arXiv:2603.05669v1 [math.DG] 5 Mar 2026

有界粗糙黎曼度量序列的利普希茨界与一致收敛

BRIAN ALLEN、BERNARDO FALCAO、HARRY PACHECO 和 BRYAN SANCHEZ

Abstract. 本文研究我们所称的有界粗糙黎曼度量（M， g），它们是在每个切空间上的正定对称张量， T_pM，作为坐标中的函数，它们是有界且可测的。这些结构足以研究由连接各点 p， $q \in M$ 的所有分段光滑曲线的长度下确界所给出的长度空间。我们的目标是找出对 g 施加的、能够保证上界和下界的利普希茨界或一致界的最弱条件。对于每个条件，我们都给出一个示例，说明该条件无法进一步削弱，同时也探讨其中的几何直觉。

1. Introduction

本文研究我们所称的有界粗糙黎曼度量（M， g），它们是在每个切空间上的正定对称张量， T_pM；作为坐标中的函数，它们有上界、统一地远离零，并且可测。L. Bandara 给出了粗糙黎曼度量的定义 [10]，而有界粗糙黎曼度量是他所定义并研究的度量的一个子类。有界粗糙黎曼度量的定义为研究与（M， g）相关的长度空间提供了足够的结构，该长度空间由分段光滑曲线 γ 的长度给出： $[0,1] \to M$

$$L_g(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\gamma', \gamma')} dt, \tag{1}$$

以及点 p， $q \in M$ 之间的距离，通过最小化连接 p 与 q的曲线长度

$$d_g(p,q) = \inf\{L_g(\gamma) : \gamma \text{ piecewise smooth}, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}. \tag{2}$$

目标是找出可施加于 g 的最弱条件，以保证上下两侧的利普希茨界或一致界。本研究的动机在于理解在标量曲率界下光滑黎曼度量序列的度量收敛，其中先验极限可能是长度空间，或甚至不是连续黎曼流形的度量空间。

我们希望更好地理解的一个重要猜想是标量曲率紧性猜想。我们可以通过如下提问给出该猜想的一个不精确版本：对于具有正标量曲率的黎曼流形序列，需要哪些附加条件，才能使一个子序列在Sormani-Wenger内在平坦意义下收敛到具有正标量曲率概念的度量空间？该猜想的精确版本可见C. Sormani在 [22]中的陈述。J. Park、W. Tian和C. Wang [21] 研究旋转对称扭曲积，C. Sormani、W. Tian和C. Wang考虑了 $\mathbb{S}^1 \times_f \mathbb{S}^2$ 扭曲积，其中一个重要例子已在 [23] 和 $W^{1,p}$、$p < 2$ 中探讨，并在 [24]中得到收敛。B. Allen、W. Tian和C. Wang[9] 研究与圆球面共形的度量，并建立了与Dong[19] 类似的收敛，用于正质量定理的稳定性。由于标量曲率的下界往往导致 $W^{1,p}$ 紧性，其中极限函数可被视为一个$_{W^{1,p}}$ 黎曼度量，因此自然要研究弱得多的黎曼度量概念及其度量空间收敛性质。

第一作者与E. Bryden [3, 4] 此前研究了黎曼度量上的 $W^{1,p}$ 和 L^p 界，表明即使在这些弱假设下，仍可得到相应距离函数的各种界。C. Dong、Y. Li和K. Xu [20]也研究了黎曼度量上的$W^{1,p}$界及其收敛性质，C. Aldana、G. Carron和S. Tapie [1] 则在共形黎曼度量的情形下进行了研究。如前所述，粗糙黎曼度量的定义由L. Bandara [10], 给出，并由L. Bandara与P. Bryan [11], 、L. Bandara、M. Nursultanov和J. Rowlett [13], 以及L. Bandara与A. Hassan [12]进一步研究。由于我们关注的是理解光滑黎曼度量的长度空间结构，因此在我们的情形中，将有界性加入粗糙黎曼度量的定义是合理的，从而总能保证存在由极小化曲线长度所定义的距离函数。于是，我们关于有界粗糙黎曼度量的全部结果都适用于光滑黎曼度量序列及其极限。在更一般的研究中，L. Badara与A. Hassan [12]考察了光滑连通流形上全体粗糙黎曼度量空间的度量与长度空间性质。在一系列论文中，G. De Cecco与G. Palmieri [15, 16, 17, 18] 研究Lipschitz黎曼流形和LIP芬斯勒流形，探讨在这些弱背景下定义的若干度量空间概念，并建立这些不同定义之间的关系。连续黎曼度量的长度空间结构由A. Burtscher [14]研究，表明诱导距离等价于定义为绝对连续曲线长度之下确界的距离。

我们首先研究来自下方的Lipschitz界。在此，第3.2小节中的例子表明，如果捷径出现在任何具有正Hausdorff 1-测度的集合上，则不应期望能够建立下利普希茨界。特别地，定理3.4给出了一个例子，其中共形因子除中心处一边长消失的矩形$\frac{1}{n}$外处处为1，而该处的共形因子为 $\frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in (0,\infty)$。有鉴于此，我们可以陈述第一个主要结果，它为有界粗糙黎曼度量建立下利普希茨界。

定理1.1. 设 g_1 为有界粗糙黎曼度量， g_0 为黎曼度量，且 M 为光滑、连通的紧流形。若存在 $U \subset M$ 使得$\mathcal{H}^1_{g_0}(M \setminus U) = 0$，并且存在 $c > 0$ 使得

$$g_1(v,v) \geq c g_0(v,v), \quad \forall v \in T_pM, p \in U, \tag{3}$$

then

$$d_{g_1}(x,y) \geq c d_{g_0}(x,y). \tag{4}$$

鉴于第一作者 R. Perales 和 C. Sormani 所指出的黎曼度量 C^0 自下方收敛的重要性， [5] 我们陈述一个由定理1.1直接得出的推论。

推论1.2。 设 g_n 为一列有界粗糙黎曼度量， g 为一个黎曼度量，且 M 光滑、连通且紧致。若存在一个集合 $U \subset M$，使得 $\mathcal{H}^1_g\left(M \setminus U\right) = 0$ 其中$C_n \searrow 0$

$$g_n(v,v) \geq (1 - C_n) g(v,v), \quad \forall v \in T_pM, p \in U, \tag{5}$$

then

$$d_{g_n}(x,y) \geq (1 - C_n) d_g(x,y). \tag{6}$$

我们现在放宽所需目标，以便研究有界粗糙黎曼度量序列上的一致下控制。在这种情形下，第一作者与 C. Sormani [7, 8] 给出的例子表明，为了得到距离函数的 C^0 下方收敛，需要对黎曼度量施加一致下界。在此，我们能够减弱这一要求，从而证明我们只需要该集合的 Hausdorff 1-测度

其中捷径正在形成并变小。我们用定理3.7、3.8和3.9检验这一条件，由此看到，取决于捷径集的Hausdorff 1-测度的极限行为，我们在极限中可以得到若干不同的度量空间。

定理 1.3. 设 g_n 是一列有界粗糙黎曼度量， g 是一个黎曼度量，且 M 光滑、连通且紧致。若存在一个集合 $U \subset M$，使得 $\mathcal{H}^1_g(M \setminus U) \leq C_n$，其中 $C_n \searrow 0$，并且存在一个 $c > 0$，使得

$$g_n(v,v) \geq cg(v,v), \quad \forall v \in T_pM, p \in U, \tag{7}$$

then

$$d_{g_n}(x,y) \geq cd_g(x,y) - cC_n. \tag{8}$$

再次，鉴于黎曼度量自下收敛的重要性——第一作者 R. Perales 和 C. Sormani 提出的体积在上距离在下定理便是一个例证——我们重述定理 1.3 的一个推论。该推论可直接得出，并说明如何运用此定理证明收敛到某个特定度量空间。

推论1.4. 设 g_n 是一列有界粗糙黎曼度量， g 是一个黎曼度量，且 M 光滑、连通且紧致。若存在一个集合 $U \subset M$，使得 $\mathcal{H}^1_g(M \setminus U) \leq C_n$，其中 $C_n \searrow 0$，并且

$$g_n(v,v) \geq (1 - C_n)g(v,v), \quad \forall v \in T_pM, p \in U, \tag{9}$$

then

$$d_{g_n}(x,y) \geq (1 - C_n)d_g(x,y) - (1 - C_n)C_n. \tag{10}$$

现在我们转而研究上界。第一作者和 C. Sormani [7, 8] 注意到，通常要证明黎曼度量诱导的距离具有上界，所需的假设应当弱得多。这在一定程度上是因为距离函数定义为长度的下确界，因此通常更容易得到上界。我们首先建立一个上Lipschitz界：只要序列在零体积集合上爆破，即使爆破速率任意，也允许这种情况。可以将其视为序列的一种 L^∞ 界。第一作者已经为满足 $\|g_n\|^p_{L^2_g(M)} \leq C, p > n$这一条件的 C^0黎曼流形序列建立了 H¨older 界，$d_{g_n} \leq Cd^{\frac{p-n}{n}}$其中该条件被认为是恰当的假设。这与 Morrey不等式类似，我们可以将$|g_n|_g$ 看作相对于 g的 d_{g_n} 梯度上界。当我们允许 $p \to n$ 时，$_p$形式上就变成了一个 L^2_g（M）界，而 H¨older 界则变成利普希茨界。下面的定理证实了这一形式论证是正确的。此外，第 3 节的 3.1 小节中的例子也证实了这一假设是必要的。 –

