arXiv:2603.05657v1 [math.AC] 5 Mar 2026

悬挂下边理想的代数不变量

SELVI KARA 和 DALENA VIEN

Abstract. 本文的核心问题是：边理想的代数不变量在自然图运算下如何变化？我们从悬挂的角度研究这一问题。图的（完全）悬挂是通过添加一个与原图每个顶点都相邻的新顶点得到的；文献中对这一构造已有充分研究。鉴于正则性在完全悬挂下保持不变，而投射维数则达到最大值，我们将这一构造推广为选择性悬挂，即新顶点只与指定的顶点子集相连。我们关注两种极端情形：极小顶点覆盖和极大独立集。对于任意图在极小顶点覆盖上的悬挂，正则性保持不变，投射维数增加 1。此外，独立多项式以可控的方式变化，使我们能够追踪覆盖悬挂下的 $\mathfrak{a}$ 不变量。相比之下，在极大独立集上的悬挂一般不具有类似的统一性质。因此，我们分析路径和圈，并给出完整描述：投射维数总是增加 1；除了一类唯一的极端路径族外，正则性和 $\mathfrak{a}$ 不变量均保持不变，而在该路径族中，这两个不变量都增加 1。

1. Introduction

边理想为观察组合交换代数中的以下广泛主题提供了丰富的研究场域：图编码代数信息，而对图进行有结构的修改，能够使相应理想的同调不变量发生可控变化。给定一个顶点集为 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 的有限简单图 G，其边理想

$$I(G) = (x_i x_j : \{x_i, x_j\} \in E(G)) \subseteq R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$$

是一个平方自由单项式理想。 $R/I(G)$ 的极小自由分解同时反映了 G 的组合结构以及其独立复形 $\Delta(G$的拓扑性质；例如，参见 [6,10, 14, 19]。该领域的一个核心问题是理解图运算如何影响分次贝蒂数，以及 Castelnuovo–Mumford 正则性 $\operatorname{reg}(R/I(G))$ 和投射维数 $\operatorname{pdim}(R/I(G))$ 等相关代数不变量。这一视角补充了大量关于这些不变量与图参数及诱导子结构之间关系的研究；例如，参见 [5, 9, 11, 12, 22]。

本文通过研究图的悬挂来探讨这一问题。图 G 的经典（完全）悬挂 G ，是通过添加一个与 G的每个顶点相邻的新顶点得到的。悬挂提供了一种将 G 的环面边环与 G 的边理想的 Rees 代数联系起来的方法（见[10, 13]）。更一般地， S-悬挂 G^S 的概念是针对独立集 S定义的：通过添加一个与 $V(G)$ 中所有顶点相邻的新顶点 $\setminus S$得到，该概念由 [11] 引入。等价地，这种构造是添加一个与某个（不一定是极小）顶点覆盖相邻的新顶点。

受这些构造的启发，我们在一个统一的通用框架中进行研究。给定一个图$G = (V, E)$和一个子集 $\mathcal{C} \subseteq V$，我们通过添加一个顶点 z并将 z 与 $\mathcal{C}$ 中的每个顶点相连（且不与其他顶点相连），构造一个新图 $G(\mathcal{C})$。我们称 $G(\mathcal{C})$ 为 G 的 $\mathcal{C}$-悬挂，并将 z 称为悬挂顶点。如果 $\mathcal{C}$ 是一个顶点覆盖，那么 $G(\mathcal{C})$ 与 [11] 的S-悬挂一致（取 $S = V \setminus \mathcal{C}$）。在理想这一侧，这对应于

$$I\big(G(\mathcal{C})\big) \;=\; I(G) + (zx_i : x_i \in \mathcal{C}) \subseteq S := R[z].$$

我们的目标是理解：这种在给定邻域的情况下受控地添加单个顶点，会如何改变商环的三个分次不变量：正则性、投射维数和 $\mathfrak{a}$-不变量。 $\mathcal{C} = V$ 的情形恢复了悬挂 G，可作为这些不变量行为的基准。随后，我们转向 $\mathcal{C}$的两种典型选择，它们处于相反的极端且彼此互补：极小顶点覆盖和极大独立集。在极小顶点覆盖上进行悬挂会对所有图产生统一的影响，而在极大独立集上进行悬挂则可能取决于底层图。我们的结果表明，这种敏感性已经出现在路径中：除路径的唯一极值构型外，其行为都是刚性的。

在研究极小顶点覆盖上的悬挂时，我们证明了正则性保持不变，而投射维数增加一（定理 3.5 ）。此外，独立多项式会增加一个明确的加性项，这使我们能够追踪重数 $M(G)$ 作为 -1 的独立多项式的一个根（该概念在 [2] 中引入），从而比较 $\mathfrak{a}$– 不变量；见命题 3.6。这种在顶点覆盖上的悬挂曾在[11]中得到研究，研究表明，在任意顶点覆盖（不一定是极小顶点覆盖）上进行悬挂时，正则性保持不变。在我们的语境中，使用极小顶点覆盖对于证明投射维数结果至关重要。

在极小顶点覆盖情形之外，悬挂的结果可能高度依赖于所选的$\mathcal{C}$。我们证明，这种依赖性在极大独立集的情形下就已出现，并对圈和路径给出完整分析。对于圈，以任意极大独立集进行悬挂都会保持正则性和 $\mathfrak{a}$不变量，并使投射维数增加 1（定理4.7 和4.9）。对于路径，投射维数同样总是增加 1，而正则性和 $\mathfrak{a}$不变量保持不变，唯一极值构型除外（当 $n \equiv 1$ （模 3）且 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$时），此时两个不变量都增加 1（定理5.3、5.5和5.7）。

从技术角度看，证明结合了霍赫斯特公式与诱导子复形，并运用两种互补工具：对于涉及锥的并，使用 Mayer–Vietoris；对于圈和路径情形下最高维同调的精确控制，则使用离散 Morse 理论 [7, 16, 17]。从概念角度看，选择性悬挂是一种易于处理的图运算，既能展现刚性，也能揭示精确阈值，因此是理解局部图结构如何传递至同调数据的一种有效方法。

结构安排。 第2节汇集后文所需的背景材料及文献中的相关结果。第3节展开完全悬挂以及顶点覆盖上的悬挂；特别地，证明了定理3.5，表明在极小顶点覆盖上作悬挂会使投射维数增加一。第4 节专门讨论圈，并证明定理4.7 与4.9；宽辐条情形（当 $n \equiv 0$ （模 3）且极大独立集的大小为$\lceil \frac{n}{3} \rceil$时）在第4.1节中借助离散 Morse 理论处理。第5 节讨论

路径，并证明定理5.3、5.5 与5.7，其中包括唯一极值构型。最后，第6 节以这些结果所提示的进一步方向与问题作结。

2. Preliminaries

全文中，$G=(V,E)$表示顶点集为 $V=\{x_1,\dots,x_n\}$的有限简单图，$R=\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ 是标准分次多项式环。对于 $W\subseteq V$，我们用 $G|_W$表示其在 W上的诱导子图；对于 $v\in V$，我们记 $G-v:=G|_{V\setminus\{v\}}$。我们在固定域 $\Bbbk$上使用约化~同调 $H_*(-;\Bbbk)$。

2.1. 图、边理想与独立复形。

定义 2.1. 若子集 $X\subseteq V$ 中的顶点在G中两两不相邻，则称其为独立集。G的独立数为

$$\alpha(G):=\max\{|X|:X\subseteq V \text{ is independent}\}.$$

定义 2.2. 若子集 $\mathcal{M}\subseteq V$ 中的每条边都与 G 的至少一个顶点 $\mathcal{M}$关联，则称其为顶点覆盖。若一个顶点覆盖不包含任何同样为顶点覆盖的真子集，则称其为极小顶点覆盖。

补运算将独立集与顶点覆盖联系起来：$X\subseteq V$是独立集，当且仅当 $V\setminus X$ 是顶点覆盖。特别地，如果 X 是极大独立集，那么$V\setminus X$ 是极小顶点覆盖。

定义 2.3。G 的边理想是平方自由单项式理想

$$I(G)=(x_ix_j:\{x_i,x_j\}\in E)\ \subseteq\ R.$$

定义 2.4。$I(G)$的大高度为

$$\operatorname{bight} I(G):=\max\{\operatorname{ht}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}\text{ is a minimal prime of }I(G)\}.$$

等价地，bight $I(G)$是 G的极小顶点覆盖的最大基数。

引理 2.5。$\dim(R/I(G))=\alpha(G)$。

证明。$I(G)$的极小素理想与极小顶点覆盖相对应：若 C 是极小顶点覆盖，则 $\mathfrak{p}_C:=(x_i:x_i\in C)$是 $I(G)$的一个极小素理想，且每个极小素理想都由此方式得到。因此

$$\dim(R/I(G))=n-\operatorname{ht}(I(G))=n-\min\{|C|:C\text{ is a vertex cover}\}.$$

如上所述，最小顶点覆盖的大小等于 $n-\alpha(G)$，因此 $\dim(R/I(G))=\alpha(G)$。 □

定义 2.6。G的独立复形是单纯复形

$$\Delta(G)=\{X\subseteq V:X\text{ is independent in }G\}.$$

$\Delta(G)$ 的极小非面恰好是 G 的边。因此，$\Delta(G)$ 的 Stanley–Reisner 理想为 $I_{\Delta(G)}=I(G)$。特别地，

$$R/I(G)\ \cong\ \Bbbk[\Delta(G)].$$

此外，诱导子图与诱导子复形相对应：

$$\Delta(G)|_W=\Delta(G|_W)\qquad(W\subseteq V).$$

2.2. 分次贝蒂数、正则性与霍赫斯特公式。对于有限生成的分次 R-模 M，我们用 $\beta_{i,j}(M)$ 表示其分次贝蒂数，并定义

$$\operatorname{pdim} M := \max\{i : \beta_{i,j}(M) \neq 0 \text{ for some } j\},$$
$$\operatorname{reg} M := \max\{j - i : \beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

我们反复 地使用以下来自短正合列的标准界。

Lemma 2.7. 给定有限生成分次 R-模的短正合列 s

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

则有

(a) 投射维数 $B \leq \max\{$投射维数 A，投射维数 $C\}$，(b) 投射维数 $A \leq \max\{$投射维数 B，投射维数 $C-1\}$，(c) 投射维数 $C \leq \max\{$投射维数 $A+1$，投射维数 $B\}$，(d) 正则性 $B \leq \max\{$正则性 A，正则性 $C\}$，(e) 正则性 $A \leq \max\{$正则性 B，正则性 $C+1\}$，(f) 正则性 $C \leq \max\{$正则性 $A-1$，正则性 $B\}$。

引理 2.8. 设 $J \subseteq R$ 是一个齐次理想，且设 z 是一个变量。短正合列

$$0 \longrightarrow R/(J : z)(-1) \xrightarrow{\cdot z} R/J \longrightarrow R/(J, z) \longrightarrow 0$$

推出

$$\operatorname{reg} R/J \leq \max\{\operatorname{reg} R/(J, z),\ \operatorname{reg} R/(J : z) + 1\}.$$

此外，如果正则性 $R/(J, z) \neq$ 正则性 $R/(J : z) + 1$，那么等式中的较大者成立 .

