arXiv:2603.05664v1 [math.GT] 5 Mar 2026

同调广义性质 R 猜想是错误的

Tye Lidman、Trevor Oliveira-Smith 与 Alexander Zupan

Abstract. 广义性质 R 猜想（几何庞加莱猜想）预言：若对 S^3 中的一个n分支链环 L 施行带框手术得到$\#^n(S^1 \times S^2)$，则 L 与平凡链环柄滑等价，而这正是构造此类手术的显然方式。已知几何庞加莱猜想有许多潜在反例，但要阻碍柄滑等价却颇为棘手。循此思路，我们否定了几何庞加莱猜想的一个进一步推广。人们有理由期望：若 S^3 中的一个 n分支链环经手术得到 n 个具有 $S^1 \times S^2$同调的三维流形的连通和，则该链环应与一个 n分支分裂链环柄滑等价，而这正是构造此类手术的显然方式。然而，我们证明： S^3 中存在二分量标架链环，它们经手术得到同调 $S^1 \times S^2$的连通和，但与分裂链环既不柄滑等价，甚至也不弱柄滑等价。

1. Introduction

利用叶状结构理论，Gabai 证明了著名的性质 R 猜想：

定理 1.1 （[Gab87]）。设 K 是 S^3中的一个纽结。如果对 K 进行 ***Dehn*** 手术得到 $S^1 \times S^2$，那么 K 是平凡结。

换言之，通过对 S^3 中的纽结进行手术得到 $S^1 \times S^2$ 的唯一方式就是显而易见的那一种。尝试将 Gabai 的结果推广到链环时会遇到一个微妙之处：尽管对一个含有 n个分支的平凡链环进行 0-手术会产生 $\#^n(S^1 \times S^2)$，但这并不是 $\#^n S^1 \times S^2$唯一的 n分支手术描述，因为我们可以对该平凡链环进行把手滑动，从而得到更复杂的、具有相同手术结果的 n分支链环。于是人们乐观地提出了如下猜想：

猜想 1.2 （问题 1.82 [Kir95], 广义性质 R 猜想（几何庞加莱猜想））。设 L 是 S^3中的一个 n 分支带框架链环。如果对 L 进行手术得到 $\#^n(S^1 \times S^2)$，那么 L 与平凡链环柄滑等价。

GPRC 的潜在反例见于 [GST10]，并在 [MZ22]中扩展到了更广泛的潜在反例族。这些链环一直顽强地阻碍着正反两方面的进展；它们似乎不允许进行所需的把手滑动，而证明不存在把手滑动等价则既微妙又似乎难以处理。自然地，面对一个困难的猜想时，有两条前进路径：不断增加假设，直到猜想成立；或者不断削弱假设，直到猜想变为错误。在本文中，我们放宽对手术结果的限制，以探究是否可能对 GPRC 进行推广。如果 L 是一个 n分支的分裂链环，那么对 L 的每个分支进行 0-手术，会得到若干三维流形的连通和，其中每个都是一个同调 $S^1 \times S^2$。秉承 GPRC 的精神，自然可以猜想（在把手滑动意义下），这是构造出此类手术结果的唯一方式。然而，我们证明

定理 1.3。存在一个具有以下性质的二分支链环无限族 $\{L_n\}$：对 L_n 进行零手术后，得到一个形如 $Y_n \# Z_n$ 的三维流形，其中 $H_1(Y_n) \cong H_1(Z_n) \cong \mathbb{Z}$；而 L_n 并不柄滑等价（作为零标架链环）于一个分裂链环。

上述定理也有更深层的四维视角。Gabai 的结果意味着，由一个 1-手柄和一个 2-手柄构成的光滑同伦球必定微分同胚于

标准四维球。几何庞加莱猜想将意味着，任何把手分解中不含 1-手柄的光滑同伦四维球面，都微分同胚于标准四维球面。这样的同伦四维球面称为几何单连通。虽然目前仍不清楚[GST10] 和 [MZ22]中的链环是否构成几何庞加莱猜想的反例，但已有研究表明，这些链环可导出标准的 S^4（另见 [Gom91]）。 [GST10] 的作者提出了一个较弱版本的几何庞加莱猜想，其四维结论相同，但允许引入相互抵消的把手对。

若两个带框架链环可以通过把手滑动、添加或删除分裂的零框架平凡结，以及添加或删除分裂的霍普夫对（由一个零框架平凡结和一个点标记平凡结组成的霍普夫链环，表示一个四维一把手）相互得到，则称它们弱柄滑等价。更多细节见 [GS99] 或 [MSZ16]。

猜想1.4 ([GST10], 弱广义性质R猜想)**.** 设 L 是 S^3中的一个 n分量带框架链环。若对 L 进行手术得到$\#^n S^1 \times S^2$，则 L 弱柄滑等价于一个平凡链环。

根据瑟夫 [Cer70], ，弱广义性质R猜想等价于如下断言：每个几何上单连通的同伦四维球面都与标准四维球面微分同胚。在此背景下，我们证明

定理 1.5. 存在一个二分支链环的无限族 $\{L_n\}$，具有如下性质：对 L_n 进行零手术，得到一个形如 $Y_n \# Z_n$ 的三维流形，其中 $H_1(Y_n) \cong H_1(Z_n) \cong \mathbb{Z}$，而 L_n （作为零框架链环）并不弱柄滑等价于一个二分量分裂链环。

定理 1.3 由定理 1.5 立即推出。为证明该定理，我们注意到，弱柄滑等价在添加或删除 $S^1 \times S^2$ 个直和项后，会保持对链环进行手术所得的结果。因此，若一个 2 分量链环 L 经手术得到 $Y\#Z$，其中 Y 和 Z 是同调$S^1 \times S^2$，且它与一个分裂链环 $K_1 \sqcup K_2$ 弱柄滑等价，那么对 L 进行手术所得流形 $Y\#Z$ 的每个直和项，都可通过对 K_1 或 K_2 进行手术得到。Hedden、Kim、Mark 和 Park 证明，对于奇数 n，某个由塞弗特纤维空间组成的族 $\{Y_n\}$ 不可能通过对 S^3 [中的纽结进行手术得到 19], HKMP [; Johnson 将他们的工作推广到了偶数情形 22]Joh。因此，只需构造链环 L_n，使其手术结果为 $Y_n\#Z_n$，且其中 Y_n 属于这个禁许族，即可完成该定理的证明。