定理 1.5. 设 g_n 是一个有界粗糙黎曼度量序列， g 是一个黎曼度量，且 M 光滑、连通且紧致。若存在一个开集 $U \subset M$，使得 $\mathrm{Vol}_g(M \setminus U) = 0$，并且存在一个 $C > 0$，使得

$$g_n(v,v) \leq Cg(v,v), \quad \forall v \in T_pM, v \in U, \tag{11}$$

then

$$d_{g_n}(x,y) \leq Cd_g(x,y). \tag{12}$$

在最后一个主要定理中，我们转而建立一列距离函数的统一上界控制。这里，我们能够证明一个根据定理 3.1 可知并非最优的定理。尽管如此，该定理允许序列发生爆破，并给出了一个

在几何上自然的假设。第一位和第四位署名作者以及 Y. Torres [6] 曾针对扭曲积有界粗糙黎曼度量得到过类似结果。

定理 1.6。设 g_n 是一列有界粗糙黎曼度量，g 是一个黎曼度量，且 M 光滑、连通且紧致。若存在一列集合 $U_n \subset M$，使得 $M \setminus U_n\infty$ 可分解为连通分支 W_1、W_2、.....，其中 $\sum$直径(W_k) $\leq V_n$，$V_n \searrow 0$ 当 $k=1n \to 0$ 时，并且存在一个 $C > 0$，使得

$$g_n(v,v) \leq Cg(v,v), \quad \forall v \in T_pM, p \in U_n, \tag{13}$$

$$V_n g_n(v,v) \leq C_n g(v,v), \quad \forall v \in T_pM, p \in M \setminus U_n, \tag{14}$$

其中，当 $n \to \infty$ 时 $C_n \searrow 0$，则

$$d_{g_n}(x,y) \leq Cd_g(x,y) + C_n. \tag{15}$$

在第 2 节中，我们回顾必要的背景知识，并固定全文后续部分将使用的记号。

在第 3 节中，我们陈述并证明多个例子，以说明主要定理中各项假设的重要性。

在第 4 节中，我们给出主要定理的证明。我们注意到，这些证明相当简短；示例说明了假设的必要性，也正是这一点使证明能够如此简洁。

致谢： 我们感谢 PSC CUNY Traditional B 基金和 Lehman College STEM-IN 基金为本项目的所有作者提供暑期薪酬。我们还感谢 Lehman College 数学系。第二至第四位署名作者本科阶段都曾在那里学习数学，该系一直以来给予我们持续的支持。

2. Background

本节将回顾理解本文其余部分所需的背景材料。我们首先回顾一类特殊的共形长度空间，在讨论第 3 节中的每个示例时都会用到这一类空间。随后，我们将其推广到有界粗糙黎曼度量。

2.1. 共形长度空间。考虑任意分段光滑曲线 $\gamma\colon [0,1] \to [0,1]^2$我们可以在 $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ 上定义一个共形长度空间：给定一个有界且可测的函数 $f\colon [0,1]^2 \to (0, \infty)$，它会扭曲平面的几何结构，从而得到新的长度 $L_f(\gamma)$，其定义为

$$L_f(\gamma) = \int_0^1 f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \tag{16}$$

其基本思想是，权重因子$f(x(t)\ y(t))$（称为共形因子）会通过乘以速度来改变曲线长度。随后，可以通过对连接 p 和 q的曲线长度取最小值，来定义两点之间的距离

$$d_f(p,q) = \inf\{L_f(\gamma) : \gamma \text{ piecewise smooth}, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}. \tag{17}$$

我们注意到，欧几里得距离函数由 d_1 给出，本文中将始终记作 d。连接 $p, q \in [0,1]^2$ 的直线也将始终记作 ℓ_{pq}。给定两条曲线 $\gamma, \alpha\colon [0,1] \to [0,1]^2$，使得 γ连接 p与 p'，而 α连接 p'与 q，我们用记号 $\gamma * \alpha\colon [0,1] \to [0,1]^2$ 表示这两条曲线的拼接。

在研究例子时，我们往往可以通过比较相应的共形因子推导出一个距离界，现陈述并证明如下。

定理 2.1。 证明，对于任意函数 $f, g:\ [0,1]^2 \to (0,\infty)$ 如果 $f(x,y) \geq g(x,y)\ \forall (x,y) \in [0,1]^2$ 那么

$$d_g(p,q) \leq d_f(p,q), \tag{18}$$

对任意 p、$q \in [0,1]^2$。

证明。 由假设 $f(x,y) \geq g(x,y)\ \forall (x,y) \in [0,1]^2$ 我们得到

$$\int_0^1 f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt \geq \int_0^1 g(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt, \tag{19}$$

其可改写为

$$L_f(\gamma) \geq L_g(\gamma). \tag{20}$$

对所有路径 γ 取下确界，这些路径连接点 p与 q，我们得到

$$d_f(p,q) \geq d_g(p,q). \tag{21}$$

□

2.2. **有界粗糙黎曼度量**。 由于我们的目标只是研究黎曼度量的度量空间性质，我们将定义一类非常弱的度量，使其度量空间结构有定义。应当注意，这意味着在考虑有界粗糙黎曼度量时，黎曼几何中通常的霍普夫-里诺定理将无法为我们所用。

定义 2.2。 若令 M 为光滑紧流形，则称 g 为有界粗糙黎曼度量，如果 g 是每个切空间T_pM上的正定对称张量 $p \in M$，并且在 M的坐标下， g 有界、统一地远离零且可测。

请注意，我们遵循 L. Bandera 给出的定义 [10] ，但通过施加全局有界性条件，而非仅要求几乎处处有界，强制令粗糙黎曼度量的奇异集为空。于是我们知道，对于任意分段光滑曲线 $\gamma:\ [0,1] \to M$，$\sqrt{g(\gamma',\ \gamma')}$有界且可测，因此 γ 具有良好定义的长度。因此，我们可以定义 γ 关于有界粗糙黎曼度量g 的长度为

$$L_g(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\gamma',\gamma')}dt, \tag{22}$$

以及距离 b　　通过最小化连接 p 与 q的曲线长度，定义点 $p,\ q \in M$ 之间的距离

$$d_g(p,q) = \inf\{L_g(\gamma) : \gamma \text{ piecewise smooth}, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}. \tag{23}$$

2.3. **一致收敛**。 首先，我们提醒读者距离函数序列一致收敛的定义。

定义 2.3. 设 $d_j\colon\ X \times X \to (0,\infty)$ 为度量序列， $d_0\colon\ X \times X \to (0,\infty)$ 为度量。则我们称 $d_j \to d_0$ 一致地 如果

$$\sup_{p,q \in X} |d_j(p,q) - d_0(p,q)| \to 0. \tag{24}$$

注记 2.4. 定义 *2.3* 中给出的一致收敛的定义，等价于度量空间$(\mathcal{C}, d_{sup})$ 中序列的收敛定义，如果我们令 $\mathcal{C}$ 为从 $X \times X \to (0,\infty)$ 出发的连续函数的集合，并且对于 f、$g \in \mathcal{C}$，我们将点之间的距离定义为

$$d_{sup}(f,g) = \sup_{p,q\in X} |f(p,q) - g(p,q)|. \tag{25}$$

现在我们证明一个关于距离函数一致收敛的常规夹逼定理，本文将始终用到它。

定理 2.5. 设 $d_j : X \times X \to (0,\infty)$ 是一个度量序列，且 $d_0 : X \times X \to (0,\infty)$ 是一个度量。若对所有 $p, q \in X$，我们都有

$$d_0(p,q) - C_j \le d_j(p,q) \le d_0(p,q) + C_j, \tag{26}$$

其中 C_j 是一个实数序列，满足 $C_j \to 0$，那么 $d_j \to d_0$ 一致收敛。

证明. 设 d_j 是一个度量序列，且 d_0 是一个度量，使得对所有 $p, q \in X$，我们都有

$$d_0(p,q) - C_j \le d_j(p,q) \le d_0(p,q) + C_j. \tag{27}$$

注意，这等价于 $-C_j \le d_j(p,q) - d_0(p,q) \le C_j$，这意味着，

$$|d_j(p,q) - d_0(p,q)| \le C_j. \tag{28}$$

通过对 (28) 两边关于所有 $p, q \in X$ 取上确界，我们得到 $\sup |d_j(p,q) - d_0(p,q)| \le C_j$，对任意 $p, q \in X$，$j \in \mathbb{N}$。由于 C_j 是一个序列，使得 $C_j \to 0$，我们可以看到

$$\sup_{p,q\in X} |d_j(p,q) - d_0(p,q)| \to 0. \tag{29}$$

因此，$d_j \to d_0$ 一致地。 □

2.4. 曲线的极小化类。 在第 3 节中，我们将研究共形有界粗糙黎曼度量的例子，这些度量在 $[0,1]^2$ 的有限多个区域上是分段常数的。因此，我们现在对这类度量上的极小化曲线作一观察。