注释 2.9。（霍赫斯特公式）设 Δ 是顶点集为 $V = \{1, \ldots, n\}$ 的单纯复形，并且 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$。则

$$\beta_{i,j}(R/I_\Delta) = \sum_{\substack{W \subseteq V \\ |W|=j}} \dim_\Bbbk \widetilde{H}_{j-i-1}(\Delta|_W; \Bbbk),$$

其中， $\Delta|_W$ 表示 W 上的诱导子复形。

Rem理 2.10。对于有限图 G，霍赫斯特公式和 $I_{\Delta(G)} = I(G)$ 给出 e

~(a) 正则性 $R/I(G) = 1 + \max\{r : H_r(\Delta(G|_W); \Bbbk) \neq 0$ 对某个 $W \subseteq V(G)\}$， ~
(b) 投射维数 $R/I(G) = \max\{|W| - 1 - r : H_r(\Delta(G|_W); \Bbbk) \neq 0$ 对某个 $W \subseteq V(G)\}$.

注 2.11. 由 [5, 命题 4.7.] 可知

$$\operatorname{pdim} R/I(G) \geq \operatorname{bight} I(G)$$

若 G_1 与 G_2 是 图，我们用 $G_1 \sqcup G_2$ 表示它们的不交并，并用 K_2 表示单条边 .

引理 2.12. 对于有限图 G_1 与 G_2，存在一个自然同构 m

$$\Delta(G_1 \sqcup G_2) \cong \Delta(G_1) * \Delta(G_2),$$

其中 $*$ 表示单纯复形连接。特别地， $\Delta(K_2) \cong S^0$，若 G 是由 k 条边构成的不交并，则

$$\Delta(G) \cong (S^0)^{*k} \simeq S^{k-1}.$$

证明。 $G_1 \sqcup G_2$ 中的独立集由其在 G_1 和 G_2上的限制唯一确定，且每个限制都是一个独立集。因此可得到与该连接的同构，参见例如 [16, 18]。关于 K_2 以及边的不交并的结论可通过归纳法得到，并结合以下事实：$(S^0)^{*k}$ 是一个维数为 $k-1$的球面。 □

注 2.13. 注意， S^{k-1} 可视为交叉多胞体的边界。

我们还将用到文献中的以下著名结果 .

引理 2.14. 设 G 是一个有限简单图。若 G 可写成图 G_1、……、G_s的不交并（其顶点集两两不相交），则

$$\operatorname{reg} R/I(G) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{reg} R_i/I(G_i),$$

其中 $R_i = \Bbbk[V(G_i)]$。

引理 2.15。设 H 是一个图，并固定一个子集 $C \subseteq V(H)$。设 G 是由 H 添加一个新顶点 z，并将 z 与 C 中的每个顶点相连（且不与其他顶点相连）所得到的图。那么

$$\Delta(G) = \Delta(H) \cup \big(z * \Delta(H|_{V(H)\setminus C})\big),$$
$$\Delta(H) \cap \big(z * \Delta(H|_{V(H)\setminus C})\big) = \Delta(H|_{V(H)\setminus C}).$$

证明。 G 中的一个独立集要么不包含 z （因此是 H 的一个独立集），要么包含 z；在后一种情况下，它只能使用 $V(H)\setminus C$ 中的顶点。这就给出了所述的并集描述，而交集由 H 中不含 C 的独立集构成。□

2.3. 离散 Morse 匹配。在本小节中，我们回顾[7] 中的离散 Morse 理论基本术语，并记录我们关于路径和圈的独立复形所需的具体结论。

定义 2.16（离散 Morse 匹配）。设 X 是一个有限单纯复形，并令$\mathcal{F}(X)$ 为其按包含映射排序的面偏序集。 $\mathcal{F}(X)$ 的哈斯图中，每个面对应一个顶点；当 $\dim(\tau) = \dim(\sigma) + 1$ 时， $\sigma \subset \tau$ 之间有一条边。

M 在 $\mathcal{F}$（X）上的匹配是哈斯图中边的一个集合，其中 X 的每个面在 M中至多与一条边关联。我们按如下方式为哈斯图中的每条边定向：

- 如果这条边未匹配，则将其向上定向，从一个面指向其余面；
- 如果该边是匹配边，即 $(\sigma, \tau) \in M$与 $\sigma \subset \tau$匹配，我们就将其定向为向下，从 τ指向σ。

如果匹配 M 是无圈的（或称莫 Morse 匹配），则称其为无圈匹配；这表示由此得到的有向图不含有向圈。与 M 的任何边都不关联的 X 的面，称为临界面（或临界胞腔）。

定理 2.17。*[7, 定理 7.3 和 8。2]* 设 X 是一个配备了无环匹配 M 的有限单纯复形，其面偏序集上有该匹配。则存在一个 CW 复形 Y，与 X 同伦等价，并且恰有一个 p胞腔对应于每个临界 p单形 M。

此外，X 的同调由链复形 $C_*^M(X)$ 计算，其中第 p 个链群是以临界 p单形为基的自由 $\mathbb{k}$ 向量空间，其边界映射由临界胞腔之间梯度路径的带符号计数定义。

我们还将用到这样的性质：无环匹配限制到子复形后仍为无环匹配。

引理 2.18。设 $Y \subseteq X$ 是一个子复形，且 M 是 X上的一个无环匹配。考虑匹配 $M|_Y$，它是将 M 限制到两个面都属于 Y的那些匹配对后得到的。则 $M|_Y$是 Y 上的一个无环匹配。

特别地，对 M 临界的 Y 的每个面也都对 $M|_Y$ 临界。

证明。限制 $M|_Y$ 显然是 Y 的面偏序集上的一个匹配。Y 的定向哈斯图中的任意有向圈也会是 X 的定向哈斯图中的有向圈，这与 M 的无圈性矛盾。因此，$M|_Y$ 是无圈的。□

2.4. 图的独立多项式。

定义 2.19。图 G 的独立多项式为

$$P_G(x) := \sum_{i=0}^{\alpha(G)} g_i x^i,$$

其中，g_i 是 G 中基数为 i 的独立集的数量。（特别地，$g_0 = 1$ 统计空独立集。）

注 2.20。定义 2.19 中的多项式 $P_G(x)$ 在文献中还有其他名称。Prodinger–Tichy 在 [21] 中将图的斐波那契数定义为独立集的总数；用我们的记号表示，这就是 $P_G(1)$。在此工作的基础上，Hopkins–Staton 在 [15] 中定义了 G 的斐波那契多项式，并证明它展开为 $\sum_{k\geq 0} F_k(G)x^k$，其中 $F_k(G)$ 统计了 G [15, 的 k 元独立集（命题 4]）。比较系数可知，他们的斐波那契多项式恰好就是我们的独立多项式 $P_G(x)$（其中 $F_k(G) = g_k$）。最后，“独立多项式”一词通常归因于 Gutman–Harary 在 [8] 中的工作。

注 2.21。本文中会反复提及的一些常见独立多项式包括：

- 单个顶点的独立多项式：$1 + x$；
- K_2（单条边）的独立多项式：$P_{K_2}(x) = 1 + 2x$。

定义 2.22。设 $v \in V$。 v 的开邻域为

$$N(v) := \{u \in V : \{u, v\} \in E\},$$

且闭邻域为 $N[v] := N(v) \cup \{v\}$。

以下是独立多项式的一个标准递推关系。

引理 2.23。设 G 是一个有限简单图，且 $v \in V(G)$。那么

$$P_G(x) = P_{G-v}(x) + xP_{G-N[v]}(x).$$

回顾一下，我们用 P_n 表示具有 n 个顶点的路径，用 C_n 表示具有 n 个顶点的圈。

注 2.24。 应用引理 2.23于路径和圈，可得到以下递推关系

(a) $P_{P_n}(x) = P_{P_{n-1}}(x) + xP_{P_{n-2}}(x)$,
(b) $P_{C_n}(x) = P_{P_{n-1}}(x) + xP_{P_{n-3}}(x)$.

以下闭式可通过求解注记 2.24(a) 中的线性递推，并代入注记2.24(b) 得到。

引理 2.25. P_n 和 C_n 的独立多项式可写成以下闭式

$$P_{P_n}(x) = \frac{1}{2^{n+1}s}\Big((1+2x+s)(1+s)^n + (s-1-2x)(1-s)^n\Big),$$
$$P_{C_n}(x) = \frac{1}{2^n}\Big((1+s)^n + (1-s)^n\Big),$$

其中 $s = \sqrt{1+4x}$。

下一个 $P_G(x)$ 不变量（亦即 G）由 [2] 在 h-多项式次数的背景下引入。它将有助于我们的 $\mathfrak{a}$-不变量计算。

定义 2.26. 设 G是一个独立多项式为 $P_G(x)$ 的图。定义

$$M(G) := \operatorname{ord}_{x=-1} P_G(x),$$

$x = -1$ 作为 $P_G(x)$的根的重数。

注 2.27. 已在 [2, 定理 4.4]中证明

$$\deg h_{R/I(G)}(t) = \alpha(G) - M(G).$$

此外，由 [3, 定理 3.2] 和 [2, 注 2.10] 还可推出： $M(G) = 0$ 当且仅当 $P_G(-1) \neq 0$。

对于 $\mathfrak{a}$-不变量，我们采用以下希尔伯特级数约定：设$\Bbbk$是一个标准分次 A -代数，其维数为 d，将其希尔伯特级数写作

$$\operatorname{Hilb}_A(t) = \frac{h_A(t)}{(1-t)^d},$$

其中 $h_A(t)$是一个多项式，并令 $\mathfrak{a}(A) := \deg h_A(t) - d$。

注 2.28. 回顾 [2, 注 4.5] ， $\mathfrak{a}(R/I(G)) = -M(G)$.

3. Suspension operations from the literature

本节回顾文献中关于图的两种密切相关的悬挂构造（参见 [10, 11]）。在总结相关已知结果后，我们证明本节的主要结果：对一个极小顶点覆盖进行悬挂会使投射维数增加一。

设 $G = (V, E)$ 为一个图，且令 $\mathcal{C} \subseteq V$。我们用 $G(\mathcal{C})$ 表示从 G 出发添加一个新顶点 z，并将 z 与 $\mathcal{C}$ 中的每个顶点相连（且不与其他顶点相连）所得到的图。我们感兴趣的两种悬挂是：

- 完全悬挂 $G = G(V)$，其中 z 与 G 的每个顶点都相邻；
- 覆盖悬挂 $G(\mathcal{C})$，其中 $\mathcal{C}$ 是 G 的一个极小顶点覆盖。

在全文中，我们取 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$，其中 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$，并令 $S := R[z]$。

3.1. 完全悬挂。 G 的完全悬挂 G 的边理想为

$$I(\widehat{G}) \;=\; I(G) + (zx_i : x_i \in V) \;\subseteq\; S.$$

我们首先回顾文献中的以下结论，它描述了 $I(G)$ 和 $I(G)$ 的分次贝蒂数之间的关系（参见 [20, 引理 3.1]）。

定理 3.1. 对所有 $i, j \geq 0$，我们有：

(1) 若 $j > i + 1$，则

$$\beta_{i,j}\big(S/I(\widehat{G})\big) \;=\; \beta_{i,j}\big(R/I(G)\big) + \beta_{i-1,j-1}\big(R/I(G)\big).$$

(2) 若 $j = i + 1$ 且 $i \geq 1$，则

$$\beta_{i,i+1}\big(S/I(\widehat{G})\big) \;=\; \beta_{i,i+1}\big(R/I(G)\big) + \beta_{i-1,i}\big(R/I(G)\big) + \binom{n}{i},$$

其中 $n = |V(G)|$。特别地，$\beta_{0,\,1}(S/I(G)) = 0$。

因此可得以下结果，它描述了 $I(G)$ 的正则性和投射维数与 $I(G)$ 的正则性和投射维数之间的关系。

推论 3.2. 我们有 $\operatorname{reg} S/I(G) = \operatorname{reg} R/I(G)$ 和 $\operatorname{pdim} S/I(G) = n$.