给定一个带框架纽结 K in S^3，纽结迹 X_K 是通过沿着 K，按照其框架将一个 2-手柄附着到 B^4 上而构造的紧致四维流形。对于带框架链环 L，链环迹 X_L的定义类似，即为 L的每个分支附着一个 2-手柄。从这个角度来看，两个链环的迹微分同胚，当且仅当它们弱柄滑等价 [Cer70]。对于定理 1.5 中构造的链环 L_n，我们的证明表明， X_{L_n} 不是两个纽结迹的边界连通和。更一般地， X_{L_n} 不能光滑地表示为 $X_1 \natural X_2$，其中 $\partial X_1 = Y_n$和 $\partial X_2 = Z_n$。这是因为 X_i 必然是同伦 $S^2 \times D^2$，这将与 [HKMP19, Joh22]的工作相矛盾。然而，我们仍然可以提出其拓扑类比：

问题 1.6。 X_{L_n} 是否与两个拓扑四维流形 X_1和 X_2 的边界和同胚，其中 $\partial X_1 = Y_n$ 且 $\partial X_2 = Z_n$?

最后，回到与几何庞加莱猜想的联系，我们想知道是否可以进一步完善我们的结果，尤其是鉴于来自 [GST10]和 [MZ22] 的候选链环满足弱广义性质R猜想，但尚不知是否满足几何庞加莱猜想。

问题 1.7。是否存在一个二分量带框架链环 L，使得对 L进行手术后得到一个形如 $Y\#Z$ 的三维流形，其中 $H_1(Y) \cong H_1(Z) \cong \mathbb{Z}$，并且 L 与某个二分量分裂链环弱柄滑等价，但不柄滑等价?

Outline

第 2 节讨论塞弗特纤维空间的一些基础知识，并整理证明主定理所需的各项要素。第 3 节构造相关链环，并证明定理 1.5。第 4 节从另一种角度探讨链环 $\{L_n\}$。

Acknowledgements

TL 和 AZ 感谢 2025年6月在爱荷华大学举办的中西部几何与拓扑全景会议的组织者，本工作的一部分正是在会议期间完成的。AZ 也感谢 Jeffrey Meier 就本工作进行的有益交流。TL 获得了美国国家科学基金会 DMS-2105469 和 DMS-2506277 项目的部分资助，以及西蒙斯旅行资助奖。TOS 作为 GAANN研究员，获得了由美国教育部资助的加州大学戴维斯分校数学系GAANN资助（项目编号 P200A240025）。AZ 获得了美国国家科学基金会 DMS-2405301 项目的部分资助，以及西蒙斯旅行资助奖。

2. Preliminaries

我们在光滑范畴中讨论，并用 $\eta(\cdot)$ 表示正则邻域。给定 S^3 中的链环 L， L 的框架 是为 L 的每个分支 K 选取一个扩展有理数 a/b，表示为 $a[\mu]+b[\ell]\in H_1(\partial\eta(K))$；其中 $\eta(K)$ 是 K 的正则邻域， μ 是实心环面 $\eta(K)$ 的子午线，而 ℓ 是塞弗特经线。对于带框架链环 L，对 L 进行***Dehn*** 手术 所得的 3维流形，是通过移除每个分支的邻域，再沿着将子午线映射到与各分支框架相对应的曲线 $a[\mu]+b[\ell]$ 的映射重新粘接实心环面而得到的。3维流形 Y 的手术图 由带框架链环 L 构成；对每个分支进行相应的手术即可得到 Y。更多细节请参见例如 [GS99],。

注记 2.1. 我们对“框架”的用法是对记号/语言的轻微滥用。在文献中，“框架”通常指形如 $a/1$的整数框架，而我们对“框架”的用法或许更应称为“手术系数”或“斜率”。

我们有如下初等引理。

引理 2.2. 设 $L=K\cup J$ 是 S^3 中的一个带框架的二分支链环，对其施行手术可得到同调 $S^1\times S^2$的二重连通和。则 L 的各分支在代数上不链结，并且是0框架的。

证明。 设 $Y\#Z$ 表示对 L施行上述规定手术的结果。迈耶-维托里斯序列立即给出 $H_1(S^3\setminus\eta(L))\cong\mathbb{Z}^2$，其生成元由 L各分支的子午线给出。通过按指定框架填入实心环面，由包含诱导的同态

$$i_*: H_1(S^3\setminus\eta(L))\to H_1(Y\#Z)$$

是一个满同态。由于 $H_1(Y\#Z)=\mathbb{Z}^2$，我们可以得出结论， i_* 实际上是一个同构。对于 $\partial\eta(L)$ 的每个环面分支 T，我们填入的实心环面将消去 $H_1(T)$ 的某个生成元。因此，诱导同态 $H_1(T)\to H_1(Y\#Z)$ 具有包含框架曲线的非平凡核。但诱导包含映射 $H_1(T)\to H_1(S^3\setminus\eta(L))$ 的核由塞弗特经线生成。考察诱导的复合同态，必然可知每个分支上的框架都是塞弗特经线，即 0-框架。由于每条塞弗特经线在补空间 $S^3\setminus\eta(L)$ 中都是零调的，环绕数必然全部为零。□

接下来，我们简要介绍塞弗特纤维空间。我们沿用 [Mar16] 第10章的记号。塞弗特纤维空间 $(S^2;\frac{p_1}{q_1},\dots,\frac{p_k}{q_k})$，记作 $(S^2,(p_1,q_1)\dots,(p_k,q_k))_{\overline{3}}$ —

