i ； 该测度是 $\mathbf{G}_i(\mathbb{Q})\backslash \mathbf{G}_i(\mathbb{A})$ 上唯一的 $\mathbf{G}_i(\mathbb{A})$-不变概率博雷尔测度的推前测度。

设 E 是 $\mathbb{Q}$的一个虚二次域扩张。设 $E \hookrightarrow \mathbf{B}_i$ 是 $\mathbb{Q}$-代数的一个嵌入，并记 $\iota_i : \mathbf{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbf{G}_i$ 为诱导嵌入，$\mathbf{T}_i$ 为其像。设$g_{\infty,i} \in \mathbf{G}_i(\mathbb{R})$ 满足$g_{\infty,i}\mathbf{T}^i(\mathbb{R})g_\infty^{-1}{}_{,i} = K_{\infty,j}$。那么， ι_i 与$g_i = (g_{f,i}, g_{\infty,i}) \in \mathbf{G}_i(\mathbb{A})$共同定义海格纳数据 $\mathscr{D}_i = (\iota_i, g_i)$。遵循 [BBK 第 3 节的定义，我们将海格纳包 $H_{\mathscr{D}_i}$ 定义为 $\mathbf{T}_i(\mathbb{Q})\backslash \mathbf{T}_i(\mathbb{A})g_i$ 在 Y_i中的像。在 $\iota(E) \simeq E$ 中定义二次序 $\mathscr{O}_{\mathscr{D}_i} = \iota_i(E) \cap \mathbb{O}^{g_i}$，其中 $\mathbb{O}^{g_i} = \mathbf{B}(\mathbb{Q}) \cap g_i\widehat{\mathbb{O}}_i g_i^{-1}$。那么 $H_{\mathscr{D}_i}$ 是皮卡群 $\mathbf{Pic}(\mathscr{O}_{\mathscr{D}_i})$ [的一个主齐性空间（BBK，第 3 节）。我们固定一个基点 $x_i \in H_{\mathscr{D}_i}$，使得$H_{\mathscr{D}_i} = \{[\mathfrak{a}].x_i :$ $[\mathfrak{a}] \in \mathbf{Pic}(\mathscr{O}_{\mathscr{D}_i})\}$。此后我们假设$\mathscr{O}_{\mathscr{D}_1} = \mathscr{O}_{\mathscr{D}_2} = \mathscr{O}_E$。记$D = |\mathbf{disc}(\mathscr{O}_E)|$ 和 $\mathbf{Cl}_D = \mathbf{Pic}(\mathscr{O}_E)$。

对于 $\nu = 1, 2$，我们称投影到 $Y_1 \times Y_2$的 $\{(\iota_1(t)g_1, \iota_2(t)^\nu g_2) : t \in \mathbb{A}_E^\times/\mathbb{A}^\times\}$ 该ν-对角海格纳包，并记为$H^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}$。根据 [BBK，(4.8)] 对于任意 $x_i \in H_{\mathscr{D}_i}$，我们有

$$H^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2} = \{([\mathfrak{a}].x_1, [\mathfrak{a}]^\nu.x_2) : [\mathfrak{a}] \in \mathrm{Cl}_D\} \subset Y_1 \times Y_2.$$

相应地，对于函数 $\varphi \in C^\infty(Y_1 \times Y_2)$ ，我们定义

$$P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(\varphi) = \frac{1}{|\mathrm{Cl}_D|} \sum_{[\mathfrak{a}] \in \mathrm{Cl}_D} \varphi([\mathfrak{a}].x_1, [\mathfrak{a}]^\nu.x_2).$$

单独考虑情形 $\nu = 1$ 时，我们通常省略 Δ_1的下标，记作 $H^{\Delta}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}$ 和 $P^{\Delta}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}$。我们在记号中省略了量 $H^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}$ 和 $P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(\varphi)$ 对基点 x_1， x_2 的选择的依赖性，因为本文证明的所有估计对这些基点都是一致的。

以下是我们的主要定理，定理 2.1 和2.3 以及备注 2.2 和 2.4中概述的变体，均可由此作为特殊情形得到。

定理 2.5。 如果 $\nu = 1$，假设 $\mathbf{B}_1$ 与 $\mathbf{B}_2$ 不同构；如果 $\nu = 2$，假设 $\mathbf{B}_1$ 是非分裂的。令 $1 \leqslant \psi(D) \leqslant o(\log D)$ 为一个趋于无穷的函数。

那么， ν-对角线海格纳包 $H^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\,\mathscr{D}_2}$ 关于 $\mu_1 \times \mu_2$ 在 $Y_1 \times Y_2$ 上等分布；当 $D \to \infty$ 沿着满足 $L(s,\ \chi_{-D})$ 在该区域内没有零点的子序列变化时，

$$\Re s \geqslant 1 - \frac{20\psi(D)\log\psi(D)}{\log D}, \quad |\Im s| \leqslant \frac{2\psi(D)^2}{\log D}. \tag{2.3}$$

更准确地说，存在 $\rho > 0$，使得对于上述任意 $\varphi \in C_b^\infty(Y_1 \times Y_2)$ 和负基本判别式 $-D$，我们有

$$P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(\varphi) = \int_{Y_1\times Y_2} \varphi \,\mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) + O_{\varphi,\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2}(\mathrm{err}_\nu(\psi(D))),$$

其中

$$\mathrm{err}_\nu(\psi(D)) = \begin{cases} \psi(D)^{-\rho}, & \nu = 1; \\ (\log\psi(D))^{-1/2}, & \nu = 2. \end{cases} \tag{2.4}$$

注 2.6。 我们的论证适用于任意 $\nu \geqslant 2$，只要 ν-扭子子群满足$|\mathrm{Cl}_D[\nu]| \ll D^{\varepsilon_0}$，其中 $\varepsilon_0 > 0$ 足够小但固定。这相当令人惊讶，因为（2.4）中的最终节省至多是 $\log\log D$ 的一个分数次幂。对于 $\nu = 2$ 的情形，收敛速率当然可以改进，或许也可以改进到 $\psi(D)^{-\rho}$；但我们不在本文中继续讨论这一点。

由$\mathbf{B}_1$ 与$\mathbf{B}_2$, 的类数有限性，我们可以并且将假定 $g_f = e$。在这种情况下，由于 D 是基本的，嵌入 $E \hookrightarrow \mathbf{B}_i(\mathbb{Q})$ 是最优的。关于这些事实，见 [BBK第 3.3、4.5 节。1]。

2.4. **策略、概述和辅助结果**。 定理2.5 的证明经由对韦伊等分布判据的援引而进行；据此，只需从两个自守形式 $f_1 \in \sigma_1$ （在$\mathbf{PB}_1^\times$ 上）与 $f_2 \in \sigma_2$ （在$\mathbf{PB}_2^\times$ 上）检验等分布即可。

鉴于定理2.5的假设，我们可以不失一般性地假定$\mathbf{B}_1$ 不是分裂的。然而，如果$\mathbf{B}_2$ 是矩阵代数，如同定理2.1的高斯正交补过程中那样，则我们必须允许 f_2 位于连续谱中。这是一个微妙的问题，因为 [BB] 的结果在 f_2 被取为谱艾森斯坦级数时并不（也不能）适用。因此，我们将取 f_2 为一个不完全艾森斯坦级数，它带有一个额外的连续平均，但其傅里叶系数不再具有乘法性。

我们现在将论证分为三个步骤。步骤1和步骤2证明定理3.1，它给出了$P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1}$、$_{\mathscr{D}_2}(f_1 \otimes f_2)$ 的无条件界，该界用涉及 f_1、 f_2 的海克特征值以及素数在扩张$\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$中的分裂行为的短算术表达式来表示。步骤3随后推导出定理2.5，这一结果来自定理3.1，并利用关于西格尔零点的假设。我们在下文更详细地描述这些步骤。

– 步骤 *1*：各节 *5-6*。 证明定理3.1的关键在于将其归约为 Michel–Venkatesh 的混合猜想 及其扭曲变体在低复杂度参数范围内的特例。我们通过两种不同的磨光方案来实现这一点，分别针对

定理 2.3的等变情形，以及定理 2.1的偏速情形。相应的论证将在第 5 节和第 6节中展开。

在等变情形下，我们可以假设 $\sigma_1 \neq \sigma_2$，并采用 [RS] 中提出的光滑化过程，以利用 χ扭曲赫格纳周期的统计独立性

$$\chi \mapsto \frac{1}{|\mathrm{Cl}_D|} \sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D} f_1([\mathfrak{a}].x)\chi(\mathfrak{a}) \qquad \text{and} \qquad \chi \mapsto \frac{1}{|\mathrm{Cl}_D|} \sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D} f_2([\mathfrak{a}].x)\chi(\mathfrak{a}),$$

其中， χ 遍历类群 $\mathsf{Cl}_D^\wedge$ 的类群特征。光滑器由素理想和的截断指数函数构造而成，其截断参数取决于理想范数。当 f_1 和 f_2 都是尖点形式时，它关于二者对称。若 f_2 是不完全艾森斯坦级数，我们则提出一种新的非对称方案，仅依据尖点形式 f_1 的信息，以弥补其傅里叶系数缺乏乘法结构的问题。无论采用哪种情形，这一策略都能将 $P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\ \mathscr{D}_2}(f_1 \otimes f_2)$ 的界表示为短欧拉乘积的形式。

在偏速情形下，我们引入一种全新的技术，以利用斜频海格纳周期的统计独立性

$$\chi \mapsto \frac{1}{|\mathrm{Cl}_D|} \sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D} f_1([\mathfrak{a}].x)\chi^2(\mathfrak{a}) \qquad \text{and} \qquad \chi \mapsto \frac{1}{|\mathrm{Cl}_D|} \sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D} f_2([\mathfrak{a}].x)\chi(\mathfrak{a}),$$

无论 $\sigma_1 = \sigma_2$ 是否成立。我们认为这是本文最具创新性的部分之一。受 Tur´an–Kubilius 不等式启发，我们的方法在对上述两个赫格纳周期的典型行为进行条件化后，应用柯西–施瓦茨不等式。这里的光滑器是一个定义在素理想上的狄利克雷多项式——不含截断指数函数——并能将 $P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\ \mathscr{D}_2}(f_1 \otimes f_2)$ 的界表示为短狄利克雷多项式的形式（而非短欧拉乘积）。我们进一步通过对二次类群特征 ψ 取平均来加强论证，从而克服映射 $\chi \mapsto \chi^2$ 在 $\mathsf{Cl}_D^\wedge$ 上不具满射性的问题。

步骤 *2*：第 *4* 节。根据步骤 1，定理 3.1 的证明现在归结为估计相关和

$$\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D|} \sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D} f_i([\mathfrak{a}].x)\bar{f}_i([\mathfrak{n}][\mathfrak{a}].x) \qquad (i = 1, 2),$$

对于范数相对于 $\mathfrak{n} \subset \mathscr{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}$ 较小的整数理想 D。定理 3.4将在第4节证明，它为此类和提供一致渐近公式，并带有幂节省误差项。事实上，我们处理稍一般一些的相关和，其中包括由 $\psi([\mathfrak{a}])$ 扭曲的情形，其中$\psi \in \mathrm{Cl}_D^\wedge$ 是一个固定的类群特征。

我们可以将定理3.4 表述为环面周期的扭曲平均的一个界，如下文（3.2）所示。然而，值得注意的是，通过 Waldspurger 定理，这个扭曲平均与中心 L值分数阶矩之间的关系，与论证中的这一步无关。事实上，推动证明的谱展开用周期来表述最为自然。只有在谱展开之后，我们才借助 L函数的混合次凸界来估计所得的周期；这些界已在[HM] 和 [DFI2] 中得到证明。尽管如此，将定理3.4 重新诠释为关于 L函数矩的结果，本身仍具有独立意义。就其形式而言，这是一种新的谱互反公式，即非分裂版本的 Motohashi 公式。更多详情请参见注释3.6 。

– 步骤*3*：第*7-9*节。 第三步也是最后一步，是证明定理3.1 中得到的短算术表达式在 $D \to \infty$时趋于零。我们利用已知的函子性情形和解析数论，证明在定理2.5的假设下，这类算术表达式渐近地消失。具体而言，我们借助已知的函子性情形，对海克特征值的分布满足的萨托-泰特定律作近似（定理3.7），并利用二次狄利克雷 L函数零点与素数和之间的精确对应关系（定理3.9）。这一步最终能否成功，取决于某些极为精细的线性规划，其结果事先难以预见；参见注释3.8。数值上至关重要的引理7.2的证明已用 Lean4 形式化。

3. Reduction to number theoretic statements

本节将定理2.5的证明归约为一组辅助数论结果，这些结果构成第2.4节所述的三个步骤。本文余下部分将专门证明这些辅助结果；这些结果本身也应当具有独立的研究价值。

3.1. **韦伊判别准则**。 定理 2.5 指出，测度 $\varphi \mapsto P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\ \mathscr{D}_2}(\varphi)$ 以有效的收敛速率弱-*收敛于均匀概率测度 $\mu_1 \times \mu_2$，该测度定义在 $Y_1 \times Y_2$上。根据等分布的韦伊判别准则，只需对一组张成函数 $P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\ \mathscr{D}_2}(\varphi)$ 估计 $\varphi = f_1 \otimes f_2 \in L^2(Y_1 \times Y_2)$，前提是关于谱参数 λ_1，λ_2的 f_1，f_2具有额外的多项式一致性。参见 [BBK第 6 节2]，其中给出了本情形下谱参数的定义。

根据定义，离散谱 $L^2_{\mathrm{disc}}(Y_1 \times Y_2)$ 分解为

$$L^2_{\mathrm{disc}}(Y_1 \times Y_2) = \bigoplus_{\sigma_i \subset L^2(\mathbf{G}_i(\mathbb{Q})\backslash \mathbf{G}_i(\mathbb{A}))} \sigma_1^{K_1} \otimes \sigma_2^{K_2}.$$

由于 K_i几乎达到最大值，因此我们有 $\dim \sigma_1^{K_2} \dim\ \sigma_2^{K_2} \leqslant 1$。在取等号的情形下，我们选取一个 L^2-归一化的 $\varphi = f_1 \otimes f_2 \in \sigma_1^{K_2} \otimes \sigma_2^{K_2}$。我们必须证明，在定理2.5的假设下，

$$P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1 \otimes f_2) = \mu_1(f_1)\mu_2(f_2) + O_{\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2}\left((1 + \max_{i=1,2}\{|\lambda_i|\})^A \mathrm{err}_\nu(\psi(D))\right),$$

对某个常数 $A > 0$ 成立。在估计中，我们通常省略对谱参数的多项式依赖。

若 $\sigma_1 = \sigma_2 = \mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$ 是平凡表示，则无需证明。若 σ_1 或 σ_2 中只有一个是 $\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$，则所需的收敛性可由引言中回顾的杜克等分布定理推出。因此，对于谱的离散部分，我们只需证明：对于 L^2-归一化的 K_i-不变函数 f_i，若它们属于无限维酉表示 $\sigma_i \subset L^2(_{\mathscr{D}_2}(f_1 \otimes f_2) = O(\mathbf{err}_\nu(\psi(D)))_{i}(\mathbb{Q})\backslash \mathbf{G}_i(\mathbb{A}))\mathbf{G}$，则成立。

尚需处理当 $\mathbf{B}_2 = \mathbf{Mat}_2(\mathbb{R})$ 时的情形，对此

$$Y_2 = \mathbf{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathbf{PGL}_2(\mathbb{A})/\mathbf{PGL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})\mathrm{PO}(2) = Y_0(1).$$

令 $E(z,^s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} y(\gamma.z)^s$ 为谱艾森斯坦级数。设 Ψ 是定义在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的紧支撑光滑函数，满足 $\int_0^\infty \Psi(y)dy = 0$，其梅林变换为 $\hat{}\Psi$。考虑[9]

不完全艾森斯坦级数

$$E_\Psi(z)=\int_{(1/2)}\hat{\Psi}(-s)E(z,s)\frac{ds}{2\pi i}.$$

由模曲线的Duke定理，对于 $\varphi=1\otimes E_\Psi$，所需的收敛性成立。因此，对于连续谱，我们只需证明：对于 L^2-归一化的 K_1-不变函数 f_1，它们属于一个无限维的$\sigma_1\subset L^2(\mathbf{G}_1(\mathbb{Q})\backslash\mathbf{G}_1(\mathbb{A}))$，以及 Ψ 上均值为零的紧支撑光滑函数，有 $P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes E_\Psi)=O(\mathrm{err}_\nu(\psi(D)))$。

3.2. **化归为短算术表达式**。现在，我们用适当的短算术表达式来界定 $P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes f_2)$。这里所说的短算术表达式，是指一个短欧拉乘积（当$\nu=1$时）或一个短狄利克雷级数的倒数（当 $\nu=2$时），它由以下对象的海克特征值构造而成： f_1 和 f_2 在 E中分裂的素数处的特征值。关于这些算术表达式如何以及为何出现的启发式解释，请参见第5.1 节和第 6.1节。

当 f_i 是尖点形式时，我们用 $\pi_i=\mathrm{JL}(\sigma_i)$表示 σ_i 到$\mathbf{PGL}_2/\mathbb{Q}$的 Jacquet–Langlands 提升。由于 K_i 几乎是极大的， π_i 的导子是$\mathbf{B}_i$的判别式 $d_{\mathbf{B}_i}$。对于素数 $p\nmid d_{\mathbf{B}_i}$，记 $\lambda_{\pi_i}(p)$ 为 π_i 在 p处的 Hecke 特征值。

（1）在对称情形中， $\nu=1$ 和 f_1、 f_2 均为尖点形式，我们将关注以下量：

$$S_D(\pi_1,\pi_2)=\sum_{\substack{C_0\leqslant p\leqslant D^c\\ p\text{ split in }E\\ |\lambda_{\pi_1}(p)|,|\lambda_{\pi_2}(p)|\leqslant B}}\frac{(\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p))^2}{p},$$

其中 $C_0>\max\{d_{\mathbf{B}_1},\ d_{\mathbf{B}_2}\}$、 c， $B>0$ 为常数。

（2）在非对称情形下， $\nu=2$ 或 f_1 为尖点形式，且 $f_2=E_\Psi$ 为不完全艾森斯坦级数，我们定义

$$T_D(\pi_1)=\sum_{\substack{C_0\leqslant p\leqslant D^c\\ p\text{ split in }E\\ |\lambda_{\pi_1}(p)|\leqslant B}}\frac{\lambda_{\pi_1}(p)^2}{p}.$$

这里，$C_0>d_{\mathbf{B}_1}$ 和 $c>0$ 为常数，但现在我们也允许 $B\in\mathbb{R}_{>0}\cup\{\infty\}$ 为无穷大（因此关于 $\lambda_{\pi_1}(p)$ 大小的条件不再适用）。

全文中，我们用 Ψ 表示定义在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的光滑紧支撑函数，满足 $\int_0^\infty\Psi(y)\mathbf{d}y=0$。我们用 $\hat{}\Psi$ 表示其梅林变换。

我们将在第 4-6 节中证明以下定理。

定理 3.1。与定理 *2.5*一样，我们假设 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 在$\nu=1$时不同构，并且 $\mathbf{B}_1$ 在 $\nu=2$ 时为非分裂。沿用上述记号，

(1) 存在常数 $c>0$, $C_0>$ 最大值$\{d_{\mathbf{B}_1},d_{\mathbf{B}_2}\}$，使得对于每个（有限的） $B>0$和 $\alpha<1/4$,，都有

$$P^{\Delta}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes f_2)\ll\begin{cases}\exp\Big(-\frac{1}{4}S_D(\pi_1,\pi_2)\Big), & f_2\ \textit{cuspidal};\\ \exp\Big(-(\alpha-\alpha^2)T_D(\pi_1)\Big), & f_2=E_\Psi.\end{cases}$$

(2) 存在常数 $c>0, C_0>$ 最大值$\{d_{\mathbf{B}_1}, d_{\mathbf{B}_2}\}$，使得对于 $B=\infty$ ，

$$P^{\Delta_2}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes f_2)\ll (1+T_D(\pi_1))^{-1/2}.$$

注释 3.2。

(a) 定理 α 第（1）部分中的最优值3.1 实际上应为 $\alpha=1/2$。出于在引理 5.7的证明中会显而易见的技术原因，我们需要选择 $\alpha<1/4$。数值 α 对我们的应用没有影响。

(b) 第（ $B<\infty$ 1）部分中要求Rankin 技巧将其转化为欧拉乘积上界。这一论证在第（2）部分的证明中并未出现，因此允许 $B=\infty$。

与 [BB], 定理 3.1 的证明一样，我们也通过 $P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes f_2)$的对偶表达式，现将其回顾如下。对于 $x_i\in H_{\mathscr{D}_i}$ 和 $\chi\in \mathrm{Cl}^\wedge_D$，我们定义 χ-扭曲赫格纳周期为

$$W_{\mathscr{D}_i}(f_i;\chi)=\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D|}\sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D} f_i([\mathfrak{a}].x_i)\chi([\mathfrak{a}]).$$

