arXiv:2603.05635v1 [math.RA] 5 Mar 2026

关于结合环的非矩阵簇

THIAGO CASTILHO DE MELLO 和 FELIPE YUKIHIDE YASUMURA

Abstract. 我们研究含幺交换环**k**上的非矩阵代数簇。我们的结果将已知的关于**k** 为无限域时的结果推广到这一一般情形。此外，我们还将这些结果推广到不包含矩阵代数 $n \times n$ 的**k**-代数簇。

1. Introduction

满足多项式恒等式的代数具有许多与有限维代数和交换代数相同的性质。例如，存在一个适用于 PI-代数的希尔伯特零点定理版本 [2]。当我们将讨论范围限定于满足非矩阵多项式恒等式的代数时，这种联系会更加紧密：许多对交换代数成立的结果也适用于这些代数，例如，幂零元之和仍为幂零元。因此，显然，非矩阵簇是与交换代数最为相似的结合非交换代数簇。

非矩阵簇出现在Latyshev的研究工作中 [14, 15]。这些簇展现出若干值得注意的性质。值得注意的是，Kemer在其开创性成果 [12]之前，探讨了非矩阵簇与Specht性质之间的联系 [11]。此外，Latyshev证明这些代数满足希尔伯特基定理 [13]。与此相关，Billig等人 [4] 指出了满足非矩阵多项式恒等式的代数与群恒等式之间的关系，从而凸显了非矩阵簇的丰富结构。

[6, 16]的工作研究了非矩阵簇的等价表述。我们将有力地重新审视他们的发现。在将这一概念推广到非结合代数时，Shestakov与Bittencourt [17] （另见 [5]）针对特定类别的非结合代数拓宽了非矩阵簇的定义。

本文以更一般的方式研究非矩阵簇的结构，将理论扩展到**k**-代数的簇，其中**k** 是含幺诺特交换环（第 3 节）。我们还将这一构造推广到不包含固定大小矩阵代数 n的簇，并且

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16R10.*Key words and phrases.* 非矩阵簇，PI-环的簇。本工作由S˜ao Paulo研究基金会（FAPESP）资助，项目号为2025/02457-5和2024年/14914-9，以及CNPq项目号405779/2023-2。

刻画了这些高次数非矩阵簇（第 5 节）。这一定义与复杂度n的簇这一概念有关。为此，我们需要考察由 $n \times n$ 矩阵在$\mathbf{k}$ 上的多线性多项式恒等式所规定的代数的素商（第 4 节）。

2. Preliminaries

除非另有说明，本文始终假设$\mathbf{k}$ 是含幺交换环。以下引理是证明主定理的关键工具。它依赖于卡普兰斯基定理，即满足多项式恒等式的本原代数所满足的定理（例如参见 [1,第 11.2 节1]）。

引理 1. 设 $\mathscr{V}$ 为满足多项式恒等式的结合$\mathbf{k}$-代数簇，其中$\mathbf{k}$ 是含幺交换环；设 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 为本原代数。那么，要么 $\mathcal{A}$ 是一个域，要么 $\mathscr{V}$ 包含$\mathrm{M}_2(S^{-1}\bar{\mathbf{k}})$，其中$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/I$ 是整环，且 $S = \mathbf{k} \setminus \{0\}$。

证明。 设 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 为本原代数。根据卡普兰斯基定理，存在一个除$\mathbf{k}$-代数 D，使得

$$\mathcal{A} \cong \mathrm{M}_n(D) \quad \text{and} \quad \dim_{Z(D)} \mathcal{A} < \infty,$$

其中 $Z(D)$表示 D的中心。

由于 D 是一个$\mathbf{k}$-代数，因此存在一个环同态$\mathbf{k} \to D$。令$\bar{\mathbf{k}}$表示其像；则$\bar{\mathbf{k}}$ 是一个整环。此外，$\mathbf{k} \subseteq Z(D)$，因此$\mathbf{k}$ 的$\bar{\mathbf{k}}$分式域 $\mathbb{F}$ 满足 $\mathbb{F} \subseteq Z(D)$。由此可得

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathcal{A}.$$

因此，要么 $\mathcal{A} = D$，要么

$$\mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathcal{A}.$$

在后一种情况下，我们得出 $\mathbf{M_2(\mathbb{F})} \in \mathscr{V}$。

因此，我们可以假设 $\mathcal{A} = D$ 是一个除环。令 $Z = Z(D)$为其中心。如果 $D = Z$，那么 $\mathcal{A}$ 是一个域，结论即得。因此假设 $D \neq Z$。

如果 Z 是无限的，则类似于 [1, 命题 2.2.38]的证明可得

$$\mathrm{Id}(D) = \mathrm{Id}(D \otimes_Z \overline{Z}),$$

其中 $\overline{Z}$是 Z的一个代数闭包。于是代数 $D \otimes_Z Z$ 是代数闭域上的单代数，因而包含$\mathbf{M_2(\mathbb{F})}$的一个副本。因此，$\mathbf{M_2(\mathbb{F})} \in \mathscr{V}$。

最后，若 Z 是有限的，则条件$\dim_Z D < \infty$ 蕴含 D本身是一个域。□

更一般地，在素代数的背景下也有类似的结果。回顾波斯纳定理（例如参见 [9, 定理 6.5]）：如果 $\mathcal{A}$ 是素 PI $\mathbf{k}$-代数，那么其中心 $Z(\mathcal{A})$ 是非平凡的，且局部化 $S^{-1}\mathcal{A}$ 是单的，其中 $S = Z(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$。如果 $Z(\mathcal{A})$ 是有限的，那么它是一个域，并且 $S^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}$。否则，类似于经典的

无限域上的代数的论证表明， $\mathcal{A}$ 的多项式恒等式由其多齐次恒等式生成。此外， $\mathcal{A}$ 和$S^{-1}\mathcal{A}$ 满足相同的一组多齐次 k-多项式恒等式。因此，作为 k-代数， $\mathcal{A}$ 和 $S^{-1}\mathcal{A}$ 是 PI-等价的。

引理 2. 设 $\mathscr{V}$ 是满足多项式恒等式的结合 k-代数的一个簇，其中$\mathbf{k}$ 是含幺交换环，并设 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 是素代数。那么， $\mathcal{A}$ 要么是交换整环，要么 $\mathscr{V}$ 包含$\mathrm{M}_2(S^{-1}\bar{}\mathbf{k})$，其中 $\bar{}\mathbf{k} = \mathbf{k}/I$ 是整环，且 $S = \bar{}\mathbf{k} \setminus \{0\}$。

证明。根据波斯纳定理，局部化 $S^{-1}\mathcal{A}$ 是一个含幺单的k-代数，满足与 $\mathcal{A}$ 相同的多项式恒等式，其中 $S = Z(\mathcal{A})\backslash\{0\}$。特别地，它是本原代数。应用定理 1，我们得出 $S^{-1}\mathcal{A}$ 要么是交换的，要么 $\mathscr{V}$ 包含 $\mathrm{M}_2(\mathbb{F})$，其中某个域为 $\mathbb{F}$。□

对于任意k-代数 $\mathcal{A}$，令 Nil($\mathcal{A}$) 表示 $\mathcal{A}$ 中所有幂零理想的和（等价地，即 $\mathcal{A}$ 的极大幂零理想），并令 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有素理想的交。一般而言，有

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Nil}(\mathcal{A}),$$

并且当 $\mathcal{A}$ 为交换环时，二者一致。集合 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{A}$的所有强幂零元组成的集合一致。