引理 2.6. 给定一个共形因子 $f : [0,1]^2 \to (0,\infty)$，它在每个集合 $U_1, ..., U_n$上为常数，使得

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i = [0,1]^2, \qquad U_i \cap U_j = \emptyset, i \ne j, \tag{30}$$

并使得 ∂U_i, $1 \le i \le n$ 是由至多四条直线 $\ell_i^1, \ell_i^2, \ell_i^3, \ell_i^4$组成的矩形（这里允许直线作为退化矩形），从而每条直线要么完全包含于 U_i，要么与其交集为空。此外，我们要求 $\ell_i^j \in U_i$：若 f 在 U_i 上较小，则在 U_k上也较小，从而 $\ell_i^j \in \partial U_k \cap \partial U_i$。

若令 $\mathcal{P}$ 为在每个矩形 U_i 上都是线性的分段线性曲线集合，则可得，对于 $p, q \in [0,1]^2$

$$d_f(p,q) = \inf\{L_f(\gamma) : \gamma : [0,1] \to [0,1]^2, \gamma \in \mathcal{P}, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}. \tag{31}$$

证明。设 $p, q \in [0,1]^2$ 和 $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ 是连接 p 与 q的任意分段连续路径。设 U_i 使得 $\gamma([0,1]) \cap U_i \ne \emptyset$。若 γ 完全包含于 U_i，则我们可以将其替换为一条完全包含于 U_i 的直线；由于共形因子在 U_i上为常数，这条直线的长度更短。

如果 γ 未完全包含在 U_i中，且仅在 $p' \in \partial U_i$处与 U_i 的边界相交一次，那么 p 或 q 必在 U_i中。不失一般性，设 p，我们可以用一条直线曲线或一条在 U_i 上呈线性的分段线性曲线，替换连接 p 和 p' 的那段曲线；这样

其长度将小于 γ的长度。因此，我们可以用属于曲线类 $\mathcal{P}$的一条曲线，替换连接 p 和 p' 的 γ 部分。这里要求 U_i 的线性边包含在其所包含的两个矩形中较小的那个矩形内，这一点很重要；否则，就必须考虑那些折点位于某个相邻矩形内部的分段线性曲线。

如果 γ 与 ∂U_i 相交两次或更多次，那么令 p'，q' 为 γ 与 ∂U_i 相交处的两个点，它们在 γ 的参数化时间中依次出现。由于 f 在 U_i 上为常数，因此我们知道，可以用 U_i 内连接 p' 和 q' 的一条更短曲线，替换连接 p' 和 q' 的 γ 部分；这条曲线可以是连接 p' 和 q' 的直线，也可以是连接 p' 和 q' 的分段线性曲线，其不连续折点位于 ∂U_i 中。因此，我们可以用属于 $\mathcal{P}$ 类的一条曲线替换连接p' 和 q' 的 γ 部分，这条曲线比连接 p' 和 q' 的 γ 部分更短。对每条与 γ 相交的 U_i 继续这一过程，我们就会用属于 $\mathcal{P}$ 类的一条曲线替换 γ，从而得出所需结论。□

2.5. **共形度量空间示例**。本节将考察由共形因子定义的两个长度度量空间示例。我们选择这两个特定示例，是因为它们将是第 3 节中所给示例的一列有界粗糙黎曼度量的极限。

示例 2.7. 相对于共形因子定义的退化距离函数

$$\hat{f}_\infty(x,y)=\begin{cases}0 & x=\frac{1}{2}, 0\le y\le 1\\ 1 & otherwise\end{cases} \tag{32}$$

由下式给出

$$d_{\hat{f}_\infty}(p,q)=\inf\{|x_0-\frac{1}{2}|+|x_1-\frac{1}{2}|, d(p,q)\}. \tag{33}$$

若我们将 $P=\{(\frac{1}{2},y): y\in[0,1]\}$ 中的点视为同一点，则诱导的商度量空间由 (33) 给出。

证明。设 $p=(x_0,y_0)$ 与 $q=(x_1,y_1)$。我们将分情形进行讨论。

情形 0：若 $x_1,x_0=\frac{1}{2}$，则 $L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{pq})=0$，从而 $d_{\hat{f}_\infty}(p,q)=0$。

情形 1：设 $p,q\in[0,\frac{1}{2}]\times[0,1]$，考虑 γ为连接 p与 q的一条路径，使得 $\gamma([0,1])\cap\{\frac{1}{2}\}\times[0,1]=\emptyset$。由引理 2.6 可知，$\ell_{pq}$是所有曲线 γ中的最短路径，因此我们有

$$L_{\hat{f}_\infty}(\gamma)\ge L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{pq})=d(p,q). \tag{34}$$

我们还可以得到一个上界

$$d_{\hat{f}_\infty}(p,q)\le L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{pq})=d(p,q) \tag{35}$$

另一种需要考虑的路径是 $\gamma([0,1])\cap\{\frac{1}{2}\}\times[0,1]\neq\emptyset$ 的情况。记 $p'=(\frac{1}{2},y_0)$ 和$q'=(\frac{1}{2},y_1)$，它们将是与中线的交点。令 γ_1 表示从 p 到 p' 的路径，γ_2 表示从 p' 到 q' 的路径，γ_3 表示从 q' 到 q 的路径。因此我们估计一个下界

$$L_{\hat{f}_\infty}(\gamma) = L_{\hat{f}_\infty}(\gamma_1) + L_{\hat{f}_\infty}(\gamma_2) + L_{\hat{f}_\infty}(\gamma_3) \tag{36}$$

$$\geq L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{pp'}) + L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{p'q'}) + L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{q'q}) \tag{37}$$

$$= L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{pp'}) + L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{q'q}) \tag{38}$$

$$= \left|x_0 - \frac{1}{2}\right| + \left|x_1 - \frac{1}{2}\right|. \tag{39}$$

为得到上界，我们可以计算

$$d_{\hat{f}_\infty}(p,q) \leq L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{pp'}) + L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{qq'}) = \left|x_0 - \frac{1}{2}\right| + \left|x_1 - \frac{1}{2}\right|. \tag{40}$$

因此，对 (34) 和 (36)-(39) 取下确界，我们得到：

$$L_{\hat{f}_\infty}(\gamma) \geq \inf\{|x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}|, d(p,q)\}. \tag{41}$$

现在对 (41) 取下确界，我们得到估计值

$$d_{\hat{f}_\infty}(p,q) \geq \inf\{|x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}|, d(p,q)\} \tag{42}$$

情形 2： 令 $p,\ q \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0,1]$ 应与情形 1 对称。

情形 3： 令 $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0,1]$ 和 $q \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0,1]$ 根据路径的构造，总会有 $\gamma([0,1]) \cap \{\frac{1}{2}\} \times [0,1] \neq \emptyset$ 的情况。注意，由于斜边总是比三角形的边长，因此在这种情况下，我们有 $\inf\{|x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}|, d(p,\ q)\} = |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}|$。令 $p' = (\frac{1}{2},\ y_0)$ 和 $q' = (\frac{1}{2},\ y_1)$，并定义 γ_1 为从 p 到 p'的路径，γ_2 将从 p'到 q'，然后 γ_3 从 q' 到 q。我们知道，对于与直线相交的曲线，根据引理 2。6，使曲线最小化的形式为 $\ell_{p,\ p'} * \ell_{p'q'} * \ell_{q'q}$，因此我们可以估计

$$L_{\hat{f}_\infty}(\gamma) = L_{\hat{f}_\infty}(\gamma_1) + L_{\hat{f}_\infty}(\gamma_2) + L_{\hat{f}_\infty}(\gamma_3) \tag{43}$$

$$\geq L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{pp'}) + L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{q'q}) \tag{44}$$

$$= |x_0 - \tfrac{1}{2}| + |x_1 - \tfrac{1}{2}|. \tag{45}$$

我们也可以得到上界的估计值

$$d_{\hat{f}_\infty}(p,q) \leq L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{pp'}) + L_{\hat{f}_\infty}(\ell_{q'q}) = |x_0 - \tfrac{1}{2}| + |x_1 - \tfrac{1}{2}|. \tag{46}$$

对 (43)-(45) 取下确界，我们得到

$$d_{\hat{f}_\infty}(p,q) \geq \inf\{|x_0 - \tfrac{1}{2}| + |x_1 - \tfrac{1}{2}|\} \tag{47}$$

类似地，对 (46) 取下确界，我们得到

$$d_{\hat{f}_\infty}(p,q) \leq \inf\{|x_0 - \tfrac{1}{2}| + |x_1 - \tfrac{1}{2}|\} \tag{48}$$

因此，结合 (47) 和 (48)，即可得到所需结果。

□

例 2.8. 令 $p,q\in[0,1]^2$, $p=(x_1,y_1)$, $q=(x_2,y_2)$ 并定义 $M=\{(\frac{1}{2},y)|\ y\in[0,1]\}$。我们将定义一类曲线 $\mathcal{M}=\{\phi_{pq}=\ell_{pp'}*\ell_{p'q'}*\ell_{q'q}\colon p',q'\in M\}$，使得相对于共形因子定义的距离函数

$$\bar{f}_\infty(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=\frac{1}{2},0\le y\le 1\\ 1 & otherwise\end{cases} \tag{49}$$