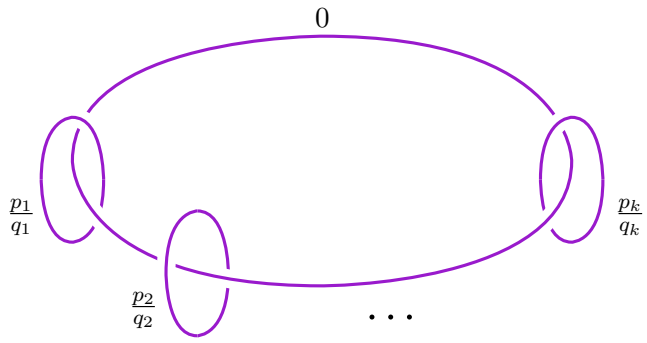


FIGURE 1. 塞弗特纤维空间（S^2; $\frac{p_1}{q_1}$、.....、 $\frac{p_k}{q_k}$）的手术描述 — —

在 [Mar16], 中，它的底轨形为 S^2，有 k 条阶数为 $p_1, \ldots, p_k$ 的奇异纤维，并由图1中的手术图表示。

根据 [Mar16]，我们有一个有用的引理。

引理2.3。 塞弗特纤维空间 $\left(S^2; \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ 是 S^3 当且仅当 $p_1q_2 + p_2q_1 = \pm 1$。

证明。 空间 $Y = \left(S^2; \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ 由对 $S^1 \times S^2$中的两条正则纤维做手术得到，因此Y 是两个塞弗特纤维化实心环面的并。在一条将这两个实心环面分开的固定海加德环面上，一条子午线是（p_1, q_1）-曲线，另一条则是 $-$（p_2, q_2）-曲线。这两条曲线的相交数由 $p_1q_2 + q_1p_2$给出。由此可知，当且仅当该相交数为 ± 1时， $Y = S^3$ 。□

塞弗特纤维空间的欧拉数 $Y =$(S^2; $\frac{p_1}{q_1}$、.....、 $\frac{p_k}{q_k}$)由 $e(Y) = \frac{q_1}{p_1} + \cdots + \frac{q_k}{p_k}$ 给出。值得注意的是，—如果 Y是一个同调 $S^1 \times S^2$，那么 $e(Y) = 0$ [Mar16，命题10.3.5]。

在 S^3 的手术图中额外画一条未标记的曲线，有助于描述纽结 $K \subset S^3$ 。例如，根据引理2.3，对于任意 p 以及任意奇数 q，当$r = \frac{q+1}{2}$时，(S^2; $\frac{p}{1}$、 $-\frac{p-1}{1}$) 和 (S^2; $\frac{2}{1}$、 $-\frac{r}{q}$) 都表示 S^3，但对应不同的塞弗特纤维化。因此，图2所示的曲线表示 S^3 中的纽结。特别是，在这两种情况下，纽结都包含在 S^3 的 Heegaard环面中，并且在这些参数下，分别表示一个 $-(p, p-1)$-环面纽结 $-T_{p,p-1}$ 或一个 $-(q, 2)$-环面纽结 $-T_{q,2}$。

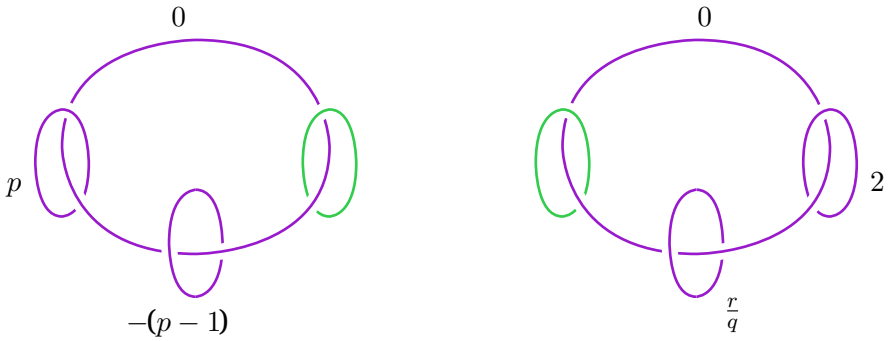


FIGURE 2. A $-(p, p-1)$-环面纽结（左）和 $-(q, 2)$-环面纽结（右），位于 S^3

我们证明定理 1.5 的一个关键要素来自 [HKMP19] 和 [Joh22], ，他们证明了某些三维流形不能通过对 S^3 中的纽结进行手术而得到。 n奇数情形已在 [HKMP19]中完成，并在 nJoh [中扩展到22]偶数情形。

定理 2. 4. [HKMP19,Joh22] 对于任意自然数 n，由同调 $S^1 \times S^2$ 给出 *b* y

$$Y_n = \left(S^2; -\frac{2}{1}, \frac{8n-1}{1}, \frac{16n-2}{8n-3}\right)$$

不是通过对 S^3 中的纽结进行 *0*-手术得到的。

备注 k 2.5. [Joh22] 中定理 1.2.1 所阻碍的流形被确定为

$$A_n = \left(S^2; -\frac{2}{1}, \frac{-8n+1}{1}, \frac{16n-2}{8n+1}\right),$$

其参数与定理 2.4 中给出的参数并不相同。尽管如此，我们可以看到，$A_n = (S^2; 2\,1, \frac{-8n+1}{1}, -\frac{16n-2}{8n-3}) = -Y_n$（例如，参见 [Mar16] 中关于塞弗特纤维空间等价性的命题 10.3.11），因此，当且仅当 Y_n 可通过对 $-K$ 中的纽结进行手术得到时，A_n 可通过对 K 中的纽结进行手术得到。

最后，为了构造定理 1.5 中的链环，我们在不改变相应 3维流形 Y 的前提下对手术图进行变换。这些操作统称为*Kirby*演算，其中三种操作将在下文描述并展示于图 3 中。