我们将使用以下结果。

引理 3 （[1, 定理 16.1。1]）。设k 是一个有单位元的诺特交换环，且 $\mathcal{A}$ 是满足多项式恒等式的有限生成 k-代数。那么，$\mathrm{Nil}(\mathcal{A})$是幂零的。

回顾一下，雅各布森环是指每个素同态像的 Jacobson 根都是平凡的环。例如，域和 $\mathbb{Z}$ 都是雅各布森环。采用这一术语，前面的结果可以改述如下:

引理 4 ([10, 定理 1.8])。 设k 是含幺雅各布森诺特交换环，且 $\mathcal{A}$ 是有限生成的k上的 *PI*-代数。那么， $\mathcal{A}$ 的雅各布森根是幂零的。

3. Nonmatrix variety over rings

我们将非矩阵簇的刻画推广到$\mathbf{k}$-代数的情形，其中$\mathbf{k}$ 是含幺交换环。

定理 5. 设$\mathbf{k}$ 是一个含幺交换环，且 $\mathscr{V}$ 是结合$\mathbf{k}$-代数的一个簇。以下条件等价：

(i) $\mathscr{V}$ 中的每个单$\mathbf{k}$-代数都是一个域。*(ii)* 对$\mathbf{k}$的每个素同态像的分式域 $\mathbb{F}$，都有$\mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \notin \mathscr{V}$。*(iii)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，商 $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ 都是域的次直积。*(iv)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，商 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 都是交换整环的次直积。*(v)* 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$[x_1, x_2]^m \in \mathrm{Id}(\mathscr{V}).$$

(vi) 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid a \ is \ nilpotent\}.$$

(vii) 对每个有限生成的 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid a \ is \ nilpotent\}.$$

(viii) 对任意 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 以及任意幂零元 $a \in \mathcal{A}$，下列理想中至少有一个是幂零的：

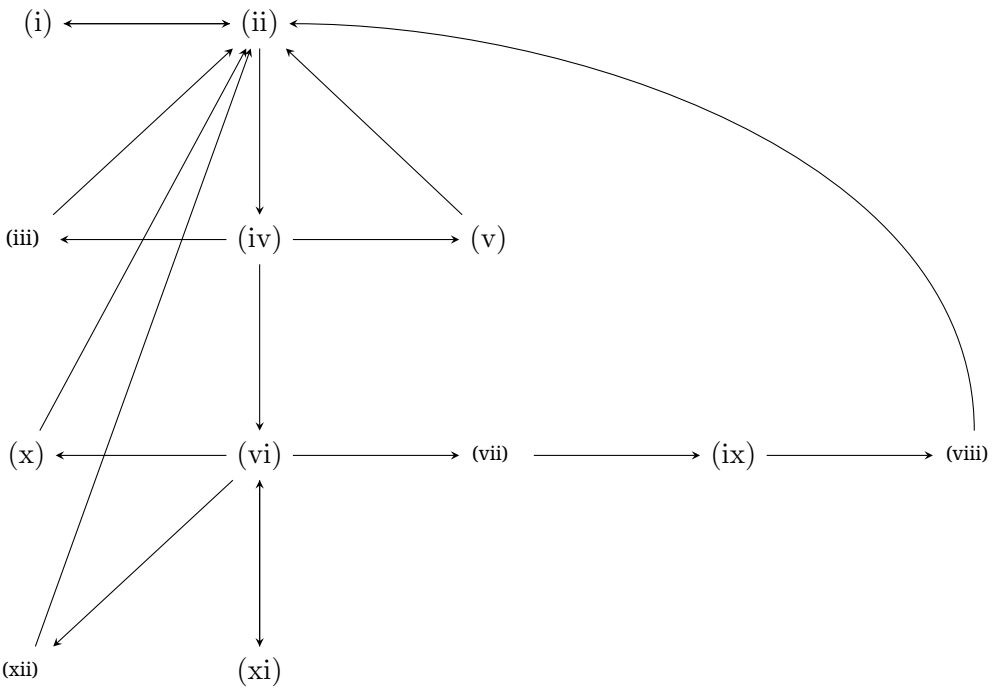
$$a\mathcal{A}, \quad a\mathcal{A} + \mathbf{k}a, \quad \mathcal{A}a, \quad \mathcal{A}a + \mathbf{k}a, \quad \mathcal{A}a\mathcal{A}, \quad \mathcal{A}a\mathcal{A} + \mathcal{A}a + a\mathcal{A} + \mathbf{k}a.$$

(ix) 对任意 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$以及任意幂零元 $a \in \mathcal{A}$，下列所有理想都是幂零的：

$$a\mathcal{A}, \quad a\mathcal{A} + \mathbf{k}a, \quad \mathcal{A}a, \quad \mathcal{A}a + \mathbf{k}a, \quad \mathcal{A}a\mathcal{A}, \quad \mathcal{A}a\mathcal{A} + \mathcal{A}a + a\mathcal{A} + \mathbf{k}a.$$

(x) 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$以及任意幂零元 $a, b \in \mathcal{A}$，元素$a + b$ 都是幂零的；*(xi)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，$\mathcal{A}$ 中的任意幂零元都是强幂零的；*(xii)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$以及幂零元 $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A}$，由 $a_1, \ldots, a_m$ 生成的子代数是幂零的。

证明。这些蕴含关系总结在下图中：



(i)⇒(ii)：这是显然的。

(ii)⇒(i)：设 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 是一个单的 $\mathbf{k}$-代数。根据定理 2， $\mathcal{A}$ 要么是交换整环，要么 $\mathscr{V}$ 包含 $\mathrm{M}_2(S^{-1}\bar{}\mathbf{k})$，其中 $\bar{}\mathbf{k}$ 是$\mathbf{k}$的一个素同态像，且$\bar{}$态地 $S = \mathbf{k} \setminus \{0\}$。根据假设，后一种情况不成立。因此， $\mathcal{A}$ 是一个单的交换整环，故为域。

(ii)⇒(iv)：众所周知， $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathcal{A})$是由素代数构成的次直积，其中每个素代数都属于 $\mathscr{V}$，并满足与其中心局部化相同的恒等式；该中心局部化是其中心上的单代数。由于 $\mathscr{V}$对任何域 $\mathbb{F}$都不包含 $\mathrm{M}_2(\mathbb{F})$，由定理 2可知，这些素代数都必须是交换整环。

(iv)⇒(v)：考虑相对自由代数$\mathbf{k}_{\mathscr{V}}\langle x_1, x_2\rangle$。那么，商$\mathbf{k}_{\mathscr{V}}\langle x_1, x_2\rangle/\mathcal{B}(\mathbf{k}_{\mathscr{V}}\langle x_1, x_2\rangle)$满足 $[x_1, x_2]$。由于 $\mathcal{B}(\mathbf{k}_{\mathscr{V}}\langle x_1, x_2\rangle$ 是幂零的，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $[x_1, x_2]^m = 0$。因此， $\mathscr{V}$满足 $[x_1, x_2]^m$。

(v)⇒(ii)：注意，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $[e_{12}, e_{21}]^n \neq 0$ 。因此，对于任意域 $\mathbb{F}$， $\mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ 不满足任何交换子多项式的幂。故 $\mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \notin \mathscr{V}$。

(iv)⇒(vi)：设 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，且 $a \in \mathcal{A}$ 为幂零元。则 $a + \mathcal{B}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 中是幂零的。由于 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 是交换整环的次直积，因此 $a + \mathcal{B}(\mathcal{A}) = 0$。故 $a \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$。

(vi)⇒(vii)：这是显然的。

(vii)⇒(ix)：设 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 且 $a \in \mathcal{A}$ 是幂零元。我们证明 $a\mathcal{A}$是幂零理想。只需证明对每个 $b \in \mathcal{A}$， ab 都是幂零元。令