我们还可以将 $I(G)$ 和 $I(G)$ 的希尔伯特级数联系起来。

注 3.3. 如上所述，$\Delta(G) = \Delta(G) \cup \{z\}$ 具有不相交的顶点集。对于顶点集互不相交的单纯复形 Δ, Δ'，有

$$\operatorname{Hilb}_{\Bbbk[\Delta \cup \Delta']}(t) = \operatorname{Hilb}_{\Bbbk[\Delta]}(t) + \operatorname{Hilb}_{\Bbbk[\Delta']}(t) - 1$$

（例如，参见 [20, 命题 4.9]）。将此应用于 $\Delta' = \{z\}$ 可得

$$\operatorname{Hilb}_{S/I(\widehat{G})}(t) = \operatorname{Hilb}_{R/I(G)}(t) + \frac{t}{1-t} = \frac{h_{R/I(G)}(t) + t(1-t)^{d-1}}{(1-t)^d}$$

其中 $\operatorname{Hilb}^{R/I(G)}(t) = \underline{h_{R/I(G)}(t)}\,(1-t)^d$ 满足 $d = \dim(R/I(G)) = \alpha(G)$。

$\widehat{}$最后，我们讨论 $\mathfrak{a}$-不变量与 $I(G)$和 $I(G)$之间的关系。回顾一下，对于任意有限简单图 G，都有$\mathfrak{a}(R/I(G)) \leq 0$ 。

推论 3.4。我们有

$$\mathfrak{a}(S/I(\widehat{G})) \;=\; \deg\big(h_{R/I(G)}(t) + t(1-t)^{d-1}\big) \;-\; d.$$

特别地，

$$\mathfrak{a}(S/I(\widehat{G})) = \begin{cases} 0, & \mathfrak{a}(R/I(G)) < 0, \\ 0 \text{ or a negative integer}, & \mathfrak{a}(R/I(G)) = 0. \end{cases}$$

此外，若 $\mathfrak{a}(R/I(G)) = 0$ ，且 $h_{R/I(G)}(t)$ 的首项系数满足 $[t^d]h_{R/I(G)}(t) \neq (-1)^d$，则 $\mathfrak{a}(S/I(\widehat{G})) = 0$。

$\widehat{}$证明。利用注 3.3 和 $\dim(S/I(G)) = d$，通过次数比较即可得出结论。由于 $t(1-t)^{d-1}$ 的次数为 d，当 $\deg h_{R/I(G)}(t) > d$ 时，分子的次数为 $\deg h_{R/I(G)}(t)$；若 $\deg(h_G) < d$，则为 d。当 $\deg h_{R/I(G)}(t) = d$ 时， t^d 项中的消去恰好在 $[t^d]h_{R/I(G)}(t) = (-1)^d$ 时发生，使次数低于 d ，从而 $\mathfrak{a}(S/I(\widehat{G})) < 0$。□

3.2. 极小顶点覆盖上的悬挂。设 G 是一个具有 n 个顶点且没有孤立顶点的有限简单图，并设 $\mathcal{C}$ 是 G 的一个极小顶点覆盖。那么

$$I(G(\mathcal{C})) \;=\; I(G) + (zx_i : x_i \in \mathcal{C}) \;\subseteq\; S.$$

令 $U := V(G) \setminus \mathcal{C}$ 和 $u := |U|$。由于 $\mathcal{C}$ 是顶点覆盖， U 是独立集。

注意，悬挂 $G(\mathcal{C})$，其中 $\mathcal{C}$ 是顶点覆盖，是 S– 悬挂 [11]（取 $S = V(G)\setminus\mathcal{C}$）的特殊情形。因此，(a) 部分中的正则度保持对每个 顶点覆盖 $\mathcal{C}$ 均由 [11, 引理 1.5], 得出，这里不再重复证明。相比之下，据我们所知，文献中此前尚未出现关于 (b) 部分中投射维数的相应结论。因此，我们给出 (b) 的证明，该证明本质上依赖于 $\mathcal{C}$的极小性。对极小性的这种依赖也促使我们随后研究在独立集上的悬挂；我们将其视为顶点覆盖（S-悬挂）框架的一个互补方向。

定理 3.5。我们有

(a) $\operatorname{reg} S/I(G(\mathcal{C})) = \operatorname{reg} R/I(G)$,

(b) $S/I(G(\mathcal{C}))$ 的投射维数 $=$ $R/I(G)$ 的投射维数 $+1$。

证明。考虑标准短正合列

$$0 \longrightarrow S/(I(G(\mathcal{C})) : z)(-1) \xrightarrow{\cdot z} S/I(\widehat{G}) \longrightarrow S/(I(\widehat{G}), z) \longrightarrow 0.$$

由于 z 不出现在 $I(G)$ 中，因此我们有 $I(G) : z = I(G)$，并且

$$(I(G(\mathcal{C})) : z) \;=\; I(G) + (x_i : x_i \in \mathcal{C}).$$

由于 $\mathcal{C}$ 是一个顶点覆盖， $I(G)$ 的每个生成元 x_ix_j 都能被某个 $x_i \in \mathcal{C}$ 整除。因此$I(G) \subseteq (x_i : x_i \in \mathcal{C})$，从而

$$(I(G(\mathcal{C})) : z) = (x_i : x_i \in \mathcal{C}).$$

此外，我们有 $(I(G(\mathcal{C}))\ z) = (I(G)\ z)$。

(a) 该结果由[11, 引理 15]得出。

(b) 注意到

$$\operatorname{pdim} S/(I(G), z) = \operatorname{pdim} R/I(G) + 1,$$
$$\operatorname{pdim} S/(I(G(\mathcal{C})) : z) = \operatorname{pdim} R/(x_i : x_i \in \mathcal{C}) = |\mathcal{C}|.$$

由于 $\mathcal{C}$ 是一个极小顶点覆盖，因此有 $|\mathcal{C}| \leq$ 大高度 $I(G) \leq$ 投射维数 $R/I(G)$，由注 2.11可知。于是，引理 2.7(a) 给出

$$\operatorname{pdim} S/I(G(\mathcal{C})) \leq \max\{\operatorname{pdim} R/I(G) + 1, |\mathcal{C}|\} = \operatorname{pdim} R/I(G) + 1.$$

对于反向不等式，令 $p =$ 投射维数 $R/I(G)$。设 $\Delta = \Delta(G)$ 且 $\Delta' = \Delta(G(\mathcal{C}))$。~根据注 2.10(b)，存在 $W \subseteq V(G)$ 和 $r \geq 0$，使得 $H_r(\Delta|_W) \neq 0$ 且 $p = |W| - r - 1$。令 W': $= W \cup \{z\}$ 且 $K := U \cap W$，其中 $U = V(G) \setminus \mathcal{C}$。

不包含 z 的 $\Delta'|_{W'}$ 的面恰好是 $\Delta|_W$ 的面。包含 z 的面恰好是满足 $F \subseteq K$ 的 $\{z\} \cup F$。因此

$$\Delta'|_{W'} = \Delta|_W \cup (z * 2^K) \qquad \text{and} \qquad \Delta|_W \cap (z * 2^K) = 2^K$$

其中 2^K 是以 K 为顶点集的满单形。先假设 $K \neq \emptyset$。由于 2^K 是一个单形，而~ ~ $z * 2^K$ 是一个锥，因此二者都是可缩的。于是对所有 $i \geq 0$，都有 $H_i(2^K) = H_i(z * 2^K) = 0$。由于下面 Mayer–Vietoris 序列的外项均为零

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_r(2^K) \longrightarrow \widetilde{H}_r(\Delta|_W) \oplus \widetilde{H}_r(z * 2^K) \longrightarrow \widetilde{H}_r(\Delta'|_{W'}) \longrightarrow \widetilde{H}_{r-1}(2^K) \longrightarrow \cdots$$

~ ~我们有 $H_r(\Delta'|_{W'}) \cong H_r(\Delta|_W) \neq 0$。

若 $K = \emptyset$，则包含 z 的唯一面是 $\{z\}$ 和 $\Delta'|_{W'} = \Delta|_W \sqcup \{z\}$。在这种情况下~在度数 ≥ 1 上的约化同调保持不变，而对于 $r = 0$，H_0~的维数增加 1。特别地，非零性得以保持。因此 $H_r(\Delta'|_{W'}) \neq 0$ 在所有情况下均成立。由注 2.10(b) 可得

$$\operatorname{pdim} S/I(\widehat{G}) \geq |W'| - r - 1 = p + 1 = \operatorname{pdim} R/I(G) + 1.$$

^因此投射维数 $S/I(G)$ = 投射维数 $R/I(G)$ + 1。 □

命题 3.6。回想 $U = V(G) \setminus \mathcal{C}$ 且 $u = |U|$。

(a) 我们有

$$M(G(\mathcal{C})) = \begin{cases} M(G), & M(G) < u, \\ u, & M(G) > u, \\ \geq u, & M(G) = u. \end{cases}$$

等价地，$M(G(\mathcal{C})) = \min\{M(G)\ u\}$，除非 $M(G) = u$，在这种情况下消去可能增加重数。此外，$M(G(\mathcal{C})) > u$ 成立当且仅当 $M(G) = u$ 且下面的常数项 $q(0)$ 等于 1。

^(b) 若 $\mathfrak{a}(R/I(G)) > -u$ 则 $\mathfrak{a}(S/I(G)) = \mathfrak{a}(R/I(G))$，而若 $\mathfrak{a}(R/I(G)) < -u$ 则~$\mathfrak{a}(S/I(G)) = -u$。

证明。由于 U 是独立的， $G(\mathcal{C})$ 的一个独立集要么不包含 z （因此是 G 的一个独立集），要么包含 z，此时可通过任意一个 U 的子集补全。因此

$$P_{\widehat{G}}(x) = P_G(x) + x(1+x)^u.$$

写出 $y := 1+x$，并在 $y=0$ 附近展开 $P_G(x)$。然后 $P_G(x) = y^m q(y)$，其中 $m = M(G)$ 且 $q(0) \neq 0$，并且

$$P_{G(\mathcal{C})}(x) = y^m q(y) + (y-1)y^u.$$

若 $m < u$，则 $P_{G(\mathcal{C})}(x) = y^m Q(y)$，其中 $Q(y) = q(y) + y^{u-m}(y-1)$，且 $Q(0) = q(0) \neq 0$。因此 $M(G(\mathcal{C})) = m$。若 $m > u$，则 $P_{G(\mathcal{C})}(x) = y^u Q'(y)$，其中 $Q'(y) = y^{m-u}q(y) + y - 1$ 且 $Q'(0) = -1 \neq 0$。因此 $M(G(\mathcal{C})) = u$。若 $m = u$，则 $P_{G(\mathcal{C})}(x) = y^u\big(q(y) + y - 1\big)$ 的阶至少为 u，且当且仅当 $q(0) = 1$ 时严格大于 u。这就证明了 (a)。