由下式给出

$$d_{\bar{f}_\infty}(p,q)=\inf\left(\{L(\ell_{pp'})+\frac{1}{2}L(\ell_{p'q'})+L(\ell_{q'q}):\phi_{pq}\in\mathcal{M}\}\cup\{d(p,q)\}\right) \tag{50}$$

$$=\inf\left(\{d(p,p')+\frac{1}{2}d(p',q')+d(q',q):p',q'\in M\}\cup\{d(p,q)\}\right). \tag{51}$$

证明。设 $p=(x_1,y_1)$、$q=(x_2,y_2)$。接下来我们将分情形讨论。

情形 1： 设 $p,q\in[0,\frac{1}{2}]\times[0,1]$。设 γ 是一条连接点 p 和 q 的路径，满足 $\gamma([0,1])\cap(\{\frac{1}{2}\}\times[0,1])=\emptyset$。注意，若 $p,q\in M$ 均成立，则此情形不适用。现在由引理 2.6 可知，我们只需考虑连接 p 与 q 的直线，因此

$$L_{\bar{f}_\infty}(\gamma)\ge L_{\bar{f}_\infty}(\ell_{pq})=d(p,q). \tag{52}$$

为证明上界，我们可以计算

$$d_{\bar{f}_\infty}(p,q)\le L_{\bar{f}_\infty}(\ell_{pq})=d(p,q). \tag{53}$$

现在考虑路径 γ，使得 $\gamma([0,1])\cap(\{\frac{1}{2}\}\times[0,1])\neq\emptyset$。利用引理 2.6，我们将考虑曲线类 $\mathcal{M}$，以估计下界

$$L_{\bar{f}_\infty}(\gamma)\ge L_{\bar{f}_\infty}(\phi_{pq})=d(p,p')+\frac{1}{2}d(p',q')+d(q',q). \tag{54}$$

为证明一个上界，我们可以如下进行。

$$d_{\bar{f}_\infty}(p,q)\le L_{\bar{f}_\infty}(\phi_{pq})=d(p,p')+\frac{1}{2}d(p',q')+d(q',q). \tag{55}$$

对（52）结合（54）取下确界，我们得到

$$d_{\bar{f}_\infty}(p,q)\ge\inf\left(\{d(p,p')+\frac{1}{2}d(p',q')+d(q',q):p',q'\in M\}\cup\{d(p,q)\}\right). \tag{56}$$

结合（53）与（55），我们得到

$$d_{\bar{f}_\infty}(p,q)\le\inf\left(\{d(p,p')+\frac{1}{2}d(p',q')+d(q',q):p',q'\in M\}\cup\{d(p,q)\}\right). \tag{57}$$

这两个估计值共同推出所需结果。

情形 2： 令 p，$q\in[\frac{1}{2},1]\times[0,1]$ 这一情形应当与情形 1 对称。

情形 3： 令 $p\in[0,\frac{1}{2}]\times[0,1]$ 和 $q\in[\frac{1}{2},1]\times[0,1]$。令 γ 为连接 p 和 q 的路径，并取 $\mathcal{M}$ 为先前定义的一类曲线。注意，始终有 $\gamma([0,1])\cap(\{\frac{1}{2}\}\times[0,1])\neq\emptyset$。注意，如果我们选择 $p'=q'$，那么可以选择 p'，使得 p 与 q 之间的距离可描述为 $d(p,q)=d(p,p')+\frac{1}{2}d(p',q')+d(q',q)$，这是一条属于类 $\mathcal{M}$ 的曲线的长度。根据引理 2.6，我们可以计算一个下界

$$L_{\bar{f}_\infty}(\gamma)\ge L_{\bar{f}_\infty}(\phi_{pq})=d(p,p')+\frac{1}{2}d(p',q')+d(q',q). \tag{58}$$

我们也可以得到一个上界，

$$d_{\bar{f}_\infty}(p,q) \le L_{\bar{f}_\infty}(\phi_{pq}) = d(p,p') + \frac{1}{2}d(p',q') + d(q',q). \tag{59}$$

通过对 (58) 取下确界，我们得到

$$d_{\bar{f}_\infty}(p,q) \ge \inf\{d(p,p') + \frac{1}{2}d(p',q') + d(q',q) : p',q' \in M\}. \tag{60}$$

同样，对 (59) 取下确界可得

$$d_{\bar{f}_\infty}(p,q) \le \inf\{d(p,p') + \frac{1}{2}d(p',q') + d(q',q) : p',q' \in M\}. \tag{61}$$

结合 (60) 和 (61)，即可得到所需结果。

□

3. Examples of Sequences of Metric Spaces

本节将进一步拓展第一作者和 C. Sormani 在 [7, 8] 中研究的示例。特别是，这些示例旨在进一步探究第一作者、R. Perales 和 C. Sormani [5]从下方收敛的假设，并更好地理解关于 Lipschitz界的假设所产生的影响。

3.1. 爆破示例。 在本小节中，我们研究在某些区域发生爆破的度量。由于距离函数取所有曲线长度的下确界，因此可以预期，即使允许共形因子发生更剧烈的爆破，仍然能够控制距离函数。

3.1.1. 在消失的中心正方形上爆破。 在这里我们看到，当一个共形因子序列在一个消失的正方形上发生爆破时，该爆破不会影响极限距离函数。

定理 3.1。 对于由下式定义的函数序列

$$g_n(x,y) = \begin{cases} n^\alpha & \frac{n-1}{2n} \le x \le \frac{n+1}{2n}, \frac{n-1}{2n} \le y \le \frac{n+1}{2n} \\ 1 & otherwise \end{cases} \tag{62}$$

其中 $\alpha \in (0,1)$ 我们发现 d_{g_n} 一致收敛于欧几里得度量 d，且不满足利普希茨界。

证明。我们 由定理 2.1 可知 $d(p,q) \le d_{g_n}(p,q)$，因为对所有 $(x,y) \in [0,1]$，有 $1 \le g_n(x,y)^2$.

情形 1： $(p,q) \in \{(a,b) \in [0,1]^2 \times [0,1]^2 : \ell_{ab} \cap \{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\} = \emptyset\}$

注意，由于 $[\frac{n-1}{2n}, \frac{n+1}{2n}] = [\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}]$，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 将是该集合中的唯一点。因此存在某个足够大的 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge N$，我们得到 $\ell_{pq} \cap [\frac{n-1}{2n}, \frac{n+1}{2n}]^2 = \emptyset$。因此，对 $n \ge N$，我们发现连接 p 与 q 的直线的长度由下式给出

$$L_{g_n}(\ell_{pq}) = L(\ell_{pq}) = d(p,q). \tag{63}$$

由于 $d_{g_n}(p,q) \le L_{g_n}(\ell(t)) \le d(p,q)$，我们在此情形下得到了所需的上界。

情形 2： $(p,q) \in \{(a,b) \in [0,1]^2 \times [0,1]^2 : \ell_{ab} \cap \{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\} \ne \emptyset\}$

如果 p和 q都不是点$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，则考虑路径 $\phi(t) = (t,t) \quad t \in [\frac{n-1}{2n}, \frac{n+1}{2n}]$的长度，该路径连接点序列 $c_n = (\frac{n-1}{2n}, \frac{n-1}{2n})$与 $d_n = (\frac{n+1}{2n}, \frac{n+1}{2n})$。我们可以计算出该距离为 $L_{g_n}(\phi) = \frac{2n^\alpha}{n} = C_n$。记$r_{0,n} = (a_{0,n}, b_{0,n})$为$\ell_{pq}$首次进入 $[\frac{n-1}{2n}, \frac{n+1}{2n}]^2$的时刻，并记$r_{1,n} = (a_{1,n}, b_{1,n})$为 ℓ_{pq}离开该区域的点。由于对某个足够大的 N，我们知道 $\overline{p}$和 q不在$[\frac{n-1}{2n}, \frac{n+1}{2n}]$中，因此我们知道路径$\ell_{pr_{0,n}}, \ell_{r_{1,n}q} \cap (\frac{n-1}{2n}, \frac{n+1}{2n})^2 = \emptyset$。由