(1) 我们可以消去任何一个手术系数为整数且有一条零标架子午线的分支。(2) 如果一个零标架平凡结围成的圆盘恰好与两个分支相交，且这两个分支的整数框架分别为n 和 m ，并且各自在一个点处与圆盘相交，那么我们可以沿着圆盘将这两个分支用带连接，并消去这个平凡结分支。新分支的框架为 $n+m$。(3) 如果一个 r框架分支 K_1 （带有 $r \in \mathbb{Q}$ 和 $r \neq 0$）是另一个 n 框架分支 K_2的子午线，其中 $n \in \mathbb{Z}$，那么我们可以消去 K_1，并赋予 K_2 框架 $n - \frac{1}{r}$。

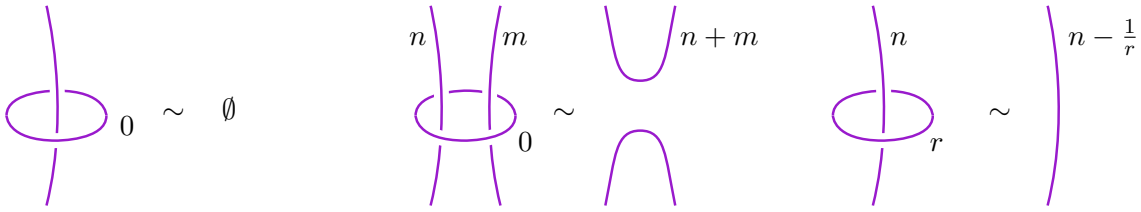


FIGURE 3. 左侧为类型 (1) 的变换，中间为类型 (2) 的变换，右侧为类型 (3) 的变换。

这些变换众所周知；例如，类型 (1) 的变换见 [Sav99], 中的命题 3.3，类型 (2) 的变换是 [Sav99], 中图 3.24 所示的例子，而类型 (3) 的变换是“猛扣”，见 [GS99]中的图 5.30。例如，关于Kirby演算的更多细节可见 [GS99] 或 [Sav99], 。

3. Proof of the Main Theorem

在本节中，我们证明下面的命题 3.1，构造链环 L_n，对其施行 0-手术得到 $Y_n \# Z_n$，其中 Y_n 对应于上文定理 2.4 中的塞弗特纤维空间。定理 1.5 随即得出。

命题 3.1. 对于每个 $n \geq 1$，都存在一个 *2* 分量链环 L_n，使得对 L_n进行 *0*-手术后得到 $Y_n \# Z_n$，其中 $H_1(Y_n) = H_1(Z_n) = \mathbb{Z}$，$Y_n = (S^2; -\frac{2}{1}, \frac{8n-1}{1}, \frac{16n-2}{8n-3})$，且 $Z_n = (S^2; -\frac{16n-2}{8n-3}, -\frac{8n-2}{1}, \frac{32n^2-12n+1}{16n^2-6n+1})$。

证明. 首先，考虑图4中未标记的（绿色）纽结 K_n 。忽略 K_n，根据引理2.3，对应的 3维流形为 $S^3\#S^3 = S^3$ 。此外， K_n 可以通过对图2中的两个纽结取连通和得到（其中一个取镜像），因此

$$K_n = -T_{8n-1,8n-2}\#T_{32n^2-12n+1,2}.$$

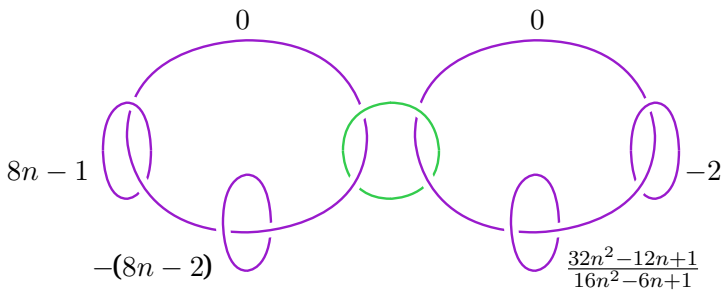


FIGURE 4. S^3中的纽结 K_n ，未标记并以绿色显示。

令 M_n 表示对 K_n进行0-手术所得的结果。接着进行变换（2），可得左侧图5所示的 M_n 手术图，由此可知 $M_n = (S^2;\ -\frac{2}{1},\ \frac{8n-1}{1},\ -\frac{8n-2}{1},\ \frac{32n^2-12n+1}{16n^2-6n+1})$。左侧的带框架链环与图5右侧的带框架链环同痕，而后者经连续四次（2）类变换后，等价于图6中的带框架链环。