$\mathcal{A}_0 = \mathbf{alg}(a,\ b)$。那么 $\mathcal{A}_0 \in \mathscr{V}$ 是有限生成的。根据假设，$\mathcal{B}(\mathcal{A}_0)$恰好由幂零元组成。由于 $a \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_0)$，可知$ab \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_0)$也成立，因此 ab 是幂零元。同样的论证适用于所有其他列出的理想。

(ix)⇒(viii)：这是显然的。

(viii)⇒(ii)：元素 $e_{12} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{F})$ 是幂零的；然而，它所生成的单边理想或双边理想均非幂零。因此，$\mathbf{M}_2(\mathbb{F}) \notin \mathscr{V}$。

(vi)⇒(x)：若 $a, b \in \mathcal{A}$ 是幂零的，则 $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$。由于 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 是一个理想，因此可得 $a + b \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$，从而 $a + b$ 是幂零的。

(x)⇒(ii)：对于任意域 $\mathbb{F}$，代数 $\mathbf{M}_2(\mathbb{F})$ 不满足 **(x)**，因为e_{12} 和 e_{21} 是幂零的，而它们的和不是。

(iv)⇒(iii)：由于 $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \subseteq J(\mathcal{A})$，商 $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 的同态像。特别地，$\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ 是交换的。因此，它是本原交换代数（即域）的次直积。

(iii)⇒(ii)：这是显然的。

(xi) $\Longleftrightarrow$ (vi)⇒(xii): clear.

(xii)⇒(ii)：元素 e_{12} 和 e_{21} 是幂零的；然而，它们在 $\mathbf{M}_2(\mathbb{F})$ 中并不生成幂零代数。□

注 6。考虑以下陈述：

(xiii) 对于每个有限生成的 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2m-1}, x_{2m}] \in \mathrm{Id}(\mathcal{A}).$$

上述陈述意味着前一个定理的 **(v)**：相对自由代数 $\mathbf{k}_{\mathscr{V}}\langle x_1,\ x_2\rangle$ 是有限生成的。因此，它满足某个形式为 $[x_1, x_2]^m = 0$ 的恒等式，其中 $m \in \mathbb{N}$。所以，$\mathscr{V}$ 满足 $[x_1, x_2]^m$。

反之，若此外$\mathbf{k}$ 是诺特的，则前一定理的 **(iv)** 蕴含上述陈述：设 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$是有限生成的。由定理 3，理想 $\mathbf{Nil}(\mathcal{A})$ 是幂零的；因此，对某个 $m \in \mathbb{N}$，有 $\mathbf{Nil}(\mathcal{A})^m = 0$ 。由于 $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{Nil}(\mathcal{A})$，从而同样有 $\mathcal{B}(\mathcal{A})^m = 0$ 。此外，$\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 是交换代数的次直积，因而满足恒等式 $[x_1, x_2] = 0$。因此，m 个交换子的乘积是 $\mathcal{A}$ 的一个多项式恒等式。

上述定理的条件*(ii)* 引出了这一术语：若簇 $\mathscr{V}$满足该条件，则称它是**非矩阵** 的。相应地，若一个$\mathbf{k}$-代数生成一个非矩阵簇，则称它满足一个非矩阵多项式恒等式 。

所有交换代数都满足条件*(vi)–(x)* 。因此，满足非矩阵多项式恒等式的代数与交换代数具有若干相同的结构性质。我们特别指出以下推论。

推论 7。 设**k** 为含幺交换环，且 $\mathcal{A}$ 是一个满足非矩阵多项式恒等式的**k**-代数。则

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{\, a \in \mathcal{A} \mid a \ \textit{is nilpotent} \,\}.$$

□

注 8. 前一推论的逆命题一般并不成立。例如，尽管实四元数代数 $\mathbb{H}$ 的幂零根是平凡的， $\mathbb{H}$ 却不满足非矩阵多项式恒等式。事实上，

$$\mathrm{Id}(\mathbb{H}) = \mathrm{Id}\big(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})\big).$$

另一方面，如果 $\mathbb{F}$ 是代数闭域且该代数有限维，那么逆命题成立。

命题 9. 设 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，并设 $\mathcal{A}$ 是有限维的 $\mathbb{F}$-代数，使得

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{\, a \in \mathcal{A} \mid a \ \textit{is nilpotent} \,\}.$$

那么 $\mathcal{A}$ 生成一个非矩阵簇。

证明. 由于 $\mathcal{A}$ 是有限维的， $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = J(\mathcal{A})$。根据阿廷–韦德伯恩定理，有

$$\mathcal{A}/J(\mathcal{A}) \cong \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{F}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_t}(\mathbb{F}).$$

若 $n_j > 1$ 对某个 j成立，则可以找到幂零元 $a,\ b \in \mathcal{A}$ ，它们的和不是幂零元。这与关于 $\mathcal{A}$的假设矛盾。因此， $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ 是交换的。

由于 $J(\mathcal{A})$ 是幂零的，因此 $\mathcal{A}$ 满足交换子的某个幂次方程。因此，根据上一条定理的条件 (v)， $\mathcal{A}$生成一个非矩阵簇。□

值得强调的是，有限维性对于上述命题至关重要。例如，代数

$$\mathcal{A} := \mathbb{F}e_{11} \oplus \mathbb{F}e_{22} \oplus \mathrm{M}_2(E'),$$

其中 E' 表示无单位格拉斯曼代数，它并不生成非矩阵簇，尽管

$$J(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_2(E') = \{\, a \in \mathcal{A} \mid a \text{ is nilpotent} \,\}.$$

将定理 5 专门应用于**k** 为雅各布森诺特环的情形，可得到如下刻画：

定理 10. 设**k** 为含幺交换雅各布森诺特环，且 $\mathscr{V}$ 是结合**k**-代数的一个簇。以下条件等价：

(i) $\mathscr{V}$ 中的每个单的 **k** 代数都是一个域；***(ii)*** 对于 **k** 的每个素同态像的分式域 $\mathbb{F}$ ，$_2(\mathbb{F}) \notin \mathscr{V}$；***(iii)*** 对于每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$， $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ 都是域的次直积；

(iv) 对于每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$， $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 都是交换整环的次直积；*(v)* 对于每个有限生成的 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，都存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2m-1}, x_{2m}] \in \mathrm{Id}(\mathcal{A});$$

（*vi*）存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $[x_1, x_2]^m \in \mathrm{Id}(\mathscr{V})$；
（*vii*）对于每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$,

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{\, a \in \mathcal{A} \mid a \ is \ nilpotent \,\};$$

（*viii*）对于每个有限生成的 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$,

$$J(\mathcal{A}) = \{\, a \in \mathcal{A} \mid a \ is \ nilpotent \,\};$$

（*ix*）对于任意 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 和幂零元 $a \in \mathcal{A}$，以下理想中至少有一个是幂零的：

$a\mathcal{A}$, $a\mathcal{A} + \mathbf{k}a$, $\mathcal{A}a$, $\mathcal{A}a + \mathbf{k}a$, $\mathcal{A}a\mathcal{A}$, $\mathcal{A}a\mathcal{A} + \mathcal{A}a + a\mathcal{A} + \mathbf{k}a$;

(x) 对任意 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$和幂零元 $a \in \mathcal{A}$，上述所有理想都是幂零的；*(xi)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$和幂零元 $a, b \in \mathcal{A}$，其和 $a + b$ 都是幂零的；*(xii)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，每个幂零元都是强幂零的；*(xiii)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$和任意幂零元 $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A}$，由 $a_1, \ldots, a_m$ 生成的子代数是幂零的。