根据 Parseval 恒等式，我们有

$$P^{\Delta_\nu}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes f_2)=\sum_{\chi\in \mathrm{Cl}^\wedge_D} W_{\mathscr{D}_1}(f_1;\chi^\nu)W_{\mathscr{D}_2}(f_2;\overline{\chi}), \tag{3.1}$$

注意，指数 ν 现已置于第一个因子中。

与 [BB], 不同，我们并不将扭曲 Heegner 周期转化为 L-函数的中心值，经由 Waldspurger公式（对于尖点形式 f_i）以及 Hecke 公式（对于$f_i=E_\Psi$）。相反，我们采用周期理论方法，首先将所述界约化为分别关于每个$|W_{\mathscr{D}_i}(f_i;\ \chi^\nu)|^2$的扭曲矩、且具有幂次节省误差的渐近公式（$i=1,\ 2$）。这一约化步骤在第5 节与第6节中完成，最好通过第5.1节与第6.1节中给出的启发式来理解。随后我们用谱理论证明这些渐近公式。

在下文的定理3.4 中，我们陈述关于扭曲矩的渐近公式，这些公式支撑着定理3.1的证明。由于此处分别考虑每个 f_i，我们在此情形的记号中去掉指标 i，写作 $f=f_i$, $Y=Y_i$, $\sigma=\sigma_i$, $\pi=\pi_i$, 以及 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_i$。对于理想$\mathfrak{n}$ （属于 $\mathscr{O}_E$ 与 $x\in H_{\mathscr{D}}$），我们记

$$H^\Delta_{\mathscr{D}}([\mathfrak{n}])=\{([\mathfrak{a}].x,[\mathfrak{n}][\mathfrak{a}].x):[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D\}\subset Y\times Y$$

对于 [BBK第 4 节中的联合 Heegner 分组，2]。对于 $\psi\in\mathrm{Cl}^\wedge_D$ 我们记

$$P^\Delta_{\mathscr{D}}(f\otimes f;\mathfrak{n},\psi)=\sum_{\chi\in \mathrm{Cl}^\wedge_D}\chi(\mathfrak{n})W_{\mathscr{D}}(f,\chi\psi)\overline{W_{\mathscr{D}}(f,\chi)}. \tag{3.2}$$

当 ψ是平凡特征时，我们简记为 $P^\Delta_{\mathscr{D}}(f\otimes f;\ \mathfrak{n})$。注意，在平凡平移 $\mathfrak{n}=\mathscr{O}_E$的情形下，我们恢复了第 2.3 节中 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2=\mathscr{D}$情形下的定义，即 $H^\Delta_{\mathscr{D}}([\mathscr{O}_E])=H^\Delta_{\mathscr{D}\times\mathscr{D}}$以及 $P^\Delta_{\mathscr{D}}(f\otimes f;\ \mathscr{O}_E)=P^\Delta_{\mathscr{D}\times\mathscr{D}}(f\otimes f)$。

备注 3.3. 我们只需要在 ψ 的 $\nu=2$ 情形中考虑带非平凡 $_D\to\mathrm{Cl}_D$, $[\mathfrak{a}]\mapsto[\mathfrak{a}]^2$，以此克服合数判别式 D下平方映射 Cl6.3节中我们引入了 $P^\Delta_{\mathscr{D}}(f\otimes f$ 的平均；$\mathfrak{n}$，ψ)在二次 ψ上。

对于与导子 $d_{\mathbf{B}}$ 互素的 N π，我们记作

$$\lambda_\pi^*(N)=\sum_{d^2|N}\frac{\mu(d)}{d}\lambda_\pi\Big(\frac{N}{d^2}\Big)$$

对于双陪集算子 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\left(\begin{smallmatrix}N&\\&1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的归一化“部分”海克特征值，其中 λ_π 是通常的海克特征值，它们作为 π 的标准L函数中的狄利克雷系数出现。我们对艾森斯坦级数的特征值也使用相同的记号，并类似地记为，

$$\tau_{it}(N)=\sum_{ab=N}\Big(\frac{a}{b}\Big)^{it},\qquad \tau_{it}^*(N)=\sum_{abd^2=N}\frac{\mu(d)}{d}\Big(\frac{a}{b}\Big)^{it}\tag{3.3}$$

对于 $t\in\mathbb{C}$。令[1] $\phi(s)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-1/2)\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)}$ 为通常散射矩阵的行列式。我们定义算术函数 $V(N)=[\Gamma_0(N)\colon\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]=N\prod_{p|N}(1+p^{-1})$，并令

$$\Lambda_\pi(\mathfrak{n})=\frac{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}^*}}{V(\mathrm{N}\mathfrak{n}^*)}\lambda_\pi^*(\mathrm{N}\mathfrak{n}^*),\qquad \Lambda_{it}(\mathfrak{n})=\frac{(\mathrm{N}\mathfrak{n}^*)^{1/2}}{V(\mathrm{N}\mathfrak{n}^*)}\tau_{it}^*(\mathrm{N}\mathfrak{n}^*),\tag{3.4}$$

其中 $\mathfrak{n}^*$ 是理想 $\mathfrak{n}\subset\mathscr{O}_E$的本原核，即满足$\mathfrak{n}^*(n)=\mathfrak{n}$ 的最大整数理想，其中 n为某个非零有理整数。正如 [BBK，注 8 中所解释的，这个算术函数自然出现在以下渐近公式中。2]。

定理 3.4。存在常数 A、$\delta>0$，使得以下结论成立。设 $\mathfrak{n}\subset\mathscr{O}_E$ 为与 D 和 $d_{\mathbf{B}}$互素的整数理想。设 ψ 为一个类群特征。那么

$$P_{\mathscr{J}}^{\Delta}(f\otimes f;\mathfrak{n},\psi)=\begin{cases}\delta_{\psi=1}\Lambda_\pi(\mathfrak{n})+O_\pi\big((\mathrm{N}\mathfrak{n}^*)^AD^{-\delta}\big), & f\ \textit{cuspidal};\\ \delta_{\psi=1}\int_{\mathbb{R}}\Lambda_{it}(\mathfrak{n})\Phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}+O_\Psi\big((\mathrm{N}\mathfrak{n}^*)^AD^{-\delta}\big), & f=E_\Psi,\end{cases}$$

其中，对于 $s\in\mathbb{C}$，我们定义

$$\Phi(s)=\frac{3}{\pi}\hat{\hat{\Psi}}(-\tfrac12-is)\big(\hat{\Psi}(-\tfrac12+is)+\phi(\tfrac12+is)\hat{\Psi}(-\tfrac12-is)\big).\tag{3.5}$$

ˆ 注意，由于 $\Psi(-1)=0$，$\Phi(s)$ 是整函数；只要 t 的虚部固定，它关于 t 就会快速衰减，因为 Ψ 是光滑的。

注 3.5。正是在这一点上，我们看到了使用不完全艾森斯坦级数的必要性。例如，如果 f 是 谱 艾森斯坦级数 $E(s,\ 1/2+it)$ 则量 $P_{\mathscr{J}}^{\Delta}(f\otimes f;\ \mathfrak{n},\ \mathbf{1})$ 一般会增长至 $\log\ D$，甚至对于 (会增长至 $\log\ D)^3$，在 $t=0$ [DFI1、定理 2]中如此。另一个不完全艾森斯坦级数至关重要的地方是引理 5.7；参见该引理之前的讨论。

注记 3.6。若 ψ 是平凡的，且 f 是层与 D互素的尖点形式，则根据 Waldspurger 定理（见 [BBK，(6.5)] 以及 [BB，附录 A]），我们有

$$P_{\mathscr{J}}^{\Delta}(f\otimes f;\mathfrak{n},\psi)=\frac{c_{\pi,D}}{|\mathrm{Cl}_D|}\sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D}\chi(\mathfrak{n})\frac{L(1/2,\pi\times\chi)}{L(1,\chi_D)L(1,\mathrm{Ad},\pi)}\tag{3.6}$$

[1]在此处及下文中，我们用 π 表示 $\mathbf{PGL}_2/\mathbb{Q}$ 上的尖点自守表示 $\pi=$JL(σ)，也用它表示数值常数 $\pi=4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$。两者不应混淆。

对于复数 $c_{\pi,\,D} \asymp_\pi 1$。定理 3.4给出了这一扭曲一阶矩的渐近公式，我们希望它本身也具有独立的研究价值。此外，误差项本身可以表示为总次数为 12 的中心 L-值的典范平方根，如（4.2）所示。因此，我们得到了 Motohashi 互反公式的一个非分裂版本，而我们的证明则体现了 Michel 和 Venkatesh 所构想的策略 [MV2，§4.5。1]。对于 Eisenstein 谱，Motohashi 公式的相似之处在以下关系中更加明显

$$\sum_{\chi\in \mathrm{Cl}_D} \chi(\mathfrak{n}) L(1/2,\chi)^2 \rightsquigarrow \sum_{\varrho \text{ cuspidal of level } N\mathfrak{n}} L(1/2,\varrho)^2 L(1/2, \mathrm{BC}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-D})}(\varrho))^{1/2}.$$

3.3. **确保增长**。 定理 3.1 将定理 2.5 的证明归结为证明以下表达式 $S_D(\pi_1,\ \pi_2)$ 和 $T_D(\pi)$ 趋于 ∞，其中 D。从启发式角度看，我们会预期

$$S_D(\pi_1,\pi_2) \approx \sum_{\substack{C_0\leqslant p\leqslant D^c \\ p \text{ split in } E}} \frac{2}{p} \approx \log\log D \qquad \text{and} \qquad T_D(\pi) \approx \sum_{\substack{C_0\leqslant p\leqslant D^c \\ p \text{ split in } E}} \frac{1}{p} \approx \frac{1}{2}\log\log D.$$

Th这里有三个可能的障碍会阻止这种情况发生 :

(1) 数值 $|\lambda_{\pi_1}(p) - \lambda_{\pi_2}(p)|$ （分别为 $|\lambda_\pi(p)|$）可能经常为零或非常小；或者 $\max(|\lambda_{\pi_1}(p)|, |\lambda_{\pi_2}(p)|)$ （分别为 $|\lambda_\pi(p)|$）可能经常大于 B;

(2) 小分裂素数 p 的数量可能很少;

(3) E 中的小分裂素数与满足（1）的素数之间可能存在某种串通。

第一种现象纯粹是数对 $(\pi_1,\ \pi_2)$ （分别为 π）的性质，第二种纯粹是 E 的性质，而第三种则同时涉及两者。

我们的策略是先无条件地对一个正密度素数集排除（1），然后对满足 $L(s、\ \chi_{-D})$ 对另一个正密度素数集 $p \geqslant D^{1/\psi(D)}$满足（2.3）的负基本判别式排除（2）。如果合并后的总密度严格大于 1，就能确保这些判别式上有足够的重叠，从而排除（3）。我们将在第7–9节实施这一方案。

我们先处理（1）。我们将在引理7.1中证明，作为 Jacquet–Langlands 提升得到的尖点表示 π，即 $\pi = \mathrm{JL}(\sigma)$，来自 $\sigma \subset L^2(\mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}))$，且具有第2.3节所定义的几乎最大层不变性时，其对称幂提升 $\mathrm{sym}^k\pi$对 $k = 2、3、4$均为尖点；此外，对于任意两个来自不同四元数代数的此类表示 $\pi_1,\ \pi_2$，这些对称幂也彼此不同。由此，我们可以应用以下结果，该结果将在第7节证明。

定理 3.7。

(1) 设 $\pi_1、\ \pi_2$ 是 $\mathbf{PGL}_2/\mathbb{Q}$ 的尖点自守表示。假设对于所有 $k = 2、3、4$，$\mathrm{sym}^k\pi_1$ 和 $\mathrm{sym}^k\pi_2$ 都是尖点且彼此不同。则存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\sum_{\substack{p\leqslant X \\ |\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p)|\geqslant\varepsilon}} \log p \geqslant 0.508X$$

对于充分大的 $X \geqslant X_0$ 。

(2) 设 π 是 $\mathbf{PGL}_2/\mathbb{Q}$ 的尖点自守表示。假设对于所有 $k = 2、3、4$，$\mathrm{sym}^k\pi$ 都是尖点的。那么存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$\sum_{\substack{p\leqslant X\\ |\lambda_\pi(p)|\geqslant\varepsilon}} \log p \geqslant 0.58X$$

当 $X \geqslant X_0$ 充分大时。

注 3.8。 定理 3.7 保证了满足海克特征值所示不等式的素数的对数密度严格大于关键阈值 1/2。若 π_1 和 π_2 （分别 π）对应全纯模形式，这实际上可直接由联合萨托-泰特猜想（分别由萨托-泰特猜想）推出；例如参见[Th] ，其中给出了一个有效版本。对于马斯形式，我们必须依赖对这些猜想的部分进展，而这些进展由前几个对称幂提升的函子性所提供。

幸运的是，Gelbart–Jacquet、Kim–Shahidi 和 Kim 所证明的前几个对称幂 sym^2, sym^3, sym^4 of GL_2, 的自守性（以及尖点性判据），恰好足以突破常数 $1/2$。事实上，例如，若在第 (1) 部分中去掉 $\mathrm{sym}^4\pi_1 \neq \mathrm{sym}^4\pi_2$ 这一假设，但保留其他假设，则存在不同的偶二十面体伽罗瓦表示对 ρ_1, ρ_2，它们按猜想对应于特征值为 1/4 的马斯尖点形式，并且对于一组狄利克雷密度为 $3/5$ 的素数p，有 $\mathrm{tr}(\rho_1(\mathrm{Frob}_p)) = \mathrm{tr}(\rho_2(\mathrm{Frob}_p))$；参见 [LMFDB]。类似地，若在 (2) 中去掉 $\mathrm{sym}^2(\pi)$ 是尖点形式这一假设，则二面体形式在密度为 1/2 的素数上具有为零的海克特征值。

关于（2），我们将在第 8 节证明以下定理。

定理 3.9。 设 $1 \leqslant \psi(D) \leqslant o(\log D)$ 是一个趋于无穷的函数。那么，对于任意固定的 $\delta < 1/2$ 以及任意充分大的负基本判别式 $-D$，满足$L(s, \chi_{-D})$ 满足 （2.3），我们有

$$\sum_{\substack{X\leqslant p\leqslant X^2\\ \chi_{-D}(p)=1}} \frac{1}{p} \geqslant \delta \sum_{X\leqslant p\leqslant X^2} \frac{1}{p},$$

关于 $X \geqslant D^{1/\psi(D)}$ 一致成立。

在第 9 节中，我们结合上述两个结果，推导出以下推论，该推论本质上通过鸽巢原理论证解决了最后一个问题（3）。

推论 3.10。 设 $1 \leqslant \psi(D) \leqslant o(\log D)$ 是一个趋于无穷的函数。那么存在常数 $B > 2$ 和 $\kappa > 0$，使得对于任意充分大的负基本判别式 $-D$，满足 $L(s, \chi_{-D})$ 满足 （2.3），我们有 $S_D(\pi_1, \pi_2) > \kappa\log\psi(D)$ 和$T_D(\pi) > \kappa\log\psi(D)$。

结合本节中的所有结果，即完成定理2.5的证明。

4. Twisted moments of L-functions

本节证明定理 3.4。相关公式见 [BBK] 中关于 f 尖点的讨论，以及 [DFI1，Bl] 中关于 $f = E_\Psi$的讨论。我们的证明通过将 (3.2) 写成 $Y \times Y$内 Hecke 对应上的扭曲赫格纳周期，再对其作谱展开。

4.1.**定理 3.4 的证明：尖点情形**。回顾 3.2) 中对$P_{\mathscr{J}}^{\Delta}(f\otimes f$的定义表达式； $\mathfrak{n}$， ψ)。由帕塞瓦尔关系 [BBK，(6.4)], 可得

$$P_{\mathscr{J}}^{\Delta}(f\otimes f;\mathfrak{n},\psi)=\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D|}\sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D} f([\mathfrak{a}].x)\bar{f}([\mathfrak{n}][\mathfrak{a}].x)\psi([\mathfrak{a}]). \tag{4.1}$$

注意到，对于任意非零有理整数n，将 $\mathfrak{n}$ 替换为 $\mathfrak{n}(n)$ 时，等式两边保持不变。特别地，我们可以用 $\mathfrak{n}$ 的本原核 $\mathfrak{n}^*$来替换它，并约定将其范数记为 N。若 ψ 是平凡的，则 [BBK，命题 9.4] 给出了右侧关于层为 N的自守形式的谱分解。主项来自常值函数的贡献，等于 $\Lambda_\pi(\mathfrak{n})$（另见 [BBK，注记 8.2]）。对于非平凡的 ψ，常值函数的贡献为零，因为$\sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D}\psi(\mathfrak{a})=0$。

谱的非恒定部分在 [BBK，引理 10.2、10.3] 中针对平凡的 ψ进行了分析，而 [BBK，引理 10.3]经稍作修改后，对任意 ψ均成立。因此，非恒定部分的贡献可估计为

$$\frac{(ND)^{\varepsilon}}{D^{1/4}N^{1/2}}\sum_{\varrho\ \text{cuspidal level}\ N}|L(1/2,\varrho\times\psi)L(1/2,\pi\times\pi\times\varrho)|^{1/2}(1+|t_\varrho|)^{-100} \tag{4.2}$$

其中 t_ϱ 是 ϱ的谱参数，再加上Eisenstein 谱的一个类似项。

当 ϱ 为尖点时， [HM，定理 1] 为 $L(1/2,\varrho\times\psi)$ 给出了用 D 表示的次凸界，且对 ϱ 的参数具有多项式依赖。在相应的艾森斯坦项中， [DFI2，定理 2。5] 给出了 $L(1/2+it,\psi)$ 在 D方面的次凸界，且在 t 方面具有多项式依赖。对所有其他 L函数的凸性界给出形如 $O(N^AD^{-\delta})$ 的误差项，对某个 A， $\delta>0$。

注 4.1。第一项 $\Lambda_\pi(\mathfrak{n})$ 在 $N\to\infty$时趋于零，这是根据已知的趋向拉曼努金猜想的非平凡界。定理 3.4的用处在于D 中的幂次节省，且对 N具有多项式依赖，因为它表明存在某个 $\alpha>0$，使得第二项当 $N\to\infty$ 时也趋于零，且处于范围 $N\ll D^{\alpha}$内。

注记 4.2. 尽管这与我们的目的无关，但我们可以利用已知的矩估计和次凸性界，像 A 与δ 中所做的那样，阐明 [BBK注记 10 中1] 对平凡 ψ 的取值。

4.2. **定理 3.4的证明：艾森斯坦情形**。 将 (4.1) 应用于 E_Ψ，得到

$$P_{\mathscr{J}}^{\Delta}(E_\Psi\otimes E_\Psi;\mathfrak{n},\psi)=\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D|}\sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D} E_\Psi(\tau_{[\mathfrak{a}]})\overline{E}_\Psi(\tau_{[\mathfrak{n}][\mathfrak{a}]})\psi([\mathfrak{a}]). \tag{4.3}$$

再一次，我们可以将 $\mathfrak{n}$ 替换为其本原核 $\mathfrak{n}^*$，并记 $N=\mathbf{N}\mathfrak{n}^*$。

我们回顾一下 $\varphi\mapsto P_{\mathscr{J}}^{\Delta}(\varphi)$ 在$Y_0(1)\times Y_0(1)$ 上跨越层 NHecke 对应的谱展开中的一些结构要素。这些要素是定理3.4的尖点情形与艾森斯坦情形共有的；我们在后一种情形中提供更多细节，因为这一设置在 [BBK]中未曾处理。

设 $Y_0(N)=\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}$，一个次数为$V(N)$ 的覆盖，覆盖模曲面 $Y_0(1)$。由[BBK第 7] 节可知， $\mathfrak{n}$ 确定了对齐赫格纳包 $H_{\mathscr{J}}(\mathfrak{n})$，其判别式为 $-D$，位于$Y_0(N)$。对于函数 $u\in C^\infty(Y_0(N))$ 以及 $x\in H_{\mathscr{J}}(\mathfrak{n})$，我们定义一个 ψ-扭曲赫格纳周期于 $Y_0(N)$ 上，由

$$W_{\mathscr{J}}(u;\mathfrak{n},\psi)=\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D|}\sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}_D} u([\mathfrak{a}].x)\psi([\mathfrak{a}]).$$

设 $Y_0^{\Delta}(N)=\{(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).z,\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).gz):\ g\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\left(\begin{smallmatrix}N&\\&1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\}\subset Y_0(1)\times Y_0(1)$ 表示层-N Hecke 对应。我们有一个双射映射

$$\beta_N: Y_0(N)\to Y_0^{\Delta}(N),\qquad \Gamma_0(N).z\mapsto(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).z,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).Nz).$$

这可由 [BBK第 8 节及后续内容9] 推出，即 $H_{\mathscr{D}}^{\Delta}([\mathfrak{n}])\subset Y_0^{\Delta}(N)$ 并且

$$P_{\mathscr{D}}^{\Delta}(E_\Psi\otimes E_\Psi;\mathfrak{n},\psi)=W_{\mathscr{D}}((E_\Psi\otimes E_\Psi)_{|Y_0^{\Delta}(N)}\circ\beta_N;\mathfrak{n},\psi).$$