命题 (b) 由 $\mathfrak{a}(R/I(H)) = -M(H)$（对于 $H = G$， $G(\mathcal{C})$ 根据注 2.28，并将其与 (a) 结合即可得到。□

4. Suspension over maximal independent sets: cycles

本节限于研究圈及其在极大独立集上的悬挂。我们将具有 n 个顶点的圈记为 C_n，并从 $n \equiv 0$ （模 3）的情形开始；此外，还将在一类特定的极大独立集上进行悬挂。与一般情形相比，这一情形需要一组不同的论证，因此值得单独讨论。下一小节将全面发展圈的一般理论。

4.1. 一个特殊的悬挂情形：带有宽辐条的圈。本小节研究 C_n，其中 $n \equiv 0$ （模 3）。我们尤其关注将 C_n 悬挂在其某个具有最小大小 $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ 的极大独立集上的情形。注意到，这样的极大独立集恰好是以下这些：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k-2}\},\\ \mathcal{C}_2 &= \{x_2, x_5, \ldots, x_{3k-1}\},\\ \mathcal{C}_3 &= \{x_3, x_6, \ldots, x_{3k}\}.\end{aligned}$$

在本小节余下部分，我们沿用上文引入的记号。注意，由于对称性，任何 $\mathcal{C}_i$-悬挂的 C_n for $i = 1,2,3$ 都是等价的。因此，本节余下部分我们聚焦于 $\mathcal{C}_1$-悬挂的 C_n for。

定义 4.1. 设 $G := C_n(\mathcal{C}_1)$ 是 $\mathcal{C}_1$-悬挂的 C_n，满足

$$I(G) = I(C_n) + (zx_i : x_i \in \mathcal{C}_1) \subseteq S = R[z].$$

当 $n \equiv 0$ (模 3) 时，我们称图 G 为带宽辐条的 n 圈 .

本节的目标是证明，从 C_n 转到 G 时，正则性保持不变。在此之前，我们先设定记号，然后回顾并建立证明所需的一些有用引理。

记号 4.2. 令 H 表示 C_{3k} 在 $W := V(C_{3k}) \setminus \mathcal{C}_1$ 上的诱导子图。H 的边为 $\{x_{3i-1}, x_{3i}\}$，其中 $i = 1, \ldots k$。因此， H 是不交并，由 k 条边组成。

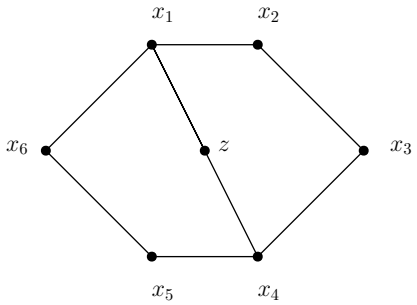


FIGURE 1. 6带宽辐条的圈

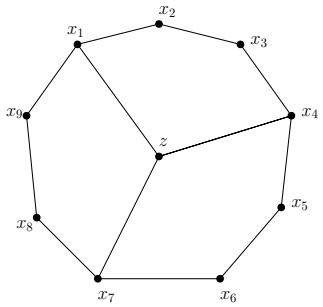


FIGURE 2. 9带宽辐条的圈

考虑独立复形

$$\Delta := \Delta(C_{3k}), \qquad A := \Delta\big(H\big),$$

以及单纯复形的包含映射 $i\colon\ A \hookrightarrow \Delta$。

Let

$$\sigma_1 := \{2, 5, 8, \ldots, 3k-1\}, \qquad \sigma_2 := \{3, 6, \ldots, 3k\}.$$

注意， σ_1 和 σ_2 是 $A \subset \Delta$ 的面，因为 $\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_3$ 分别是 H和 C_{3k}中的极大独立集。

对于该圈的独立复形，我们采用 Kozlov 所给出的离散 Morse 描述，其出处为 [17, 18]。

引理 4.3. 在设定 *4.2* 的情形下，我们有

$$\Delta \simeq S^{k-1} \vee S^{k-1}.$$

此外，在 Δ 的面偏序集上存在一个无环匹配 M_Δ ，使得:

(1) M_Δ 没有维数为 $\geq k$的临界单形；并且

(2) 唯一的临界（$k-1$）-单形恰好是 σ_1 和 σ_2。

~因此，$H_{k-1}(\Delta;\mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^2$，其基由 σ_1 和 σ_2的类表示。

证明。 针对 $\Delta(C_n)$的离散 Morse 匹配构造见 [18, 命题 5。2] 和 [17,命题 11。17]。由 Kozlov 的工作可知，对于 $n = 3k$， $\Delta(C_n)$恰有两个临界（$k-1$）-单形，且更高维数上没有临界单形。因此， $\Delta(C_{3k})$同伦等价于两个（$k-1$）-球面的楔和，证明见[17, 18]。

如有必要，通过旋转圈的标记方式，Kozlov 的匹配所产生的两个临界胞腔恰好是（$k-1$）面 σ_1和 σ_2设置 4.2中的面。将相应的莫 Morse 匹配记为 M_Δ。设 $C_*^{M_\Delta}$（Δ）为与 M_Δ 相关的莫斯复形。由于~H_{k-1}（Δ； $\mathbb{k}$） $\simeq \mathbb{k}^2$，定理 2.17 表明:

$$\widetilde{H}_{k-1}(\Delta;\mathbb{k}) \ \cong\ C_{k-1}^{M_\Delta}(\Delta) \ \cong\ \mathbb{k}\cdot\sigma_1 \ \oplus\ \mathbb{k}\cdot\sigma_2,$$

~并且 σ_1 和 σ_2 的同调类构成 $H_{k-1}(\Delta;\mathbb{k})$ 的一组基。 □

现在我们说明包含映射 $i\colon A \hookrightarrow \Delta$ 如何与这些匹配及其产生的最高维同调相互作用。

命题 4.4。 在设置 *4.2*的情形下，包含映射

$$i\colon A \hookrightarrow \Delta$$

诱导出一个非零同态

$$i_\star : \widetilde{H}_{k-1}(A;\Bbbk) \longrightarrow \widetilde{H}_{k-1}(\Delta;\Bbbk).$$

特别地，由于 $\dim_{\Bbbk} H_{k-1}(A;\Bbbk) = 1$，映射 $i_\star$ 是单射。

证明。 将引理 M_Δ 中的匹配 4.3 限制到子复形 A 上，得到一个匹配M_A 在 A上。由引理 2.18， M_A 是 A上的无环匹配。面 σ_1 和 σ_2 位于 A中，并且在 M_Δ中未匹配。因此，它们也是 $k-1$-单形的临界 M_A。此外，注意到 M_A 没有维数为 $\geq k$ 的临界单形，因为 M_Δ 没有任何此类临界胞腔。

设 $C_*^{M_A}(A)$ 和 $C_*^{M_\Delta}(\Delta)$ 分别为与 M_A 和 M_Δ 相关联的莫斯复形。在次数 $k-1$ 中，我们有

$$C_{k-1}^{M_A}(A) \;\cong\; \Bbbk\cdot\sigma_1 \;\oplus\; \Bbbk\cdot\sigma_2,$$

因为这些恰好是 M_A 的临界 $(k-1)$–面。莫斯微分

$$\partial_{k-1}^{M_A}\colon C_{k-1}^{M_A}(A) \longrightarrow C_{k-2}^{M_A}(A)$$

是某个 $\Bbbk$–由梯度路径确定的线性映射。由于 $H_{k-1}(A;\Bbbk) \cong \Bbbk$ 由引理2.12以及 $C_k^{M_A}(A) = 0$，我们有

$$\dim_{\Bbbk} \ker \partial_{k-1}^{M_A} = 1.$$

因此，存在 a、 $b \in \Bbbk$，满足$(a,b) \neq (0,0)$，使得

$$\partial_{k-1}^{M_A}(a\sigma_1 + b\sigma_2) = 0.$$

因此，$\ker \partial_{k-1}^{M_A}$ 由 $a\sigma_1 + b\sigma_2$张成。相应的同调类 s

$$[\omega] := [a\sigma_1 + b\sigma_2] \in \widetilde{H}_{k-1}(A;\Bbbk)$$

是 $H_{k-1}(A;\Bbbk)$的一个生成元。

由于 M_Δ 在维数 $\geq k$中没有临界单形，我们有 $C_k^{M_\Delta}(\Delta) = 0$。此外，$C_{k-1}^{M_\Delta}(\Delta) \cong \Bbbk\cdot\sigma_1 \oplus \Bbbk\cdot\sigma_2$ 且 $\widetilde{H}_{k-1}(\Delta;\Bbbk) \cong \Bbbk^2$ 由引理 4.3。因此 $\partial_{k-1}^{M_\Delta} = 0$，且 σ_1 与 σ_2 的类构成 $H_{k-1}(\Delta;\Bbbk)$的一个基。

包含映射 $i\colon A \hookrightarrow \Delta$ 在莫斯复形之间诱导出一个链映射

$$i_\star\colon C_*^{M_A}(A) \longrightarrow C_*^{M_\Delta}(\Delta),$$

在次数 $k-1$ 上，该映射就是包含映射

$$i_\star\colon \Bbbk\cdot\sigma_1 \oplus \Bbbk\cdot\sigma_2 \hookrightarrow \Bbbk\cdot\sigma_1 \oplus \Bbbk\cdot\sigma_2,$$

它将 σ_j 映射到在 Δ 中视为同一个单形的对象，其中 $j = 1$，2。因此，我们得到

$$i_\star([\omega]) \;=\; [a\sigma_1 + b\sigma_2] \;\in\; \widetilde{H}_{k-1}(\Delta;\Bbbk) \;\cong\; \Bbbk^2.$$

由于 $[\sigma_1], [\sigma_2]$ 是 $H_{k-1}(\Delta;\Bbbk)$ 的基，且 $(a,b) \neq (0,0)$，因此 $i_\star([\omega]) \neq 0$。所以， $i_\star$ 是 H_{k-1} 上的非零映射，并且它是单射。□

定理 4.5. 设 G 为具有宽辐条的 n 圈。那么

$$\operatorname{reg} S/I(G) = \operatorname{reg} R/I(C_n).$$

证明。 由 [1, 定理 52] 可得正则性 $R/I(C_{3k}) = k$。由于 C_{3k} 是 G的诱导子图，因此 $k =$正则性 $R/I(C_{3k}) \leq \leqslant$ 正则性 $S/I(G)$。剩下要证明正则性 $S/I(G) \leq k$。

对于正则性 $S/I(G$的这个上界，我们使用备注 2.10 （a）：

$$\operatorname{reg} S/I(G) = 1 + \max\{r : \widetilde{H}_r(\Delta(G|_W)) \neq 0 \text{ for some } W \subseteq V(G)\}.$$

我们的目标是证明，对于任意 $W \subseteq V(G)$，都有 $\widetilde{H}_r(\Delta(G|_W)) = 0$ 当 $r \geq k$。

令 $\Delta^0 = \Delta(G)$，使得 $\Delta^0|_W = \Delta(G|_W)$。按照设置 4.2 和引理 2.15中的记号，我们有

$$\Delta^0 = \Delta \cup c(A)$$

其中 $c(A)$ 是锥 $z \star A$，其顶点为 z，满足 $\Delta \cap c(A) = A$。

~ ~如果 $z \notin W$，那么 $W \subseteq V(C_n)$ 且 $G|_W = C_n|_W$。因此，对于 $r \geq k$，有 $H_r(\Delta(G|_W)) \cong H_r\,\Delta(C_n|_W) = 0$，并且对于任意 $W \subseteq V(C_n)$，因为 正则性 $R/I(C_n) = k$。