证明。本定理的陈述与定理 5 的陈述之间唯一的区别在于条目 (viii)，其中 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 被 $J(\mathcal{A})$ 替换；但在此情形下，对于任意有限生成的 $\mathbf{k}$-代数 $\mathcal{A}$，定理 4 推出

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathrm{Nil}(\mathcal{A}) = J(\mathcal{A}),$$

并且这些等价性可直接由定理 5 和定理 6 得出。 □

对于$\mathbf{k}$ 为域（有限或无限）的特殊情形，我们有如下刻画。

定理 11. 设 $\mathbb{F}$ 是任意域，$\mathscr{V}$ 是结合$\mathbb{F}$-代数的一个簇。以下条件等价：

(i) $\mathscr{V}$ 中的每个单代数都是域；*(ii)* $\mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \notin \mathscr{V}$；*(iii)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，$\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ 都是域的次直积；*(iv)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，$\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 都是交换整环的次直积；*(v)* 对每个有限生成的 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，都存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2m-1}, x_{2m}] \in \mathrm{Id}(\mathcal{A});$$

(vi) 存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $[x_1, x_2]^m \in \mathrm{Id}(\mathscr{V})$；

(vii) 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$,

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{\, a \in \mathcal{A} \mid a \ is\ nilpotent \}$$

是 $\mathcal{A}$ 的一个理想;

（*viii*）对于每个有限生成的 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$,

$$J(\mathcal{A}) = \{\, a \in \mathcal{A} \mid a \ is\ nilpotent \};$$

（*ix*）对于任意 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 和幂零元 $a \in \mathcal{A}$，以下理想中至少有一个是幂零的：$a\mathcal{A}$、 $a\mathcal{A} + \mathbb{F}a$、 $\mathcal{A}a$、 $\mathcal{A}a + \mathbb{F}a$、 $\mathcal{A}a\mathcal{A}$、 $\mathcal{A}a\mathcal{A} + \mathcal{A}a + a\mathcal{A} + \mathbb{F}a$; （*x*）对于任意 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 和幂零元 $a \in \mathcal{A}$，上述所有理想都是幂零的;（*xi*）对于每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 以及幂零元 a、$b \in \mathcal{A}$, 和 $a + b$ 是幂零的;（*xii*）对于每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，每个幂零元都是强幂零的;（*xiii*）对于每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 以及任意幂零元 a_1、...、 $a_m \in \mathcal{A}$，由 a_1、...、 a_m 生成的子代数是幂零的。□

对基域施加限制会导出其他等价性质。

命题 12. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域， $\mathscr{V}$ 是结合 $\mathbb{F}$-代数的一个簇。若对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$, $\mathcal{A}$ 的每个 $\mathbb{F}$有限维不可约表示都是一维的，则 $\mathscr{V}$ 是一个非矩阵簇。若 $\mathbb{F}$是代数闭域，则反之亦成立。

证明. 假设 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$的每个有限维不可约表示都是一维的。那么 $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$是若干个 $\mathbb{F}$ 的次直积，并且可能包含无限维的 $\mathbb{F}$本原代数。若某个本原代数非交换，则由定理 1 可知， $\mathscr{V}$包含 $\mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ 的一个副本，从而得到一个二维表示，矛盾。因此，$\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$是若干个域的次直积，且 $\mathscr{V}$ 是一个非矩阵簇。

反过来，若 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，则对于任意 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，商$\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$是若干个域的次直积。因此， $\mathcal{A}$ 的任意不可约表示都对应于 $\mathbb{F}$的一个域扩张 $\mathbb{E}$ 。由于 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，因此 $\mathbb{E} = \mathbb{F}$ 或 $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{E} = \infty$。□

例 13. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，具有一个 n维扩张 $\mathbb{E}/\mathbb{F}$，且满足 $n > 1$。考虑由$[x, y] = 0$定义的 $\mathbb{F}$代数的非矩阵簇 $\mathscr{V}$。那么 $\mathbb{E} \in \mathscr{V}$，但它有一个 $\mathbb{F}$ 维的不可约表示 n。这表明，假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的至关重要。

命题 14. 设$\mathbf{k}$ 是含幺交换环， $\mathscr{V}$ 是结合$\mathbf{k}$-代数的一个簇。若 $\mathscr{V}$ 是非矩阵簇，则对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$以及整元 a_1、.....、 $a_m \in \mathcal{A}$，由 a_1、.....、 a_m生成的子代数是有限生成的$\mathbf{k}$-模。若$\mathbf{k}$存在无限素同态像，则逆命题也成立。

证明。 假设 $\mathscr{V}$是非矩阵簇。设 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$和 a_1、……、 $a_m \in \mathcal{A}$是整元。令 $\mathcal{A}_0 =$ alg(a_1、……、 a_m)。由定理 5.(iv), $\mathcal{A}_0/\mathcal{B}(\mathcal{A}_0)$是交换的。由于它由整元有限生成，因此它是k-整的。由于 $\mathcal{B}(\mathcal{A}_0)$是幂零的， $\mathcal{A}_0$ 是k-整的。根据 Kaplansky 定理（例如参见 [1, 定理 8.2.1]），整的 PIk-代数是局部有限生成的，因此 $\mathcal{A}_0$ 是有限生成的k-模。

反过来，设 $\mathbb{F}$ 是k的一个无限素同态像的分式域。若 $M_2(\mathbb{F}) \in \mathscr{V}$，那么由于 $\mathbb{F}$ 是无限的，$M_2(\mathbb{F}[t]) \cong M_2(\mathbb{F}) \otimes \mathbb{F}[t] \in \mathscr{V}$ 也成立。元素 $\xi_1 = te_{12}$ 和 $\xi_2 = te_{21}$ 具有整性（事实上是幂零的），但它们生成一个无限维 $\mathbb{F}$-代数，因此不能作为k-模有限生成。□

对于k为域的特殊情形，我们得到一个经典结果（例如参见 [6,命题 2]）：

命题 15. 设 $\mathbb{F}$ 为任意域， $\mathscr{V}$ 为结合$\mathbb{F}$-代数的一个簇。若 $\mathscr{V}$ 是非矩阵簇，那么对于每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$ 以及代数元 a_1、……、 $a_m \in \mathcal{A}$，由 a_1、……、 a_m 生成的子代数均为有限维。若 $\mathbb{F}$ 是无限的，则反向结论也成立。□

例 16. 设 $\mathbb{F}$是一个有限域，并考虑 $\mathscr{V} = \text{var}(M_2(\mathbb{F}))$。该簇由一个有限代数生成，因此是局部有限的。因此，任何由代数元组成的集合都生成一个有限维代数。然而，var($M_2(\mathbb{F})$)不是非矩阵簇。这表明，前一个命题中基域为无限域这一假设至关重要。

注 17. 对于给定的结合k-代数簇 $\mathscr{V}$，以下陈述等价：

(a) 存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $\mathscr{V}$满足多项式恒等式

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2m-1}, x_{2m}];$$

(b) 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，由 $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ 生成的理想都是幂零的。

此外，上述任一条件都意味着 Grassmann 代数 E 不属于 $\mathscr{V}$。已知 $\mathscr{V}$ 由有限生成代数生成，当且仅当 $G \notin \mathscr{V}$ （例如，参见 [1, 推论 20.1.4]）。因此，如果 $\mathscr{V}$由有限生成代数生成，那么这两个条件都成立。

此外，在特征 0 的域上，已知 $E \notin \mathscr{V}$意味着 $\mathscr{V}$由一个有限生成代数生成。因此，我们重新得到以排除 Grassmann 代数为条件来刻画非矩阵簇的已知等价条件（[16, 定理 6]）。

4. 非矩阵根基

在本节中，除非另有说明，我们假设k 是一个含幺交换环。

定理 10 的第 (vi) 项研究满足某个二次标准多项式幂的代数簇。已知每个 PI- 环都满足某个标准多项式的幂。我们将构造一种方法，用来衡量代数中的一个元素是否属于某个矩阵代数。

设 $\mathcal{M}$ 是一个不可约 $\mathcal{A}$-模。我们定义

$$d(\mathcal{M}) = \sqrt{\dim_{Z(\mathcal{D})} \mathcal{D}} \cdot \dim_{\mathcal{D}} \mathcal{M},$$

其中 $\mathcal{D}$:=End$_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$.