由于 $(E_\Psi\otimes E_\Psi)_{|Y_0^{\Delta}(N)}\circ\beta_N=E_\Psi E_\Psi^{(N)}$，其中我们令 $E_\Psi^{(N)}(z)=E_\Psi(Nz)$，因此可推得（4.3）右端可写为 $W_{\mathscr{D}}(E_\Psi E_\Psi^{(N)};\ \mathfrak{n},\ \psi)$。

我们在 $Y_0(N)$ 上赋予由 $V(N)^{-1}\frac{3}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y/y^2$ 给出的均匀概率测度。令$\langle .,-\ .\rangle$表示 $L^2(Y_0(N))$ 上的内积。为简化记号，我们将 $L^2(Y_0(N))$ 中的谱分解记为

$$f(z)=\langle f,\mathbf{1}\rangle+\int_{(N)}^{*}\langle f,\varpi\rangle\varpi(z)\,\mathrm{d}\varpi,$$

其中，$\int_{(N)}^{*}$ 表示对尖点形式的正交归一基以及一组经过适当参数化的艾森斯坦级数求和/积分的组合。在此记号下，我们需要计算

$$\delta_{\psi=1}\langle E_\Psi\overline{E}_\Psi^{(N)},\mathbf{1}\rangle+\int_{(N)}^{*}\langle E_\Psi\overline{E}_\Psi^{(N)},\varpi\rangle W_{\mathscr{D}_i}(\varpi;\mathfrak{n},\psi)\,\mathrm{d}\varpi. \tag{4.4}$$

主项来自常值函数的贡献，我们已将其单独提出；其余部分则作较粗略的估计。

我们首先估计 (4.4) 中的谱展开，这是 $f=E_\Psi$对应于 (4.2) 的类似结果。结合 [BBK，引理 10.3、10.5]以及与第4.1节相同的次凸界，可得

$$W_{\mathscr{D}}(\varpi;\mathfrak{n},\psi)\ll_B D^{-\delta}N^A(1+|\mu_\varpi|)^{-B}$$

对于某个 δ，$A>0$ 以及任意 $B>0$，其中 μ_ϖ 表示 ϖ的阿基米德Langlands参数。因此，(4.4) 中的第二项有如下界

$$\ll_B D^{-\delta}N^A\int_{(N)}^{*}|\langle E_\Psi\overline{E}_\Psi^{(N)},\varpi\rangle|\frac{\mathrm{d}\varpi}{(1+|\mu_\varpi|)^B}, \tag{4.5}$$

接下来只需证明谱和／积分关于 N具有多项式界。在第 4.1节的尖点情形中，可通过应用三重积公式和兰金–塞尔伯格恒等式，将 $\langle ff^{(N)}、\ \varpi\rangle$表示为 L-函数，并对其作粗略估计来实现这一点。对于$f=E_\Psi$ 不完全艾森斯坦级数，我们将直接估计 $\langle E_\Psi E_\Psi^{(N)}\ ,\ \varpi\rangle$。

令 $\xi(z)=\sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\varpi E_\Psi^{(N)})(\gamma z)$。通过展开法可得

$$\langle E_\Psi\overline{E}_\Psi^{(N)},\varpi\rangle=\langle E_\Psi,\varpi E_\Psi^{(N)}\rangle=\int_0^1\int_0^\infty\Psi(y)\xi(z)\frac{3}{\pi}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}\ll\max_{\substack{x\in[0,1]\\ y\in\mathrm{supp}(\Psi)}}|\xi(x+iy)|.$$

为方便起见，对于 $\Gamma_0(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的代表元，我们可以取满足 $v\mid N$、$u \bmod N/v$ 的 $\left(\begin{smallmatrix}*&*\\u&v\end{smallmatrix}\right)$。对于这样的代表元 γ，我们有粗略估计 $N^{-2}\ll_z\Im\gamma z\ll_z 1$。由于

共有 $V(N)\ll N^{1+\varepsilon}$ 个代表元，因此我们推得

$$\langle E_\Psi\overline{E}_\Psi^{(N)},\varpi\rangle\ll N^{1+\varepsilon}\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ N^{-2}\ll y\ll 1}}|\varpi E_\Psi^{(N)}(x+iy)|\ll N^{1+\varepsilon}\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ N^{-2}\ll y\ll 1}}|\varpi(x+iy)|,$$

其中在最后一步中，我们用到了 $\|E_\Psi\|_\infty\ll 1$，因此显然有 $\|E_\Psi^{(N)}\|_\infty\ll 1$。设 B 是一个足够大的偶整数，则可以用柯西–施瓦茨不等式来估计

$$\int_{(N)}^*|\langle E_\Psi\overline{E}_\Psi^{(N)},\varpi\rangle|\frac{\mathrm{d}\varpi}{(1+|\mu_\varpi|)^B}\ll N^{3/2+\varepsilon}\Big(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ N^{-2}\ll y\ll 1}}\int_{(N)}^*|\varpi(x+iy)|^2\frac{\mathrm{d}\varpi}{1+\mu_\varpi^B}\Big)^{1/2},$$

因为由韦尔定律可知，对于 $B>2$，有 $\int_{(N)}^*(1+|\mu_\varpi|)^{-B}\,\mathrm{d}\varpi\ll N^{1+\varepsilon}$。注意，$\mu\mapsto 1/(1+\mu^B)$ 在 $\Im\mu<1$ 上全纯，并且在 $\mu\in\mathbb{R}\cup[-i/2,i/2]$ 上为正。该函数的 Harish-Chandra 变换快速衰减。我们对剩余的谱项应用预迹公式，得到如下估计

$$\int_{(N)}^*|\langle E_\Psi\overline{E}_\Psi^{(N)},\varpi\rangle|\frac{\mathrm{d}\varpi}{(1+|\mu_\varpi|)^B}\ll_C N^{3/2+\varepsilon}\Big(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ N^{-2}\ll y\ll 1}}\sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)}\Big\|\begin{pmatrix}y & x\\ & 1\end{pmatrix}^{-1}\gamma\begin{pmatrix}y & x\\ & 1\end{pmatrix}\Big\|^{-C}\Big)^{1/2}.$$

若记 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$，则

$$\begin{pmatrix}y & x\\ & 1\end{pmatrix}^{-1}\gamma\begin{pmatrix}y & x\\ & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-cx & *\\ cy & d+cx\end{pmatrix}.$$

对于 $y\gg N^{-2}$，$N\mid c$ 以及 $\det\gamma=1$ (它确定 b，只要 a、c、d 选定即可)，不难看出，对 γ 求和所得的结果（当 C 足够大时）有界于 $O(N)$，因此（4.5）为$\ll D^{-\delta}N^{A+2+\varepsilon}$。

现在我们转而讨论常值函数的贡献的计算，其表达式为

$$\frac{1}{V(N)}\int_{Y_0(N)}E_\Psi(z)\overline{E}_\Psi(Nz)\frac{3}{\pi}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}.$$

再次将对 $Y_0(N)$ 的积分替换为 $Y_0(1)$ 的 $V(N)$ 个平移，前面的等式变为

$$\frac{1}{V(N)}\overline{\int_{Y_0(1)}\overline{E}_\Psi(z)E_\Psi(z)|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\left(\begin{smallmatrix}N & \\ & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\frac{3}{\pi}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}},$$

其中，斜杠算子表示双陪集算子的作用，我们将其记为 $\sqrt{N}\cdot T_{N,\,1}^*$。艾森斯坦级数 $E(z,s)$ 关于 $T_{N,\,1}^*$ 的特征值为 $\tau_{s-1/2}^*(N)$。于是对于$\sigma>1$，我们有

$$\sqrt{N}\cdot T_{N,1}^*E_\Psi(z)=\sqrt{N}\int_{(\sigma)}T_{N,1}^*E(z,s)\hat{\Psi}(-s)\frac{\mathrm{d}s}{2\pi i}=\sqrt{N}\int_{(\sigma)}\tau_{s-1/2}^*(N)E(z,s)\hat{\Psi}(-s)\frac{\mathrm{d}s}{2\pi i}.$$

通过展开法，我们得到

$$\frac{\sqrt{N}}{V(N)}\overline{\int_0^\infty\overline{\Psi}(y)\int_0^1\int_{(\sigma)}\tau_{s-1/2}^*(N)E(x+iy,s)\hat{\Psi}(-s)\frac{\mathrm{d}s}{2\pi i}\,\frac{3}{\pi}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}}.$$

常数项的计算得出

$$\int_0^\infty\overline{\Psi}(y)\int_0^1E(x+iy,s)\frac{3}{\pi}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}=\int_0^\infty\overline{\Psi}(y)(y^s+\phi(s)y^{1-s})\frac{3}{\pi}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{3}{\pi}\left(\hat{\overline{\Psi}}(s-1)+\phi(s)\hat{\overline{\Psi}}(-s)\right),$$

由此完成了定理 3.4 在艾森斯坦情形下的证明，只需注意到 $\tau_{it}^*(N) =$ ^ ^ $\tau_{-it}^*(N) = \overline{\tau_{it}^*(N)}$, $\overline{\Psi(-1/2-it)} = \Psi(-1/2+it)$ 以及 $\overline{\phi(1/2-it)} = \phi(1/2+it)$。 □

5. Proof of Theorem 3.1 : the equivariant case

本节的目标是证明定理 3.1 的第（1）部分，其中 $\nu = 1$。回顾一下，在这种情况下，定理 2.5 的假设是 $\mathbf{B}_1 \not\simeq \mathbf{B}_2$。不失一般性，我们可以假设 $\mathbf{B}_1 \not\simeq \mathrm{Mat}_2$, ，从而 f_1 是尖点形式。

5.1. **启发式说明**。 最初的观察是，在应用柯西–施瓦茨不等式之前，可以先引入复权，或平滑因子，使（3.1）中的两个因子近乎平行。随后，在接下来的分析中，这些权重将保留两个因子之间的相关性。

在我们的情形中，“近乎平行”这一要求过高，因为我们无法获得 χ-扭曲 Heegner 周期 $W_{\mathscr{D}_i}(f_i$ 的相位 $\chi)$，而该相位尤其取决于基点的选择 x_i。相反，受 [RS], 的启发，我们插入取正实值的平滑因子$\mathcal{M}(\chi)^{\pm 1/2} \in \mathbb{R}_{>0}$ ，使两个因子的绝对值大致相同。应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$P^{\Delta}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1 \otimes f_2) \leqslant \sum_{\chi \in \mathrm{Cl}_D^{\wedge}} \left(|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi)|^2 \mathcal{M}(\chi)\right)^{1/2} \left(|W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi)|^2 \mathcal{M}(\chi)^{-1}\right)^{1/2}.$$

越好 $\mathcal{M}(\chi)$ 地近似$|W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\ \chi)|/|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi)|$, 我们丢失的信息就越少；为此，我们牺牲了对相位之间相关性的任何控制。近期的一种变体见 [CCLR]。

此类平滑因子的构造受沃尔德斯普格公式的指导。该公式将$|W_{\mathscr{D}_i}(f_i、\ \chi)|^2$ （当 f_i 为尖点时）与 L-函数联系起来，如注 3.6所述。我们从该公式中提取的关键信息是， $|W_{\mathscr{D}_i}(f_i、\chi)|^2$ 应当表现得像短欧拉乘积。不过需要强调的是，只有在辅助权重的这一选择中， L-函数或其近似才会发挥作用：我们保持 χ-扭曲 Heegner 周期 $|W_{\mathscr{D}_i}(f_i、\ \chi)|^2$原样不动，以期应用帕塞瓦尔关系（4.1），并随后使用谱理论。

我们将采用两种不同的平滑因子，视 f_1 与 f_2 是否均为尖点，或仅 f_1 为尖点而 $f_2 = E_\Psi$。这对应于第3.2节中对称情形或非对称情形的划分。在对称情形下，我们取光滑器 $\mathcal{M}(\chi)$为如下形式的表达式

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{C_0 \leqslant N\mathfrak{p} \leqslant D^c} \frac{\lambda_{\pi_1}(N\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{1/2}} + \frac{1}{2}\sum_{C_0 \leqslant N\mathfrak{p} \leqslant D^c} \frac{\lambda_{\pi_2}(N\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{1/2}}\Big)$$

对于适当的常数 C_0, $c > 0$。由 Waldspurger公式分别应用于 χ-扭曲 Heegner 周期 $W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\ \chi)$ 和 $W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\ \chi)$，再结合近似论证 [BB 引理 6], ，可知上述欧拉乘积应能有效近似 $|W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\ \chi)|/|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi)|$。事实上，为了利用这一替代形式，必须注意始终只使用狄利克雷多项式，这就需要使用截断指数函数，并采用多段 mollifier，以处理不同理想范数尺度上的截断误差。

在非对称情形下，当 $f_2 = E_\Psi$ 时，使用不完全艾森斯坦级数需要付出代价：其傅里叶系数不具有乘法性，因此不适用于磨光。因此，我们改变磨光方案，并将 $\mathcal{M}(\chi)$ 取为以下形式的表达式

$$\exp\Big(-\alpha \sum_{C_0 \leqslant N\mathfrak{p} \leqslant D^c} \frac{\lambda_{\pi_1}(N\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{1/2}}\Big),$$

对某个参数 $0 < \alpha < 1/2$。由沃尔德斯普格公式，这可作为对 $|W_{\mathscr{D}_1}(f_1$的近似，$\chi)|^{-2\alpha}$。按上文论证，我们最终将得到一个用狄利克雷多项式 $T_D(\pi_1)$表示的界，该多项式定义于第 3.2 节。如注记 3.2 所述，我们希望取 $\alpha = 1/2$，并如尖点情形那样获得一半的节省，这反映了我们的光滑器仅携带一半信息这一事实。然而，引理5.7的证明要求在选取 α 时具有一定灵活性，使其略小一些。

我们现在概述本节内容。在第5.2-5.4节中，我们仔细选取光滑器中的参数。随后，我们在第 5.5 节应用定理 3.4的扭曲一阶矩。最后，由于定理 3.1 中的主控函数是一个短欧拉乘积，尚需将我们的估计从短狄利克雷多项式转换为短欧拉乘积。我们在第 5.6-5.8节中完成这一步，其中最主要的是运用 Rankin 技巧。

5.2. 磨光函数的引入。 对于非负整数 ℓ 和实数 x，我们令

$$E_\ell(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{x^j}{j!}$$

表示截断指数函数。虽然函数 E_ℓ 不再具有乘法性，但以下下界提供了一个有用的替代方案。

引理 5.1。 设 ℓ为非负偶自然数，则

$$E_\ell(x)E_\ell(-x) \geqslant 1$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$均成立。

证明。 乘积 $E_\ell(x)E_\ell(-x)$ 显然是关于 x的偶多项式函数，次数为 2ℓ，常数项为 1，且与整数 ℓ的奇偶性无关。为考察系数的符号，我们写作

$$E_\ell(x)E_\ell(-x) = \sum_{n=0}^{\ell} a_{2n}x^{2n}, \quad \text{where} \quad a_{2n} = \sum_{\substack{j+k=2n \\ j,k\leqslant\ell}} \frac{(-1)^k}{j!k!}.$$

注意，当 $2n \leqslant \ell$ 时，$a_{2n} = (1-1)^{2n} = 0$。其余系数的形式为

$$a_{\ell+t} = \sum_{\nu=0}^{\ell-t} \frac{(-1)^{t+\nu}}{(\ell-\nu)!(t+\nu)!} \qquad (1 \leqslant t \leqslant \ell,\ t \equiv \ell \bmod 2),$$

其中我们令 $\nu = \ell - j = t - k$。利用二项式系数进行望远镜求和，上述表达式等于

$$\begin{aligned}\frac{1}{(t+\ell)!}\sum_{\nu=0}^{\ell-t}\frac{(-1)^{t+\nu}(t+\ell)!}{(\ell-\nu)!(t+\nu)!} &= \frac{1}{(t+\ell)!}\sum_{\nu=0}^{\ell-t}(-1)^{t+\nu}\binom{t+\ell}{\ell-\nu}\\ &= \frac{1}{(t+\ell)!}\sum_{\nu=0}^{\ell-t}(-1)^{t+\nu}\left\{\binom{t+\ell-1}{\ell-\nu}+\binom{t+\ell-1}{\ell-\nu-1}\right\}\\ &= \frac{1}{(t+\ell)!}\left\{(-1)^t\binom{t+\ell-1}{\ell}+(-1)^\ell\binom{t+\ell-1}{t-1}\right\} = \frac{(-1)^t+(-1)^\ell}{(t+\ell)(t-1)!\ell!}.\end{aligned}$$

现在 ℓ 和 t 具有相同的奇偶性，因此该系数的正负分别取决于 ℓ 是偶数还是奇数。□

对于一个狄利克雷多项式 $\{\mathcal{P}(\chi)\}_\chi$ 的集合，我们引入加权和

$$M_D(f_i,\mathcal{P}) = \sum_{\chi\in \mathrm{Cl}_D^\wedge} |W_{\mathscr{D}_i}(f_i,\chi)|^2\mathcal{P}(\chi). \tag{5.1}$$

用 L-函数表示时，与 (3.6) 类似，$M_D(f_i,\ \mathcal{P})$ 可看作光滑化的一阶矩。

推论 5.1。对于 $R\in\mathbb{N}$，设 $\{\mathcal{Q}_1(\chi),\dots,\mathcal{Q}_R(\chi)\}_\chi$ 是一组由实值狄利克雷多项式构成的 R-元组，指标取自 $\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge$。对于 $i=1,2$ 以及 $\ell_1,\dots,\ell_R\in\mathbb{N}$，令

$$\mathcal{P}^{(i)}(\chi) = \prod_{j=1}^{R} E_{\ell_j}((-1)^i\mathcal{Q}_j(\chi)).$$

Then

$$P^{\Delta}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes f_2) \leqslant M_D(f_1,\mathcal{P}^{(1)})^{1/2}M_D(f_2,\mathcal{P}^{(2)})^{1/2}.$$

证明。由引理 5.1 可知 $\mathcal{P}^{(1)}(\chi)\mathcal{P}^{(2)}(\chi)\geqslant 1$。因此

$$P^{\Delta}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes f_2) \leqslant \sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge}\left(|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi)|^2\mathcal{P}^{(1)}(\chi)\right)^{1/2}\left(|W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi)|^2\mathcal{P}^{(2)}(\chi)\right)^{1/2}.$$

我们由柯西–施瓦茨不等式得出结论。□

5.3. 光滑器的构造。设 R 为一个正整数。设 P_1、……、P_R 为互不相交的有限素数集，并假设它们在 E 中全都分裂。从现在起，我们还假设：当 f_1、f_2 都是尖点形式（第 3.2 节的“对称情形”）时，所有集合 P_j 仅由满足 $\max(|\lambda_{\pi_1}(p)|,|\lambda_{\pi_2}(p)|)\leqslant B$ 的素数 p 组成，其中 B 是稍后选定的适当（固定）常数；而当 $f_2=E_\Psi$（“非对称情形”）时，所有集合 P_j 仅由满足 $|\lambda_{\pi_1}(p)|\leqslant B$ 的素数 p 组成。令 P_j^E 表示 $\mathscr{O}_E$ 中满足 $\mathbf{N}\mathfrak{p}\in P_j$ 的素理想集合。令 I_j^E 表示支撑在 P_j^E 中素理想上的 $\mathscr{O}_E$ 的整数理想。我们记 $I_j=\{\mathbf{N}\mathfrak{n}:\mathfrak{n}\in I_j^E\}$ 为支撑在素数 $p\in P_j$ 上的正整数。我们采用如下记号约定：用 $\mathfrak{n}_j$（分别用 n_j）表示 I_j^E（分别为 I_j）中的任意元素。

对于一个整数理想 $\mathfrak{n} \subset \mathscr{O}_E$，我们令 $\omega(\mathfrak{n})$ 表示定义在素理想幂上的（非完全）乘性函数，其定义为 $\omega(\mathfrak{p}^\alpha) = \alpha!$ 令 $\Omega(\mathfrak{n})$ 表示 $\mathfrak{n}$ 的分解中出现的素理想个数，按重数计。令

$$a_{\pi_1,\pi_2}(p) = \lambda_{\pi_1}(p) - \lambda_{\pi_2}(p). \tag{5.2}$$

记 $\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(n)$ 为在素数处由 $a_{\pi_1,\pi_2}(p)$定义的完全乘性函数，并记$\tilde{a}_\pi(n)$ 为在素数处由 $\lambda_\pi(p)$定义的完全乘性函数。

对于函数 $F\colon I_j^E \to \mathbb{C}$ (例如特征 $\chi(\mathfrak{n})$或归一化的海克特征值$\Lambda_\pi(\mathfrak{n})$ 或 $\Lambda_{it}(\mathfrak{n})$，定义见 (3.4))，我们令

$$\mathcal{P}_j^{(i)}(F) = \sum_{\substack{\mathfrak{n}\in I_j^E \\ \Omega(\mathfrak{n})\leqslant \ell_j}} \frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(\mathrm{N}\mathfrak{n})}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}}} \left(\frac{(-1)^i}{2}\right)^{\Omega(\mathfrak{n})} \frac{1}{\omega(\mathfrak{n})} F(\mathfrak{n}) \tag{5.3}$$

并且，对于参数 $\alpha \in (0,1)$，我们令

$$\mathcal{P}_{j,\alpha}^{(i)}(F) = \sum_{\substack{\mathfrak{n}\in I_j^E \\ \Omega(\mathfrak{n})\leqslant \ell_j}} \frac{\tilde{a}_{\pi}(\mathrm{N}\mathfrak{n})}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}}} ((-1)^i\alpha)^{\Omega(\mathfrak{n})} \frac{1}{\omega(\mathfrak{n})} F(\mathfrak{n}). \tag{5.4}$$

最后，令 $\mathcal{P}^{(i)}(F) = \prod_{j=1}^R \mathcal{P}_j^{(i)}(F)$和 $\mathcal{P}_\alpha^{(i)}(F) = \prod_{j=1}^R \mathcal{P}_j^{(i)}{}_{,\alpha}(F)$。

下述引理应与第 5.1 节中的讨论相比较 .