如果 $z \in W$，令 $W = T \cup \{z\}$。则

$$\Delta^0|_W = \Delta|_T \cup c(A|_T)$$

其中 $\Delta|_T = \Delta(C_n|_T)$ 和 $A_T = \Delta(H|_{T\cap V(H)})$。

以下观察将在证明的后续部分中发挥作用：

- 由于 $C_n|_T$是 C_n的诱导子图，因此有 正则性 $R/I(C_n|_T) \leq$正则性 $R/I(C_n) = k$。~这意味着，对于 $r \geq k$， $H_r(\Delta|_T) = 0$。
- 我们有 $A_T = \Delta(H')$，其中 $H' = H|_{T\cap V(H)}$。于是，正则性 $R/I(H') \leq$正则性 $R/I(H) \leq$ 正则性 $R/I(C_n) = k$，因为 H' 是 H 的诱导子图（而 H 本身又是 C_n的诱导~子图）。因此，对于 $r \geq k$，可得 $H_r(A|_T) = 0$。

将这两个观察应用于下面的 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_r(A|_T) \xrightarrow{i_\star} \widetilde{H}_r(\Delta|_T) \longrightarrow \widetilde{H}_r(\Delta^0|_W) \longrightarrow \widetilde{H}_{r-1}(A|_T) \longrightarrow \cdots$$

~我们得出，对于 $r > k$， $H_r(\Delta^0|_W) = 0$。

如果 $r = k$，我们可以将上述长正合序列更新为

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_k(\Delta^0|_W) \longrightarrow \widetilde{H}_{k-1}(A|_T) \longrightarrow \widetilde{H}_{k-1}(\Delta|_T) \longrightarrow \widetilde{H}_{k-1}(\Delta^0|_W) \longrightarrow \cdots$$

~注意，如果 $T \cap V(H) \subset V(H)$，则 reg $R/I(H') \leq k-1$。这意味着 $H_{k-1}(A|_T) = 0$~，从而推出 $H_k(\Delta^0|_W) = 0$。在证明的其余部分中，设

$$T \cap V(H) = V(H).$$

注意，在此情形下 $A|_T = A$。由于 $V(H) \subseteq T \subseteq V(C_n)$，我们考虑以下三种情形以完成证明：

情况 1. 若 $T = V(C_n)$，则 $\Delta^0|_W = \Delta^0$ 和 $\Delta|_T = \Delta$。我们有

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_k(\Delta^0) \longrightarrow \widetilde{H}_{k-1}(A) \xrightarrow{i_\star} \widetilde{H}_{k-1}(\Delta) \longrightarrow \cdots.$$

~由于 $i_\star$ 根据命题 4.4是单射，因此我们得出 $H_k(\Delta^0|_W) = 0$ 在这种情况下。

情形 2。若 $T = V(H)$，则 $\Delta|_T = A|_T = A$ 和

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_k(\Delta^0) \longrightarrow \widetilde{H}_{k-1}(A) \xrightarrow{i_\star} \widetilde{H}_{k-1}(A) \longrightarrow \cdots.$$

这意味着 i ~$_\star$ 是恒等映射，因此是单射。所以，在这种情况下 $H_k(\Delta^0|_W) = 0$ 也成立 .

情况 3。若 $V(H) \subset T \subset V(C_n)$，则我们有 $A \subset \Delta|_T \subset \Delta$，其中

$$j\colon A \hookrightarrow \Delta|_T \text{ and } k\colon \Delta|_T \hookrightarrow \Delta \text{ such that } i = k \circ j\colon A \hookrightarrow \Delta$$

诱导出同态

$$j_\star : \widetilde{H}_{k-1}(A;\Bbbk) \longrightarrow \widetilde{H}_{k-1}(\Delta|_T;\Bbbk) \text{ and } k_\star : \widetilde{H}_{k-1}(\Delta|_T;\Bbbk) \longrightarrow \widetilde{H}_{k-1}(\Delta;\Bbbk)$$

使得 $k_\star \circ j_\star = i_\star$。因此，更新后的 Mayer-Vietoris 序列为

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_k(\Delta^0|_W) \longrightarrow \widetilde{H}_{k-1}(A|_T) \xrightarrow{j_\star} \widetilde{H}_{k-1}(\Delta|_T) \longrightarrow \cdots$$

由于 $i_\star$ 根据命题4.4是单射的，我们得出 $j_\star$ 是单射的，这意味着~$H_k(\Delta^0|_W) = 0$，正如所需。□

4.2. 在任意极大独立集上的悬挂。设 $\mathcal{C}$ 是 C_n 的一个极大独立集，并令 $G := C_n(\mathcal{C})$ 为 C_n 的 $\mathcal{C}$-悬挂，使得

$$I(G) = I(C_n) + (zx_i : x_i \in \mathcal{C}) \subseteq S = R[z].$$

本小节的目标是考察正则性、投射维数以及𝔞-不变量如何从 C_n 变为 G。值得指出的是，与上一小节不同，这里不对 n 作任何假设。

观察 4.6. 设 $H := G - N[z]$。则 H 是 C_n 在 $V(C_n) \setminus \mathcal{C}$ 上的诱导子图，因为 z 恰好与 $\mathcal{C}$ 中的顶点相邻。设 $\ell := n - 2|\mathcal{C}|$。由于 $\mathcal{C}$ 是一个圈的极大独立集， $V(C_n) \setminus \mathcal{C}$ 上的诱导子图不含长度为 ≥ 2 的路径。因此，它是不交并的 ℓ 条边和 $|\mathcal{C}| - \ell$ 个孤立顶点。

定理 4.7. 对极大独立集进行圈的悬挂会保持正则性，并使投射维数增加一：

(a) 正则性 $S/I(G)$ = 正则性 $R/I(C_n)$。

(b) 投射维数 $S/I(G)$ = 投射维数 $R/I(C_n) + 1$。

证明。考虑短正合列

$$0 \longrightarrow S/(I(G) : z)(-1) \xrightarrow{\cdot z} S/I(G) \longrightarrow S/(I(G), z) \longrightarrow 0.$$

由于 z 不出现在 $I(C_n)$ 中，我们有 $(I(G)\ z) = (I(C_n)\ z)$ 且

$$\operatorname{reg} S/(I(G), z) = \operatorname{reg} R/I(C_n),$$
$$\operatorname{pdim} S/(I(G), z) = \operatorname{pdim} R/I(C_n) + 1.$$

此外，

$$I(G) : z = I(H) + (x_i : x_i \in \mathcal{C}).$$

回顾观察 4.6， $I(H)$ 由以下元素生成： $\ell = n-2|\mathcal{C}|$ 两两互素的二次型，并且与 $|\mathcal{C}|$变量（x_i ： $x_i \in \mathcal{C}$）一起构成一个完全交，其$\ell + |\mathcal{C}| = n - |\mathcal{C}|$ 极小生成元。因此

$$\operatorname{reg} S/(I(G) : z) = \ell = n - 2|\mathcal{C}| \qquad \text{and} \qquad \operatorname{pdim} S/(I(G) : z) = n - |\mathcal{C}|.$$

(a) 注意，正则性 $R/I(C_n) \leq$正则性 $S/I(G)$，因为 C_n是 G的一个诱导子图。对于反向不等式，结合上述结论和引理 2.7(d) 可得

$$\operatorname{reg} S/I(G) \leq \max\{\operatorname{reg} R/I(C_n),\ n - 2|\mathcal{C}| + 1\}.$$

因此，只需证明

$$n - 2|\mathcal{C}| + 1 \leq \operatorname{reg} R/I(C_n).$$

利用 $|\mathcal{C}| \geq \lceil n/3 \rceil$这一事实，我们有

$$n - 2|\mathcal{C}| + 1 \leq n - 2\lceil n/3 \rceil + 1 = \begin{cases} k+1 & \text{if } n = 3k+2, \\ k & \text{if } n = 3k+1, \\ k+1 & \text{if } n = 3k. \end{cases}$$

根据[1, 定理 5。2],

$$\operatorname{reg} R/I(C_n) = \begin{cases} k+1 & \text{if } n = 3k+2, \\ k & \text{if } n = 3k+1, \\ k & \text{if } n = 3k. \end{cases}$$

因此，当 $n \equiv 1$，2 (mod 3) 时，所需的不等式成立。当 $n = 3k$ 时，只要满足$|\mathcal{C}| \geq k+1$（此时 $n - 2|\mathcal{C}| + 1 \leq k$）即可。剩余情形 $n = 3k$ 且 $|\mathcal{C}| = k$ 正是定理 4.5讨论的情形。因此，正则性 $S/I(G) =$ 正则性 $R/I(C_n)$。

(b) 根据引理 2.7(a)，我们有

$$\operatorname{pdim} S/I(G) \leq \max\{\operatorname{pdim} S/(I(G) : z),\ \operatorname{pdim} S/(I(G), z)\}.$$

由证明的初步结论可知

$$\max\{\operatorname{pdim} S/(I(G) : z),\ \operatorname{pdim} S/(I(G), z)\} = \max\{n - |\mathcal{C}|,\ \operatorname{pdim} R/I(C_n) + 1\}.$$

令 $\mathcal{M} : = V（C_n）\setminus \mathcal{C}$。由于 $\mathcal{C}$ 是极大独立集， $\mathcal{M}$ 是C_n的极小顶点覆盖。因此，投射维数 $R/I（C_n）$ $\geq$大高度 $I（C_n）$ $\geq |\mathcal{M}| = n - |\mathcal{C}|$，由注2.11可知。故上面的最大值等于投射维数 $R/I（C_n）$ $+1$。因此

$$\operatorname{pdim} S/I(G) \leq \operatorname{pdim} R/I(C_n) + 1.$$

对于反向不等式，由引理2.7（c）可得

$$\operatorname{pdim} R/I(C_n) + 1 \leq \max\{\operatorname{pdim} S/I(G),\ n - |\mathcal{C}| + 1\}.$$

只需证明

$$\operatorname{pdim} S/I(G) \geq n - |\mathcal{C}| + 1.$$

注意到 $\mathcal{M} \cup \{z\}$ 是 G的一个极小顶点覆盖。为此，只需注意，对于任意 $x_i \in \mathcal{C}$，移除 z后，边 zx_i 将不再被覆盖；而移除 $v \in \mathcal{M}$ 后，圈中有一条边 vw 与 $w \in \mathcal{C}$ 相连的边将不再被覆盖（根据 $\mathcal{C}$的极大性，这样的邻点必定存在）。因此，由注 2.11，可得 pdim $S/I(G)$ $\geq$大高度 $I(G)$ $\geq |\mathcal{M}| + 1 = n - |\mathcal{C}| + 1$。证毕。 □

下面关于圈的 $\mathfrak{a}$-不变量的结果是 [3, 定理 4.5]的推论。尽管其证明可由 [3], 直接得出，我们仍给出证明，以展示重数 $M(G)$ 方法的用途。