定义 18. 设 $\mathcal{A}$ 是一个k-代数，且设 $n \geq 1$。若元素 $a \in \mathcal{A}$湮灭每个满足 $d(\mathcal{M}) \leq n$ 的不可约 $Q(\mathcal{A}_0)$-模$\mathcal{M}$ ，则称其为 n-非矩阵 ，其中 $\mathcal{A}_0$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个素同态像，$Q(\mathcal{A}_0) = C(\mathcal{A}_0)\mathcal{A}_0$ 是 $\mathcal{A}_0$的中心闭包，而 $C(\mathcal{A}_0)$是其扩张中心。

n-非矩阵元的定义衡量该元素是否无法存在于阶为 $\leq n$ 的某个矩阵代数中。以下例子和命题将有助于阐明这一概念。

众所周知，Jacobson 根中的元素可以用不可约模的湮灭子来刻画。类似地， n-非矩阵元可以刻画为定理 18 中所述模的湮灭子。特别地，我们有以下结论：

引理 19. 设 $\mathcal{A}$ 是一个k-代数。对于 $\mathcal{A}$ 的任意素同态像 $\mathcal{A}_0$，以及任意不可约 $Q(\mathcal{A}_0)$-模 $\mathcal{M}$ ，若 $d(\mathcal{M}) < \infty$，则湮没子$\mathrm{Ann}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个素理想。此外，若 $\mathcal{A}$ 满足多项式恒等式，则每个素理想都可由此方式得到。

证明。假设 $\mathcal{A}_0$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个素同态像，且 $\mathcal{M}$ 是一个不可约的 $Q(\mathcal{A}_0)$-模，并满足 $d(\mathcal{M}) < \infty$。那么，商 $Q(\mathcal{A}_0)/\mathrm{Ann}_{Q(\mathcal{A}_0)}(\mathcal{M})$ 是单的，且在其中心上有限维。我们证明 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{A}_0$ 的一个素理想。

设 $a, b \in \mathcal{A}_0$ 满足 $a\mathcal{A}_0 b \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{M})$。那么

$$\begin{aligned} aQ(\mathcal{A}_0)b &= aC(\mathcal{A}_0)\mathcal{A}_0 b = C(\mathcal{A}_0)a\mathcal{A}_0 b \subseteq C(\mathcal{A}_0)\mathrm{Ann}_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{M}) \\ &\subseteq \mathrm{Ann}_{Q(\mathcal{A}_0)}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

由于 $Q(\mathcal{A}_0)/\mathrm{Ann}_{Q(\mathcal{A}_0)}(\mathcal{M})$ 是单的（因而是素的），可知 a 或 b 属于 $\mathrm{Ann}_{Q(\mathcal{A}_0)}(\mathcal{M})$。因此，$\mathrm{Ann}_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{A}_0$ 的一个素理想，从而

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} \to \mathcal{A}_0/\mathrm{Ann}_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{M}))$$

是 $\mathcal{A}$ 的素理想。

现在，假设 $\mathcal{A}$ 是多项式恒等式，并令 $I \subseteq \mathcal{A}$ 为一个素理想。由波斯纳定理， $Q(\mathcal{A}/I)$是其中心上的有限维单代数。令$\mathcal{M}$ 为一个不可约的 $Q(\mathcal{A}/I)$-模。那么 $d(\mathcal{M}) < \infty$，且 $\mathcal{M}$ 作为 $Q(\mathcal{A}/I)$-模是忠实的。因此， I =Ann$_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$。□

定义20。设 $\mathcal{A}$ 为一个**k**-代数且 $w \in \mathbb{N}$。我们将 w- 非矩阵理想 定义为

$$\mathfrak{M}_w(\mathcal{A}) := \{w\text{-nonmatricial elements of } \mathcal{A}\}.$$

此外，我们定义

$$\mathfrak{M}_\infty(\mathcal{A}) := \bigcap_{w\in\mathbb{N}} \mathfrak{M}_w(\mathcal{A}).$$

不难看出，对于 $w \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$，每个 $\mathfrak{M}_w(\mathcal{A})$ 都是一个完全 Hoehnke 根（例如参见 [8, 第 2 节1]）。此外，我们有一个理想的递降序列：

$$\mathfrak{M}_1(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{M}_2(\mathcal{A}) \supseteq \cdots$$

例21。设

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \mathrm{UBT}(1,2,3;\mathbb{F}) &= \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} \;\middle|\; A_{ij} \in \mathrm{M}_{i\times j}(\mathbb{F}) \right\} \\ &= \mathbb{F} \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{M}_3(\mathbb{F}) \oplus J.\end{aligned}$$

于是，不难看出

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}_1(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{M}_3(\mathbb{F}) \oplus J, \quad \mathfrak{M}_2(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_3(\mathbb{F}) \oplus J, \\ &\mathfrak{M}_\infty(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}_k(\mathcal{A}) = J, \quad \forall k \geq 3.\end{aligned}$$

显然，$\mathfrak{M}_\infty(\mathcal{A})$ 与定理 19 陈述中的所有模的湮灭子的交一致。此外，同一个引理还推出如下结论：

命题22. 设**k** 为含幺交换环，并设 $\mathcal{A}$ 为**k**-代数。则

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{M}_\infty(\mathcal{A}).$$

此外，若 $\mathcal{A}$ 满足多项式恒等式，则 $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}_\infty(\mathcal{A})$。 □

下面的例子表明，等式 $\mathfrak{M}_\infty(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathcal{R})$甚至对非多项式恒等式环也可能成立。

例23。设

$$\mathrm{UT} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{UT}_n(\mathbb{F})$$

为仅有有限多个非零元的无限上三角矩阵代数。显然，UT不满足多项式恒等式；然而，

$$\mathcal{B}(\mathrm{UT}) = \mathfrak{M}_1(\mathrm{UT}) = \mathfrak{M}_\infty(\mathrm{UT}).$$

下一个例子表明，$\mathfrak{M}_\infty(\mathcal{R})$ 与其他已知的根并不相同。

例 24. 设 $\mathcal{R}$是一个含幺单非阿廷环。那么 $\mathcal{R}$ 是中心闭的，且不存在满足 $d(\mathcal{M}) < \infty$的不可约模 $\mathcal{M}$ 。因此，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，每个元素 $r \in \mathcal{R}$ 都是 n-非矩阵的。于是，

$$\mathfrak{M}_\infty(\mathcal{R}) = \mathcal{R}.$$

特别地， $\mathfrak{M}_\infty(\mathcal{R})$ 与根 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$、$\mathrm{Nil}(\mathcal{R})$ 或 $J(\mathcal{R})$ 均不相同。