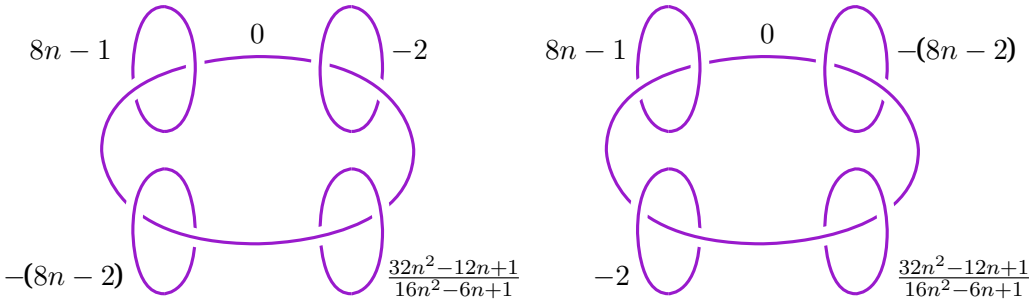


FIGURE 5. M_n的同痕手术图。

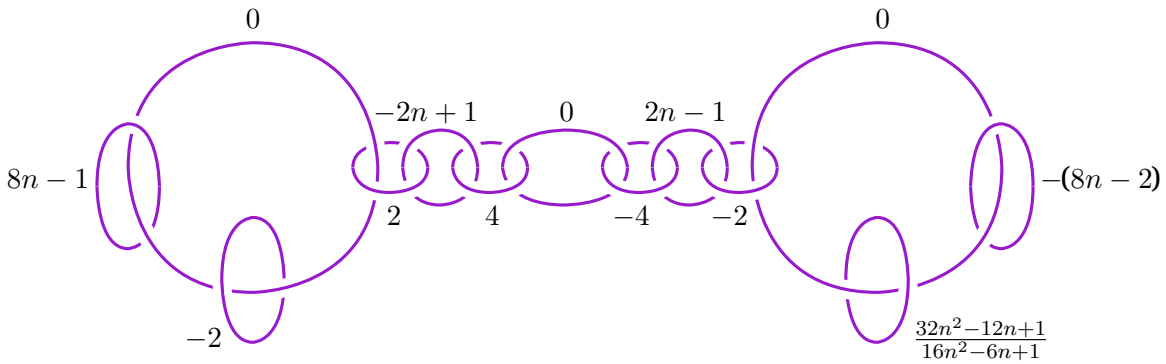


FIGURE 6. M_n的另一个手术图。经过四次 (2) 型变换，可将这个链环转化为图5中的链环。

令 J_n 表示图7所示的 M_n 中的纽结。我们可以在 M_n 中对 J_n 作同痕，使其避开对 K_n进行手术所得的核心曲线；此时可将 $L_n = K_n \cup J_n$ 视为S^3中的二分量链环。令 N_n 表示在 M_n 中对 J_n 进行0-手术所得的结果（也就是说， N_n 是在 S^3中对L_n 进行0-手术所得的结果）。给 J_n 赋予0-框架，即可得到 N_n 的手术图；再通过一次（1）类变换，将此手术图转换为图8顶部的手术图。随后经过四次（3）类变换，即可转换为底部的手术图，其中新的框架由下方的计算及其反向计算验证：

$$2 - \frac{1}{(-2n+1) - \frac{1}{4}} = 2 + \frac{4}{8n-3} = \frac{16n-2}{8n-3}.$$

由此可得

$$N_n = \left(S^2; -\frac{2}{1}, \frac{8n-1}{1}, \frac{16n-2}{8n-3}\right) \# \left(S^2; -\frac{16n-2}{8n-3}, -\frac{8n-2}{1}, \frac{32n^2-12n+1}{16n^2-6n+1}\right) = Y_n \# Z_n,$$

正如所需。 □

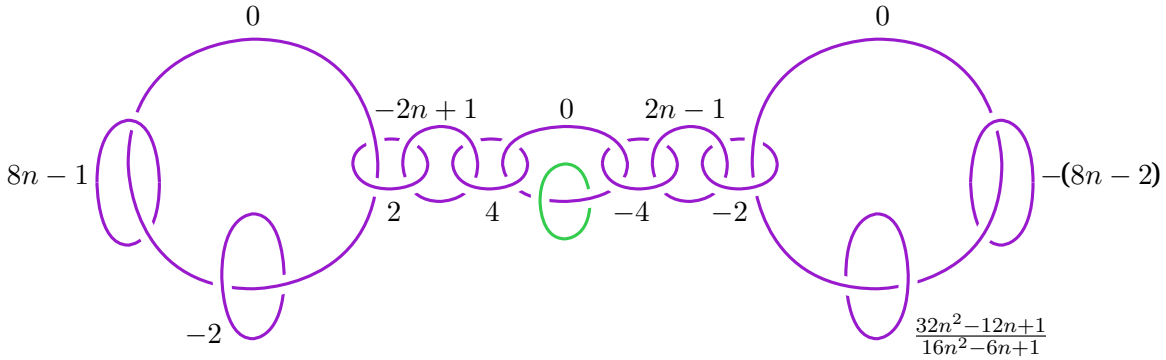


FIGURE 7. 纽结 J_n 在 M_n。

定理 *1.5* 的证明。 设 L_n 是命题 3.1 中定义的链环。那么，对 L_n 进行 0-手术的结果是 $Y_n \# Z_n$。如果 L_n 弱柄滑等价于一个分裂链环，那么 Y_n 和 Z_n 各自都可以通过对 S^3中的一个纽结进行手术得到，这与定理 2.4 矛盾。 □

4. ANOTHER PERSPECTIVE ON THE LINKS L_n

本节将探讨链环 L_n 与 [GST10] 和 [MZ22] 中的构造之间的联系，以提供进一步的拓扑背景。请注意，在我们的构造中，纽结 K_n是两个纤维化纽结的连通和，因此本身也是纤维化的。Scharlemann 和 Thompson 对存在可约手术的二分支链环 $L = K \cup J$ 施加了严格限制，其中一个分支为纤维化纽结。下面的命题是 [ST09]的推论4.2的直接推论（另见 [GST10]的定理3.3和 [MZ22]的引理3.10）：

命题4.1. 假设 $L = K \cup J$ 是一个二分量带框架链环，且 K 是纤维化纽结，对 L 进行手术得到 $Y \# Z$，即若干同调 $S^1 \times S^2$'的连通和。那么，要么 L 与一个分裂链环柄滑等价，要么存在一系列将 J 在 K 上进行柄滑的操作，将 L 变为链环 $L' = K \cup J'$，使得 J'位于 K的一个纤维中，且其框架为纤维诱导的零框架。

证明。 这样的链环满足《ST》 [推论4.2的假设，而由此得到的四个结论中，根据引理 2.2中所断言的代数拓扑性质，只有两种可能。令 M表示对纤维化分支 K进行手术的结果。那么，要么 J （视为 M中的一个纽结）