Le引理 5.2。 对于 Cl_D 的类群特征 χ 以及 $j = 1, \ldots, R$，我们有 *ve*

$$\mathcal{P}_j^{(i)}(\chi) = E_{\ell_j}\big((-1)^i \mathcal{Q}_j(\chi)\big) \quad \textit{and} \quad \mathcal{P}_{j,\alpha}^{(i)}(\chi) = E_{\ell_j}\big((-1)^i \mathcal{Q}_{j,\alpha}(\chi)\big),$$

其中

$$\mathcal{Q}_j(\chi) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p}\in P_j^E} \frac{a_{\pi_1,\pi_2}(\mathrm{N}\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{1/2}} \quad \textit{and} \quad \mathcal{Q}_{j,\alpha}(\chi) = \alpha \sum_{\mathfrak{p}\in P_j^E} \frac{\lambda_{\pi}(\mathrm{N}\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{1/2}}.$$

证明。 注意，狄利克雷多项式 $\mathcal{Q}_j$、 $\mathcal{Q}_{j,\,\alpha}$ 取实值，因为其系数是实数且仅依赖于$\mathrm{N}\mathfrak{p}$。采用上述记号，我们计算

$$\begin{aligned} E_{\ell_j}\Big((-1)^i \mathcal{Q}_j(\chi)\Big) &= E_{\ell_j}\left((-1)^i \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p}\in P_j^E} \frac{a_{\pi_1,\pi_2}(\mathrm{N}\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}}}\right) \\ &= \sum_{f=0}^{\ell_j} \frac{1}{f!} \left(\frac{(-1)^i}{2} \sum_{\mathfrak{p}\in P_j^E} \frac{a_{\pi_1,\pi_2}(\mathrm{N}\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}}}\right)^f \\ &= \sum_{f=0}^{\ell_j} \frac{1}{f!} \left(\frac{(-1)^i}{2}\right)^f \sum_{\substack{\mathfrak{n}\in I_j^E \\ \Omega(\mathfrak{n})=f}} \frac{f!}{\omega(\mathfrak{n})} \frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(\mathrm{N}\mathfrak{n})\chi(\mathfrak{n})}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}}}, \end{aligned}$$

这里我们用到了多项式定理。交换求和顺序即可证明引理的第一个恒等式，第二个恒等式的证明类似。□

5.4. 参数的选择。 令 $c > 0$ 为一个较小的绝对常数。我们假设

$$0 < c \leqslant \min(1/16, (\delta/4A)^2), \tag{5.5}$$

其中 $A \geqslant 1/2$ 大于等于 A 和 $\delta \in (0,\ 1/4]$ 小于等于 δ 在定理3.4中的取值。此外，我们假设

$$(70B^2 \log(c^{-1/2}))^2 \leqslant 1/c^{1/2}. \tag{5.6}$$

我们将作如下参数选择，这些参数取决于 $c > 0$ 以及另一个固定常数 $C_0 > 0$，后者用于排除最初的几个素数。

定义 5.2。 对于 $-D$ 一个较大的基本判别式，我们令

(1) $\{\ell_j\}_{j\geqslant 1}$ 由 $\ell_1 = 2\lfloor 30B^2 \operatorname{loglog} D\rfloor$定义，且 $\ell_{j+1} = 2\lfloor 30B^2 \log \ell_j\rfloor$，其中 $j \geqslant 1$；*(2)* R 为满足 $\ell_R > 1/\sqrt{c}$的最大自然数；*(3)* P_1 为在 E中分裂且位于区间 $[C_0$内的素数集，$D^{1/\ell_1^2}]$, 对于 $2 \leqslant j \leqslant R$，令 P_j 为在 E中分裂且位于区间 $(D^{1/\ell_{j-1}^2}, D^{1/\ell_j^2}]$, 内的素数集，其中在定义$\mathcal{Q}_j$时，我们总是将素数限制为满足 $\max(|\lambda_{\pi_1}(p)|, |\lambda_{\pi_2}(p)|) \leqslant B$，分别在定义 $\mathcal{Q}_j$时，α则满足 $|\lambda_\pi(p)| \leqslant B$。

我们将选取足够大但固定的 $C_0 > B$，使得 π_1，π_2 的所有分歧素数都小于 C_0。

引理 5.3。 令 $\{\ell_j\}_{j\geqslant 1}$ 为定义中给出的正偶整数数列5.2。(1)。

(1) 我们有 $\ell_j > \ell_{j+1}^2$。特别地，对于这样的 ℓ_j，数列 j单调递减；并且当 D 足够大时，定义 R 中的整数 5.2。(2) 是良定义的。*(2)* 我们有 $1/\ell_1 + \cdots + 1/\ell_R < 2\sqrt{c}$。

证明。 第一个断言由（5.6）得出。

由此及定义 5.2.(2)，可得

$$1/\ell_R + \cdots + 1/\ell_1 \leqslant \ell_R^{-1} + \sum_{j=1}^{R-1} \ell_R^{-2j} = \ell_R^{-1}\left(1 + \frac{1 - \ell_R^{-2(R-1)}}{\ell_R - \ell_R^{-1}}\right) < \sqrt{c}\left(1 + \frac{1}{c^{-1/2} - 1}\right).$$

由于 $c \in (0,\ 1/4]$（由假设（5.5）可得），这是$< 2\sqrt{c}$。 □

引理 5.4。 狄利克雷多项式 $\mathcal{P}^{(i)}(\chi)$、$\mathcal{P}_\alpha^{(i)}(\chi)$ 的长度至多为 $D^{2\sqrt{c}}$。

证明。 由引理 5.2和定义 5.2。（3）可知，$\mathcal{P}_j^{(i)}(\chi) = E_{\ell_j}((-1)^i \mathcal{Q}_j(\chi))$的长度至多为 $(D^{1/\ell_j^2})^{\ell_j} = D^{1/\ell_j}$。因此 $\mathcal{P}^{(i)}(\chi)$的长度至多为 $D^{1/\ell_1 + \cdots + 1/\ell_R}$,，根据引理 5.3。（2），其有界于 $D^{2\sqrt{c}}$。对于 $\mathcal{P}_\alpha^{(i)}(\chi)$，结论类似。 □

5.5。 **平滑矩的渐近估计。** 现在我们利用定理3.4对光滑化的一阶矩进行渐近估计

$$M_D(f_i, \mathcal{P}^{(i)}) \quad (i = 1, 2), \quad M_D(f_1, \mathcal{P}_\alpha^{(1)}), \quad M_D(E_\Psi, \mathcal{P}_\alpha^{(2)}),$$

定义于（5.1）中。这样做实际上会将函数 $\chi(\mathfrak{n})$ 替换为归一化海克特征值 $\Lambda_{\pi_i}(\mathfrak{n})$ 或 $\Lambda_{it}(\mathfrak{n})$ 狄利克雷多项式（5.3）-（5.4）中的对应项。

命题 5.1。 存在 $\beta > 0$ 使得

$$M_D(f_i, \mathcal{P}^{(i)}) = \mathcal{P}^{(i)}(\Lambda_{\pi_i}) + O(D^{-\beta}) \qquad (i = 1, 2),$$
$$M_D(f_1, \mathcal{P}_\alpha^{(1)}) = \mathcal{P}_\alpha^{(1)}(\Lambda_\pi) + O(D^{-\beta}),$$
$$M_D(E_\Psi, \mathcal{P}_\alpha^{(2)}) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_\alpha^{(2)}(\Lambda_{it})\Phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} + O(D^{-\beta}),$$

其中 Φ 定义于 (3.5)。

证明。 回忆一下,

$$M_D(f_i, \mathcal{P}^{(i)}) = \sum_{\chi \in \mathrm{Cl}_D^\wedge} |W_{\mathscr{D}_i}(f_i, \chi)|^2 \prod_{j=1}^{R} E_{\ell_j}\big((-1)^i \mathcal{Q}_j(\chi)\big).$$

引理5.2 于是表明

$$M_D(f_i, \mathcal{P}^{(i)}) = \sum_{\substack{\mathfrak{n}_1 \in I_1^E \\ \Omega(\mathfrak{n}_1) \leqslant \ell_1}} \cdots \sum_{\substack{\mathfrak{n}_R \in I_R^E \\ \Omega(\mathfrak{n}_R) \leqslant \ell_R}} \frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(\mathrm{N}\mathfrak{n}_1 \cdots \mathfrak{n}_R)}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}_1 \cdots \mathfrak{n}_R}} \left(\frac{(-1)^i}{2}\right)^{\Omega(\mathfrak{n}_1 \cdots \mathfrak{n}_R)} \frac{P_{\mathscr{D}_i}^{\Delta}(f_i \otimes f_i; \mathfrak{n}_1 \cdots \mathfrak{n}_R)}{\omega(\mathfrak{n}_1) \cdots \omega(\mathfrak{n}_R)}.$$

应用定理 3.4 即可得到主项

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n}_1 \in I_1^E \\ \Omega(\mathfrak{n}_1) \leqslant \ell_1}} \cdots \sum_{\substack{\mathfrak{n}_R \in I_R^E \\ \Omega(\mathfrak{n}_R) \leqslant \ell_R}} \frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(\mathrm{N}\mathfrak{n}_1 \cdots \mathfrak{n}_R)}{\omega(\mathfrak{n}_1) \cdots \omega(\mathfrak{n}_R)\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}_1 \cdots \mathfrak{n}_R}} \left(\frac{(-1)^i}{2}\right)^{\Omega(\mathfrak{n}_1 \cdots \mathfrak{n}_R)} \Lambda_{\pi_i}(\mathfrak{n}_1 \cdots \mathfrak{n}_R)$$

再加上形如以下形式的误差项

$$O\left(D^{-\delta} \sum_{N\mathfrak{n} \leqslant D^{2\sqrt{c}}} N\mathfrak{n}^A\right) = O(D^{-\delta + 2A\sqrt{c}}),$$

这里我们使用了狄利克雷多项式 $\mathcal{P}_i(\chi)$的系数的平凡界，以及推论5.4中狄利克雷多项式长度的界。注意，根据 $(-\delta + 2A\sqrt{c} \leqslant -\delta/2$, 5.5), 指数为 $\mathfrak{n}_{j_1}\mathfrak{n}_{j_1}$ 的主项可因式分解，因为 $\mathfrak{n}_{j_1}\mathfrak{n}_{j_2}$ 和 j_1 对于不同的指标 j_2 互素，因此得到所需的主项。

另外两个公式也可用同样的方法推出。 □

5.6. **短欧拉乘积**。 狄利克雷多项式中素因子个数 Ω 的限制(n)（5.3）-（5.4）使得难以将命题5.1 中的各种公式与定理 3.1中的主控函数进行比较；相比之下，后者是一个短欧拉乘积。

有鉴于此，对于 $i \in \{1, 2\}$, $1 \leqslant j \leqslant R$，我们令

$$\mathcal{E}_j^{(i)} = \sum_{\mathfrak{n}_j \in I_j^E} \frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(\mathrm{N}\mathfrak{n}_j)}{\omega(\mathfrak{n}_j)\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}_j}} \left(\frac{(-1)^i}{2}\right)^{\Omega(\mathfrak{n}_j)} \Lambda_{\pi_i}(\mathfrak{n}_j),$$

and

$$\mathcal{E}_{j,\alpha} = \sum_{\mathfrak{n}_j \in I_j^E} \frac{\tilde{a}_\pi(\mathrm{N}\mathfrak{n}_j)}{\omega(\mathfrak{n}_j)\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}_j}} (-\alpha)^{\Omega(\mathfrak{n}_j)} \Lambda_\pi(\mathfrak{n}_j).$$

此外，我们令 $\mathcal{E}^{(i)}=\prod_{j=1}^{R}\mathcal{E}_j^{(i)}$与$\mathcal{E}_\alpha=\prod_{j=1}^{R}\mathcal{E}_{j,\ \alpha}$。这些扩展和中，关于$\Omega(n)$的条件已被去掉，因而可以更容易地与定理3.1中的主控函数相比较，正如下面的引理所示。

引理 5.5。对于 $1\leqslant j\leqslant R$，我们有

$$\mathcal{E}_j^{(1)}\mathcal{E}_j^{(2)}=\prod_{p\in P_j}\Big(1-\frac{(\lambda_{\pi_2}(p)-\lambda_{\pi_1}(p))^2}{2p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)\Big),$$

$$\mathcal{E}_{j,\alpha}=\prod_{p\in P_j}\Big(1+\frac{(\alpha^2-2\alpha)\lambda_\pi(p)^2}{p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)\Big).$$

其中隐含常数为绝对常数。

证明。将这些和表示为欧拉乘积，我们有 $\mathcal{E}_j^{(1)}\mathcal{E}_j^{(2)}$是

$$\sum_{\mathfrak{n}_j\in I_j^E}\sum_{\mathfrak{m}_j\in I_j^E}\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(\mathrm{N}\mathfrak{n}_j)}{\omega(\mathfrak{n}_j)\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}_j}}\frac{(-1)^{\Omega(\mathfrak{n}_j)}}{2^{\Omega(\mathfrak{n}_j\mathfrak{m}_j)}}\Lambda_{\pi_1}(\mathfrak{n}_j)\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(\mathrm{N}\mathfrak{m}_j)}{\omega(\mathfrak{m}_j)\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{m}_j}}\Lambda_{\pi_2}(\mathfrak{m}_j)$$

$$=\prod_{p\in P_j}\sum_{r_1,s_1,r_2,s_2=0}^{\infty}\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(p^{r_1+s_1+r_2+s_2})\lambda_{\pi_1}^*(p^{|r_1-s_1|})\lambda_{\pi_2}^*(p^{|r_2-s_2|})(-1)^{r_1+s_1}}{p^{\max(r_1,s_1)+\max(r_2,s_2)}2^{r_1+s_1+r_2+s_2}r_1!s_1!r_2!s_2!(1+\delta_{r_1\neq s_1}p^{-1})(1+\delta_{r_2\neq s_2}p^{-1})}.$$

这里，我们将理想 $\mathfrak{n}_j$ 分解为素数幂 $\mathfrak{p}^{r_1}\mathfrak{p}^{s_1}$，类似地，将 $\mathfrak{m}_j$ 分解为素数幂$\mathfrak{p}^{r_2}\mathfrak{p}^{s_2}$。$\max(r_1,\ s_1)+\max(r_2,\ s_2)=1$的贡献为

$$-\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(p)\lambda_{\pi_1}^*(p)}{2p}-\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(p)\lambda_{\pi_1}^*(p)}{2p}+\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(p^2)}{4p}$$
$$+\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(p)\lambda_{\pi_2}^*(p)}{2p}+\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(p)\lambda_{\pi_2}^*(p)}{2p}+\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(p^2)}{4p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)$$
$$=\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(p)(\lambda_{\pi_2}(p)-\lambda_{\pi_1}(p))}{p}+\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(p^2)}{2p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)=-\frac{(\lambda_{\pi_2}(p)-\lambda_{\pi_1}(p))^2}{p}+\frac{\tilde{a}_{\pi_1,\pi_2}(p)^2}{2p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)$$
$$=-\frac{(\lambda_{\pi_2}(p)-\lambda_{\pi_1}(p))^2}{2p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)$$

回顾一下（5.2）。$\max(r_1,\ s_1)+\max(r_2,\ s_2)>1$的贡献可以像上面那样估计为

$$\leqslant\sum_{k+\ell\geqslant 2}\frac{(2B^2)^k}{p^k k!}\frac{(2B^2)^l}{p^l l!}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(4B^2)^m}{p^m m!}\ll\frac{1}{p^2}.$$

这就完成了第一个恒等式的证明。

由同样的论证可得

$$\mathcal{E}_{j,\alpha}=\sum_{\mathfrak{n}_j\in I_j^E}\frac{\tilde{a}_\pi(\mathrm{N}\mathfrak{n}_j)(-\alpha)^{\Omega(\mathfrak{n}_j)}}{\omega(\mathfrak{n}_j)\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}_j}}\Lambda_\pi(\mathfrak{n}_j)=\prod_{p\in P_j}\sum_{r,s}^{\infty}\frac{\tilde{a}_\pi(p^{r+s})(-\alpha)^{r+s}\lambda_\pi^*(p^{|r-s|})}{p^{\max(r,s)}r!s!(1+\delta_{r\neq s}p^{-1})}$$
$$=\prod_{p\in P_j}\Big(1+\frac{(\alpha^2-2\alpha)\lambda_\pi(p)^2}{p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)\Big).\qquad\square$$

5.7. **尾项的估计**。 我们的目标是用引理 5.5 中的短欧拉乘积，替代命题 5.1 渐近表达式主项中出现的短狄利克雷多项式。为此，我们必须估计移除条件 $\Omega(\mathfrak{n}) \leqslant \ell_j$ 时引入的误差。

因此，对于 $i \in \{1,\ 2\}$, $1 \leqslant j \leqslant R$，我们定义尾和

$$\mathcal{T}_j^{(i)} = \mathcal{E}_j^{(i)} - \mathcal{P}^{(i)}(\Lambda_{\pi_i}), \qquad \mathcal{T}_{j,\alpha} = \mathcal{E}_{j,\alpha} - \mathcal{P}_{j,\alpha}^{(1)}(\Lambda_\pi).$$

采用这一记号后，应用柯西–施瓦茨不等式于引理 5.1所得的主项乘积变为

$$\mathcal{P}^{(1)}(\Lambda_{\pi_1})\mathcal{P}^{(2)}(\Lambda_{\pi_2}) = \prod_{j=1}^{R}\big(\mathcal{E}_j^{(1)}\mathcal{E}_j^{(2)} - \mathcal{T}_j^{(1)}\mathcal{E}_j^{(2)} - \mathcal{E}_j^{(1)}\mathcal{T}_j^{(2)} + \mathcal{T}_j^{(1)}\mathcal{T}_j^{(2)}\big),$$

而

$$\mathcal{P}_\alpha^{(1)}(\Lambda_\pi)\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_\alpha^{(2)}(\Lambda_{it})\Phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{R}\big(\mathcal{E}_{j,\alpha} - \mathcal{T}_{j,\alpha}\big)\mathcal{P}_{j,\alpha}^{(2)}(\Lambda_{it})\Phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

为了控制各种交叉项，我们需要以下上界。

引理 5.6。 对于 $i = 1,2$, $1 \leqslant j \leqslant R$, $0 < \alpha < 1$, $t \in \mathbb{R}$ ，有

$$|\mathcal{E}_j^{(i)}|, |\mathcal{E}_{j,\alpha}|, |\mathcal{P}_{j,\alpha}^{(2)}(\Lambda_{it})| \leqslant \exp\Big(\sum_{p\in P_j}\frac{2B^2}{p}\Big),$$

$$|\mathcal{T}_j^{(i)}|, |\mathcal{T}_{j,\alpha}| \leqslant 2^{-\ell_j}\exp\Big(\sum_{p\in P_j}\frac{8B^2}{p}\Big).$$

证明。 根据我们的假设，有 $|\lambda_\pi^*(n)| \leqslant B^{\Omega(n)}$ 和 $|\tilde{a}_{\pi_1,\ \pi_2}(n)| \leqslant (2B)^{\Omega(n)}$，因此

$$|\mathcal{E}_j^{(i)}| \leqslant \sum_{\mathfrak{n}_j\in I_j^E}\frac{(2B)^{\Omega(\mathrm{N}\mathfrak{n}_j)}}{\omega(\mathfrak{n}_j)\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}_j}}\frac{1}{2^{\Omega(\mathfrak{n}_j)}}\frac{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}_j^*}B^{\Omega(\mathfrak{n}_j^*)}}{V(\mathrm{N}\mathfrak{n}_j^*)} \leqslant \prod_{p\in P_j}\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{B^{r+s}B^{|r-s|}}{p^{(r+s)/2}p^{|r-s|/2}r!s!}$$

$$= \prod_{p\in P_j}\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{B^{2\max(r,s)}}{p^{\max(r,s)}r!s!} = \prod_{p\in P_j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2B^2)^k}{p^k k!} = \exp\Big(\sum_{p\in P_j}\frac{2B^2}{p}\Big).$$