下一个例子表明，序列 $(\mathfrak{M}_n(\mathcal{A}))$ 不一定会稳定。

例 25. 考虑由无限递增阶数的分块上三角矩阵构成的代数，其定义如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{UBT} &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{UBT}(1,2,\ldots,n)\\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} & 0 & \cdots \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2m} & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & & \ddots & A_{mm} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ A_{ij} \in \mathrm{M}_{i\times j}(\mathbb{F}) \right\}.\end{aligned}$$

于是，UBT 的同态像可以是任意阶的矩阵代数。此外，序列

$$\mathfrak{M}_1(\mathrm{UBT}) \supsetneq \mathfrak{M}_2(\mathrm{UBT}) \supsetneq \cdots$$

并不稳定。此外， $\mathcal{B}(\mathrm{UBT}) = \mathfrak{M}_\infty(\mathrm{UBT})$。

以下例子阐明了非矩阵元的定义与代数所满足的多项式恒等式之间的联系。

例 26. 设 $\mathcal{A}$ 是 PIk-代数， $\mathcal{A}_0$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个素同态像，且 $Q(\mathcal{A}_0)$ 是其中心闭包。假设存在一个不可约的 $Q(\mathcal{A}_0)$-模 $\mathcal{M}$ ，满足 $d(\mathcal{M}) = n$。那么，对于某个域 $\mathbb{F}$ ，它是某个k的素同态像的分式域，我们有

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \in \mathrm{var}(\mathcal{A}).$$

事实上，根据波斯纳定理， $Q(\mathcal{A}_0) = Z^{-1}\mathcal{A}_0$ 是单的，且在其中心 $Z = Z(\mathcal{A}_0)$ 上有限维。如果 Z 是无限的，那么 $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_0) = \mathrm{Id}(Q(\mathcal{A}_0))$。否则， Z 是一个域，且 $Q(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0$。因此，

$$Q(\mathcal{A}_0) \in \mathrm{var}(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathrm{var}(\mathcal{A}).$$

此外，它包含该映射的像

$$Q(\mathcal{A}_0) \to \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}),$$

其中 $\mathcal{D} = \mathrm{End}_{Q(\mathcal{A}_0)}(\mathcal{M})$。由于$\dim_{\mathcal{D}} \mathcal{M} < \infty$，稠密性定理保证该映射是满射。因此，$\mathrm{var}(\mathcal{A})$包含$\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}) \cong \mathrm{M}_k(\mathcal{D})$，其中 $k = \dim_{\mathcal{D}} \mathcal{M}$。由此可得

$$\mathrm{M}_{kr}(Z(\mathcal{D})) \in \mathrm{var}(\mathcal{A}),$$

其中 $r = \sqrt{\dim_{Z(\mathcal{D})} \mathcal{D}}$。最后，由于 $Z(\mathcal{D})$ 是一个 $\mathbf{k}$-代数，它包含 $\mathbf{k}$ 的 ˆ 素同态像$\mathbf{k}$ 。因此，

$$\mathrm{M}_{kr}(\mathbb{F}) \in \mathrm{var}(\mathcal{A}),$$

ˆ 其中 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbf{k}$ 的分式域。

我们将次数为 k 的标准多项式记为 st_k。根据 Amitsur-Levitzki 定理（例如参见 [1, 第 10.1 节1]），$\mathrm{M}_n(\mathbf{k})$ 满足 st_{2n}。此外，我们将描述 $\mathcal{A}/\mathfrak{M}_n(\mathcal{A})$ 的多项式恒等式。

命题 27。设 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathbf{k}$-代数。那么 $\mathcal{A}/\mathfrak{M}_n(\mathcal{A})$ 满足 st_{2n}（以及 $\mathrm{M}_n(\mathbf{k})$ 所满足的任何其他多线性多项式恒等式）。此外，存在一个序列 $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_t \leq n$ 以及交换半素 $\mathbf{k}$-代数 $\mathcal{C}_1$、.....、 $\mathcal{C}_t$，使得

$$\mathrm{Id}(\mathcal{A}/\mathfrak{M}_n(\mathcal{A})) = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{Id}(\mathrm{M}_{n_i}(\mathcal{C}_i)).$$

特别地，如果$\mathbf{k} = \mathbb{F}$ 是无限域，那么对于某个 $n' \leq n$，$\mathrm{Id}(\mathcal{A}/\mathfrak{M}_n(\mathcal{A})) = \mathrm{Id}(\mathrm{M}_{n'}(\mathbb{F}))$。

证明。由定理 19，代数 $\mathcal{A}/\mathfrak{M}_n(\mathcal{A})$ 是若干与 $\mathrm{M}_m(\mathbb{F})$ PI-等价的素代数的次直积，其中某个 $m \leq n$ 和某个$\mathbf{k}$-代数 $\mathbb{F}$ 是域。由于每个 $\mathrm{M}_m(\mathbb{F})$ 都满足 $\mathrm{M}_n(\mathbf{k})$ 的所有多线性多项式恒等式，证明完毕。□

特别地，我们得到以下判据，用于确定一个阿廷代数是否满足多项式恒等式：

注记 28。设 $\mathcal{A}$ 是一个阿廷$\mathbf{k}$-代数。那么， $\mathcal{A}$ 满足多项式恒等式，当且仅当

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}_\infty(\mathcal{A}).$$

事实上，定理 22 告诉我们，若 $\mathcal{A}$满足多项式恒等式，则等式成立。反过来，由于 $\mathcal{A}$ 是阿廷的， $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 是幂零的。此外，对于某个 $n \in \mathbb{N}$， $\mathfrak{M}_\infty(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}_n(\mathcal{A})$。因此，结合定理 27， $\mathcal{A}$ 满足标准多项式的某个幂。

注意，非 PI 除环 $\mathcal{D}$ 是阿廷的，然而 $\mathcal{B}(\mathcal{D}) \neq \mathfrak{M}_\infty(\mathcal{D})$。此外，定理 23 表明，前一个命题中的阿廷条件是必要的。

非矩阵理想的另一种描述如下。

命题 29. 理想 $\mathfrak{M}_n(\mathcal{A})$ 是最小的半素理想 $K \subseteq \mathcal{A}$，使得 $\mathcal{A}/K$ 满足 $\mathrm{M}_n(\mathbf{k})$的所有多线性多项式恒等式。

证明. 根据定理 19， $\mathfrak{M}_n(\mathcal{A})$ 是一个半素理想。首先，设 $P \subseteq \mathcal{A}$是一个素理想，使得 $\mathrm{Id}(\mathcal{A}/P)$ 满足 $\mathrm{Id}(\mathrm{M}_n(\mathbf{k}))$ 的所有多线性多项式恒等式。于是 $Q(\mathcal{A}/P)$ 存在一个不可约模 $\mathcal{M}$，满足 $d(\mathcal{M}) \leq n$。特别地， $\mathfrak{M}_n(\mathcal{A})$ 中的任意元素都会湮灭 $\mathcal{M}$。这意味着 $\mathfrak{M}_n(\mathcal{A}) \subseteq P$。

现在，设 $K = \bigcap_{P\in\Lambda} P$ 是一个半素理想，并满足以下条件：$\mathrm{Id}(\mathrm{M}_n(\mathbf{k}))$ 中的多线性多项式都属于 $\mathrm{Id}(\mathcal{A}/K)$。那么，$\mathcal{A}/K$ 是代数 $\{\mathcal{A}/P\}_{P\in\Lambda}$ 的次直积。每个 $\mathcal{A}/P$ 都满足 $\mathrm{M}_n(\mathbf{k})$ 的所有多项式恒等式，因此每个 P 都包含 $\mathfrak{M}_n(\mathcal{A})$。由此可知， K 也包含 $\mathfrak{M}_n(\mathcal{A})$。□