$r_{0,n}$的定义，我们知道$a_{0,n}, b_{0,n}, a_{1,n}, b_{1,n} \in [\frac{n-1}{2n}, \frac{n+1}{2n}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$因此由夹逼定理，我们知道这些序列收敛到$\frac{1}{2}$。于是$r_{0,n}, r_{1,n} \to (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$。利用这一事实，我们可以看到$L(\ell_{pr_{0,n}}(t)) + C_n + L(\ell_{r_{1,n}q}(t)) \to d$由

$$L_{g_n}(\ell_{pq}) = L(\ell_{pr_{0,n}}) + L_{g_n}(\ell_{r_{0,n}r_{1,n}}) + L(\ell_{r_{1,n}q}) \tag{64}$$

$$\leq L(\ell_{pr_{0,n}}) + C_n + L(\ell_{r_{1,n}q}) \tag{65}$$

$$= d(p,q) - \left(\sqrt{|x_0 - \frac{1}{2}|^2 + |y_0 - \frac{1}{2}|^2} + \sqrt{|x_1 - \frac{1}{2}|^2 + |y_1 - \frac{1}{2}|^2}\right) + L(\ell_{pr_{0,n}}) \tag{66}$$

$$+ C_n + L(\ell_{r_{1,n}q}) \tag{67}$$

$$= d(p,q) + \left|\sqrt{|x_0 - a_{0,n}|^2 + |y_0 - b_{0,n}|^2} - \sqrt{|x_0 - \frac{1}{2}|^2 + |y_0 - \frac{1}{2}|^2}\right| + C_n + \tag{68}$$

$$\left|\sqrt{|x_1 - a_{1,n}|^2 + |y_1 - b_{1,n}|^2} - \sqrt{|x_1 - \frac{1}{2}|^2 + |y_1 - \frac{1}{2}|^2}\right| \tag{69}$$

$$= d(p,q) + D_n \tag{70}$$

其中 $D_n \to 0$。

不失一般性，设 $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，则只有$r_{0,n}$存在，且仍收敛到$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$。接下来我们可以估计一个上界。

$$L_{g_n}(\ell_{pq}) = L(\ell_{pr_{0,n}}) + L_{f_n}(\ell_{r_{0,n}q}) \tag{71}$$

$$\leq L(\ell_{pr_{0,n}}) + C_n \tag{72}$$

$$= d(p,q) + \left|\sqrt{|x_0 - a_{0,n}|^2 + |y_0 - b_{0,n}|^2} - \sqrt{|x_0 - \frac{1}{2}|^2 + |y_0 - \frac{1}{2}|^2}\right| + C_n \tag{73}$$

$$= d(p,q) + D_n \tag{74}$$

现在由定理 2.5 可得 $d(p, q) \leq d_{g_n}(p, q) \leq d(p, q) + D_n$，这表明 $d_{f_n} \to d$一致收敛。

现在我们将证明该序列不满足上Lipschitz界。考虑$p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$、$q_n = (\frac{n+1}{2n}, \frac{1}{2})$。为了证明$d_{g_n}$不满足Lipschitz上界，我们证明

$$\forall c > 0, \ \exists p, q \in [0,1]^2, \text{such that } \ cd(p,q) < d_{g_n}(p,q) \tag{75}$$

为此，考虑$c_n = n^\alpha$，我们有 $d(p, q_n) = |\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2n}$，因此可得

$$c_n \, d(p, q_n) = \frac{n^\alpha}{2}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{4n^{1-\alpha}} < \frac{1}{2n^{1-\alpha}} = d_{g_n}(p, q_n), \tag{76}$$

这意味着 d_{g_n} 不满足上Lipschitz上界。 □

现在我们将看到，如果爆破速率进一步提高，超过例 3.1 中的速率，那么该序列将不会一致收敛到欧几里得空间。第一作者和 C. Sormani 已在 [8] 的例 3.5 和 3.6 中指出了这一点，更多细节可参见其中。

定理 3.2。 对于由下式定义的函数序列

$$\hat{g}_n(x,y) = \begin{cases} n^\alpha & \frac{n-1}{2n} \leq x \leq \frac{n+1}{2n}, \frac{n-1}{2n} < y \leq \frac{n+1}{2n} \\ 1 & otherwise \end{cases} \tag{77}$$

其中 $\alpha \in [1, \infty)$ 我们发现 $d_{\hat{g}_n}$ 并不一致收敛于欧几里得度量 d。

证明。 设点 $p=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$与 $q_n=(\frac{n+1}{2n},\frac{1}{2})$，因此欧几里得距离定义为 $d(p,q_n)=\left|\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2n}$，并且我们还定义了 $d_{\hat{g}_n}(p,q_n)=n^{\alpha}d(p,q_n)=\frac{n^{\alpha-1}}{2}$N

ow if 我们可以 lculate

$$\sup_{p,q\in[0,1]^2}|d_{\hat{g}_n}(p,q)-d(p,q)|\geq\left|\frac{n^{\alpha-1}}{2}-\frac{1}{2n}\right|=\frac{n^{\alpha}-1}{2n}, \tag{78}$$

因此我们发现 $d_{\hat{g}_n}\not\to d$ 一致地成立。 □

3.1.2. 中心线上的爆胀。 现在我们将看到，如果该序列仅在勒贝格测度为零的集合上爆胀，那么这不会影响距离函数。这个例子有助于检验证明上Lipschitz界所需的条件，因为如果在勒贝格测度为零的集合上爆胀完全不会影响度量，那么显然适用上Lipschitz界。

定理 3.3。 对于由以下方式定义的函数序列

$$\bar{g}_n(x,y)=\begin{cases}n^{\alpha} & x=\frac{1}{2},0\leq y\leq 1\\ 1 & otherwise\end{cases} \tag{79}$$

其中 $\alpha\in(0,\infty)$ 我们发现，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$d_{\bar{g}_n}=d$ 。

证明。 注意，根据定理 2.1，由于 $\bar{g}_n\geq 1$ ，我们发现 $d_{\bar{g}_n}(p,q)\geq d(p,q)$。

情形 1： $(p,q)\in\{(a,b)\in[0,1]^2\times[0,1]^2:\ \ell_{ab}\cap(\frac{1}{2}\times[0,1])=\emptyset\}$ 于是，通过计算该区域内任意路径 γ 的长度，我们知道 $d_{\bar{g}_n}(p,q)\leq L_{\bar{g}_n}(\gamma)=L(\gamma)=d(p,q)$。

情形 2： $(p,q)\in\{(a,b)\in[0,1]^2\times[0,1]^2:\ \ell_{ab}\cap(\frac{1}{2}\times[0,1])\neq\emptyset\}$

设 $p=(x_0,y_0)$ $q=(x_1,y_1)$，其中 $x_0\in[0,\frac{1}{2}]$且 $x_1\in(\frac{1}{2},1]$。那么我们知道，gamma 与 $\{\frac{1}{2}\}\times[0,1]$相交于一点。由于该点的测度为 0，我们知道 n^{α}不会影响我们的长度。因此，$d_{\bar{g}_n}(p,q)\leq L_{\bar{g}_n}(\ell_{pq})=L(\ell_{pq})=d(p,q)$ 的长度。

如果 $x_1\in[0,\frac{1}{2}]$且 $x_0\in(\frac{1}{2},1]$，论证是对称的。

设 $p=(\frac{1}{2},y_0)$ $q=(\frac{1}{2},y_1)$，令 $a_0=(\epsilon+\frac{1}{2},y_0)$ 和 $a_1=(\epsilon+\frac{1}{2},y_1)$，其中 $\epsilon>0$。定义

$$\phi=\ell_{pa_0}*\ell_{a_0a_1}*\ell_{a_1q} \tag{80}$$

我们可以计算出其长度为

$$d_{\bar{g}_n}(p,q)\leq L_{\bar{g}_n}(\phi) \tag{81}$$

$$=L(\phi) \tag{82}$$

$$=2\epsilon+|y_0-y_1|=2\epsilon+d(p,q). \tag{83}$$

因此，我们已证明 $d(p,q)\leq d_{\bar{g}_n}(p,q)\leq d(p,q)+2\varepsilon$，令 $\varepsilon\to 0$，即可得到所需结果。□

3.2. **捷径示例**。 本小节中，我们讨论在不同区域形成捷径的度量。由于距离函数取所有曲线长度的下确界，人们预期即便是轻微的捷径，也会对极限距离函数产生巨大影响。

3.2.1. 消失的中心正方形上的捷径。 这里我们看到，如果捷径沿着一个正在消失的正方形形成，那么它不足以影响距离函数的下界，却足以影响下利普希茨界。

定理3.4。 令 $\alpha\in(0,\infty)$ ，并考虑由下式定义的函数序列

$$f_n(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{n^{\alpha}} & \frac{n-1}{2n}\leq x\leq\frac{n+1}{2n},\frac{n-1}{2n}\leq y\leq\frac{n+1}{2n}\\ 1 & otherwise\end{cases} \tag{84}$$

我们发现， d_{f_n} 一致收敛到欧几里得度量 d ，但不满足下利普希茨界。

证明。 首先注意到 $d(p,\ q) \geq d_{f_n}(p,\ q)$，根据定理 2.1，这是因为对所有 $(x,\ y) \in [0,1]^2,\ 1 \geq f_n(x,\ y)$。

现在固定满足 $p,\ q \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 的 p,q,- 考虑一条分段线性路径 γ_{pq}，它在f_n为常数的地方是线性的，并且满足 $\gamma_{pq} \cap (\frac{n-1}{2n},\ \frac{n+1}{2n})^2 \neq \emptyset$。于是我们可以计算其长度为 $L_{f_n}(\gamma_{pq}) = d(p,\ p_1') + d_{f_n}(p_1',\ p_2') + d(p_2',\ q)$，其中 $p_1',\ p_2' \in \partial(\frac{n-1}{2n},\ \frac{n+1}{2n})^2$。