推论 4.8. $\mathfrak{a}(R/I(C_n)) = 0$。

证明。 根据注 2.28 ，可知 $\mathfrak{a}(R/I(C_n)) = -M(C_n)$。因此，只需证明$M(C_n) = 0$，这等价于 $P_{C_n}(-1) \neq 0$，由注 2.27可得。
根据注 2.24，我们得到如下递推关系：

$$P_{C_n}(x) = P_{P_{n-1}}(x) + xP_{P_{n-3}}(x).$$

设 $a_m := P_{P_m}(-1)$。则

$$P_{C_n}(-1) = a_{n-1} - a_{n-3}.$$

由注 $P_{P_m}(x) = P_{P_{m-1}}(x)+xP_{P_{m-2}}(x)$ 的路径递推关系，结合注 2.24中 $P_{P_0}(x) = 1$和 $P_{P_1}(x) = 1 + x$，可得

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_m = a_{m-1} - a_{m-2} \quad (m \geq 2).$$

计算前几项可得

$$(a_m)_{m\geq 0} = 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, \ldots.$$

因此（a_m）是6-周期的。快速验证表明

$$a_{n-1} - a_{n-3} \in \{2, 1, -1, -2, -1, 1\}.$$

因此 $P_{C_n}(-1) \neq 0$。从而 $M(C_n) = 0$。 □

定理 4.9。圈在极大独立集上的悬挂下保持 $\mathfrak{a}$-不变量。特别地，我们有 $\mathfrak{a}(S/I(G)) = \mathfrak{a}(R/I(C_n)) = 0$。

证明。 只需证明 $M(G) = M(C_n) = 0$由注记 2.28。由于 $M(C_n) = 0$由推论 4.8，我们着重证明 $M(G) = 0$ 这等价于 $P_G(-1) \neq 0$。
由于 $G - z = C_n$ 与 $H = G - N[z]$ 由观察 4.6，应用引理中的递推关系 2.23 于 G 在 z 得到

$$P_G(x) = P_{C_n}(x) + xP_H(x).$$

由观察 4.6 可知 H 有 ℓ 条边，以及 $|\mathcal{C}| - \ell$ 个孤立顶点，它们属于 H 其中$\ell = n - 2|\mathcal{C}|$。然后，由独立多项式在不交并上的可乘性，我们有

$$P_H(x) = (1 + x)^{|\mathcal{C}|-\ell}(1 + 2x)^{\ell}.$$

将其代入上述递推关系，得到

$$P_G(x) = P_{C_n}(x) + x(1 + x)^{|\mathcal{C}|-\ell}(1 + 2x)^{\ell}. \tag{1}$$

现在在 $x = -1$ 处求值。
情况 1：假设 $|\mathcal{C}| > \ell$。那么 $(1 + x)^{|\mathcal{C}|-\ell}$ 在 $x = -1$处消失。因此 (1) 给出

$$P_G(-1) = P_{C_n}(-1).$$

由于 $M(C_n) = 0$根据推论4.8，我们有 $P_{C_n}(-1) \neq 0$。因此 $M(G) = M(C_n) = 0$.

情形 2：假设 $|\mathcal{C}| = \ell$。那么 H 没有孤立顶点，且它是不交并，由 ℓ条边组成。这意味着 $|V(H)| = 2\ell$ 和 $n = 3\ell$。在1）处对（ $x = -1$ 求值，得到

$$P_G(-1) = P_{C_{3\ell}}(-1) + (-1)^{\ell+1}.$$

根据推论证明中的同一组 6 周期计算 4.8， $P_{C_{3\ell}}(-1) = 2$ 当$3\ell \equiv 0$ (模 6) 且 $P_{C_{3\ell}}(-1) = -2$ 当 $3\ell \equiv 3$ (模 6)；等价地，

$$P_{C_{3\ell}}(-1) = 2(-1)^{\ell} \neq 0.$$

Thus

$$P_G(-1) = 2(-1)^{\ell} + (-1)^{\ell+1} = (-1)^{\ell} \neq 0.$$

因此，由备注2.28，我们得到所需结果：

$$\mathfrak{a}(S/I(G)) = \mathfrak{a}(R/I(C_n) = M(G) = M(C_n) = 0. \qquad \square$$

5. Suspension over maximal independent sets: paths

在最后一节中，我们转而讨论路径，并研究它们在极大独立集上的悬挂。与前一节关于圈的讨论一样，我们的目标是了解这一悬挂运算如何影响我们关注的三个代数不变量：正则性 reg、投射维数 pdim 和 $\mathfrak{a}$–不变量。

我们先固定记号。令 P_n 表示顶点为 $x_1, \ldots, x_n$ 的路径，其边理想为

$$I(P_n) = (x_1x_2,\ x_2x_3,\ \ldots,\ x_{n-1}x_n) \subseteq R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n].$$

令 $\mathcal{C}$ 为 P_n 的一个极大独立集，并令 $G := P_n(\mathcal{C})$ 表示 P_n的 $\mathcal{C}$-悬挂。等价地，

$$I(G) = I(P_n) + \big(zx_i :\ x_i \in \mathcal{C}\big) \subseteq S = R[z].$$

最后，令 $P := G \setminus N[z]$。由于 $N[z] = \{z\} \cup \mathcal{C}$，图 P恰好是 P_n 在 $V(P_n) \setminus \mathcal{C}$上的诱导子图。

引理 5.1. 设 ℓ 表示 P的边数。则

$$\ell \ \leq\ \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor.$$

证明。定义一个 0/1-字符串 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ 如下

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \in \mathcal{C}, \\ 0 & \text{if } x_i \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

由于 $\mathcal{C}$ 是独立的，对所有 i我们有 $\gamma_i\gamma_{i+1} \neq 11$ 。由于 $\mathcal{C}$ 是极大的，不在 $\mathcal{C}$ 中的每个顶点在 $\mathcal{C}$中都有一个邻点。这等价于

$$\gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = 1, \quad \gamma_n = 0 \Rightarrow \gamma_{n-1} = 1, \quad \gamma_i = 0 \Rightarrow \gamma_{i-1} = 1 \text{ or } \gamma_{i+1} = 1\ (2 \leq i \leq n-1).$$

特别地，子字符串 000 从不出现，并且我们不能有 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 或 $\gamma_{n-1} = \gamma_n = 0$。因此，任意一对连续的零 $\gamma_i = \gamma_{i+1} = 0$ 都满足 $2 \leq i \leq n-2$。

一条边 x_ix_{i+1} 位于 P 中，当且仅当 $\gamma_i = \gamma_{i+1} = 0$。设 $x_ix_{i+1} \in E(P)$。那么，对于 x_i （它不在 $\mathcal{C}$中），极大性迫使 $\gamma_{i-1} = 1$ （因为 $\gamma_{i+1} = 0$）；对于 x_{i+1}，极大性迫使$\gamma_{i+2} = 1$ （因为 $\gamma_i = 0$）。这意味着 P 的每条边都包含在一个块中

$$\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1}\gamma_{i+2} = 1001.$$

设 $E(P) = \{\{x_{i_1}, x_{i_1+1}\}, \ldots, \{x_{i_\ell}, x_{i_\ell+1}\}\}$，其中 $i_1 < \cdots < i_\ell$。那么

$$i_{r+1} - i_r \geq 3 \quad \text{for all } r = 1, \ldots, \ell - 1. \tag{2}$$

由（2），可得 $i_r \geq 2 + 3(r-1) = 3r - 1$ 对所有 r均成立，特别是

$$3\ell - 1 \leq i_\ell \leq n - 2.$$

因此 $3\ell \leq n-1$，所以 $\ell \leq (n-1)/3$。由于 ℓ是整数，我们有 $\ell \leq \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$，如所要证明的。 □

We 本节余下部分采用引理 5.1 中引入的记号。

注 5.2。引理 5.1 中的界对所有 n都是紧的。回顾一下，P 的每条边都来自 $\mathcal{C}$ 中距离为 3 的一对连续顶点，因此 ℓ 表示这类间隙的数量。于是，对每个 n，都存在一个极大独立集 $\mathcal{C}$ 满足

$$|E(P)| = \ell = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor,$$

并且当 $n \equiv 1$ (模 3) 时，这个极值构型是唯一的。

(a) 若 $n = 3k$，取

$$\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k-2}, x_{3k}\},$$

其间隙大小为 3，……，3，2，因此 $k - 1 = \lfloor (n-1)/3 \rfloor$ 间隙的大小为 3。

(b) 若 $n = 3k + 1$，取

$$\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\},$$

其 $k = \lfloor (n-1)/3 \rfloor$ 间隙的大小为 3。此外，若一个极大独立集 $\mathcal{C}$满足 $\ell = k$，则 $\mathcal{C}$ 的连续顶点之间的所有间隙大小都必须为 3，由此可推出 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$。在其他所有情况下，$\mathcal{C}$至少有一个大小为 2 的间隙，因此 $\ell < k$。

(c) 若 $n = 3k + 2$，再次令

$$\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\},$$

其 $k = \lfloor (n-1)/3 \rfloor$ 间隙的大小为 3，并且是极大独立集，因为 $\mathcal{C}$ 之外的每个顶点都与这些顶点之一相邻。

定理 5.3。　　路径在极大独立集上的悬挂保持正则性　　y

$$\operatorname{reg} S/I(G) = \operatorname{reg} R/I(P_n)$$

除非当 $n \equiv 1 \pmod 3$ 且 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$ 时。在这种情况下，我们有

$$\operatorname{reg} S/I(G) = \operatorname{reg} R/I(P_n) + 1.$$

证明。考虑以下短正合列

$$0 \longrightarrow S/(I(G) : z)(-1) \xrightarrow{\cdot z} S/I(G) \longrightarrow S/(I(G), z) \longrightarrow 0.$$

注意到

$$(I(G), z) = (I(P_n), z), \text{ and}$$
$$I(G) : z = I(P) + (x_i : x_i \in \mathcal{C})$$

由引理 2.7 (d) 可知

$$\operatorname{reg} S/I(G) \leq \max\{\operatorname{reg} R/I(P_n), \operatorname{reg} R/I(P)+1\}.$$

在考察这个上界和右侧的最大值时，我们回顾一下$\ell \leq \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$根据引理5.1 以及正则性 $R/I(P)$ $= \ell$。此外，我们还记得，正则性 $R/I(P_n)$ $\leq$正则性 $S/I(G)$，因为 P_n是 G的一个诱导子图，且正则性 $R/I(P_n) = \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$（参见[1,定理 4。7]）。综合以上结果，可得以下几种情况：

情况 1. 若 $n = 3k$，则正则性 $S/I(G) = k =$正则性 $R/I(P_n)$，正如所需。

情形 2. 若 $n = 3k+2$，则正则性 $S/I(G) = k+1 =$正则性 $R/I(P_n)$，正如所需。

情况 3。若 $n = 3k+1$，则 $k =$正则性 $R/I(P_n)$ $\leq$正则性 $S/I(G)$ $\leq$最大值$\{\ell+1, k\}$。根据备注5.2 可知 $\ell = k$仅当 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$时。因此，当 $\mathcal{C} \neq \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$时，我们有 $\ell \leq k-1$ 且

$$\operatorname{reg} S/I(G) = k = \operatorname{reg} R/I(P_n).$$

假设 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$。那么，根据上面的讨论，reg $S/I(G)$ $\leq k+1$。因此，~只需证明 reg $S/I(G)$ $\geq k+1$，这等价于证明 $H_k(\Delta(G|_W)) \neq 0$ 对某个 $W \subseteq V(G)$ 成立，这由备注 2.10 (a) 得出。