用同样的论证，并进一步运用 Rankin 技巧，我们得到

$$|\mathcal{T}_j^{(i)}| \leqslant \sum_{\mathfrak{n}_j\in I_j^E}\frac{(2B)^{\Omega(\mathrm{N}\mathfrak{n}_j)}}{\omega(\mathfrak{n}_j)\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}_j}}\frac{1}{2^{\Omega(\mathfrak{n}_j)}}\frac{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{n}_j^*}B^{\Omega(\mathfrak{n}_j^*)}}{V(\mathrm{N}\mathfrak{n}_j^*)}\frac{2^{\Omega(\mathfrak{n}_j)}}{2^{\ell_j}} \leqslant 2^{-\ell_j}\exp\Big(\sum_{p\in P_j}\frac{8B^2}{p}\Big).$$

同理可得

$$|\mathcal{E}_{j,\alpha}| \leqslant \prod_{p\in P_j}\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(B\alpha)^{r+s}B^{|r-s|}}{p^{(r+s)/2}p^{|r-s|/2}r!s!} \leqslant \prod_{p\in P_j}\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{B^{2\max(r,s)}}{p^{\max(r,s)}r!s!} = \exp\Big(\sum_{p\in P_j}\frac{2B^2}{p}\Big)$$

而通过 Rankin 技巧，同样可以得到 $\mathcal{T}_{j,\ \alpha}$ 的界。对于 $\mathcal{P}_{j}^{(2)}{}_{,\ \alpha}(\Lambda_{it})$的界，我们只需注意到 $|\tau_{it}(N)| \leqslant 2 \leqslant B$，因此证明可以原封不动地照搬。□

$\mathcal{P}_\alpha^{(2)}(\Lambda_{it})$的积分分析略有不同。我们注意到，若没有对 $\mathbb{R}$的积分，下面的引理会带来一个致命的 $\log D$ 幂。正因如此，我们使用不完全艾森斯坦级数 E_Ψ，它包含这一额外积分。

引理 5.7. 我们有

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_\alpha^{(2)}(\Lambda_{it})\Phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \ll \prod_{j=1}^{R}\prod_{p\in P_j}\Big(1+\frac{\alpha^2\lambda_\pi(p)^2}{p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)\Big)$$

前提是 $\alpha<1/4$。

证明. 设 I^E 表示支集在 P_j^E、 $1\leqslant j\leqslant R$之并上的理想。每个理想$\mathfrak{n}\in I^E$ 均可唯一分解为 $\mathfrak{n}=\prod_{j=1}^R\mathfrak{n}_j$ ，其中 $\mathfrak{n}_j\in I_j^E$，并用 ξ 表示理想集合 $\mathfrak{n}\in I^E$ 上的特征函数，其中这些理想对所有 $1\leqslant j\leqslant R$满足 $\Omega(\mathfrak{n}_j)\leqslant\ell_j$ 。再将 $\mathfrak{n}$ 分解为本原部分与由有理整数生成的主理想，于是我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_\alpha^{(2)}(\Lambda_{it})\Phi(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{\substack{\mathfrak{n}\in I^E\\ \mathfrak{n}\text{ primitive}}}\frac{\tilde{a}_\pi(\mathrm{N}\mathfrak{n})\alpha^{\Omega(\mathrm{N}\mathfrak{n})}}{V(\mathrm{N}\mathfrak{n})\omega(\mathfrak{n})}\int_{\mathbb{R}}\tau_{it}^*(\mathrm{N}\mathfrak{n})\Phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{N},(n)\in I^E}\frac{\tilde{a}_\pi(n)^2\alpha^{\Omega(2n)}}{V(n)\omega((n))}\xi(\mathfrak{n}(n))\\ &\ll \sum_{\substack{\mathfrak{n}\in I^E\\ \mathfrak{n}\text{ primitive}}}\frac{|\tilde{a}_\pi(\mathrm{N}\mathfrak{n})|\alpha^{\Omega(\mathrm{N}\mathfrak{n})}}{(\mathrm{N}\mathfrak{n})\omega(\mathfrak{n})}\Big|\int_{\mathbb{R}}\tau_{it}^*(\mathrm{N}\mathfrak{n})\Phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\Big|\sum_{n\in\mathbb{N},(n)\in I^E}\frac{\tilde{a}_\pi(n)^2\alpha^{\Omega(2n)}}{n\omega((n))}.\end{aligned}$$

我们对此作相当粗略的估计。对 n 的求和有上界

$$\prod_{j=1}^{R}\prod_{p\in P_j}\Big(1+\frac{\alpha^2\lambda_\pi(p)^2}{p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)\Big).$$

为估计对理想的求和 $\mathfrak{n}$，我们写成 $N=\mathrm{N}\mathfrak{n}$ ，并注意到至多有$2^{\omega(N)}\leqslant 2^{\Omega(N)}$ 个范数为 N的本原理想。我们回顾（3.3）。最后，我们将对 t的积分用傅里叶变换 $\check{\Phi}$表示，后者是 Φ的变换，且满足界 $\check{\Phi}(x)\ll_A(1+|x|)^{-10}$，此界来自分部积分。（事实上，我们有 $\check{\Phi}(x)\ll e^{-2\pi|x|}$ ，因为 Φ 是整函数，因而我们可以移动积分路径。我们并不需要这一更强的界。）我们得到上界

$$\sideset{}{^*}\sum_{a,b,d}\frac{|\tilde{a}_\pi(abd^2)|(2\alpha)^{\Omega(abd^2)}}{abd^3}\Big|\check{\Phi}\Big(\frac{1}{2\pi}\log\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big)\Big|\cdot\prod_{j=1}^{R}\prod_{p\in P_j}\Big(1+\frac{\alpha^2\lambda_\pi(p)^2}{p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)\Big),$$

其中星号表示我们对由素数$p>C_0>B$ 组成的数 a， b 求和，使得 $|\tilde{a}_\pi(p)|\leqslant B$ （我们略去素数必须分裂这一事实）。回想 $\tilde{a}_\pi$ 与 $(2\alpha)^\Omega$ 是完全积性的。特别地，我们可以立即略去对 d的求和。现在我们集中考虑对 a， b的求和。特别地，我们稍后将看到，至少当 α 充分小时，该和收敛。这将完成证明。

让我们暂时固定 a ，然后选取 $z \geqslant 2/a$,

$$\sum_{\frac{1}{2}az\leqslant b\leqslant az}^{*} \frac{|\tilde{a}_\pi(b)|(2\alpha)^{\Omega(b)}}{b}\Big|\check{\Phi}\Big(\frac{1}{2\pi}\log\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big)\Big| \ll \frac{1}{az(1+|\log z|)^{10}}\sum_{b\ll az}^{*}|\tilde{a}_\pi(b)|(2\alpha)^{\Omega(b)}$$

$$\ll \frac{1}{az(1+|\log z|)^{10}}\frac{az}{\log az}\prod_{\substack{C_0\leqslant p\ll az\\ |\lambda_\pi(p)|\leqslant B}}\Big(1+\frac{|\lambda_\pi(p)|(2\alpha)}{p}\Big)$$

根据 Wirsing 的一个结果 [Wir，命题 1]。（该结果要求 $|\lambda_\pi(p)|(2\alpha)<2$ 作为假设，以确保 $\sum_k(|\lambda_\pi(p)|(2\alpha))^k p^{-k}$ 对每个 p都收敛。由于我们排除了较小的素数，只需假设 $|\lambda_\pi(p)|(2\alpha)<C_0$ ，这由条件 $|\lambda_\pi(p)|\leqslant B<C_0$和 $0<\alpha<1/2$保证。）

由柯西–施瓦茨不等式和兰金–塞尔伯格公式，我们有

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{|\lambda_\pi(p)|}{p}\leqslant \log\log x+O(1),$$

从而

$$\sum_{\frac{1}{2}az\leqslant b\leqslant az}^{*} \frac{|\tilde{a}_\pi(b)|(2\alpha)^{\Omega(b)}}{b}\Big|\check{\Phi}\Big(\frac{1}{2\pi}\log\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big)\Big| \ll \frac{(\log az)^{2\alpha-1}}{(1+|\log z|)^{10}}.$$

对 z 的二进范围求和，并将其代入剩余的 a 求和中，得到

$$\sum_{a}^{*}\frac{|\tilde{a}_\pi(a)|(2\alpha)^{\Omega(a)}}{a}(\log a)^{2\alpha-1}.$$

我们将该和拆分为二进范围，并再次应用 Wirsing 定理，从而得到上述量有界于

$$\sum_{A=2^k}\Big((\log A)^{2\alpha-1}\Big)^2\ll 1$$

只要 $\alpha<1/4$ 成立即可。这就完成了证明。 □

5.8. **定理 3.1 的证明结束**。 我们断言

$$\prod_{i=1,2}\big(\mathcal{P}^{(i)}(\Lambda_{\pi_i})+O(D^{-\beta})\big)\ll\exp\Big(-\frac{1}{2}S_D(\pi_1,\pi_2)\Big), \tag{5.7}$$

and

$$\big(\mathcal{P}^{(1)}_\alpha(\Lambda_\pi)+O(D^{-\beta})\big)\Big(\int_{\mathbb{R}}\mathcal{P}^{(2)}_\alpha(\Lambda_{it})\Phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}+O(D^{-\beta})\Big)\ll\exp\Big(-2(\alpha-\alpha^2)T_D(\pi)\Big) \tag{5.8}$$

只要 $\alpha<1/4$。根据推论 5.1和命题 5.1，这就足以得出定理 3.1 的证明。

我们注意到

$$\exp\Big(\sum_{p\in P_j}\frac{1}{p}\Big)\leqslant\exp\big(\log\log D^{1/\ell_j^2}-\log\log D^{1/\ell_{j-1}^2}+O(1)\big)$$

$$\ll\exp\big(2(\log\ell_{j-1}-\log\ell_j)\big)=\exp\big(2(\tfrac{1}{60B^2}\ell_j+O(1)-\log\ell_j)\big)\ll\exp\big(\tfrac{1}{30B^2}\ell_j\big)$$

对 $j>1$，且最终的界对 $j=1$ 仍然成立。

由引理 5.6我们得出 $|\mathcal{T}_j^{(1)}\mathcal{E}_j^{(2)}|+|\mathcal{E}_j^{(1)}\mathcal{T}_j^{(2)}|+|\mathcal{T}_j^{(1)}\mathcal{T}_j^{(2)}|$有界于

$$3\cdot 2^{-\ell_j}\exp\Big(\sum_{p\in P_j}\frac{16B^2}{p}\Big)\ll 2^{-\ell_j}\exp\Big(\frac{16}{30}\ell_j\Big)=\exp\Big(\Big(\frac{16}{30}-\log 2\Big)\ell_j\Big),$$

从而

$$\mathcal{E}_j^{(1)}\mathcal{E}_j^{(2)}\gg\exp\Big(-\frac{1}{4}\ell_j\Big)\big(|\mathcal{T}_j^{(1)}\mathcal{E}_j^{(2)}|+|\mathcal{E}_j^{(1)}\mathcal{T}_j^{(2)}|+|\mathcal{T}_j^{(1)}\mathcal{T}_j^{(2)}|\big).$$

对所有 $j=1,\ldots\ldots,\ R$取乘积，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{(1)}(\Lambda_{\pi_1})\mathcal{P}^{(2)}(\Lambda_{\pi_2})&\geqslant\mathcal{E}^{(1)}\mathcal{E}^{(2)}\Big(1-O\big(\exp(-\tfrac{1}{8}\ell_j)\big)\Big)\gg\mathcal{E}^{(1)}\mathcal{E}^{(2)}\\&\gg\exp\Big(-\sum_{j=1}^{R}\sum_{p\in P_j}\frac{(\lambda_{\pi_2}(p)-\lambda_{\pi_1}(p))^2}{2p}\Big).\end{aligned}$$

由类似的推理，对于单个值 $i=1,\ 2$，我们有

$$\mathcal{P}^{(i)}(\Lambda_{\pi_i})=\prod_{j=1}^{R}(\mathcal{E}_j^{(i)}-\mathcal{T}_j^{(i)})\ll\prod_{j=1}^{R}\exp\Big(\sum_{p\in P_j}\frac{8B^2}{p}\Big)(1+2^{-\ell_j})=(\log D)^{O(1)}$$

从而 误差项 $O(D^{-\beta})$ 可忽略。这就完成了（5.7）的证明。

用同样的方法，我们得到

$$\mathcal{P}_\alpha^{(1)}(\Lambda_\pi)\ll\exp\big((\alpha^2-2\alpha)T_D(\pi)\big),$$

与引理 5.7 一同证明了（5.8），与之前相同。

6. Proof of Theorem 3.1 : the off-speed case

本节旨在证明定理 3.1的第（2）部分，即证明以下界

$$P^{\Delta_2}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes f_2)\ll(1+T_D(\pi_1))^{-1/2}\tag{6.1}$$

在$\mathbf{G}_1$ 为各向异性的假设下。在 $T_D(\pi_1)$ 的定义中，我们取了$B=\infty$，因此自动满足对海克特征值 $|\lambda_{\pi_1}(p)|\leqslant B$ 的限制。

本节讨论的非对角（或 $\nu=2$）情形，需要采用不同于第 5节所述的方法。事实上，直接应用该方法会得到如下形式的求和

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge}|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2\chi(\mathfrak{n}).$$

但除非 $\mathfrak{n}^*$ 是一个平方，否则 [BBK] 在处理此类均值时需要广义黎曼猜想。为说明这一点，为简单起见，假设 $|\mathrm{Cl}_D[2]|=1$。问题在于，即使 $[\mathfrak{n}^*]$ 由一个范数足够小的理想极小表示，从而可以应用定理 3.4 ，对于 $[\mathfrak{n}^*]$ 在 $\mathbf{Cl}_D$中的平方根类，也未必如此。为绕过这一问题，我们采用一种对称性较弱的论证，不预设 $\mathbf{B}_1\simeq\mathbf{B}_2$ ，而更适合检测不同的特征频率 χ和 χ^2。该论证仅依赖于定理 3.4的无条件渐近公式。

在这种情况下，另一个复杂之处在于，第二分量 $\{[\mathfrak{a}]^2.[x_2]:[\mathfrak{a}]\in\mathbf{Cl}_D\}$ 的像落在单个平方陪集中。事实上，根据高斯属理论，该像仅覆盖海格纳包中约 $2^{-\omega(D)}$ 的部分，而这

可能小至 $\exp(-\log D/\log\log D)$。我们解决这一问题，并非像 [BB定理 2], 那样假设类群的 2-挠元平凡，而是通过对二次类群特征 ψ额外取平均，从而得到扭曲周期（3.2）。（在第 $\nu=1$ 5 节讨论的 情形中，仅用到了 $\psi=1$。）这一论证将在第 6.3节中展开；事实上，该论证所需的信息不超过 $2^{\omega(D)}=D^{o(1)}$.

6.1. **启发式**。本节将以启发式的形式阐述我们的论证；严谨证明将在第 6.3 节给出。为简单起见，我们假设 $|\mathrm{Cl}_D[2]|=1$。

回顾（3.1）中的表达式

$$P^{\Delta_2}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes f_2)=\sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge} W_{\mathscr{D}_1}(f_1;\chi^2)W_{\mathscr{D}_2}(f_2;\overline{\chi}).$$

直接应用柯西–施瓦茨不等式，并结合渐近公式

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge}|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2 \underset{|\mathrm{Cl}_D[2]|=1}{=} \sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge}|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi)|^2=1+O(D^{-\delta}),\\ \sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge}|W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi)|^2=1+O(D^{-\delta}),\end{aligned}\tag{6.2}$$

定理 3.4 （取 $\psi=1$ 和 $\mathfrak{n}=\mathscr{O}_E$）将给出上界 $O(1)$。

为改进这个界，我们需要利用两个因子中涉及的不同特征频率——χ^2 和 χ——。与第 5.1节中插入平滑因子的做法不同，我们证明（6.1）的策略是：先对（6.2）中均值所对应的两组特征给出便于处理的描述，再证明这两组特征的重叠很少。这两个步骤都将充分利用定理 3.4。然后，我们便能根据这些信息来条件化使用柯西–施瓦茨不等式，从而减少损失。

我们采用概率观点，并在 $\mathrm{Cl}_D^\wedge$ 上定义如下加权测度：

$$\mathrm{d}m_1: A\mapsto\sum_{\chi\in A}|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2.$$

由于根据（6.2），总质量为 $\mathrm{d}m_1(\mathrm{Cl}_D^\wedge)=1+O(D^{-\delta})$，我们在启发式论证中可以忽略归一化，并将 $\mathrm{d}m_1$ 视为概率测度。接着考虑以下和式

$$\mathcal{Q}(\chi)=\sum_{\substack{C_0\leqslant p\leqslant D^c\\ p=\mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}\ \text{split}}}\frac{\lambda_{\pi_1}(p)\big(\chi(\mathfrak{p})+\overline{\chi}(\mathfrak{p})\big)}{p^{1/2}},\tag{6.3}$$

对于适当的常数 c，$C_0>0$。Waldspurger公式与 [BB 的近似论证和引理 6] 共同推出 $D^{-1/2}e^{\mathcal{Q}(\chi^2)}$ 应当近似于 $|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\ \chi^2)|^2$，但对我们的目的而言，只需考虑 $\mathcal{Q}(\chi^2)$本身。将 $\mathcal{Q}(\chi^2)$视为 $\mathrm{Cl}_D^\wedge$ 上的随机变量，我们定义它相对于 $\mathrm{d}m_1$ 的均值和方差如下

$$\mu=\sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge}|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2\mathcal{Q}(\chi^2)\qquad\text{and}\qquad\sigma^2=\sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge}|W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2(\mathcal{Q}(\chi^2)-\mu)^2.$$

在引理 6.1 中，我们证明 $\mu=2T_D(\pi_1)+O(1)$ 和 $\sigma^2=O(T_D(\pi_1))$。这促使我们定义以下子集，它应当承载加权测度 $\mathrm{d}m_1$:

$$\mathcal{X}=\Big\{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge:\ |\mathcal{Q}(\chi^2)-2T_D(\pi_1)|\leqslant\tfrac{1}{10}T_D(\pi_1)\Big\}.\tag{6.4}$$

由于窗口的大小为 $T_D(\pi_1)$，而不是 $\sigma = O(T_D(\pi_1)^{1/2})$, ，测度 $\mathrm{d}m_1$ 在 $\mathcal{X}$之外的质量应该可以忽略。事实上，应用切比雪夫不等式可得

$$\sum_{\chi \notin \mathcal{X}} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1, \chi^2)|^2 \ll \frac{\sigma^2}{T_D(\pi_1)^2} \asymp T_D(\pi_1)^{-1}.$$

我们称 $\mathcal{X}$ 为$\boldsymbol{\mathrm{d}m_1}$-典型特征。

另一方面，我们也可以根据第二因子 $|W_{\mathscr{D}_2}(f_2, \chi)|^2$ 的权重，在 $\mathrm{Cl}_D^\wedge$ 上定义测度 $\mathrm{d}m_2$。我们希望说，$\mathrm{d}m_1$ 与 $\mathrm{d}m_2$ 在统计意义上互不相交，即 $\mathrm{d}m_2$ 在 $\mathcal{X}$ 上的质量应当可以忽略。现在，对所有 $\chi \in \mathcal{X}$，都有 $\mathcal{Q}(\chi^2)^2 \gg T_D(\pi_1)^2$。因此，根据马尔可夫不等式，

$$\mathrm{d}m_2(\mathcal{X}) = \sum_{\chi \in \mathcal{X}} |W_{\mathscr{D}_2}(f_2, \chi)|^2 \ll \frac{1}{T_D(\pi_1)^2} \sum_{\chi \in \mathrm{Cl}_D^\wedge} |W_{\mathscr{D}_2}(f_2, \chi)|^2 \mathcal{Q}(\chi^2)^2.$$

引理6.2 将最后一个量界定为 $O(T_D(\pi_1)^{-1})$。

根据 $\chi \notin \mathcal{X}$ 或 $\chi \in \mathcal{X}$ 的不同情况，以两种不同方式应用柯西–施瓦茨不等式，得到（6.1）。该论证的关键在于利用 χ 与 χ^2之间的不匹配，因此无法判断 $f_1 = f_2$。虽然这使得该论证不适用于 $\nu = 1$ 情形，但正如备注 2.4 中所提到的，它允许在 $\nu = 2$ 情形下使用自乘积。

6.2. **一些矩**。 我们沿用第 6.1 节的记号。特别地，我们保留 $\mathcal{W}(\chi)$ 在（6.3）中的定义。本节中的估计用第 $T_D(\pi_1)$ 节中的量 3.2 表示。当然，这些估计只有在 $T_D(\pi_1)$ 足够大时才有意义；而其是否足够大是另一个问题，将在推论 3.10 中讨论。