考虑另一条路径 ℓ_{pq}，其中 $L(\ell_{pq})$ 定义为 $d(p,q)$，则我们可以进行如下操作

$$L_{f_n}(\ell_{pq}) \leq d(p,q) \tag{85}$$

$$\leq d(p,p_1') + d(p_1',p_2') + d(p_2',q) \tag{86}$$

$$\leq L_{f_n}(\gamma_{pq}) + |d(p_1',p_2') - d_{f_n}(p_1',p_2')| \tag{87}$$

$$= L_{f_n}(\gamma_{pq}) + \frac{\sqrt{2}(n^{\alpha-1}-1)}{n^\alpha} \tag{88}$$

$$\leq L_{f_n}(\gamma_{pq}) + \frac{\sqrt{2}}{n^\alpha}. \tag{89}$$

此外，我们可以得到

$$L(\ell_{pq}) \leq L_{f_n}(\ell_{pq}) + \frac{\sqrt{2}}{n^\alpha}. \tag{90}$$

结合这两个观察结果，我们得到

$$d(p,q) = L(\ell_{pq}) \leq L_{f_n}(\gamma_{pq}) + \frac{\sqrt{2}}{n^\alpha} \tag{91}$$

对右侧取下确界并利用引理 2.6，我们得到

$$d(p,q) \leq d_{f_n}(p,q) + \frac{\sqrt{2}}{n^\alpha}. \tag{92}$$

然后我们可以将其改写为

$$d(p,q) - \frac{\sqrt{2}}{n^\alpha} \leq d_{f_n}(p,q) \leq d(p,q). \tag{93}$$

那么根据定理 2.5 $d_{f_n} \to d$ ，当 $\frac{\sqrt{2}}{n^\alpha} \to 0$ 时一致成立

为证明 d_{f_n} 不满足 Lipschitz 下界，我们证明

$$\forall c > 0,\ \exists p,q \in [0,1]^2, \text{such that } cd(p,q) > d_{f_n}(p,q) \tag{94}$$

为此，取 $c_n = \frac{2}{n^\alpha}$ 并考虑 $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 和 $q_n = (\frac{n-1}{2n}, \frac{1}{2})$，

$$d(p,q_n) = \left|\frac{n}{2n} - \frac{n-1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} \tag{95}$$

$$d_{f_n}(p,q_n) = \frac{1}{n^\alpha}\ d(p,q) = \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n^{\alpha+1}} \tag{96}$$

结合前面的结果，我们有如下结论

$$c_n d(p,q) = \frac{2}{n^\alpha}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n^{\alpha+1}} > \frac{1}{2n^{\alpha+1}} = d_{f_n}(p,q_n). \tag{97}$$

因此 d_{f_n} 不满足 Lipschitz 下界。 □

3.2.2. 沿 *Hausdorff* 1 -测度为零的曲线形成捷径。这里可以看到，如果形成捷径的曲线的 Hausdorff 1-测度为零，那么该捷径不会影响距离函数。这并不太令人意外，但为便于比较，仍将其列出。

定理 3.5. 对于由下式定义的函数序列

$$f_n(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{1}{2}, 0 \le y \le 1, y \in \mathbb{Q} \\ 1 & otherwise \end{cases} \tag{98}$$

我们得到 $d_{f_n} = d$。

证明。考虑任意一条连接 p 与 q 的路径 γ。记 $R = \gamma([0,1]) \cap (\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{Q})$。注意，$|R| \le |\mathbb{Q}|$，这表明 R 是可数的。因此， γ 的长度不受定义在 $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{Q}$ 上的 f_n 影响。然后我们可以计算这条路径的长度。

$$L_{f_n}(\gamma) = L_{f_n}(R \cap \gamma) + L_{f_n}(R^C \cap \gamma) \tag{99}$$

$$= 0 + L(R^C \cap \gamma) = L(\gamma). \tag{100}$$

对两边取下确界，便得到所需的等式

$$d_{f_n}(p,q) = d(p,q). \tag{101}$$

□

3.2.3. 沿包含中心线的矩形设置捷径。这里我们再举一个例子，说明第一作者和 C.Sormani [7, 8], 观察到的现象：沿曲线设置捷径会对极限距离函数产生重大影响。

定理 3.6. 对于由下式定义的函数序列

$$\hat{f}_n(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \frac{n-1}{2n} \le x \le \frac{n+1}{2n}, 0 \le y \le 1 \\ 1 & otherwise \end{cases} \tag{102}$$

我们发现 $d_{\hat{f}_n}$ 一致收敛于 $d_{\hat{f}_\infty}$。

证明。设 $p = (x_0, y_0)$、 $q = (x_1, y_1)$

情形 1： $p \in [0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$ **和** $q \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$。我们知道 $d_{\hat{f}_\infty}(p, q) = |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}|$。令 $a_0 = (\frac{1}{2}, y_0)$，以及 $a_1 = (\frac{1}{2}, y_1)$。考虑路径

$$\beta = \ell_{p,a_0} * \ell_{a_0,a_1} * \ell_{a_1,q}. \tag{103}$$

我们可以如下计算其长度

$$L_{f_n}(\beta) = L_{f_n}(\ell_{p,a_0}) + L_{f_n}(\ell_{a_0,a_1}) + L_{f_n}(\ell_{a_1,q}) \tag{104}$$

$$= (|x_0 - \frac{n-1}{2n}| + \frac{1}{n}|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}|) + \frac{|y_0 - y_1|}{n} + (|x_1 - \frac{n+1}{2n}| + \frac{1}{n}|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}|) \tag{105}$$

$$\le |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}| + \frac{|y_0 - y_1|}{n} \tag{106}$$

$$\le d_{\hat{f}_\infty}(p,q) + \frac{1}{n}. \tag{107}$$

因此，我们得到了一个上界。对于下界，任何连接 p 和 q 的曲线都必须小于或等于 $|x_0 - \frac{n-1}{2n}|$ 和 $|x_1 - \frac{n+1}{2n}|$，因为这是这些区域内的最短长度。

$$d_{\hat{f}_n}(p,q) \geq |\frac{n-1}{2n} - x_0| + |\frac{n+1}{2n} - x_1| \tag{108}$$

$$= |\frac{n-1}{2n} - x_0| + |\frac{n+1}{2n} - x_1| + |\frac{1}{2} - x_0| + |\frac{1}{2} - x_1| - |\frac{1}{2} - x_0| - |\frac{1}{2} - x_1| \tag{109}$$

$$= d_{\hat{f}_\infty}(p, q) - (|\frac{1}{2} - x_1| - |x_1 - \frac{n+1}{2n}|) - |\frac{1}{2} - x_0| - |x_0 - \frac{n-1}{2n}| \tag{110}$$

$$= d_{\hat{f}_\infty}(p,q) - C'_n. \tag{111}$$

情形 2： $p, q \in [0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$

设 $b_1 = (\frac{n-1}{2n}, y_1)$ $b_0 = (\frac{n-1}{2n}, y_0)$。考虑路径 $\ell_{p,q}$ 以及

$$\phi = \ell_{p,b_0} * \ell_{b_0,b_1} * \ell_{b_1,q}. \tag{112}$$

如果 p 和 q 都不是 $\{\frac{1}{2}\} \times [0,1]$，那么我们知道存在某个 N，使得 $p, q \notin [\frac{n-1}{2n}, \frac{1}{2}] \times [0,1]$，因此可以计算 $L_{\hat{f}_n}(\ell_{pq}) = d(p,q)$ 和 $L_{\hat{f}_n}(\phi) = \frac{|y_0 - y_1|}{n} + |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}| \leq |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}| + \frac{1}{n}$。这意味着

$$d_{\hat{f}_n}(p,q) \leq \min\{L_{\hat{f}_n}(\ell_{pq}), L_{\hat{f}_n}(\phi)\} \tag{113}$$

$$= \min\{d(p,q), |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}| + \frac{1}{n}\} \tag{114}$$

$$\leq \min\{d(p,q) + \frac{1}{n}, |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}| + \frac{1}{n}\} \tag{115}$$

$$\leq \min\{d(p,q), |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}|\} + \frac{1}{n} = d_{\hat{f}_\infty}(p,q) + \frac{1}{n}. \tag{116}$$