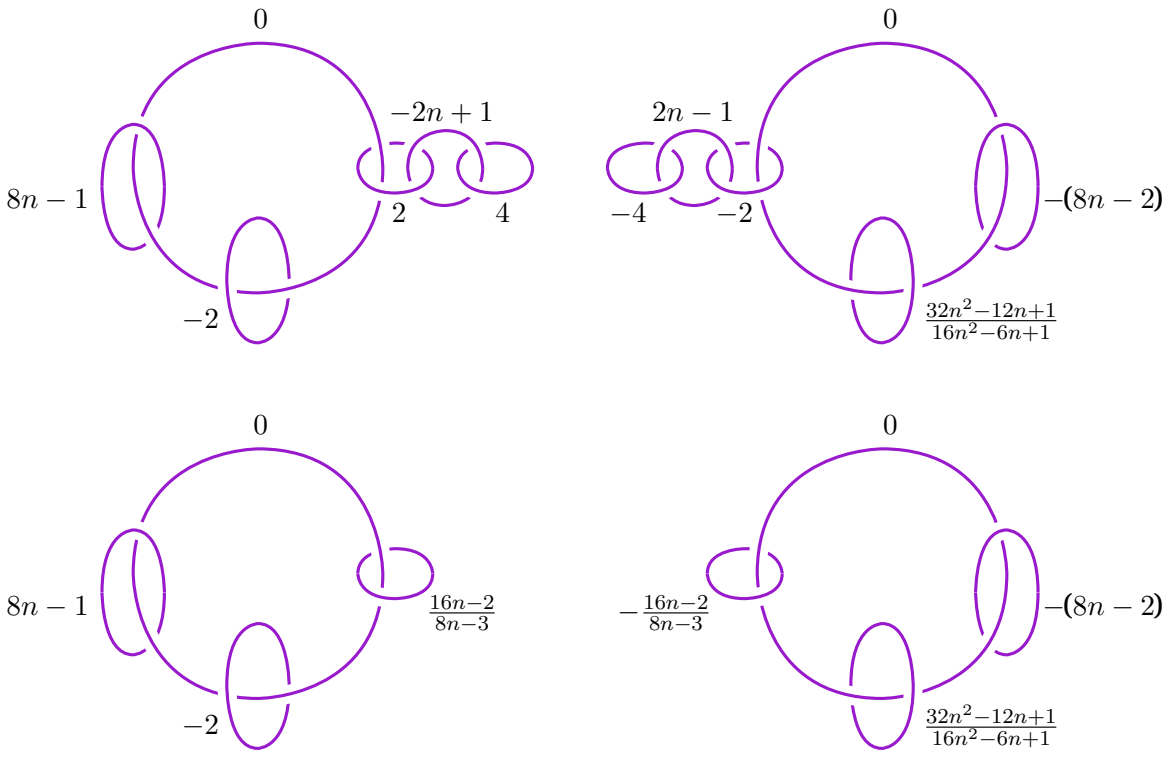


FIGURE 8. 关于 J_n 的 0-手术的等价手术图（见 M_n）。

同痕于一个3-球中，此时 L 与一个分裂链环柄滑等价；要么 J 同痕于 M的一个（闭）纤维，其曲面框架等于 J的框架。因此，作为 S^3中的一个链环，纽结 J 可以被推到 K 的纤维上，至多需要在 K上进行把手滑动。□

现在考虑（纤维化的）环面纽结$T_{p,q}$。$S^3\setminus\eta(T_{p,q})$的纤维化的显式描述见 [MZ22]：纤维$F_{p,q}$是一个亏格为$(p-1)(q-1)/2$且只有一个边界分支的曲面。设$A_{p,q}$为去掉一个开圆盘的 $2pq$边形，则$A_{p,q}$是一个拓扑环带。通过适当的边识别，纤维$F_{p,q}$自然地成为$A_{p,q}$的商空间，而单值$\varphi_{p,q}$则由$A_{p,q}$的顺时针 $2\pi/pq$旋转诱导得到。通常，纽结补空间的单值选取为固定纤维的边界。然而，在此情形下，$S^3\setminus\eta(T_{p,q})$是以圆盘$D^2_{p,q}$为底空间的塞弗特纤维化；若$\rho_{p,q}$是自然投影映射$\rho_{p,q}\colon F_{p,q}\to D^2_{p,q}$，那么我们对$\varphi_{p,q}$的选取（它旋转$F_{p,q}$的边界）是等变的，其含义是$\rho_{p,q}=\rho_{p,q}\circ\varphi_{p,q}$。

回忆一下，$K_n=-T_{8n-1,8n-2}\#T_{32n^2-12n+1,2}$。由命题 3.1 的证明可知，对 K_n 进行 0-手术得到的流形 M 是一个以 S^2 为底、具有四个奇异纤维的塞弗特纤维空间。值得注意的是，$(8n-1)(8n-2)=2(32n^2-12n+1)$，因此单值 $\varphi_{8n-1,8n-2}$ 和$-\varphi_{32n^2-12n+1,2}$ 分别在各自的纤维曲面上诱导出幅度相同的旋转。由此可知，M_n 的纤维 F 由两个纽结纤维粘合而成；两个单值可以拼接起来，得到 M_n的（闭）单值 $\widehat{\varphi}$；而 M_n 的塞弗特纤维化的底空间 S 则由两个纽结直和项的底空间粘合而成。根据构造，若 $\rho\colon M_n\to S$ 是到底轨形的商映射，则单值 $\widehat{\varphi}$ 满足 $\rho=\rho\circ\widehat{\varphi}$。

由于F是闭曲面，M_n的塞弗特纤维化是水平的，限制映射$\rho|_{\widehat{F}}\colon F\to S$是一个分支覆盖映射，其分支点与 S的轨形点（包括重数）重合。我们将用到一个关于分支覆盖的实用引理，其证明

留给读者。感兴趣的读者可参阅 [Sco83], , 例如了解分支覆盖和塞弗特纤维空间。

引理 4.2. 设 F_+ 是一个连通紧致曲面， S_+ 是一个圆盘，且 p ： $F_+ \to S_+$ 是一个具有两个分支点、其阶分别为 a 和 b的分支覆盖。那么 F_+ 有$\gcd(a、\ b)$ 个边界分支。