令 $\Delta^0 = \Delta(G)$ $\Delta = \Delta(P_n)$ 和 $A = \Delta(P)$。由引理 2.15 可得$\Delta^0 = \Delta \cup c(A)$，其中 $\Delta \cap c(A)$ $= A$。命题 [18, 命题 4。6] 表明 Δ 是可缩的。于是，根据下面的 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_r(\Delta) \longrightarrow \widetilde{H}_r(\Delta^0) \longrightarrow \widetilde{H}_{r-1}(A) \longrightarrow \widetilde{H}_{r-1}(\Delta) \longrightarrow \cdots$$

~ ~我们有 $H_r(\Delta^0) \cong H_{r-1}(A)$，对所有 r 均成立。

由于 P 有 k 条不相交边，根据引理2.12 可知 $A \simeq S^{k-1}$ 且 A 唯一非零同调出现在度数 $(k-1)$：

$$\widetilde{H}_k(\Delta^0; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_{k-1}(A; \Bbbk) \cong \Bbbk.$$

~因此，$S/I(G)$ 的正则性为 $\geq k+1$，因为对于 $W = V(G)$，$H_k(\Delta(G|_W)) \neq 0$。所以，

$$\operatorname{reg} S/I(G) = \operatorname{reg} R/I(P_n) = k+1$$

在例外情况下。这就完成了证明。 □

下面的结果在我们研究 $S/I(G)$ 的投射维数时将会很有用。

命题 5.4. 设 $\mathcal{C}$ 是 P_n 的一个极大独立集，并且 $|\mathcal{C}| = t$。则

$$\ell + t \leq \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor$$

其中 $\ell = |E(P)|$。等价地，若 $n = 3k$，则 $\ell + t \leq 2k$；并且若 $n = 3k+1$ 或 $n = 3k+2$，则 $\ell + t \leq 2k+1$。此外，当 $n = 3k+1$ 且 $\mathcal{C} \neq \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$ 时，我们有更紧的界

$$\ell + t \leq \left\lceil \frac{2(n-1)}{3} \right\rceil = 2k.$$

证明。 如同引理 5.1的证明中，将 $\mathcal{C}$ 记为一条 $0/1$ 字符串 $\gamma = (\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_n)$，其中 $\gamma_i = 1$ 当且仅当$x_i \in \mathcal{C}$。独立性表明不出现子字符串 11。极大性表明不出现子字符串 000，并且 γ 不能以 00 开头或结尾（否则某一端点在 $\mathcal{C}$中无邻点）。

因此，任意两个相邻的 1 之间有一个或两个 0。等价地，从一个顶点 $\mathcal{C}$ 移到下一个顶点时，间隙要么是 01，要么是 001。设 p 为第一个和最后一个 1 之间类型为 01 的间隙数， q 为类型为 001 的间隙数。令 δ_0、 $\delta_t \in \{0,1\}$ 分别记录第一个 1 之前是否有一个起始 0，以及最后一个 1 之后是否有一个末尾 0，并设 $\delta = \delta_0 + \delta_t \in \{0,1,2\}$。那么 1 的个数为

$$t = |\mathcal{C}| = p + q + 1,$$

而从第一个 1 到最后一个 1 的线段长度为 $1 + 2p + 3q$。计入可能存在的端点 0 后，得到

$$n = \delta + (1 + 2p + 3q).$$

此外，类型为 001 的间隙恰好包含一对连续的 0，因此在诱导子图 $P = P_n \setminus \mathcal{C}$ 中恰好对应一条边。所以

$$\ell = |E(P)| = q.$$

因此

$$\ell + t = q + (p + q + 1) = p + 2q + 1.$$

现在在满足 $n = \delta + 1 + 2p + 3q$、 p、 $q \geq 0$ 和 $\delta \in \{0,1,2\}$ 的条件下，使 $p + 2q + 1$ 最大化。由 $2p = n - \delta - 1 - 3q \geq 0$ 可得 $q \leq \frac{n-\delta-1}{3}$，并利用 $p = \frac{n-\delta-1-3q}{2}$，

$$\ell + t = p + 2q + 1 = \frac{n + 1 - \delta + q}{2}.$$

因此 $\ell + t$ 随 q 增大而增大，随 δ 增大而减小，所以当 $\delta = 0$ 且 q 尽可能大时，它取得最大值。于是

$$\ell + t \leq \begin{cases} 2k & \text{if } n = 3k, \\ 2k + 1 & \text{if } n = 3k + 1, \\ 2k + 1 & \text{if } n = 3k + 2, \end{cases}$$

这等价于 $\ell + t \leq \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor$。

当 $n = 3k + 1$ 时，当且仅当 $\delta = 0$ 且 $p = 0$ 时取到 $2k + 1$，即所有间隙均为 001 类型，因此 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$。对于任何其他极大独立集，要么 $\delta \geq 1$，要么 $p \geq 1$，而在这两种情况下均有 $q \leq k - 1$，从而推出

$$\ell + t = \frac{n + 1 - \delta + q}{2} \leq \frac{(3k + 1) + 1 + (k - 1)}{2} = 2k.$$

由此得到命题中所述的更精确界限。 □

现在，我们可以讨论投射维数了。

定理 5.5. 对极大独立集进行路径的悬挂会使投射维数增加一：

$$\operatorname{pdim} S/I(G) = \operatorname{pdim} R/I(P_n) + 1.$$

证明。 设 $d :=$ 投射维数 $R/I(P_n)$。回顾 $d = \left\lceil \frac{2(n-1)}{3} \right\rceil$ 由 [4, 4命题 1.2]。考虑短正合列

$$0 \longrightarrow S/(I(G) : z)(-1) \xrightarrow{\cdot z} S/I(G) \longrightarrow S/(I(G), z) \longrightarrow 0.$$

与定理 5.3 中一样，我们有 $(I(G), z) = (I(P_n), z)$ 和 $I(G) : z = I(P) + (x_i : x_i \in \mathcal{C})$，其中 P 是 P_n 在 $V(P_n) \setminus \mathcal{C}$ 和 $\ell = |E(P)|$上的诱导子图。由于 P 是由 ℓ 条边和孤立顶点构成的不交并，理想 $I(P) + (x_i : x_i \in \mathcal{C})$ 是由 ℓ个二次型和 $|\mathcal{C}|$个线性形式生成的完全交。因此

$$\begin{aligned} \operatorname{pdim} S/(I(G), z) &= \operatorname{pdim} R/I(P_n) + 1 = d + 1, \\ \operatorname{pdim} S/(I(G) : z) &= \ell + |\mathcal{C}|. \end{aligned}$$

于是由引理 2.7 可得

$$\operatorname{pdim} S/I(G) \leq \max\{\ell + |\mathcal{C}|,\ d + 1\}.$$

使用命题 5.4 的结果，并结合 $\ell + |\mathcal{C}| \leq \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor \leq d + 1$。因此，投射维数 $S/I(G) \leq d + 1$。

为证明反向不等式，我们构造一个含有 $d + 1$ 个顶点的 G 的极小顶点覆盖。首先注意，路径 P_n 的任意极大独立集 $\mathcal{C}$ 都包含 x_1 或 x_2。定义独立集 $\mathcal{D} \subseteq V(P_n)$如下：

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{x_1, x_4, x_7, \dots\} & \text{if } x_1 \in \mathcal{C}, \\ \{x_2, x_5, x_8, \dots\} \cup \{x_n\} \text{ (only if } n \equiv 1 \pmod 3) & \text{if } x_1 \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

可以验证， $\mathcal{D}$ 是 P_n的独立支配集，因此也是极大独立集，并且 $|\mathcal{D}| = \lceil n/3 \rceil$。根据构造，$\mathcal{D} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$。因此， z 与 $\mathcal{D}$中的一个顶点相邻。所以，$\mathcal{D}$ 也是 G中的一个极大独立集。因此，$V(G) \setminus \mathcal{D}$ 是 G 的一个极小顶点覆盖，其大小为

$$|V(G) \setminus \mathcal{D}| = (n + 1) - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{2(n-1)}{3} \right\rceil + 1 = d + 1.$$

因此，投射维数 $S/I(G) \geq$ 大高度 $I(G) \geq d + 1$ 由注记 2.11。结合上界可得投射维数 $S/I(G)$ $=$ 投射维数 $R/I(P_n) + 1$，得证。 □

在讨论 $\mathfrak{a}$-不变量与 P_n 和 G之间的关系之前，我们先确定 P_n的这个不变量。与圈图情形一样，这是[3, 定理 4。5]的推论；不过，为完整起见，我们给出一个证明，利用 -1 作为独立多项式的根时的重数。

定理 5.6. $\mathfrak{a}(R/I(P_n)) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0, 2 \\ & n \equiv 1 \end{cases} \pmod 3$

-1 3 . , (mod)

证明。 由注 2.28，只需计算 $M(P_n)$。

与推论 4.8 的证明一样，令 $a_m := P_{P_m}(-1)$，并回顾 (a_m) 是 6-周期的，取值为 $1, 0, -1, -1, 0, 1, \dots$。特别地，

$$a_m \neq 0 \text{ if } m \equiv 0, 2 \pmod 3, \qquad a_m = 0 \text{ if } m \equiv 1 \pmod 3.$$

因此 $M(P_n) = 0$若 $n \equiv 0$, 2 (mod 3)。当 $n \equiv 1$ (mod 3) 时，尚需证明 -1处的根是单根，即 $M(P_n) = 1$。令 $b_m := P'_{P_m}(-1)$。对 $P_{P_m}(x) = P_{P_{m-1}}(x) + xP_{P_{m-2}}(x)$ 求导，并在 -1处求值，得到

$$b_m = b_{m-1} + a_{m-2} - b_{m-2} \qquad (m \geq 2), \tag{3}$$

结合 $b_0 = 0$ 和 $b_1 = 1$。取 $m = 3k + 4$ 于 (3) 中，并在 3) 处再次使用 ($m = 3k + 3$(连同 $a_{3k+1} = 0$) 得到

$$b_{3k+4} = -b_{3k+1} + a_{3k+2}.$$

由 6 周期性， $a_{3k+2} = (-1)^{k+1}$。因此，上述关系变为

$$b_{3k+4} = -b_{3k+1} + (-1)^{k+1} \qquad (k \geq 0). \tag{4}$$

我们断言

$$b_{3k+1} = (-1)^k(k+1) \qquad (k \geq 0).$$

对于 $k = 0$，这就是 $b_1 = P'_{P_1}(-1) = 1$。假设它对某个 k 成立。由于 $3(k+1)+1 = 3k+4$, (4) 给出

$$b_{3k+4} = -b_{3k+1} + (-1)^{k+1} = -\big((-1)^k(k+1)\big) + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}(k+2),$$

即 $k+1$ 的所需公式。归纳法至此完成。因此

$$P'_{P_{3k+1}}(-1) = b_{3k+1} = (-1)^k(k+1) \neq 0.$$

因此，当 $n \equiv 1$ (mod 3) 时， $M(P_n) = 1$ 。至此证明完成。 □

定理 5.7. 极大独立集上的路径的悬挂保持 $\mathfrak{a}$-不变量

$$\mathfrak{a}(S/I(G)) = \mathfrak{a}(R/I(P_n))$$

except, 当 $n \equiv 1$ (mod 3) 且 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$ 时。在这种情况下，我们有

$$\mathfrak{a}(S/I(G)) = \mathfrak{a}(R/I(P_n)) + 1.$$

*Pr*明。 由注记 2.28，该定理等价于下述陈述 t:

$$M(G) = M(P_n)$$

除非当 $n \equiv 1$ (mod 3) 且 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$ 时。在这种情况下， $M(G) = M(P_n) - 1$。