对于下界，若假设 $\gamma \cap (\{\frac{1}{2}\} \times [0,1]) = \emptyset$，则当 N 足够大时，此类中的最短路径为 $\ell_{p,q}$。因此现在考虑 $\gamma \cap (\{\frac{1}{2}\} \times [0,1]) \neq \emptyset$ 的情况，并定义 $r_{0,n} = (\frac{n-1}{2n}, h_0)$ 为 γ 与 $\hat{f}_n = \frac{1}{n}$ 所在区域相交的首次时刻，并令 $r_{1,n} = (\frac{n-1}{2n}, h_1)$ 为 γ 与该区域相交的最后时刻。另记 t_0、$t_1 \in [0,1]$ 为 $\gamma(t_0) = r_{0,n}$ 和 $\gamma(t_1) = r_{1,n}$ 时的时刻。于是可以计算 γ 的长度为

$$L_{\hat{f}_n}(\gamma) = L(\gamma|_{[0,t_0]}) + L_{\hat{f}_n}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) + L(\gamma|_{[t_1,1]}) \tag{117}$$

$$\geq L(\ell_{p,r_{0,n}}) + L_{\hat{f}_n}(\ell_{r_{0,n},r_{1,n}}) + L(\ell_{r_{1,n},q}) \tag{118}$$

$$\geq |x_0 - \frac{n-1}{2n}| + \frac{1}{n}|h_0 - h_1| + |\frac{n-1}{2n} - x_1| \tag{119}$$

$$= (|x_0 - \frac{n-1}{2n}| - |x_0 - \frac{1}{2}|) + \frac{1}{n}|h_0 - h_1| + (|\frac{n-1}{2n} - x_1| - |\frac{1}{2} - x_1|) \tag{120}$$

$$+ |x_1 - \frac{1}{2}| + |\frac{1}{2} - x_0| \tag{121}$$

$$\geq |x_1 - \frac{1}{2}| + |\frac{1}{2} - x_0| + (|\frac{n-1}{2n} - x_1| - |\frac{1}{2} - x_1|) + (|x_0 - \frac{n-1}{2n}| - |x_0 - \frac{1}{2}|) \tag{122}$$

$$= |x_1 - \frac{1}{2}| + |\frac{1}{2} - x_0| - C'_n. \tag{123}$$

由于任何连接 p 和 q 的曲线都属于这两种情况之一，我们取这两个下界中的较小值，得到

$$d_{\hat{f}_n}(p,q) \geq \min\{d(p,q), |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}| - C'_n\} \tag{124}$$

$$\geq \min\{d(p,q) - C'_n, |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}| - C'_n\} \tag{125}$$

$$= \min\{d(p,q), |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}|\} - C'_n \tag{126}$$

$$= d_{\hat{f}_\infty}(p,q) - C'_n \tag{127}$$

并且我们有一个下界。

结合 两种情况，令 $C_n = \max\{C'_n, \frac{1}{n}\}$，因此我们可以对该函数进行界定 n

$$d_{\hat{f}_\infty}(p,q) - C_n \leq d_{\hat{f}_n}(p,q) \leq d_{\hat{f}_\infty}(p,q) + C_n, \tag{128}$$

因此，所需结果由定理 2.5 得出。 □

在下一个例子中，我们考虑沿一条曲线形成的类似捷径，但删除该捷径沿曲线的若干部分，以考察该捷径必须以何种速率出现，才能对极限距离函数产生影响。

定理3.7。 对于如下定义的函数序列

$$S = \left\{s_{i,j} = \tfrac{i}{2^j} \,:\, i = 1, 2, ...(2^j - 1),\, j \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{2}{8}, \tfrac{3}{8}, ...\right\} \tag{129}$$

它在 $[0,1]$ 中稠密，并且

$$\delta_j := \left(\frac{1}{2}\right)^{2j}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{130}$$

Let

$$\tilde{f}_j(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{j} & (x,y) \in [\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [s_{i,j} - \delta_j, s_{i,j} + \delta_j] \text{ for } i = 1, ..., 2^j - 1 \\ 1 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{131}$$

我们发现 $d_{\tilde{f}_n}$ 一致收敛于欧几里得度量 d，但不满足下利普希茨界。

˜证明。 注意到 $f_j \leq 1$，因此由定理 2.1可知 $d_{\tilde{f}_j} \leq d$。

我们现在分情形建立下界。设 $p, q \in [0,1]^2$，使得 $p = (x_0, y_0)$且$q = (x_1, y_1)$。

情形 1： $p, q \in [0, \frac{1}{2}) \times [0,1]$**，或** $p \in [0, \frac{1}{2}) \times [0,1]$ $q \in \{\frac{1}{2}\} \times [0,1]$

取一条路径 γ，使得 $(\gamma([0,1]) \setminus (\{p\} \cup \{q\})) \cap (\{\frac{1}{2}\} \times [0,1]) = \emptyset$。那么，在这类曲线中，我们知道最短曲线是 ℓ_{pq}，其长度为 $d(p,q)$。

考虑满足 $\gamma([0,1]) \cap (\{\frac{1}{2}\} \times [0,1]) \neq \emptyset$ 的某个 γ。记 $r_0 = \gamma(t_0) = (x_{r_0}, y_{r_0})$ 为其首次与 $(\{\frac{1}{2}\} \times [0,1])$ 相交的时刻，并记 $r_1 = \gamma(t_1) = (x_{r_1}, y_{r_1})$ 为其最后一次与该集合相交的时刻。另外，令 $a_{0,j} = \gamma(s_{0,j})$ 为伽马首次与 $\{\frac{1}{2} - \delta_j\} \times [0,1]$ for $t \in [0, t_0]$ and$a_{1,j} = \gamma(s_{1,j})$ 相交的时刻，并令 γ 与 $\{\frac{1}{2} - \delta_j\} \times [0,1]$ 相交的最后时刻为 $t \in [t_1, 1]$。计算.....的长度 –

γ 我们得到

$$L_{\tilde{f}_j}(\gamma) = L(\gamma|_{[0,s_{0,j}]}) + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[s_{0,j},t_0]}) + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_1,s_{1,j}]}) + L(\gamma|_{[s_{1,j},1]}) \tag{132}$$

$$\geq L(\ell_{pa_{0,j}}) + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) + L(\ell_{a_{1,j}q}) \tag{133}$$

$$= L(\ell_{pr_0})) + (L(\ell_{pa_{0,j}}) - L(\ell_{pr_0})) + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) \tag{134}$$

$$+ (L(\ell_{a_{1,j}q}) - L(\ell_{r_1q})) + L(\ell_{r_1q}) \tag{135}$$

$$= L(\ell_{pr_0}) - B_j + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) - B'_j + L(\ell_{r_1q}) \tag{136}$$

$$\geq L(\ell_{pr_0}) - B_j + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) - B'_j + L(\ell_{r_1q}). \tag{137}$$

对于 $L(\ell_{pa_{0,j}}) - L(\ell_{pr_0}) = B_j \to 0$，以及 $L(\ell_{a_{1,j}1}) - L(\ell_{r_1q}) = B'_j \to 0$。

现在我们想要得到关于 $L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]})$ 的更好估计值。为此，我们声称只需考虑从 r_0 到 r_1 的路径 ψ_j，使得 $\psi_j \subset [\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [0,1]\ \forall j \in \mathbb{N}$。

为证明这一论断，设 ψ_j 是连接 r_0 和 r_1 的一条路径。假设 $\psi_j([0,1]) \cap ([\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [0,1])^c \neq \emptyset$。定义 $E_j = \{e_{0,j}, ..., e_{m,j}\}$ 为这样的点集：ψ_j 连续地离开并进入集合 $[\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [0,1]$，且这些点位于其边界上。若将 $c_{i,j}$ 定义为 $\psi(c_{i,j}) = e_{i,j}$，那么我们可以定义一条路径

$$\phi_j(t) = \begin{cases} \psi_j(t), & \text{if } t \in [0, c_{i,j}) \cup (c_{i+1,j}, c_{i+2,j}), \text{for } i \in \{0, 1, ..., m-2\} \\ \ell_{e_{i,j}e_{i+1,j}}, & \text{if } t \in [c_{i,j}, c_{i+1,j}],\ \text{for } i \in \{0, 1, ..., m-1\} \end{cases} \tag{138}$$

它包含在 $[\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [0,1]$ 中。然后我们可以计算

$$L_{\tilde{f}_j}(\psi_j) = L_{\tilde{f}_j}(\psi_j \cap ([\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [0,1])) + L(\psi_j \cap ([\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [0,1])^c) \tag{139}$$

$$\geq L_{\tilde{f}_j}(\psi_j \cap ([\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [0,1]) + \sum_{k=1}^{m} d(e_{k-1,j}, e_{k,j}) \tag{140}$$

$$\geq L_{\tilde{f}_j}(\psi_j \cap ([\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [0,1]) + \sum_{k=1}^{m} L_{\tilde{f}_j}(\ell_{e_{k-1,j}e_{k,j}}) \tag{141}$$

$$= L_{\tilde{f}_j}(\phi_j). \tag{142}$$

因此，我们已经证明了这一结论，只需考虑从 r_0 到 r_1 且满足 $\psi_j \subset [\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [0,1]\ \forall j \in \mathbb{N}$ 的曲线。此外，我们可以假设 ψ_j 在 y 中单调非减，因为总能找到一条单调曲线，其长度短于在 y 中非单调曲线的长度。