基于这一设置，我们给出命题 3.1 的第二种证明。

命题 *3.1* 的另一种证明。 取 S 中的一条曲线 λ ，使其将阶为 2 和 $8n-1$ 的锥点与阶为 $8n-2$ 和 $32n^2-12n+1$的锥点分隔开，如图 9 所示；令 $\Lambda = \rho^{-1}(\lambda)$，从而 Λ 是 M_n中的一个本质竖直环面，其中 M_n是对 K_n进行 0-手术后得到的流形。令 J_n 为交集 $\Lambda \cap \widehat{F} = \rho_{\widehat{F}}^{-1}(\lambda)$中的任意一条曲线，并赋予 J_n 由 Λ 确定的框架$\widehat{\ }$（它与由 F确定的框架一致）。按照此框架对 J_n进行手术，相当于沿 Λ切开，沿边界中 J_n 的相应副本附加两个三维 2-手柄，再将所得边界分支重新识别。（例如，参见 GST10]中的“手术原理” [。）由此可见，在 M_n 中对 J_n 进行手术所得的结果 N_n可表示为连通和 $Y_n \# Z_n$，我们要确定这两个连通和项。

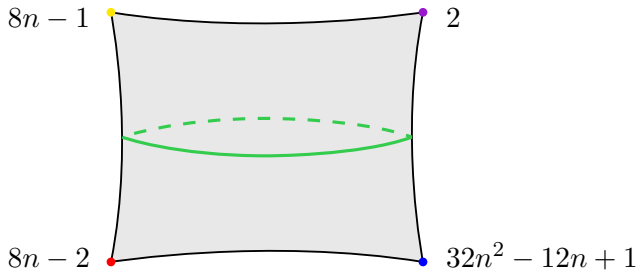


FIGURE 9. 曲线 λ in S 按指定方式将锥点分隔开。

沿 Λ切开 M_n 会保持塞弗特纤维化，从而得到两个塞弗特纤维空间；它们都纤维化于 D^2 之上，并且分别具有阶为 2 和 $8n-1$ 或 $8n-2$ 和$32n^2-12n+1$的奇异纤维。回忆 $M_n = (S^2; -\frac{2}{1}, \frac{8n-1}{1}, -\frac{8n-2}{1}, \frac{32n^2-12n+1}{16n^2-6n+1})$。因此，我们看到 $Y_n = (S^2; -\frac{2}{1}, \frac{8n-1}{1}, \frac{p}{q})$ 且 $Z_n = (S^2; \frac{r}{s}, -\frac{8n-2}{1}, \frac{32n^2-12n+1}{16n^2-6n+1})$。令 S_+为 $\overline{S \setminus \lambda}$的闭包，其中包含阶为 $8n-1$ 和 2 的轨形点；令 F_+ 为 $\rho_{\widehat{F}}^{-1}(S_+)$ 的任意一个分支。根据引理 4.2， F_+ 具有 $\gcd(8n-1, 2) = 1$ 个边界分支。我们得出，$\widehat{\ }$ $\sim J_n$ 在 F中是分隔的。因此，J_n 通过 F的一个子曲面在 M_n 中是零调的，并且 J_n 的曲面框架与 0-框架一致。

由于 K_n 也是零标架，且 J_n 包含在一个纤维中，因此 K_n 和 J_n 的环绕数为零。由此可知， Y_n 和 Z_n 都是同调 $S^1 \times S^2$，特别是它们的欧拉数均为零。根据 [Mar16], , 我们可以计算 $\frac{p}{q} = \frac{16n-2}{8n-3}$ 和 $\frac{r}{s} = -\frac{16n-2}{8n-3}$ ，从而完成证明。□

除了与参考文献 [GST10] 和 [MZ22] 建立联系，并提供我们最初构思这一构造时所采用的视角外，这种替代证明还给出了链环 L_n的具体描述。在情形 $n = 1$下，我们有 $K_1 = -T_{7,\ 6} \# T_{21,\ 2}$。闭纤维$\sim F$ 是一个亏格25曲面，可由一个具有两个84边形边界分支的平环取商构造而成；单值 φ 是一个 $2\pi/42$ 旋转，而底空间 $S^{\widehat{\ }}$中一条按指定方式分离锥点的曲线 λ ，其提升为三条分离曲线，将 F 分成四个

分支。其中一条提升曲线如下面的图10所示。按照 [MZ22] 中概述的步骤（建立在 Scharlemann 于 [Sch16]中的工作之上），原则上可以在 S^3中的 K_1 的一条纤维上画出 J_1，但我们预计，即使在最简单的情形 $n = 1$下，这个链环的图示也会有数千个交叉，因此这里省略具体图示。

References

[Cer70] Jean Cerf, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie* **39** 1970 5 173 292089 , 《高等科学研究所数学出版物》（ ），–。MR[87] *Foliations and the topology of 3-manifolds. III* **26** Gab David Gabai, , 《微分几何杂志》(1987年)，第3期，479–563页。MR910018[Gom91] Robert E. Gompf, *Killing the Akbulut-Kirby 4-sphere with relevance to the Andrews-Curtis and Schoen- , , 《拓扑学》（ ），第–期。MR flies problems* **30** 1991 1, 97 115 1081936 [99] GS Robert E. Gompf 和 Andras I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, 《数学研究生教程》，第 20, 1999 1707327 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。MR[10] GST Robert E. Gompf、Martin Scharlemann 和 Abigail Thompson, *Fibered knots and potential counterexamples to the property 2R and slice-ribbon conjectures* **14** 2010 4, 2305 2347 , 《几何与拓扑》（ ），第–期。MR2740649[HKMP19] Matthew Hedden、Min Hoon Kim、Thomas E. Mark 和 Kyungbae Park, *Irreducible 3-manifolds that cannot be obtained by 0-surgery on a knot* **372** 2019 11, 7619 7638 , 《美国数学会会刊》（ ），第–期。MR4029676[Joh22] Peter Johnson, *Small seifert fibered zero-surgery*, 2022年。博士学位论文（Ph.D.）——弗吉尼亚大学。[Kir95] Rob Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, 1995年。http://www.math.berkeley.edu/~kirby/。[Mar16] Bruno Martelli, *An introduction to geometric topology*, 2016年。https://arxiv.org/pdf/1610.02592 . [MSZ16] Jeffrey Meier , Trent Schirmer 和 Alexander Zupan, *property R conjecture* **144** 2016 11, 4983 4997 , 《美国数学会会刊》（ ），第–期。MR[22] *Classification of trisections and the generalized* 3544545 *Generalized square knots and homotopy 4-spheres* MZ Jeffrey Meier 和 Alexander Zupan, , 《微分几何杂志》**122** (2022年)，第1期，69–129页。MR4507471[Sav99] Nikolai Saveliev, *Lectures on the topology of 3-manifolds*, 德古意特教材，Walter de Gruyter & Co.，柏林，1999 1712769 。《Casson不[16] *Proposed Property 2R counterexamples examined* 变量导论》。MR Sch Martin Scharlemann, , 《伊利诺伊数学杂志》**601**，207 2016 250 3665179（ ），第–期。MR[Sco 83] *The geometries of 3-manifolds* **15** 1983 5, 401 487 705527 Peter Scott, , 《伦敦数学会会报》[09] *Surgery on a knot in (surface × I)* （ ），第–期。MR ST Martin Scharlemann 和 Abigail A. Thompson, , 《代数、几何与拓扑》**9** (2009年)，第3期，1825–1835页。MR2550096