下面的矩可以帮助我们识别哪些特征 χ 导致了 $|W_{\mathscr{D}_1}(f_1, \chi)|^2$ 的大值。

引理 6.1. 我们有

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Cl}_D^\wedge} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1, \chi)|^2 \mathcal{Q}(\chi) = 2T_D(\pi_1) + O(1),$$
$$\sum_{\chi \in \mathrm{Cl}_D^\wedge} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1, \chi)|^2 \mathcal{Q}(\chi)^2 = 4T_D(\pi_1)^2 + O(1 + T_D(\pi_1)).$$

证明。 这两个结论都是定理 3.4 的直接推论。事实上，我们可以交换求和顺序，并应用定理 3.4 ，取 $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$，$\mathfrak{p}$，得到

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Cl}_D^\wedge} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1, \chi)|^2 \mathcal{Q}(\chi) = \sum_{\substack{C_0 \leqslant p \leqslant D^c \\ p \text{ split}}} \frac{2\lambda_{\pi_1}(p)^2}{p+1} + O(1),$$

由此得到第一个结论。类似地，我们可以应用定理 3.4，取 $\mathfrak{n}=\mathfrak{pq},\ \mathfrak{pq},\ \mathfrak{pq},\ \overline{\mathfrak{pq}}$ 得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi\in \mathrm{Cl}_D^{\wedge}} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi)|^2\mathcal{Q}(\chi)^2\\
&=\sum_{\substack{C_0\leqslant p\neq q\leqslant D^c\\ p,q \text{ split}}} \frac{4\lambda_{\pi_1}(pq)^2}{(p+1)(q+1)}+\sum_{\substack{C_0\leqslant p\leqslant D^c\\ p \text{ split}}} 2\lambda_{\pi_i}(p)^2\Big(\frac{\lambda_{\pi_1}(p^2)}{(p+1)\sqrt{p}}+\frac{1}{p}\Big)+O(1)\\
&=\sum_{\substack{C_0\leqslant p,q\leqslant D^c\\ p,q, \text{ split}}} \frac{4\lambda_{\pi_1}(p)^2\lambda_{\pi_1}(q)^2}{pq}+O(1+T_D(\pi_1)),
\end{aligned}$$

此即所欲证。 □

下一个矩刻画了如下对象的统计独立性：$|W_{\mathscr{D}_1}(f_1、\ \chi^2)|^2$ 与 $|W_{\mathscr{D}_2}(f_2、\ \chi)|^2$。我们注意到，该上界与引理6.1中第二个渐近式的误差项相当。

引理 6.2. 当 f_2 为尖点或 $f_2=E_\Psi$ 时，我们有

$$\sum_{\chi\in \mathrm{Cl}_D^{\wedge}} |W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi)|^2\mathcal{Q}_1(\chi^2)^2\ll 1+T_D(\pi_1).$$

证明。 若 f_2 为尖点，则定理3.4给出

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi\in \mathrm{Cl}_D^{\wedge}} |W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi)|^2\mathcal{Q}_1(\chi^2)^2\\
&=\sum_{\substack{C_0\leqslant p\neq q\leqslant D^c\\ p,q \text{ split}}} \frac{4\lambda_{\pi_1}(pq)\lambda_{\pi_2}(p^2q^2)}{\sqrt{pq}(p+1)(q+1)}+\sum_{\substack{C_0\leqslant p\leqslant D^c\\ p \text{ split}}} 2\lambda_{\pi_1}(p)^2\Big(\frac{\lambda_{\pi_2}(p^4)}{p^2(p+1)}+\frac{1}{p}\Big)+O(1)\\
&\ll 1+T_D(\pi_1),
\end{aligned}$$

并且，以$|W_{\mathscr{D}_2}(E_\Psi、\ \chi)|^2$ 代替$|W_{\mathscr{D}_2}(f_2、\ \chi)|^2$时，同样的论证仍然成立。 □

6.3. **柯西–施瓦茨不等式的两种不同情形。** 现在我们已具备证明（6.1）所需的要素。注意，我们可以并且将会假设 $T_D(\pi_1)>1$，因为若$T_D(\pi_1)\leqslant 1$，则该界可由柯西–施瓦茨不等式与定理3.4 在取 $\mathfrak{n}=\mathscr{O}_E$时平凡地得出。

为了克服 $\chi\mapsto\chi^2$ 的非双射性，我们对二次特征取平均，得到

$$\begin{aligned}
P^{\Delta_2}_{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}(f_1\otimes f_2)&=\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D[2]|}\sum_{\substack{\psi\in \mathrm{Cl}_D^{\wedge}\\ \psi^2=1}}\sum_{\chi\in \mathrm{Cl}_D^{\wedge}} W_{\mathscr{D}_1}(f_1,(\chi\psi)^2)\overline{W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi\psi)}\\
&=\sum_{\chi\in \mathrm{Cl}_D^{\wedge}} W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D[2]|}\sum_{\substack{\psi\in \mathrm{Cl}_D^{\wedge}\\ \psi^2=1}}\overline{W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi\psi)}.
\end{aligned}\tag{6.5}$$

我们定义 $\mathcal{X}$ 如（6.4）中所示。记 $P_{\mathcal{X}}$ 为（6.5）中来自 $\mathcal{X}$ 的那些特征$P_{\mathcal{X}^c}$为（6.5）中不属于 $\mathcal{X}$ 的那些特征所作的贡献。仿照

第6.1节的启发式论证，我们将证明

$$P_{\mathcal{X}^c} \ll T_D(\pi_1)^{-1/2}, \quad P_{\mathcal{X}} \ll T_D(\pi_1)^{-1/2} \cdot (1 + |\mathrm{Cl}_D[2]|^{1/2} \cdot D^{c-\delta/2}).$$

其中 c 如 $T_D(\pi_1)$ 和 δ 如定理 3.4中定义。利用 $|\mathrm{Cl}_D[2]| \ll_\varepsilon D^\varepsilon$ 并取 c 充分小，这就完成了证明。

由柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$|P_{\mathcal{X}^c}|^2 \leqslant \Big(\sum_{\chi\notin\mathcal{X}} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2\Big)\Big(\sum_{\chi\notin\mathcal{X}} \Big|\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D[2]|}\sum_{\substack{\psi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge\\ \psi^2=1}} W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi\psi)\Big|^2\Big).$$

对于第一因子，我们对 $|\mathcal{Q}(\chi^2)-2T_D(\pi_1)|^2 \gg T_D(\pi_1)^2$ 使用 $\chi\notin\mathcal{X}$，得到

$$\sum_{\chi\notin\mathcal{X}} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2 \ll \sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2 \frac{|\mathcal{Q}(\chi^2)-2T_D(\pi_1)|^2}{T_D(\pi_1)^2}.$$

通过换元并利用正性，最后一个量等于

$$\begin{aligned}|\mathrm{Cl}_D[2]| &\sum_{\chi\in(\mathrm{Cl}_D^\wedge)^2} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi)|^2 \frac{|\mathcal{Q}(\chi)-2T_D(\pi_1)|^2}{T_D(\pi_1)^2}\\ &\leqslant |\mathrm{Cl}_D[2]| \sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi)|^2 \frac{|\mathcal{Q}(\chi)-2T_D(\pi_1)|^2}{T_D(\pi_1)^2} \ll \frac{|\mathrm{Cl}_D[2]|}{T_D(\pi_1)}\end{aligned}$$

其中最后一个界由引理 6.1得出。 $|\mathrm{Cl}_D[2]|$ 的存在可能会带来问题，但由于额外的 ψ-平均值，这将在第二因子中得到补偿。事实上，对于第二因子，利用正性将求和扩展到所有 $\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge$，并展开平方可得

$$\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D[2]|^2}\sum_{\substack{\psi_1,\psi_2\in\mathrm{Cl}_D^\wedge\\ \psi_1^2=\psi_2^2=1}} P_{\mathscr{D}_2}(f_2\otimes f_2;\mathscr{O}_E;\psi_1\psi_2^{-1}).$$

由定理 3.4 可将其界定为 $|\mathrm{Cl}_D[2]|^{-1}+O(D^{-\delta}) \ll |\mathrm{Cl}_D[2]|^{-1}$，正如所需。另一方面，由柯西–施瓦茨不等式

$$|P_{\mathcal{X}}|^2 \leqslant \Big(\sum_{\chi\in\mathcal{X}} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2\Big)\Big(\sum_{\chi\in\mathcal{X}} \Big|\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D[2]|}\sum_{\substack{\psi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge\\ \psi^2=1}} W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi\psi)\Big|^2\Big).$$

对于第一个因子，由于正性，我们将范围扩展到所有 $\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge$，作变量替换后，再次利用正性，得到

$$\sum_{\chi\in\mathcal{X}} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2 \leqslant \sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi^2)|^2 \leqslant |\mathrm{Cl}_D[2]| \sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge} |W_{\mathscr{D}_1}(f_1,\chi)|^2.$$

定理的尖点情形 3.4 随之适用，其中取 $\mathfrak{n}=\mathscr{O}_E$，并得到界$\ll |\mathrm{Cl}_D[2]|$。再一次，因子 $|\mathrm{Cl}_D[2]|$ 可能带来问题，但将由第二因子加以补偿，这得益于额外的 ψ-平均。事实上，对于第二

因子，我们使用 $\mathcal{Q}(\chi^2) \gg T_D(\pi_1)$ 于 $\chi \in \mathcal{X}$，从而

$$\sum_{\chi\in\mathcal{X}} \Big|\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D[2]|}\sum_{\substack{\psi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge\\ \psi^2=1}} W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi\psi)\Big|^2 \ll \sum_{\chi\in\mathcal{X}}\frac{\mathcal{Q}(\chi^2)^2}{T_D(\pi_1)^2}\Big|\frac{1}{|\mathrm{Cl}_D[2]|}\sum_{\substack{\psi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge\\ \psi^2=1}} W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi\psi)\Big|^2$$
$$= \frac{1}{|\mathrm{Cl}_D[2]|^2}\sum_{\substack{\psi_1,\psi_2\in\mathrm{Cl}_D^\wedge\\ \psi_1^2=\psi_2^2=1}}\sum_{\chi\in\mathrm{Cl}_D^\wedge} W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi\psi_1)\overline{W_{\mathscr{D}_2}(f_2,\chi\psi_2)}\frac{\mathcal{Q}(\chi^2)^2}{T_D(\pi_1)^2}.$$

我们可以使用引理 6.2 来界定 $\psi_1=\psi_2$ 的贡献，其上界为 $\ll (T_D(\pi_1)|\mathrm{Cl}_D[2]|)^{-1}$。对于贡献 $\psi_1\neq\psi_2$，我们展开 $\mathcal{Q}(\chi^2)$ 得到

$$\mathcal{Q}(\chi^2)^2 = \sum_{\substack{C_0\leqslant p_1,p_2\leqslant D^c\\ p_1=\mathfrak{p}_1\bar{\mathfrak{p}}_1 \text{ split}\\ p_2=\mathfrak{p}_2\bar{\mathfrak{p}}_2 \text{ split}}} \frac{\lambda_{\pi_1}(p_1)\lambda_{\pi_1}(p_2)(\chi(\mathfrak{p}_1^2)+\bar\chi(\mathfrak{p}_1^2))(\chi(\mathfrak{p}_2^2)+\bar\chi(\mathfrak{p}_2^2))}{p_1^{1/2}p_2^{1/2}}$$

并逐项应用定理 3.4，其中 $\mathfrak{n}=\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2^2$（从而 $[\mathfrak{n}^*]=[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]^2$ 是一个平方类；见本节开头的说明）或某些伽罗瓦共轭，从而证明该贡献被 $T_D(\pi_1)^{-2}D^{2c-\delta}$所界定，正如所需。

7. Distribution of Hecke eigenvalues

本节证明定理 3.7，关键使用对称 k 次幂提升的自守性和尖点条件，这些提升来自 $\mathbf{GL}_2$,，对于 $k=2$、3、4，分别由 [GJ、KS1、KS2]给出。我们在第 7.2 节回顾这些信息。证明还使用了多项式的精细构造（根据定理 3.7中的两种情形，分别涉及二元和一元多项式），这些多项式满足次数限制和某些正性要求。我们将在第 7.3 节完成这一构造。

7.1. 热身。 下面简要说明这两个要素（低阶对称幂提升以及海克特征值的多项式表达式）的用法，但不追求最优结果。

设 π_1，π_2 是 $\mathbf{PGL}_2/\mathbb{Q}$, 的尖点表示，满足定理 3.7第（1）部分的条件。对足够小的 $\varepsilon>0$，令 $S=\{p\leqslant X:\ \ |\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p)|\geqslant\varepsilon\}$ 并考虑和式

$$\sum_{p\in S}\frac{(\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p))^2}{p}. \tag{7.1}$$

利用赫克关系以及已知的解析性质

$$\zeta(s),\quad L(s,\pi_1\times\pi_2),\quad\text{and}\quad L(s,\mathrm{sym}^2\pi_i), \tag{7.2}$$

我们可以证明（7.1）渐近等于 $(2+O(\varepsilon^2))\sum_{p\leqslant X}p^{-1}$。另一方面，根据柯西–施瓦茨不等式，可将（7.1）估计为

$$\left(\sum_{p\leqslant X}\frac{(\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p))^4}{p}\right)^{1/2}\left(\sum_{p\in S}p^{-1}\right)^{1/2}. \tag{7.3}$$

和之前一样，赫克关系以及.....的解析性质

$$\zeta(s),\quad L(s,\mathrm{sym}^2\pi_i),\quad L(s,\pi_i\times\pi_j),\quad L(s,\mathrm{sym}^2\pi_i\times\mathrm{sym}^2\pi_j),\quad\text{and}\quad L(s,\pi_i\times\mathrm{sym}^3\pi_j) \tag{7.4}$$

意味着 (7.3) 与 $\left(10\sum_{p\leqslant X}p^{-1}\right)^{1/2}\left(\sum_{p\in S}p^{-1}\right)^{1/2}$渐近相等。综合这些界可证明， S的狄利克雷密度下界为 $2/5+O(\varepsilon^2)$ 。

请注意，上述论证仅使用了（7.2）和（7.4）中包含的信息，并未利用目前可获得的全部自守信息；这些信息得益于 Kim 和 Shahidi 的奠基性工作 [KS1，KS2]。事实上，他们的工作确立了 $L(s、\mathrm{sym}^k\pi_i)$ 对所有 $k\leqslant 8$ 都具有良好的解析性质；此外， $L(s，\mathrm{sym}^{k_1}\pi_i\times\mathrm{sym}^{k_2}\pi_j)$ 对所有 $k_1，k_2\leqslant 4$ 也具有良好的解析性质。正因如此，上述论证不足以识别注记 3.8 中的例子。（该例达到了 2/5 下界，但不满足定理 3.7 陈述中的所有条件。）另一方面，将同样的论证应用于如下形式的和

$$\sum_{p\in S}\frac{(\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p))^2(3+\lambda_{\pi_1}(p)\lambda_{\pi_2}(p))}{p},$$

例如，用它代替（7.1），可得到一个狄利克雷密度下界，其大小为 $4/7>1/2$, 前提是我们假设 $L(s、\mathrm{sym}^6\pi_i\times\mathrm{sym}^2\pi_j)$ 以及 $L(s、\mathrm{sym}^5\pi_i\times\mathrm{sym}^3\pi_j)$ 的猜想性质成立。

于是问题在于，有效利用 Kim 与 Shahidi 的工作所提供的全部自守信息，是否足以突破 1/2 障碍。我们的定理 3.7 给出了肯定的回答，尽管只是勉强做到！

7.2. **对称幂的尖点性**。 定理3.7 预设了前几个对称幂提升在尖点性与互异性方面的某些条件。这些条件适用于我们的情形，可由下述引理得出。

引理 7.1.

(1) 设 $\sigma\subset L^2([G(\mathbb{A})])$ 具有第 *2.3* 节所定义的近乎极大层不变量 $\sigma^K\neq 0$。设 $\pi=JL(\sigma)$ 为其到 $PGL_2/\mathbb{Q}$ 的 *Jacquet–Langlands* 提升。则对 $2\leqslant k\leqslant 4$，$sym^k\pi$是尖点的。*(2)* 对 $i=1、2$，设 $\pi_i=JL(\sigma_i)$ 如第 *(1)* 部分，其中 $G_1\not\simeq G_2$。则对 $1\leqslant k\leqslant 4$，$sym^k\pi_1\not\simeq sym^k\pi_2$。

证明。设 $\pi\simeq\otimes'_v\pi_v$ 如第（1）部分所述。注意，对于 $p\in\mathrm{Ram}(\mathbf{B})$ ，局部分量$\pi_p=\mathrm{JL}(\sigma_p)$ 是 $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$的扭曲 Steinberg 表示。事实上，在这些地方， K_p 是紧群 $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$的指数为 2 的子群，因此 $p\in\mathrm{Ram}(\mathbf{B})$ 处的几乎最大层不变性意味着 σ_p 是 $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$的一个特征（平凡或二次）。在 Jacquet–Langlands 对应下，特征映到扭曲 Steinberg 表示。

另一方面，根据 [KS2], 的工作， π 满足所有 $\mathbf{symGL}_2/\mathbb{Q}$ 条件的尖点自守表示$^k\pi$, 对所有 $k=2，3，4$ 均为尖点，当且仅当它们不对应于可解多面体型阿廷表示。因此，只需注意到自守阿廷表示不可能以扭曲 Steinberg 表示作为局部分量。

为说明后一项断言，我们根据局部朗兰兹对应进行论证 [BuHe], 根据该对应，$\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$的光滑不可约复表示对应于魏尔群 W_p的半单二维魏尔–德利涅表示。后者由一对 (ρ,N)给出，其中 ρ是 W_p的一个表示，而 N是满足某个相容条件的幂零端同态。重要的是，在这一对应中，斯坦伯格表示及其扭曲恰好是那些 $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$表示，其对应的魏尔–德利涅表示具有非平凡的 N。

¯现在，给定一个（整体的）二维阿廷表示 $r:\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})\to\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$，只需将其限制到 W_p 并令 $N=0$，即可得到一个二维（局部）“伽罗瓦型魏尔群表示”。如前所述，$(r|_{W_p},0)$ 无法通过局部朗兰兹对应映射为扭曲 Steinberg 表示。

对于部分（2），由于 σ_i 的层几乎达到最大值，$\pi_i=\mathrm{JL}(\sigma_i)$ 的导子为 $N_i=\prod_{p\in\mathrm{Ram}(\mathbf{B}_i)}p$。由于 $\mathbf{G}_1\not\simeq\mathbf{G}_2$,，存在 p 使得 $p\mid N_1$，但 $p\nmid N_2$，因此 $(\mathrm{sym}^k\pi_1)_p$ 是分歧的，而 $(\mathrm{sym}^k\pi_2)_p$ 不是。□

7.3. 一个线性规划问题。设 $C(i)=\binom{2i}{i}-\binom{2i}{i+1}$ 为第 i 个卡塔兰数。

引理 7.2。存在 $f=\sum_{i,j}a_{i,j}x^iy^j\in\mathbb{R}[x,y]$，具有以下性质：

(1) $a_{i,j}=0$，除非 $0\leqslant i,j\leqslant 4$ 或 $ij=0,0\leqslant i,j\leqslant 8$；*(2)* 我们有 $\sum_{i,j}a_{2i,2j}C(i)C(j)<1/2$；*(3)* 对所有 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $f(x,y)\geqslant 0$；*(4)* 存在 $\varepsilon>0$，使得当 $|x-y|\leqslant\varepsilon$时，$f(x,y)\geqslant 1$。

事实上，(2) 中的上界可以取为 0.492.