例 30。 设 $\mathbf{k} = \mathbb{F}$ 是一个域。我们有 $\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$，因此

$$\mathrm{Id}(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})) \subseteq \mathrm{Id}(\mathrm{UT}_n(\mathbb{F})).$$

然而，由于 $\mathfrak{M}_n(\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}))$ 是严格上三角矩阵集，因此我们有

$$\mathfrak{M}_n(\mathrm{UT}_n(\mathbb{F})) \not\subseteq \{0\}.$$

因此，定理 29 中的半素性条件不可省略。

由此，我们得到当 $\mathbf{k} = \mathbb{F}$ 是特征为零的域时，矩阵代数的多项式恒等式 T-理想的如下刻画。

命题 31. 设$\mathbf{k} = \mathbb{F}$ 是一个特征零域，且 X 是一个可数无限集。那么，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{F}\langle X\rangle) = \mathrm{Id}(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})).$$

对于任意集合 X，也有类似的结果。

证明. 由定理 27,

$$\mathrm{Id}(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})) \subseteq \mathrm{Id}(\mathbb{F}\langle X\rangle/\mathfrak{M}_n(\mathbb{F}\langle X\rangle)).$$

因此，$\mathrm{Id}(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})) \subseteq \mathfrak{M}_n(\mathbb{F}\langle X\rangle)$。

反过来，设 $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{F}\langle X\rangle)$。那么 a 会消去每个不可约$Q(\mathcal{A}_0)$-模 $\mathcal{M}$，其中 $d(\mathcal{M}) \leq n$，而 $\mathcal{A}_0$ 是 $\mathbb{F}\langle X\rangle$的一个素同态像。因此， a 在 $\mathbb{F}\langle X\rangle$的每个满足 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 的所有恒等式的素同态像中都为零。特别地， a 属于每个同态 $\mathbb{F}\langle X\rangle \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$的核。因此， $a \in \mathrm{Id}(\mathrm{M}_n(\mathbb{F}))$。□

5. On varieties not containing matrix algebras of higher order

在陈述我们的主要结果之前，先回顾复杂度的定义：

定义32 ([3]). 一个$\mathbf{k}$-代数簇 $\mathscr{V}$ 称为具有复杂度$n \geq 0$ ，如果 n 是使得$\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \in \mathscr{V}$的最大整数，其中 $\mathbb{F}$ 是$\mathbf{k}$的某个单同态像，而 $\mathscr{V}$ 是由 $\mathscr{V}$的齐次多项式恒等式生成的簇。

最后，我们得到定理 5 的如下推广。

定理33。 设**k** 为含幺交换环， $\mathscr{V}$为结合**k**-代数的一个簇，并固定 $n \in \mathbb{N}$。以下断言等价:

(i) $\mathscr{V}$ 中的每个单 *k*-代数的维数相对于其中心至多为 $(n-1)^2$; *(ii)* 对于 *k* 的素同态像的每个分式域 $\mathbb{F}$ ， $M_n(\mathbb{F}) \notin \mathscr{V}$; *(ii')* 对于 *k* 的每个单同态像， $M_n(\mathbb{F}) \notin \mathscr{V}$; *(iii)* 对于每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$， $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ 是单代数的次直积，这些单代数的维数相对于其中心至多为 $(n-1)^2$; *(iv)* 对于每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$， $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 是素代数的次直积$\mathcal{P}$，其中 $\dim_C C\mathcal{P} \leq (n-1)^2$ ，且 C 是 $\mathcal{P}$ 的扩张中心; *(v)* 存在 $m \in \mathbb{N}$， 使得 $st^{2(n-1)}(x_1, \ldots, x_{2n-2})^m \in Id(\mathscr{V})$; *(vi)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$,

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ is } (n-1)\text{-nonmatricial}\};$$

(vii) 对每个有限生成的 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$,

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ is } (n-1)\text{-nonmatricial}\};$$

(viii) 对任意 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$和$(n-1)$-非矩阵元 $a \in \mathcal{A}$，下列理想中至少有一个是幂零的： $a\mathcal{A}$, $a\mathcal{A}+k a$, $\mathcal{A}a$, $\mathcal{A}a + ka$, $\mathcal{A}a\mathcal{A}$,$\mathcal{A}a\mathcal{A} + \mathcal{A}a + a\mathcal{A} + ka$; *(ix)* 对任意 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$和$(n-1)$-非矩阵元 $a \in \mathcal{A}$，上述所有理想都是幂零的; *(x)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$和$(n-1)$-非矩阵元 a， $b \in \mathcal{A}$, $a+b$都是幂零的; *(xi)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$， $\mathcal{A}$ 中的每个$(n-1)$-非矩阵元都是幂零的; *(xii)* 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$以及元素 $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A}$，若 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ 中长度至多为 $n-1$ 的所有元素乘积都是幂零的，则由 $a_1, \ldots, a_m$ 生成的子代数是幂零的;

(xiii) 簇 $\mathscr{V}$ 的复杂度为 $< n$。

证明。 $(i) \Rightarrow (ii)$: 显然。

以下推论可由定理 5 的证明类似地得出:

$$(ii) \Rightarrow (i), \quad (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (ii).$$

$(iv) \Rightarrow (vi)$: 设 $a \in \mathcal{A}$是 n-非矩阵的。假设 $a \notin \mathcal{B}(\mathcal{A})$。那么存在 $\mathcal{A}$ 的一个素同态像 $\mathcal{A}_0$ ，使得 a的像非零。由 (iv) 可知，每个不可约的 $Q(\mathcal{A}_0)$-模 $\mathcal{M}$ 都满足 $d(\mathcal{M}) \leq n-1$。这与 $(n-1)$-非矩阵的定义矛盾。因此,

$$\{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ is } (n-1)\text{-nonmatricial}\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{A}).$$

反向结论由定理 19 得出。$(vi) \Rightarrow (vii)$:

显然。$(vii) \Rightarrow (ix)$: 与定理 5 中相同。

$(ix) \Rightarrow (viii)$: 显然。

$(viii) \Rightarrow (ii)$: 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 中，元素 e_{11} is $(n-1)$-非矩阵，但它生成的理想都不是幂零的。

$(vi) \Rightarrow (x)$: 与定理 5 相同。

$(x) \Rightarrow (ii)$: 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 中，元素 e_{12} 和 e_{21} 是$(n-1)$-非矩阵的，但 $e_{12}+e_{21}$ 不是幂零的。

$(iv) \Rightarrow (iii)$: 每个本原 PI 代数都是单的，其中心等于其扩张中心。此外，$\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 的一个商。（

$iii) \Rightarrow (ii)$: C晰。

$(vi) \Rightarrow (xi)$: 显然。

$(xi) \Rightarrow (ii)$: 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 中，每个元素都是 $(n-1)$-非矩阵的，但并非每个元素都是幂零的。

$(ii) \Rightarrow (ii') \Rightarrow (xiii)$: 由定理32可知，这一点是显然的，因为 $\overline{\mathscr{V}} \subseteq \mathscr{V}$。

$(xiii) \Rightarrow (xii)$: 结论由 [18] 得出（另见 [3, 定理 1]）。

$(xii) \Rightarrow (ii)$: 令 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbf{k}$ 的某个素同态像的分式域。因此，元素 e_{12}、.....、$e_{n-1,\ n}$、$e_{n1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 满足假设；然而，它们生成的代数并非幂零代数。因此，$\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \notin \mathscr{V}$。□

注 34. 考虑以下陈述:

(xiv) 对于每个有限生成的 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，都存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$\mathrm{st}_{2(n-1)}(x_1, \ldots, x_{2n-2}) \cdots \mathrm{st}_{2(n-1)}(x_{2(m-1)(n-1)+1}, \ldots, x_{2m(n-1)}) \in \mathrm{Id}(\mathcal{A});$$

与定理 6 类似，上述陈述蕴含定理33中的任一陈述。此外，如果$\mathbf{k}$ 是诺特的，那么定理33中的任一陈述都蕴含上述陈述。目前尚不清楚在不假设诺特性的情况下，(xiv) 是否与其他陈述等价。

定义35. 若簇 $\mathscr{V}$ 满足定理33中关于数 n的任一等价条件，则称其为 n-非矩阵簇。

显然，如果一个簇是 n-非矩阵的，那么对于每个$m \geq n$，它也是 m-非矩阵的。当且仅当一个簇中的所有代数都是幂零代数时，该簇才是 1-非矩阵的。

注 36. 按照约定，平凡簇是 0-非矩阵的，而所有结合代数构成的簇是 ∞-非矩阵的。因此，任意结合$\mathbf{k}$-代数簇对于某个 $n \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$都是 n-非矩阵的。

确实，设 $\mathscr{V}$ 是一个真簇，且 $\mathcal{F}_{\mathscr{V}} := \mathbf{k}_{\mathscr{V}}\langle X \rangle \in \mathscr{V}$ 是由无限多个变量生成的自由代数。那么，$\mathcal{F}_{\mathscr{V}}/\mathcal{B}(\mathcal{F}_{\mathscr{V}})$ 是素 PI-代数的次直积。根据波斯纳定理，这些代数中的每一个都与某个矩阵代数 PI-等价，且这些矩阵的阶数有一个最大值 n 作为上界。因此，$\mathrm{st}_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{\mathscr{V}})$。

由于贝尔根中的每个元素都是幂零的，因此存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $(\mathrm{st}_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}))^m = 0$。因此，$\mathrm{st}_{2n}^m \in \mathrm{Id}(\mathscr{V})$，并且由定理33的 (vi)，我们得出结论：$\mathscr{V}$ 是一个 $(n+1)$-非矩阵簇。

将定理14推广到 n-非矩阵簇的情形，得益于 I.P. Shestakov 提出的一个猜想，该猜想由 V.A. Ufnarovskii[18],回答，随后由 A.Ya. Belov 推广：

命题37. 设$\mathbf{k}$ 是含幺交换环， $\mathscr{V}$ 是结合$\mathbf{k}$-代数的一个簇。若 $\mathscr{V}$ 是 n-非矩阵簇，则对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$及元素 $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A}$，如果 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ 中长度至多为 $n-1$ 的所有元素乘积都具有整性，那么由 $a_1, \ldots, a_m$生成的子代数是$\mathbf{k}$-有限生成的。若$\mathbf{k}$ 包含一个无限素同态像，则反向结论也成立。

证明。 这由 [7] （另见 [3, 定理 1]）可得。反向命题与定理14的反向命题以及定理33中 (xii)⇒(ii) 的证明类似。 □

注 38。 与定理17一样，对于给定的结合$\mathbf{k}$ 代数簇 $\mathscr{V}$ ，以下陈述等价:

(a) 存在 $m \in \mathbb{N}$ ，使得 $\mathscr{V}$ 满足

$$\mathrm{st}_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) \cdots \mathrm{st}_{2n}(x_{2(m-1)n+1}, \ldots, x_{2mn});$$

(b) 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，由其生成的理想

$$\mathrm{st}_{2n}(\mathcal{A}) := \{\mathrm{st}_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n}) \mid a_1, \ldots, a_{2n} \in \mathcal{A}\}$$

是幂零的;

(c) 对每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}$，在 $\mathcal{A}$ 中所有同态 $\mathbf{k}\langle X\rangle \to \mathcal{A}$ 下，Id(M$_n$(**k**)) 的像所生成的理想都是幂零的。

若 $\mathscr{V}$ 由有限生成代数生成，则上述所有结论均成立。此外，其中任意一条都意味着 Grassmann 代数不属于 $\mathscr{V}$。

若 $\mathbf{k}$ 是特征零域，则当且仅当 $\mathscr{V}$ 不包含 Grassmann 代数时， $\mathscr{V}$ 才由有限生成代数生成。因此，这些等价关系提供了一个判据，用于刻画特征零域上不包含 Grassmann 代数的 n-非矩阵簇。

Acknowledgments

第一作者访问巴里大学期间完成了本项工作的部分内容。作者谨此感谢巴里大学给予的支持以及所营造的富有启发性的学术氛围。

作者谨向伊万·帕夫洛维奇·谢斯塔科夫教授致谢，感谢他所进行的宝贵讨论。

References

[1] E. Aljadeff, A. Giambruno, C. Procesi, A. Regev, *Rings with polynomial identities and finite dimensional representations of algebras*. 美国数学会讨论会出版物 66. 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2020年。[2] S.A. Amitsur, *A generalization of Hilbert's Nullstellensatz*,《美国数学会会刊》**8** （1957年），649–656。[3] A.Ya. Belov, *On a Shirshov basis of relatively free algebras of complexity n* （俄文），《数学文集》**135** （1988年），373–384。译文:《苏联数学文集》**63** （1988年），363–374。[4] Y. Billig, D. Riley, V. Tasi´c, *Nonmatrix varieties and nil-generated algebras whose units satisfy a group identity*,《代数杂志》() **190** 1997 241 252 ，–。

[5] V. Bittencourt, *Variedades não matriciais em certas classes de álgebras não associativas* 2016 。博士论文（IME-USP），。[6] G. ˇCekanu, *On local finiteness in varieties of associative algebras*, 《苏联数学文集》**41**（1982年），181–201。[7] G. ˇCekanu, *Independence and quasiregularity in algebras*, 《科学院院报》。**337**。俄罗斯科学院，1994年。[8] J. Gardner, R. Wiegandt, *Radical theory of rings*。CRC出版社，2003年。[9] V. Drensky, E. Formanek, *Polynomial Identity Rings*, 《高级数学课程》。巴塞罗那CRM，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2004年。[10] A. Kanel-Belov, L. Rowen, *The Braun-Kemer-Razmyslov Theorem for affine PI-algebras* ˇ **21** 2020 89 128 ，《切比雪夫文集》（），–。[11] A. Kemer, *Nonmatrix varieties*, 《代数与逻辑》**19**（1980年），157–178。[12] A. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*。《数学译丛》，**87**，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1991年。[13] V. Latyshev, *Generalization of the Hilbert Theorem on the finiteness of bases*, 《西伯利亚数学杂志》**7**（1966年），1112–1113。[14] V. Latyshev, *Complexity of nonmatrix varieties of associative algebras. I*, 《代数与逻辑》**16**（1977年），98–122。[15] V. Latyshev, *Complexity of nonmatrix varieties of associative algebras. II*, 《代数与逻辑》**16**（1977年），122–133。[16] S. Mishchenko, V. Petrogradsky, A. Regev, *Characterization of nonmatrix varieties of associative algebras* **182** 2011 337 348 ，《以色列数学杂志》（），–。[17] I. Shestakov, V. Bittencourt, *Nonmatrix varieties of nonassociative algebras*, 《代数与逻辑》，**62**（6）（2024年），532–547。[18] V.A. Ufnarovskii, *An independence theorem and its consequences*（俄文），《数学文集》**128**，（1985年）124–132。译文：《苏联数学文集》**56**（1985年），121–129。

Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo, SãoJosé dos Campos, SP, Brazil*Email address*: tcmello@unifesp.br

Department of Mathematics, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brazil*Email address*: fyyasumura@ime.usp.br