Department of Mathematics, North Carolina State University
Email address: tlid@math.ncsu.edu

Department of Mathematics, University of California, Davis
Email address: tdoliveirasmith@ucdavis.edu

Department of Mathematics, University of Nebraska - Lincoln
Email address: zupan@unl.edu

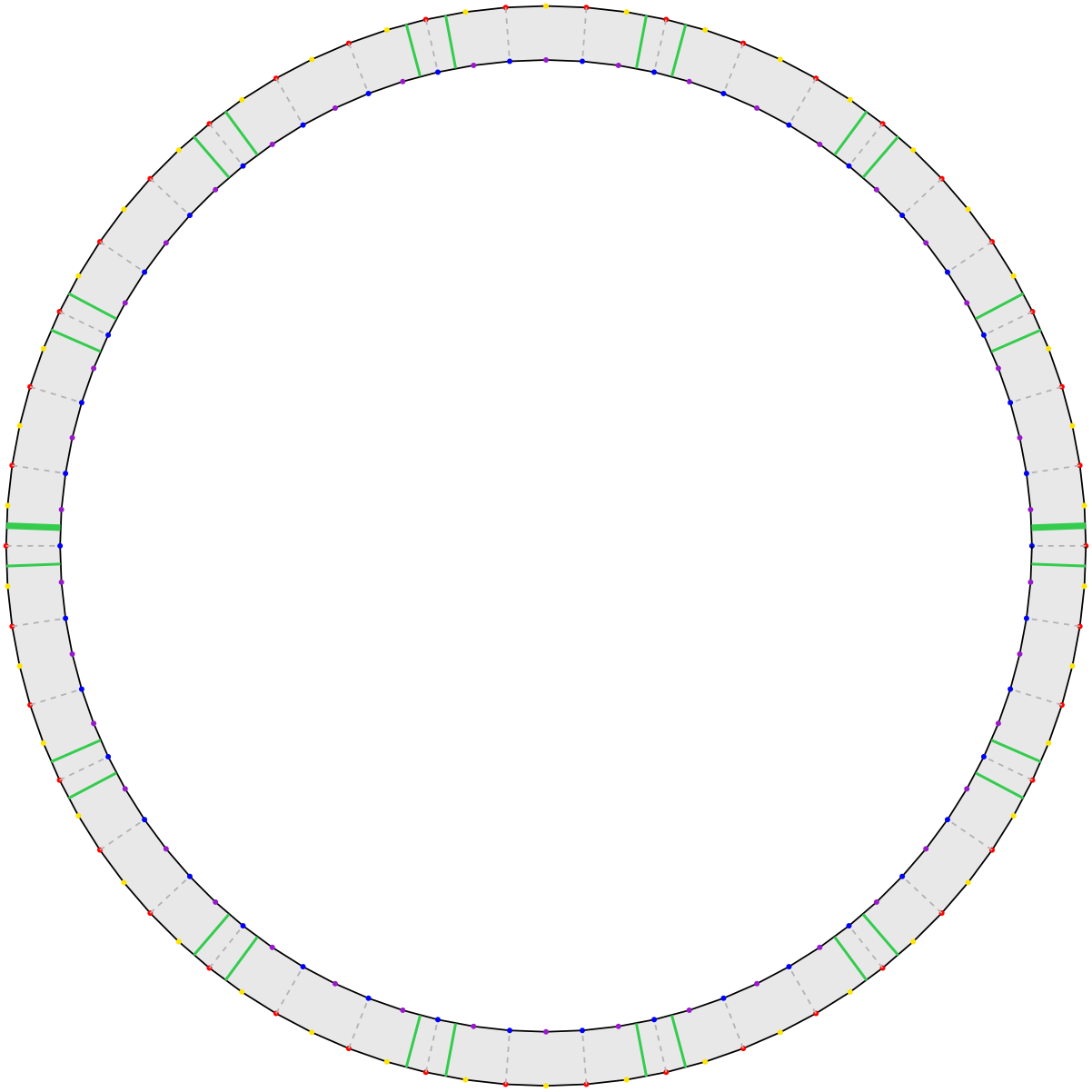


FIGURE 10. λ 到 F的一个提升。此处 F 是平环经由边识别得到的商空间。沿两条边界曲线，从右侧加粗的绿色弧开始，各边依次标记为$(i,j)^+$、$(i,j+1)^-$、$(i+1,j+1)^+$，并按此模式沿逆时针方向继续。在外边界上，指标 i 取模7，指标 j取模6。在内边界上，指标 i 取模2，指标 j 取模21。例如，两条加粗的绿色线段沿其内边界粘合。本图推广了 [MZ22中图 6]所示的构造。注意，$\widehat{\ }$从 F 到 S 的覆盖的42个基本域由虚线划分，顶点按颜色编码，以标示图 9中锥点的原像。