证明。令

$$f(x,y)=\frac{1}{20^{10}}(u(x,y)+u(-x,-y)) \tag{7.5}$$

其中

$$\begin{aligned}u(x,y)=\ &41813434533x^8+359512561893x^4y^4+41790603610y^8+1371693928x^7\\&-407914952x^4y^3+409594776x^3y^4-1371845320y^7-152799075816x^6\\&-1238844857440x^4y^2+914071084096x^3y^3-1238781629424x^2y^4-152613570520y^6\\&-10586722304x^5+155563456x^4y-2039508160x^3y^2+2035437600x^2y^3\\&-167534816xy^4+10587831584y^5+655694115936x^4-2074041622592x^3y\\&+5223381207392x^2y^2-2074067626368xy^3+655195946720y^4+25484108416x^3\\&-2399492480x^2y+2432177280xy^2-25477793408y^3-3336702739328x^2\\&+5796896462336xy-3336250252672y^2-16640770048x+16623868928y\\&+5217874549248,\end{aligned}$$

显然满足（1）。数值计算表明

$$\sum_{i,j}a_{2i,2j}C(i)C(j)=\frac{1258136733059}{2560000000000}=0.4914\ldots$$

Mathematica告诉我们

```
In[1] := NMinimize[f[x, y], {x, y}]
Out[1] := {0.000147597, {x -> 1.96743, y -> 0.756825}}
```

这就证明了（3）。此外，

```
In[2] := NMinimize[f[x, x], x]
Out[2] := {1.0001, {x -> 0.502488}} 。
```

由连续性可知，存在某个 $\varepsilon > 0$，使得（4）成立。 □

在第7.4-7.5 节中，我们给出（3）和（4）的直接证明，不借助计算机辅助。为方便读者，已在 Lean4 中形式化了引理 7.2 。代码可在此处获取： https://github.com/maksym-radziwill/BBR。

下面的单变量版本要简单得多。

引理 7.3。 存在 $h = \sum_i a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ ，满足以下性质：

(1) 次数$(h) \leqslant 8$；*(2)* 我们有 $\sum_i a_{2i} C(i) < 1/2$；*(3)* 对所有 $x \in \mathbb{R}$， $h(x) \geqslant 0$ ；*(4)* 存在 $\varepsilon > 0$ ，使得当 $|x| \leqslant \varepsilon$ 时， $h(x) \geqslant 1$ 。

事实上， （2）中的上界可以取为。42。

证明。 定义八次多项式

$$h(x) = \frac{100}{81} - \frac{80}{27}x^2 + \frac{68}{27}x^4 - \frac{8}{9}x^6 + \frac{1}{9}x^8 = \left(\frac{10}{9} - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^4\right)^2.$$

那么 h 显然是非负的，并且满足

$$\frac{100}{81} - \frac{80}{27}\cdot 1 + \frac{68}{27}\cdot 2 - \frac{8}{9}\cdot 5 + \frac{1}{9}\cdot 14 = \frac{34}{81} = 0.419\ldots$$

最后， $h(0) = 10/9 > 1,$ ，而根据连续性，存在如上一个要点所述的 $\varepsilon > 0$ 。□

7.4. **非负性**。 在此我们直接验证引理3的性质（7.2）。在本节中，我们始终用 f 表示在（7.5）中定义的多项式以及其后的大公式。

引理7.4。 多项式 f 是非负的。

证明。 这是因为我们可以将 u 写成三十一个多项式的平方和。具体而言，

$$u(x,y) = 2\sum_{i=1}^{15} p_i(x,y)^2 + 6\cdot p_5(x,y)^2 + c(x,y)$$

其中

$$\begin{aligned} c(x,y) = {} & 144792(x^4 - x^3y)^2 + 173336(x^4 + x^2y^2)^2 + 106511(x^4 - x^2y^2)^2 \\ & + 219778(x^4 - xy^3)^2 + 177162(x^4 - 2x^2y)^2 + 293174(x^4 + 2xy^2)^2 \\ & + 230298(x^4 + 4xy)^2 + 68230(x^3y - y^4)^2 + 157876(x^2y^2 + y^4)^2 \\ & + 147938(x^2y^2 - y^4)^2 + 774352(x^2y^2 + 2y^3)^2 + 580764(x^2y^2 - 2y^3)^2 \\ & + 76098(xy^3 - y^4)^2 + 20320(y^4 + 2xy^2)^2 + 40640(y^4 - 2xy^2)^2 + 56386(y^4 + 4xy)^2 \end{aligned}$$

且多项式 $p_i(x,y)$ 如下

$$\begin{aligned} p_1(x,y) = {} & 110664x^4 - 62436x^3y - 125829x^2y^2 - 62424xy^3 + 110640y^4 + 872x^3 + 364x^2y \\ & - 346208x^2 + 111564xy - 346144y^2 - 2208x + 2200y + 369968 \end{aligned}$$

$$p_2(x,y) = 72082x^4 + 115475x^3y + 85682x^2y^2 + 115539xy^3 + 72018y^4 + 262x^3 - 222x^2y$$
$$+ 224xy^2 - 262y^3 - 301192x^2 - 566348xy - 301000y^2 - 1264x + 1256y + 123 \quad 456$$
$$p_3(x,y) = 55620x^4 - 53290x^3y - 10x^2y^2 + 53273xy^3 - 55648y^4 - 3232x^3 + 776x^2y$$
$$+ 776xy^2 - 3232y^3 - 167796x^2 + 60xy + 167896y^2 + 8488x + 8488y - 16p_4(x,$$
$$y) = 19116x^4 + 81137x^3y - 291925x^2y^2 + 81119xy^3 + 19126y^4 - 432x^3 + 370x^2y$$
$$- 370xy^2 + 434y^3 + 547060x^2 - 702352xy + 547024y^2 + 2032x - 2032y - 156p_5(x,$$
$$y) = 1021x^4 - 503x^3y + 503xy^3 - 1022y^4 + 101755x^3 + 4272x^2y + 4262xy^2 \quad 7392$$
$$+ 101760y^3 - 3670x^2 + 3672y^2 - 306992x - 307004yp_6(x,$$
$$y) = 462x^4 + 1121x^3y - 1122xy^3 - 463y^4 - 406x^3 + 2114x^2y + 2114xy^2$$
$$- 404y^3 - 3192x^2 + 3192y^2 - 1544x - 1544yp_7(x,$$
$$y) = 368x^4 + 16x^3y + 283x^2y^2 + 16xy^3 + 368y^4 + 54x^3 + 52x^2y$$
$$- 52xy^2 - 56y^3 + 884x^2 + 1220xy + 884y^2 - 56x + 56y - 9664p_8(x,$$
$$y) = 362x^4 + 863x^3y - 863xy^3 - 362y^4 + 528x^3 - 2896x^2y - 2896xy^2 + 530y^3$$
$$- 2524x^2 + 2524y^2 + 2272x + 2272yp_9(x,$$
$$y) = 222x^4 + 63x^3y - 62xy^3 - 222y^4 + 22x^3 + 8x^2y + 8xy^2 + 22y^3$$
$$+ 860x^2 + 4xy - 860y^2 + 120x + 120y + 16p_{10}(x,$$
$$y) = 61x^4 - 17x^3y + 37x^2y^2 - 17xy^3 + 61y^4 + 4x^3 - 4x^2y + 4xy^2$$
$$- 2y^3 + 312x^2 - 76xy + 312y^2 + 24x - 24y + 2208p_{11}(x,$$
$$y) = 15x^4 - x^3y + 11x^2y^2 - xy^3 + 14y^4 - 536x^3 - 988x^2y$$
$$+ 988xy^2 + 536y^3 + 28x^2 + 48xy + 24y^2 - 136x + 128y - 512p_{12}(x,$$
$$y) = 15x^4 - 4x^3y + 13x^2y^2 - 4xy^3 + 15y^4 - 1582x^3 + 808x^2y - 808xy^2$$
$$+ 1582y^3 + 20x^2 + 24xy + 20y^2 + 6616x - 6616y - 432p_{13}(x,$$
$$y) = 10x^4 + 3x^3y - 4xy^3 - 10y^4 - 266x^3 - 118x^2y - 118xy^2 - 266y^3$$
$$+ 36x^2 - 4xy - 36y^2 - 1440x - 1432yp_{14}(x,$$
$$y) = 5x^4 + 199x^3y - 99x^2y^2 + 199xy^3 + 7y^4 + 12x^3 - 12x^2y + 10xy^2$$
$$- 14y^3 - 20x^2 + 1128xy - 12y^2 + 88x - 96y + 1776p_{15}(x,$$
$$y) = 3x^4 + 5x^3y - x^2y^2 + 5xy^3 + 3y^4 - 224x^3 + 130x^2y - 130xy^2$$
$$+ 224y^3 + 12x^2 + 32xy + 12y^2 - 1112x + 1112y + 128$$至此，引理的证明结束。

□

7.5. **对角下界**。 现在我们直接验证引理4的性质（7.2）。我们仍令 f 表示（7.5）中定义的多项式以及其后的那个大公式。

引理 7.5。我们有

$$|f(x,y)| < 7 \cdot (2 + x^8 + y^8)$$

and

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 56 \cdot (2 + x^8 + y^8)\ ,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 56 \cdot (2 + x^8 + y^8).$$

证明。设

$$S := \{(i,j) : i,j \leqslant 4\} \cup \{(i,0) : i \leqslant 8\} \cup \{(0,i) : i \leqslant 8\}.$$

那么，对于任意一对 $(i,\ j) \in S$，我们有

$$|x^i y^j| \leqslant x^{2i} + y^{2j} \leqslant (2 + x^8 + y^8),$$

因此，对于任意形如 $w(x,\ y) = \sum_{(i,\ j)\in S} a_{ij} x^i y^j$ 的多项式，我们有

$$|w(x,y)| \leqslant C(w)(2 + x^8 + y^8)\ ,\ C(w) := \sum_{(i,j)\in S} |a_{ij}|$$

用同样的论证，

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 8C(w)(2 + x^8 + y^8)\ ,\ \left|\frac{\partial w}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 8C(w)(2 + x^8 + y^8).$$

我们计算

$$C(u) = \frac{1631426159869}{256000000000} < 7$$

并且由于 f 是 u的凸组合，证明至此完成。 □

现在我们证明，在对角线 $f(x,\ y)$ 附近，其值严格大于一。

引理 7.6. 对于 $|x - y| \leqslant 10^{-15}$，我们有 $f(x, y) > 1.$

证明。令 $\Delta(x) = f(x,\ x)$。我们得到

$$\Delta(x,x) = 1 + \frac{1}{10000} + \sum_{i=1}^{3} q_i(x)^2$$

其中

$$q_1(x) = \frac{815955355589474040 - 367093416667679061 0x^2 + 1740619888194368521x^4}{429086076000000\sqrt{190161229}},$$

$$q_2(x) = \frac{1}{200000}\sqrt{\frac{168706828659586711271257}{203988838897368510}}x^2 - \frac{883362315013506570851197}{1600000\sqrt{3441431009232638625354384253865409991707 0}}x^4,$$

$$q_3(x) = \frac{1}{858172152000000}\sqrt{\frac{3241466326489550345408794256656160370310457779 81}{337413657319173422542514}}x^4,$$

因此

$$\Delta(x,x) \geqslant \max(1 + 10^{-5}, q_3(x)^2) \geqslant \max(1 + 10^{-5}, 10^{-6}x^8).$$

By 我们有 $|x-y| \leqslant 10^{-15}$ 的 f 偏导数界 t

$$f(x,y) \geqslant \Delta(x) - 10^{-15} \cdot 56 \cdot (2 + x^8 + y^8).$$

如果 $|x| \leqslant 1$ 且 $|y| \leqslant 1$，那么 $x^8 + y^8 \leqslant 2$。如果 $|x| \geqslant 1$ 或 $|y| \geqslant 1$，那么由于 $|x-y| \leqslant 10^{-8}$，我们有 $|\max(x,\ y)| < (1 + 2 \cdot 10^{-8})|x|$，因此 $x^8 + y^8 \leqslant 2x^8$。两种情况下，对于 $|x-y| \leqslant 10^{-8}$，都有 $x^8 + y^8 \leqslant 2 + 2x^8$。因此

$$f(x,y) \geqslant \Delta(x) - 10^{-15} \cdot 56 \cdot (4 + 2x^8).$$

只要 $|x-y| \leqslant 10^{-15}$。如果 $|x| \leqslant 6$，那么

$$\Delta(x) - 10^{-15} \cdot 56 \cdot (4 + 2x^8) \geqslant 1 + 10^{-5} - 10^{-15} \cdot 56 \cdot (4 + 2 \cdot 6^8) = \frac{31250306621337}{31250000000000} > 1,$$

并且如果 $|x| > 6$，我们有

$$\Delta(x) - 10^{-15} \cdot 56 \cdot (4 + 2x^8) \geqslant 10^{-6} \cdot 6^8 - 10^{-15} \cdot 56 \cdot (4 + 2 \cdot 6^8) = \frac{52487994121337}{31250000000000} > 1.$$

证明至此完成。 □

7.6. **定理 3.7 的证明**。第 (1) 部分使用引理 7.2，而第 (2) 部分使用引理7.3。我们只证明前者，因为后者可由类似的论证得出。

设 $X_0 > 0$ 满足 π_1，π_2 在所有素数 $p \geqslant X_0$处均非分歧。对 $p \geqslant X_0$ 令$\alpha_1(p)$，$\beta_1(p)$ 表示 π_1 的萨塔克参数，并令 $\alpha_2(p)$，$\beta_2(p)$ 表示π_2的萨塔克参数。设 $f \in \mathbb{R}[x,\ y]$ 如引理7.2中所述。由性质（3）和（4），存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\sum_{\substack{X_0 \leqslant p \leqslant X \\ |\lambda_{\pi_1}(p) - \lambda_{\pi_2}(p)| \leqslant \varepsilon}} \log p \leqslant \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{X_0 \leqslant p^k \leqslant X} (\log p) f\left(\alpha_1(p)^k + \beta_1(p)^k, \alpha_2(p)^k + \beta_2(p)^k\right)$$

对任意 $K \geqslant 2$。

对于表示 Π，令 Λ_Π 表示 $(L'/L)(s,\Pi)$ 的狄利克雷系数。利用 Kim–Sarnak 界 $|\alpha_j(p)|$，$|\beta_j(p)| \leqslant p^{7/64}$, 我们有

$$\frac{L'(s,\Pi)}{L(s,\Pi)} = \sum_{i,j} a_{i,j} \sum_{X_0 \leqslant n \leqslant X} \Lambda_{\pi_1^{\otimes i} \otimes \pi_2^{\otimes j}}(n) + O\left(X^{1/K} (X^{1/K})^{\frac{7}{64} \cdot 8K}\right).$$

对于 $\pi \in \{\pi_1,\ \pi_2\}$ 我们可以分解为

$$\pi^{\otimes i} = \boxplus_{0 \leqslant j \leqslant i/2} \left(\binom{i}{j} - \binom{i}{j+1}\right) \mathrm{sym}^{i-2j}\pi,$$

约定 $\mathrm{sym}^0\pi = \mathbf{1}$。根据我们的假设，对称幂是尖点且彼此不同，由兰金–塞尔伯格理论可知 $L(s,\ \mathrm{sym}^i\pi_1 \otimes \mathrm{sym}^j\pi_2)$ 在 $\Re s \geqslant 1$ 上全纯且非零，其中 $1 \leqslant i,\ j \leqslant 4$。由 [KS2]，我们还知道$L(s,\ \mathrm{sym}^i\pi)$ 在 $\Re s \geqslant 1$ 上全纯且非零，其中 $1 \leqslant i \leqslant 8$。根据相关 L-函数的素数定理，结合引理7.2的性质（1），我们有

$$\frac{L'(s,\Pi)}{L(s,\Pi)} = \left(\sum_{i,j} a_{2i,2j} C(i) C(j)\right)(1 + o(1))X + O(X^{9/10})$$

对于 $K > 40$。根据引理 2 的性质（7.2），我们得出结论。

8. Siegel zeros and small split primes

本节证明定理 3.9。主要工作包含在下文的定理 8.1 中——这是一项本身也具有重要意义的技术性结果——它给出了零点位置的最小条件，在这些条件下，素数上的短特征和会出现某种消去。

8.1. **化归为素数上的光滑特征和。** 为说明定理8.1的陈述并为其证明做准备，我们首先注意到

$$\sum_{\substack{X\leqslant p\leqslant X^2\\ \chi_{-D}(p)=1}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\sum_{X\leqslant p\leqslant X^2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\sum_{X\leqslant p\leqslant X^2}\frac{\chi_{-D}(p)}{p}.$$

因此，只需在定理 3.9所述条件下，建立素数上的短特征和的界。为了运用复分析技术，我们将其转化为光滑求和。取一个足够小的 $\varepsilon>0$，并考虑一个光滑测试函数 W，它在 $[1+\varepsilon$ 上取值为 1，$2-\varepsilon]$ 并在 $[1$ 之外取值为 0，$2]$ 于是

$$\sum_{X\leqslant p\leqslant X^2}\frac{\chi_{-D}(p)}{p}=\sum_{X\leqslant p\leqslant X^2}\frac{\chi_{-D}(p)}{p}W\Big(\frac{\log p}{\log X}\Big)+O(\varepsilon).$$

设 ψ 满足定理 3.9的假设。若我们能证明

$$\sum_{X\leqslant p\leqslant X^2}\frac{\chi_{-D}(p)}{p}W\Big(\frac{\log p}{\log X}\Big)=o_\varepsilon(1)\quad\text{for}\quad X\geqslant D^{1/\psi(D)},\tag{8.1}$$

t那么对每个 $0<\delta<1/2$，我们都可以取 $o_\varepsilon(1)+O(\varepsilon)\leqslant 1/2-\delta$，从而得到

$$\sum_{\substack{X\leqslant p\leqslant X^2\\ \chi_{-D}(p)=1}}\frac{1}{p}\geqslant\delta\sum_{X\leqslant p\leqslant X^2}\frac{1}{p}$$

当 X 相对于 δ充分大时，所需结论成立。

假设 $L(s,\ \chi_{-D})$ 在 $\sigma>1-\Delta/\log(D(1+|t|))$ 处没有零点，比如说。为了建立大小为 X 的素数上的光滑特征和中的消去，在此假设下，两个参数 X 与 Δ 之间存在基本张力：我们取 X（相对于 D）越小，就必须把 Δ 取得越大。回想比值 $\log X/\log D$ 可以小到$1/\psi(D),$，而我们希望它任意缓慢地衰减。量 Δ 最终出现在假设（2.3）中，作为 $\psi(D)$ 的函数。（也可以更精确地处理t 变量的取值范围，如在（2.3）及下文定理 8.1 中那样，从而使分析完全有限化。）

标准解析技术可以在 $\log X/\log D$ 与 Δ 之间建立一种弱关系。事实上，通过对佩龙公式的简单应用，我们得到如下形式的表达式

$$\int_{(2)}\frac{L'}{L}(s,\chi_{-D})X^s\hat{W}(s)\frac{ds}{2\pi i},$$

ˆ 梅林变换 W 在竖直带上快速衰减。平移积分路径可带来约为 $X^{-\Delta/\log D}=\exp(-\Delta\log X/\log D)$ 的节省，这表明只要 $\Delta\to\infty$，$\log X$ 就能相对于 $\log D$ 缩小。不过，我们还需要考虑 $\frac{L'}{L}(s,\chi_{-D})$ 的大小；在不作更多假设的情况下，我们只能得到大小为 $O(\log D)$ 的界。为弥补这一点，Δ 至少必须以 $\log\log D$ 的速度增长。或者，我们可以平移

积分路径越过零点自由区域，但这样一来，我们就需要估计所越过的零点个数，而这又会带来一个大小为 $O(\log D)$ 的因子。无论采用哪种方法，所需的零点自由区域形式都是 $\sigma \geqslant 1 - C \log\log D/\log D$，其质量与 [MV1 第 1] 节中所述相同，旨在消除林尼克定理中的同余条件。

通过对零点自由区域与 **1** 线附近 L-函数大小之间相互作用进行更精细的分析，我们绕过了这些困难。下述定理允许在 $X = o(\log q)$时 $\Delta \to \infty$ 不受速度限制，而这已是我们所能期望的最好结果。关于先行工作，参见[Mo，第 9] 章。

定理 8.1。设 $q \in \mathbb{N}$，且 χ 是模 q 的本原狄利克雷特征。设 W 是一个光滑函数，紧支撑于 $[1, 2]$ 且满足 $|W| \leqslant 1$。设 $0 < \eta \leqslant \frac{1}{2}$，并令 $X := q^{\eta}$。令$1 \leqslant \Delta = o(\log X)$，$1 \leqslant T \leqslant \log X$。假设 $L(s, \chi)$ 在区域内没有零点

$$|t| \leqslant \frac{2T}{\log X}\ ,\ \sigma > 1 - \frac{2\Delta}{\log X}.$$

那么对每个 K，都存在一个仅依赖于 K 的常数 $c_K > 0$，使得

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p} W\Big(\frac{\log p}{\log X}\Big) \ll \Big(\frac{\Delta}{\eta}\Big)^3 \cdot \big(e^{-\Delta} + c_K \Delta T^{-K}\big).$$

我们来更详细地解释这个界的含义。左侧的支撑集位于$X \leqslant p \leqslant X^2$，因此左侧的平凡上界为 $O(1)$。所以，例如，取$\Delta = 10\log(1/\eta)$ 且 $T = 1/\eta$，就足以得到非平凡结果。我们认为 η 相对于 q任意缓慢地趋于零，而 T，Δ 可以任意缓慢地趋于无穷。换言之，这一结果在“没有西格尔零点”的定量改进与导子长度为多项式级别以下的素数上的特征和消去之间，建立了一套精确的对应关系。特别地，若（8.1 ）和（8.1）成立，则定理3.9成立，前提是（2.3）成立。

本节剩余部分 因此专门用于证明定理 8.1。

8.2. 准备性估计。设 χ 是模 q 的本原特征。我们通常记作 $\tau = |t| + 2$ 和 $s = \sigma + it$。我们还记作

$$\mathcal{L} := \log q\tau.$$

我们从 两个众所周知的估计开始。在 $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$ 和 $r \geqslant 1$ 上一致地有

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{\substack{\rho := \beta + i\gamma \\ |t-\gamma| \leqslant r}} \frac{1}{s - \rho} + O(\mathcal{L}) \tag{8.2}$$