由于我们计算了 $M(P_n)$（从而 $\mathfrak{a}(R/I(P_n))$），在定理 5.6 中，我们关注 $M(G)$。

沿用命题 5.4 证明中的记号，其中我们用以下方式编码 $\mathcal{C}$: 通过 0/1-字符串$\gamma_1 \cdots \gamma_n$，其中 $\gamma_i = 1$ 当且仅当 $x_i \in \mathcal{C}$。回顾一下， $P = G - N[z]$ 是不交并，由 ℓ条边和 e 个孤立顶点组成，其中

$$e = |\mathcal{C}| - \ell - 1 + \delta.$$

由引理 2.23 以及独立多项式在不交并下的乘法性可得

$$P_G(x) = P_{P_n}(x) + x(1+x)^e(1+2x)^\ell. \tag{5}$$

现在我们根据式（ M（G）求出（5）。

情况 1. 若 $e \geq 1$，则 $(1+x)^e$ 在 $x = -1$ 处消失，因此

$$P_G(-1) = P_{P_n}(-1) = a_n.$$

若 $n \equiv 0$，2（模 3），则 $a_n \neq 0$，因此 $M(G) = 0 = M(P_n)$。然后

$$\mathfrak{a}(R/I(G)) = \mathfrak{a}(R/I(P_n)) = 0.$$

若 $n \equiv 1 \pmod 3$，则 $a_n = 0$ 且 $M(G) \geq 1$。回想一下，在 $M(P_n) = 1$ 的情形下。我们的目标是证明 $M(G) = 1$。为此，我们通过对 $P'_G(-1)$ 求导来计算（5）。

- If $e \geq 2$ then $P'_G(-1) = P'_{P_n}(-1) = b_n \neq 0$. Thus, $M(G) = 1 = M(P_n)$ and
$$\mathfrak{a}(R/I(G)) = \mathfrak{a}(R/I(P_n)) = -1.$$

- 若 $e = 1$，则
$$P'_G(-1) = b_n + \frac{d}{dx}\Big[x(1+x)(1+2x)^\ell\Big]\Big|_{x=-1} = b_n + (-1)^{\ell+1}.$$
由此 $n = 3k+1$ 和 $e = 1$ 可得 $n \geq 4$。因此 $k \geq 1$ 和 $|b_n| = k+1 \geq 2$。所以$b_n + (-1)^{\ell+1} \neq 0$。于是，$M(G) = 1 = M(P_n)$ 且
$$\mathfrak{a}(R/I(G)) = \mathfrak{a}(R/I(P_n)) = -1.$$

情形 2。若 $e = 0$，则 $n \equiv 1 \pmod 3$ 且 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$。这可由以下讨论得出：回顾命题5.4 的证明可知，$|\mathcal{C}| = p+q+1$ 且 $\ell = q$其中 p 是第一个和最后一个 1 之间 01 型间隙的数量，而 q 是 001 型间隙的数量。因此

$$e = |\mathcal{C}| - \ell - 1 + \delta = p + \delta \geq 0.$$

特别地，$e = 0$ 成立当且仅当 $p = 0$ 和 $\delta = 0$成立，即所有间隙的大小均为 3，且x_1、$x_n \in \mathcal{C}$。当 $n \equiv 1$（模 3）时，这就迫使 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$。

计算（5）在 -1 处的值，得到

$$P_G(-1) = P_{P_n}(-1) + (-1)\cdot(1+2(-1))^\ell = 0 + (-1)^{\ell+1} \neq 0.$$

因此，$M(G) = 0$，而 $M(P_n) = 1$。于是，在例外情况下，我们有如下结论

$$\mathfrak{a}(R/I(G)) = \mathfrak{a}(R/I(P_n)) + 1 = 0.$$

证明至此完成。 □

6. Closing remarks and further directions

本文研究边理想的三个同调不变量（投射维数、正则性和 $\mathfrak{a}$-不变量）在悬挂下的表现，即向图 H 添加一个新顶点 z，并将其与指定子集 $\mathcal{C} \subseteq V(H)$ 中的顶点相连。设 $G = H(\mathcal{C})$ 为 H 的 $\mathcal{C}$-悬挂，其中 $R = \Bbbk[V(H)]$ 且 $S = R[z]$。

在本文讨论的这些族中，对极小顶点覆盖以及圈（还有除一个明确例外外的路径）的极大独立集进行悬挂，会产生显著而严格的结果：正则性和 $\mathfrak{a}$不变量保持不变，而投射维数通常恰好增加 1。相比之下，对所有顶点进行悬挂会保持正则性，但会迫使 $\operatorname{pdim}(S/I(G)) = |V(H)|$。

更广泛推广的一个便利起点是由乘以 z得到的短正合列，

$$0 \longrightarrow S/(I(H \setminus \mathcal{C}) + (x_i : x_i \in \mathcal{C}))(-1) \xrightarrow{\cdot z} S/I(G) \longrightarrow S/(I(G), z) \cong R/I(H) \longrightarrow 0,$$

以及独立复形的平行分解（或等价地，删除–收缩下的独立性多项式的平行分解）。本文的结果表明，在关于 $\mathcal{C}$ 的适当假设下，这些构造以极小方式表现，从而导致正则性、投射维数和 $\mathfrak{a}$-不变量发生受控变化。

问题 6.1。对于图 H 和子集 $\mathcal{C} \subseteq V(H)$，给出能保证 $\mathcal{C}$ 的组合条件

$$\operatorname{pdim}(S/I(G)) = \operatorname{pdim}(R/I(H)) + 1.$$

更一般地，根据 $\mathcal{C}$ 与 H 的结构之间的相互作用，描述 $\operatorname{pdim}(S/I(G)) - \operatorname{pdim}(R/I(H))$ 可能取值的集合。

在本文研究的主要图族中，悬挂操作保持正则性，但路径存在一种唯一极值构型例外。

问题 6.2。找出一些图族（例如树、单圈图、弦图），使得对每个极大独立集进行悬挂都能保持正则性，并刻画哪些情况下，例外的悬挂集会导致 reg 增大。是否存在一个统一上界，使 $\operatorname{reg} S/I(G) - \operatorname{reg} R/I(H)$ 可由 H 的经典不变量及 $\mathcal{C}$ 的结构来界定?

文献 [2] 中讨论了 $\mathfrak{a}(R/I(H)) = -M(H)$，其中 $M(H)$ 表示 $x = -1$ 作为独立多项式 $P_H(x)$ 的根的重数。因此，我们的 $\mathfrak{a}$- 不变量计算最终归结为求 $M(H)$。

问题 6.3。请用纯粹的图论术语，提出一个一般判据，说明何时 $\mathfrak{a}(S/I(G)) = 0$（换言之，$M(G) = 0$）？类似地，找出何时 $\mathfrak{a}(S/I(G)) = -1$ 的判据。特别是，当 $P_G(-1) = 0$ 时，对 $\mathcal{C}$ 有哪些假设能保证总是有 $P'_G(-1) \neq 0$，从而迫使 $\deg h_{S/I(G)}(t) = \alpha(G) - 1$，并由此确定 $\mathfrak{a}(S/I(G))$?

这些问题指向了一个由我们的构造所启发的更广泛目标:

描述在 H 中选取一组 $\mathcal{C}$ 如何不仅控制不变量投射维数和正则性，还控制贝蒂表形状等更精细的数据。

致谢。作者感谢 Des Martin、Hugh Geller 和 Henry Potts–Rubin 对本工作的启发。作者也感谢 Takayuki Hibi 提供了有益的讨论，这些讨论塑造了本文的研究思路。第一作者获得了美国国家科学基金会资助的 DMS–2418805 项目支持。

References

[1] S. Beyarslan、H. T. H`a 和 T. N. Trung。森林与圈的幂的正则性。《代数与组合》，42(4):1077–1095，2015。[2] J. Biermann、T. Chau、S. Kara、A. O'Keefe、J. Skelton、G. Sosa Castillo 和 D. Vien。通过独立多项式实现覆盖理想的 (reg, deg h)-对。arXiv 预印本，2602.10376，2026。[3]J. Biermann、S. Kara、A. O'Keefe、J. Skelton 和 G. Sosa Castillo。边理想的 h-多项式的次数。《代数与组合》，62(1):第 2 号论文，26 页，2025。[4] R. R. Bouchat。边理想的代数性质。ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，2008。博士论文——肯塔基大学。

[5] H. Dao 和 J. Schweig。投射维数、图控制参数与独立复形同调。《组合理论杂志 A 辑》，120(2):453–469，2013。[6] J. A. Eagon 和 V. Reiner。Stanley–Reisner环的分解与 Alexander对偶。《纯粹与应用代数杂志》，130(3):265–275，1998。[7] R. Forman。胞腔复形的 Morse理论。《数学进展》，134(1):90–145，1998。[8] I. Gutman 和 F. Harary。匹配多项式的推广。《数学应用》，24:97–106，1983。[9]H. T. H`a 和 A. Van Tuyl。单项式理想、超图的边理想及其分次贝蒂数。《代数组合学杂志》，27:215–245，2008。[10] J. Herzog 和 T. Hibi。单项式理想。Springer，2011。[11] T. Hibi、H. Kanno 和 K. Matsuda。有限图的导出匹配数与边理想。《代数杂志》，532:311–322，2019。[12]T. Hibi、K. Kimura、K. Matsuda 和 A. Tsuchiya。Cameron-Walker图的正则性与 a-不变量。《代数杂志》，584:215–242，2021。[13] T. Hibi、K. Nishiyama、H. Ohsugi 和 A. Shikama。许多由二次二项式生成的环面理想不具有二次 Gr¨obner 基。《代数杂志》，408:138–146，2014。[14] M. Hochster。Cohen–Macaulay环、组合学与单纯复形。载于 B. R. McDonald 和 R. Morris 编，《环论 II》（第二届会议论文集，俄克拉何马大学，俄克拉何马州诺曼，1975），纯粹与应用数学讲义第 26 卷，第 171–223 页。Marcel Dekker，1977。[15]G. Hopkins 和 W. Staton。某些图的斐波那契数所导出的一些恒等式。《斐波那契季刊》，22(3):255–258，1984。[16] J. Jonsson。图的单纯复形，数学讲义第 1928 卷。Springer-Verlag，柏林，2008。[17] D. Kozlov。组合代数拓扑，算法与计算数学第 21 卷。Springer，柏林，2008。[18] D. N. Kozlov。有向树的复形。《组合理论杂志 A 辑》，88(1):112–122，1999。[19] S. Morey 和 R. H. Villarreal。边理想：代数与组合性质。载于《交换代数进展 1》，第 85–126 页。de Gruyter，柏林，2012。[20] A. Mousivand。图的积的代数性质。《通讯代数》，40(11):4177–4194，2012。[21] H. Prodinger 和 R. F. Tichy。图的斐波那契数。《斐波那契季刊》，20(1):16–21，1982。[22]T. N. Trung。正则性、匹配与 Cameron-Walker图。《汇刊数学》，71(1):83–91，2020。

(S. Kara) Department of Mathematics, Bryn Mawr College, Bryn Mawr, PA 19010
电子邮箱地址：skara@brynmawr.edu

(D.Vien) Department of Mathematics, Bryn Mawr College, Bryn Mawr, PA 19010电子邮箱地址：dvien@brynmawr.edu