对于 $r \geqslant 0$、$t \in \mathbb{R}$，令 $n_\chi(r;\ t)$ 表示 $L(s,\ \chi)$ 在圆盘 $\{s \in \mathbb{C}:\ |1 + it - s| \leqslant r\}$ 中的零点数。则

$$n_\chi(r; t) \ll 1 + r\mathcal{L}. \tag{8.3}$$

后者可以在例如 [Fo，引理 7], 中找到；不过为方便起见，我们给出简短证明。注意到

$$\Re \sum_{\substack{\rho := \beta + i\gamma \\ |t-\gamma| \leqslant 1}} \frac{1}{1 + r + it - \rho} = \sum_{\substack{\rho := \beta + i\gamma \\ |t-\gamma| \leqslant 1}} \frac{1 + r - \beta}{|1 + r + it - \rho|^2}.$$

对于任意满足 $|1+it-\rho|\leqslant r$ 的零点 $\rho=\beta+i\gamma$，我们有 $|1+r+it-\rho|\leqslant 2r$；此外（显然，因为 $\beta\leqslant 1$），$1+r-\beta\geqslant r$。因此，对于任意满足 $|1+it-\rho|\leqslant r$ 的零点 ρ，我们得到

$$\frac{1}{4r}=\frac{r}{(2r)^2}\leqslant\frac{1+r-\beta}{|1+r+it-\rho|^2}.$$

由此可得

$$\frac{n_\chi(r;t)}{4r}\leqslant\Re\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\|t-\gamma|\leqslant\max(1,r)}}\frac{1}{1+r+it-\rho}\ll\left|\Re\frac{L'}{L}(1+r+it)\right|+\mathcal{L}\ll\frac{\zeta'}{\zeta}(1+r)+\mathcal{L}\ll\frac{1}{r}+\mathcal{L},$$

如所需。

我们的第一个技术性引理如下。

引理 8.1。对于 $\sigma_0>\frac{1}{2}$和 $t\in\mathbb{R}$ 并定义

$$\mathcal{C}_q(\sigma_0,t):=\left\{s\in\mathbb{C}:|\Im s-t|\leqslant\mathcal{L}^{-1}\ ,\ \Re s>\sigma_0\right\}$$

若 $L(s,\chi)$ 在 $\mathcal{C}_q(\sigma_0,t)$中没有零点，则对于任意 $\sigma\geqslant\sigma_0+\mathcal{L}^{-1}$，我们有

$$\left(\frac{L'}{L}\right)'(\sigma+it)\ll(1+|\sigma-1|\mathcal{L})\cdot\mathcal{L}^2.$$

证明。由柯西积分公式可得

$$\left(\frac{L'}{L}\right)'(\sigma+it)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-(\sigma+it)|=\mathcal{L}^{-1}}\frac{L'}{L}(z,\chi)\cdot\frac{dz}{(z-(\sigma+it))^2}.$$

代入（8.2），得到

$$\left(\frac{L'}{L}\right)'(\sigma+it)=-\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\|t-\gamma|\leqslant 1}}\frac{1}{(\sigma+it-\rho)^2}+O(\mathcal{L}^2).\tag{8.4}$$

按二进范围拆分后，得到

$$\ll\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\|t-\gamma|\leqslant 1\\|\sigma+it-\rho|\leqslant\mathcal{L}^{-1}}}\frac{1}{|\sigma+it-\rho|^2}+\sum_{k\geqslant 0}\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\|t-\gamma|\leqslant 1\\|\sigma+it-\rho|\mathcal{L}\in[2^k,2^{k+1}]}}\frac{1}{|\sigma+it-\rho|^2}+\mathcal{L}^2.$$

根据假设，对 $\sigma\geqslant\sigma_0+\mathcal{L}^{-1}$ 有 $|\sigma+it-\rho|\geqslant\mathcal{L}^{-1}$，对所有零点 ρ。区域 $|\sigma+it-\rho|\leqslant 2^k\mathcal{L}^{-1}$ 中的零点数不超过$|1+it-\rho|\leqslant 2^k\mathcal{L}^{-1}+|\sigma-1|$中的零点数。由（8.3），后者为 $\ll 2^k+|\sigma-1|\mathcal{L}$。因此，（8.4）有如下界

$$\mathcal{L}^2(1+|\sigma-1|\mathcal{L})+\mathcal{L}^2\sum_{k\geqslant 0}(2^k+|\sigma-1|\mathcal{L})2^{-2k}+\mathcal{L}^2\ll|\sigma-1|\mathcal{L}^3+\mathcal{L}^2.\qquad\square$$

引理 8.2. 设 $t\in\mathbb{R}$, $10<A=o(\log\mathcal{L})$。假设 $L(s,\chi)$ 在区域$\mathcal{C}_q(1-(A+1)\mathcal{L}^{-1},t)$内没有零点。则对 $1-A\mathcal{L}^{-1}\leqslant\sigma$ 一致地，我们有

$$\log L(\sigma+it,\chi)-\log L(\sigma+A\mathcal{L}^{-1}+it,\chi)\ll A^3.$$

注记 8.2. 利用基于 Borel-Carath´eodory 不等式的标准论证（例如参见[Te，第 158]页），可以证明稍强的界

$$\log L(\sigma+it,\chi)-\log L(\sigma+A\mathcal{L}^{-1}+it,\chi)\ll A$$

要求稍强一些，即 $L(s,\ \chi)$ 在更大的区域内没有零点

$$\Re s>1-(A+1)\mathcal{L}^{-1},\quad |\Im s-t|\leqslant 1.$$

在这里我们 力求将对无零区域的假设尽可能简化。

证明。 对于任意 $\sigma\geqslant 1-A\mathcal{L}^{-1}$ 根据引理 8.1 可得

$$\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi)-\frac{L'}{L}(1+\mathcal{L}^{-1}+it,\chi)=\int_{\sigma}^{1+\mathcal{L}^{-1}}\Big(\frac{L'}{L}\Big)'(x+it)\,\mathrm{d}x\ll|\sigma-1-\mathcal{L}^{-1}|\cdot A\mathcal{L}^2\ll A^2\mathcal{L}$$

因为 $|\sigma-1-\mathcal{L}^{-1}|\ll A\mathcal{L}^{-1}$。此外，

$$\frac{L'}{L}(1+\mathcal{L}^{-1}+it,\chi)\ll\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\mathcal{L}^{-1})\ll\mathcal{L},$$

从而

$$\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi)\ll A^2\mathcal{L}.$$

对所有 $1-A\mathcal{L}^{-1}\leqslant\sigma$ 均成立。因此

$$\log L(\sigma+it,\chi)-\log L(\sigma+A\mathcal{L}^{-1}+it,\chi)=\int_{\sigma}^{\sigma+A\mathcal{L}^{-1}}\frac{L'}{L}(x+it,\chi)\,\mathrm{d}x\ll\frac{A}{\mathcal{L}}\cdot A^2\mathcal{L}\ll A^3$$

如所声称的。 □

8.3. **估计素数上的短特征和**。 现在我们可以证明定理 8.1。将 $W(x)$ 替换为 $W(x)e^x/e^2$（它在 $[1,\ 2]$ 上仍然是紧支撑的，且有界于 1），只需估计

$$\mathcal{S}_0(X)=\sum_p\frac{\chi(p)}{p^{1+1/\log X}}W\Big(\frac{\log p}{\log X}\Big).$$

由于显然有

$$\Big|\sum_p\frac{\chi(p)}{p^{1+(1+\Delta)/\log X}}W\Big(\frac{\log p}{\log X}\Big)\Big|\leqslant e^{-\Delta}\sum_{X\leqslant p\leqslant X^2}\frac{1}{p^{1+1/\log X}}\ll e^{-\Delta},$$

我们有

$$\mathcal{S}_0(X)=\sum_p\Big(\frac{\chi(p)}{p^{1+1/\log X}}-\frac{\chi(p)}{p^{1+(1+\Delta)/\log X}}\Big)W\Big(\frac{\log p}{\log X}\Big)+O(e^{-\Delta}).$$

$\breve{}$将 W 展开为以 W表示的傅里叶变换后，主项变为

$$\int_{\mathbb{R}}\widetilde{W}(\xi)\Big(\log L\Big(1+\frac{1}{\log X}+\frac{2\pi i\xi}{\log X},\chi\Big)-\log L\Big(1+\frac{\Delta+1}{\log X}+\frac{2\pi i\xi}{\log X},\chi\Big)\Big)d\xi+O\Big(\frac{1}{X}\Big).$$

Let

$$H(s)=\log L\Big(1+\frac{1}{\log X}+s,\chi\Big)-\log L\Big(1+\frac{\Delta+1}{\log X}+s,\chi\Big),$$

从而在作变量替换后，我们有

$$\mathcal{S}_0(X) = \log X \int_{(0)} \breve{W}\Big(\frac{s\log X}{2\pi i}\Big) H(s)\frac{\mathrm{d}s}{2\pi i} + O(e^{-\Delta}).$$

对每个 t，我们定义 $A_t \geqslant 1$ 为

$$\frac{A_t}{\log(q\tau)} = \frac{\Delta}{\log X}.$$

我们的假设意味着 $L(s,\ \chi)$ 在 $\mathcal{C}_q(1-(A_t+1)\mathcal{L}^{-1},\ t)$中没有零点，且该结论对$|t| \leqslant T/\log X$一致成立，因为 $T \geqslant 1$并且 $\Delta/\log X \geqslant \mathcal{L}^{-1}$。因此，引理 8.2给出

$$H(\sigma+it) \ll A_t^3 \ll \Big(\frac{\Delta}{\eta}\Big)^3 \quad \text{uniformly in} \quad -\frac{\Delta}{\log X} \leqslant \sigma \text{ and } |t| \leqslant \frac{T}{\log X}. \tag{8.5}$$

由于 W 是紧支撑的，函数 $W(\xi)$ 关于 ξ 是整函数，并且在固定的水平直线上满足如下界

$$\breve{W}(\xi) \ll_K \frac{e^{-2\pi\Im\xi}}{(1+|\xi|)^K}$$

对任意 $K > 0$。

现在我们将积分路径变形为以下三个区域:

$$|t| \geqslant \frac{T}{\log X}\ ,\ \sigma = 0, \tag{8.6}$$

$$t = \pm\frac{T}{\log X}\ ,\ -\frac{\Delta}{\log X} \leqslant \sigma \leqslant 0, \tag{8.7}$$

$$|t| \leqslant \frac{T}{\log X}\ ,\ \sigma = -\frac{\Delta}{\log X}. \tag{8.8}$$

对于 $\sigma \geqslant 0$，我们使用平凡估计

$$|H(\sigma+it)| \leqslant \sum_p \frac{1}{p}\cdot\Big(\frac{1}{p^{1/\log X}} - \frac{1}{p^{(\Delta+1)/\log X}}\Big) + O(1) \ll \log(2+\Delta).$$

因此，区域（8.6）对 $\mathcal{S}_0(X)$ 的主项的贡献为

$$\ll_K \log X \cdot \log\Delta \int_{T/\log X}^{\infty} (1+t\log X)^{-K} \ll_K \log(2+\Delta)\cdot T^{-(K-1)}$$

对于任意选择的 $K > 10$。在其余区域（8.5）、（8.7）和（8.8）中，我们使用（8.7）的贡献为

$$\ll_K \Big(\frac{\Delta}{\eta}\Big)^3 (\log X) T^{-K} \int_{-\Delta/\log X}^{0} e^{\sigma} d\sigma \ll \Big(\frac{\Delta}{\eta}\Big)^3 \Delta T^{-K}.$$

最后，区域（8.8）的贡献为

$$\log X \cdot \Big(\frac{\Delta}{\eta}\Big)^3 \cdot \int_{|t|\leqslant T/\log X} \frac{e^{-\Delta}}{1+|t\log X|^{10}}\,\mathrm{d}t \ll \Big(\frac{\Delta}{\eta}\Big)^3 e^{-\Delta}.$$

综合所有估计，即完成了定理的证明 8.1。

9. Pigeonhole

现在给出推论的证明 3.10。我们证明界 $S_D(\pi_1,\ \pi_2) > \kappa$对数 $\psi(D)$如果 B 在 $S_D(\pi_1, \pi_2)$ 的定义中选取得足够大。另一个结论的证明类似。

令 $\varepsilon > 0$ 如定理 3.7 中所述，且 $X > D^{1/\psi(D)}$ 如定理 3.9中所述。我们有

$$\sum_{\substack{X\leqslant p\leqslant X^2\\ \chi_{-D}(p)=1\\ |\lambda_{\pi_1}(p)|,|\lambda_{\pi_2}(p)|\leqslant B}} \frac{(\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p))^2}{p} > \varepsilon^2 \sum_{\substack{X\leqslant p\leqslant X^2\\ \chi_{-D}(p)=1\\ |\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p)|\geqslant\varepsilon\\ |\lambda_{\pi_1}(p)|,|\lambda_{\pi_2}(p)|\leqslant B}} \frac{1}{p},$$

关于 p的三个条件，第一个条件成立时的密度由定理 3.9给出，例如取 $\delta = 0.4999$。定理 3.7 意味着

$$\sum_{\substack{X\leqslant p\leqslant X^2\\ |\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p)|\geqslant\varepsilon}} \frac{1}{p} \geqslant 0.501 \sum_{X\leqslant p\leqslant X^2} \frac{1}{p}.$$

事实上，将范围 $X \leqslant p \leqslant X^2$ 分成形如 $[Y, \gamma Y]$ 的若干部分，其中$\gamma > 1$ 足够小，并对 $p \in [Y, \gamma Y]$估计 $1/p \geqslant 1/(\gamma Y)$，即可得到这一结论。最后一个条件由 Rankin–Selberg 理论控制，因为

$$\sum_{\substack{X\leqslant p\leqslant X^2\\ \max(|\lambda_{\pi_1}(p)|,|\lambda_{\pi_2}(p)|>B}} \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{B^2} \sum_{X\leqslant p\leqslant X^2} \frac{\lambda_{\pi_1}(p)^2+\lambda_{\pi_2}(p)^2}{p} = \frac{2+o(1)}{B^2} \sum_{X\leqslant p\leqslant X^2} \frac{1}{p}.$$

利用容斥原理，我们得到

$$\sum_{\substack{X\leqslant p\leqslant X^2\\ p \text{ split}\\ |\lambda_{\pi_1}(p)|,|\lambda_{\pi_2}(p)|\leqslant B}} \frac{(\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p))^2}{p} \geqslant \varepsilon^2\Big(0.4999+0.501+\frac{B^2-2+o(1)}{B^2}-2\Big) \sum_{X\leqslant p\leqslant X^2} \frac{1}{p}.$$

特别地，当 B 足够大时，存在 $\kappa > 0$ 使得

$$\sum_{\substack{X\leqslant p\leqslant X^2\\ p \text{ is split}\\ |\lambda_{\pi_1}(p)|,|\lambda_{\pi_2}(p)|\leqslant B}} \frac{(\lambda_{\pi_1}(p)-\lambda_{\pi_2}(p))^2}{p} \geqslant \kappa \sum_{X\leqslant p\leqslant X^2} \frac{1}{p},$$

在 X 取遍范围 $[D^{1/\psi(D)}, D^c]$时一致成立。对所有形如$[Z, Z^2]$ 且满足 $Z = X, X^2, X^4, \dots, D^{c/2}$ 的区间求和，即得所需结论。

致谢。 我们谨向 Steve Lester、Philippe Michel、Asbjørn Nor- dentoft 和 Radu Toma 表示感谢，感谢他们提供了有益的交流。

References

[AES] M.Aka，M.Einsiedler，U. Shapira，《球面上的整数点及其正交格》，Invent. Math. **206** (2016), 379-396[ALMW] M. Aka, M. Luethi, P. Michel, A. Wieser，《复乘椭圆曲线的同时超奇异约化》，《J. Reine Angew. Math.》**786** (2022), 1-43

[Bl] V. Blomer，类群 L函数在中心点处的非零性，Annales de l'Institut Fourier 54 (2004), 831-847[BB] V. Blomer, F. Brumley，环面周期的同时等分布与L函数的分数阶矩，J. Eur. Math. Soc. 26 (2024), 2745-2796[BBK] V. Blomer, F. Brumley, I. Khayutin，广义黎曼猜想下的混合猜想，Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup.，即将出版[BH] V. Blomer, G. Harcos，扭曲 L函数的混合界，《J. Reine Angew. Math.》621 (2008), 53-79；补遗，694 (2014), 241-244[BuHe] C. Bushnell, G. Henniart，GL(2)的局部朗兰兹猜想，Springer，2006。数学科学基础丛书。[CCLR] D. Chatzakos, G. Cherubini, S. Lester, M. Risager，海格纳点上的双曲圆问题，arXiv:2506.13883[Du] W. Duke，双曲分布问题与半整数权马斯形式, Invent. Math. 92 (1988), 73-90.[DFI1] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec，类群 L函数，Duke Math. J. 79 (1995), 1-56.[DFI2] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec，阿廷L函数的次凸性问题, Invent.math. 149, 489-577 (2002).[DSP] W. Duke, R. Schulze-Pillot，正定三元二次型表示整数及椭球上格点的等分布，Invent. Math. 99 (1990), 49-57.[EL] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss，齐性空间上高秩环面作用的联合，Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 129 (2019), 83-127.[EMV] J. Ellenberg, P. Michel, A. Venkatesh，林尼克遍历方法与球面上整数点的分布，载于：《自守表示与L函数》，Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math. 22 (2013), 119-185[Fo] E. Fogels，关于Hecke的 L函数的零点 I，Acta Arith. 7 (1962), 87-106[Ga] P. Gallagher， $\sigma = 1$附近的大筛密度估计，Invent. Math. 11 (1970), 329-339[Gau] C.F. Gauß，《算术研究》，Springer-Verlag，New York，1986。Arthur A. Clarke译并作序，William C. Waterhouse修订，Cornelius Greither和A. W. Grootendorst参与修订，Waterhouse作序。[GJ] S. Gelbart, H. Jacquet，GL(2) 与GL(3)的自守表示之间的关系，Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. 11 (1978), 471-542[GF] E.P. Golubeva, O.M. Fomenko，三维球面上格点的渐近分布。Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. 160 (1987), 54–71, 297（俄文）；英文译本：J. Soviet Math. 52 (1990), 3036–3048[HM] G. Harcos, P. Michel，Rankin-Selberg L函数的次凸性问题与海格纳点的等分布。II，Invent. Math. 163 (2006), 581–655.[Iw] H. Iwaniec，半整数权模形式的傅里叶系数，Invent. Math. 87 (1987), 385–401.[Kh] I. Khayutin，CM点的联合等分布，《数学纪事》189 (2019), 145-276.[KS1] H. Kim, F. Shahidi，GL_2 的对称立方 L函数是整函数，Ann. of Math. 150 (1999), 645-662.[KS2] H. Kim, F. Shahidi，对称幂的尖点性及其应用，Duke Math. J. 112 (2002), 177-197[Li] Yu. V. Linnik，球面上格点集的渐近几何性质与遍历性质，Mat. Sb. (N.S.) 85 (1957), 257–276[LMFDB] The L函数与模形式数据库：https://www.lmfdb.org/ArtinRepresentation/ 2.1965604.120.a.a[MV1] P. Michel, A. Venkatesh，等分布、 L函数与遍历理论：关于Yu. Linnik的若干问题，Intern. Congr. Math. II, 421-457, Eur. Math. Soc. 2006.[MV2] P. Michel, A. Venkatesh，GL_2, 的次凸性问题，Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 111 (2010), 17–271.[Mo] H. Montgomery，《解析数论与调和分析交汇处的十讲》，CBMS Regional Conference Series in Mathematics 84 (1994), 220页。

[RS] M. Radzwi-l-l、K. Soundararajan，椭圆曲线二次扭转的中心值矩与分布，《Invent. Math.》**202** （2015），1029–1068。[Sh] T. Shemanske，三元二次型的表示与虚二次域的类数，《太平洋数学杂志》**122** （1986），223–250。[Sk] B. F. Skubenko，单叶双曲面上整数的渐近分布与遍历定理，《苏联科学院通报·数学辑》26（1962），721–752。[So] K. Soundararajan，黎曼ζ函数的矩。《数学纪事》**170** （2009），981–993。[Te] G. Tenenbaum，解析与概率数论导论，剑桥大学出版社。[Th] J. Thorner，兰金–塞尔伯格 *L*函数的例外零点与联合*Sato–Tate*分布，《国际数学研究通报》，即将出版。[Wir] E. Wirsing，乘法函数 ¨和的渐近行为，《数学年刊》**143** （1961），75–102。[Ya] Yafaev，A. 两个志村曲线乘积上的特殊点。，《数学手稿》104，163–171（2001）。

Mathematisches Institut, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Germany电子邮箱地址：blomer@math.uni-bonn.de

Sorbonne Université, Université Paris Cité, CNRS, IMJ-PRG, F-75005 Paris, France电子邮箱地址：brumley@imj-prg.fr

Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, NY 10012, USA电子邮箱地址：maksym.radziwill@gmail.com