有鉴于此，定义另一个集合 $U_j = \{u_{k_1,j}, u_{k_2,j}, ..., u_{k_b,j}\}$，它由 ψ_j 与某个 $([\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times \{s_{k,j} - \delta_j, s_{k,j} + \delta_j\})$ 的连续交点组成。另外，定义 $v_{k_i,j}$，使得 $\gamma(v_{k_i,j}) = a_{k_i,j}$ 对于 $i \in \{1, ..., b\}$，并且 $\gamma(t_0) = u_{k_0,j} = \gamma(v_{k_0,j})$，$\gamma(t_1) = u_{k_{b+1},j} = \gamma(v_{k_{b+1},j})$。然后我们定义一条路径

$$\tau_j = \ell_{r_0u_{k_1,j}} * ... * \ell_{r_0u_{k_b,j}} \tag{143}$$

并且应用引理 2.6 后，我们知道 τ_j 恰好是估计距离时需要考虑的那类曲线。因此，我们可以得出观察结果：$L_{\tilde{f}_j}(\psi_j) \geq L_{\tilde{f}_j}(\tau_j)$。令 $N_j = {}^{d}(r_0, \frac{1}{2^j}) = 2^j d$ (r_0, r_1) 为 r_0 与 r_1 之间矩形数量的估计值。定义 $A_{i,j} = [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta] \times [s_{i,j} - \delta_j]$，其中 $A_j = \bigcup_{0 \leq i \leq 2^j - 1} A_{i,j}$。然后我们可以用它来估计 τ_j 的长度。

$$L_{\tilde{f}_j}(\tau_j) = L_{\tilde{f}_j}(\tau_j \cap A_j) + L_{\tilde{f}_j}(\tau_j \cap (A_j)^c) \tag{144}$$

$$\geq L(\tau_j \cap (A_j)^c) \tag{145}$$

$$\geq \frac{1}{2^j} N_j = d(r_0, r_1) \tag{146}$$

然后我们可以用它给出 $L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]})$ 的下界

$$L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) \geq L_{\tilde{f}_j}(\tau_j) \geq d(r_0, r_1). \tag{147}$$

求和 各线段的估计值后，我们得到整条路径的一个下界 .

$$L_{\tilde{f}_j}(\gamma) > L(\ell_{pr_0}) + L(\ell_{r_0 r_1}) + L(\ell_{r_1 q}) - B_j - B'_j - C_j \tag{148}$$

$$= L(\ell_{pr_0}) + L(\ell_{r_0 r_1}) + L(\ell_{r_1 q}) - T_j \tag{149}$$

$$= d(p, r_0) + d(r_0, r_1) + d(r_1, q) - T_j, \tag{150}$$

其中我们定义了 $T_j = B_j + B'_j + C_j$。比较与 ℓ_{pq} 相交的路径的这个下界$\{\frac{1}{2}\} \times [0,1]$，我们注意到

$$d(p, r_0) + d(r_0, r_1) + d(r_1, q) - T_j \geq d(p, q) - T_j. \tag{151}$$

从而得到 $d(p, q) - T_j \leq d_{\tilde{f}_j}(p, q)$ 的下界

情形 2： p, $q \in (\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$ 由与情形 1 相同的推理可得。

情形 3： $p \in [0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$, $q \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$

设 γ 为连接 p 和 q 的任意一条路径。令 $\gamma(t_0) = a_{0,j} = (x_{0,j}, y_{0,j})$ 为 γ 与 $(\{\frac{1}{2} - \delta_j\} \times [0,1])$ 的交点，令 $\gamma(t_1) = a_{1,j} = (x_{1,j}, y_{1,j})$ 为 γ 与 $(\{\frac{1}{2} + \delta_j\} \times [0,1])$ 的交点。

定义 $r_{0,j} = (\frac{1}{2}, y_{0,j})$ 和 $r_{1,j} = (\frac{1}{2}, y_{1,j})$。现在取连接点 p 和 q 的某条路径 γ。

$$L_{\tilde{f}_j}(\gamma) = L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[0,t_0]}) + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_1,1]}) \tag{152}$$

$$\geq L(\ell_{p,a_{0,j}}) + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) + L(\ell_{a_{1,j}q}) \tag{153}$$

$$= L(\ell_{p,r_{0,j}}) + (L(\ell_{p,a_{0,j}}) - L(\ell_{p,r_{0,j}})) + L_{\tilde{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) \tag{154}$$

$$+ (L(\ell_{a_{1,j},q}) - L(\ell_{r_{1,j},q})) + L(\ell_{r_{1,j},q}) \tag{155}$$

根据我们所 如情形 1 中所观察到的。我们可以近似计算长度 $L_{f_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) \geq d(r_0, r_1)$。

$$L_{f_j}(\gamma) \geq L(\ell_{pr_{0,j}}) + d(r_0, r_1) + L(\ell_{r_{1,n}q}) \tag{156}$$

$$= d(p, r_{0,j}) + d(r_{0,j}, r_{1,j}) + d(r_{1,j}, q) \tag{157}$$

$$\geq d(p, q), \tag{158}$$

其中最后一行用到了三角不等式。由于这对所有可能的路径都成立，因此我们得到这些路径距离的下界。

结合下界和上界，我们发现 $d(p, q) \leq d_{\tilde{f}_j}(p, q) \leq d(p, q)$，从而表明 $d_{\tilde{f}_j} \to d$一致收敛。

现在，为了证明 $d_{\tilde{f}_n}$ 不满足下 Lipschitz 界，考虑任意选取的 $i = 1, ..., 2^j - 1$，以及 $p_j = (\frac{1}{2}, s_{i,j} - \delta_j)$ 和$q_j = (\frac{1}{2}, s_{i,j} + \delta_j)$。然后通过计算欧几里得距离，我们有

$$d(p_j, q_j) = |s_{i,j} + \delta_j - (s_{i,j} - \delta_j)| = \left| \frac{i}{2^j} + \frac{1}{2^{2j}} - \left(\frac{i}{2^j} - \frac{1}{2^{2j}} \right) \right| = \frac{2}{2^{2j}}, \tag{159}$$

这也意味着 $d_{\tilde{f}_n}(p_j, q_j) = \frac{1}{j}\left(\frac{2}{2^{2j}}\right) = \frac{2}{j 2^{2j}}$ ___ ___

因此，如果我们选择 $c_j = \frac{2}{j}$，就可以计算

$$c_j d(p_j, q_j) = \frac{2}{j}\left(\frac{2}{2^{2j}}\right) > \frac{2}{j2^{2j}} = d_{\tilde{f}_n}(p_j, q_j), \tag{160}$$

因此我们知道， $d_{\tilde{f}_n}$ 不满足下利普希茨界。

□

在下一个例子中，我们改变删除捷径部分的速率，以说明可以构造一个介于定理3.9和定理3.7之间的例子。

定理3.8。对于由下式定义的函数序列

$$S = \left\{ s_{i,j} = \frac{i}{2^j} : i = 1, 2, ...(2^j - 1),\, j \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{2}{8}, \tfrac{3}{8}, ... \right\} \tag{161}$$

它在 $[0,1]$ 中稠密，并且

$$\delta_j := \left(\frac{1}{2}\right)^{j+2}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{162}$$

Let

$$\bar{f}_j(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{j} & (x,y) \in [\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [s_{i,j} - \delta_j, s_{i,j} + \delta_j] \text{ for } i = 1...2^j - 1 \\ 1 & elsewhere \end{cases} \tag{163}$$

我们得到 使 $d_{\bar{f}_n}$ 一致收敛到 $d_{\bar{f}_\infty}$，但不满足下 *Lipschitz* 界 $d.$

证明。我们先证明一个有用的结论。设 $p = (\frac{1}{2}, y_0)$ 和 $q = (\frac{1}{2}, y_1)$，其中 $y_0, y_1 \in [0,1]$。令 $A_{i,j} = [\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [s_{i,j} - \delta_j, s_{i,j} + \delta_j]$，且 $A_j = \bigcup_{i=1}^{2^j - 1} A_{i,j}$。

注意到，

$$d_{\bar{f}_j}(p,q) = L(\ell_{pq} \cap A_j^c) + \frac{1}{j} L(\ell_{pq} \cap A_j) \tag{164}$$

并将任意两个相邻的 $A_{i,j}$ 之间的间隙记为 η_j。两个相邻的 $A_{i,j}$ 的中心点之间的欧几里得距离为 $|s_{i+1,j} - s_{i,j}| = |\frac{i+1}{2^j} - \frac{i}{2^j}| = |\frac{1}{2^j}|$，其中 $i = 1, 2, ..., 2^j - 2$。由于我们知道任意 $A_{i,j}$ 的中心点与 $s_{i,j} - \delta_j$ 之间的距离为 $|(s_{i,j} - \delta_j) - s_{i,j}| = \delta_j$。因此，任意两个相邻的 $A_{i,j}$ 之间的垂直欧氏距离为

$$\eta_j = \frac{1}{2^j} - 2\delta_j = \frac{1}{2^j} - 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{j+2}\right] = \frac{1}{2^{j+1}}. \tag{165}$$

我们令 $N_j = \frac{d_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^j})}(p,q)}{\frac{1}{2^j}} = 2^j d_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^j})}(p,q)$ 表示 $A_{i,j}$ 在 p 与 q之间的数量估计值。我们可以看到，由于已知 η_j 是两个连续 $A_{i,j}$之间的最大距离，因此 $L(\ell_{pq} \cap A_j^c) \leq \eta_j N_j$。同样， $L(\ell_{pq} \cap A_j) \leq 2\delta_j N_j$，其中 $2\delta_j$ 是任意 $j \in \mathbb{N}$对应的每个 $A_{i,j}$ 的长度。

因此，我们可以看到，

$$d_{\bar{f}_j}(p,q) \leq N_j\eta_j + \frac{1}{j}N_j 2\delta_j \tag{166}$$

$$= N_j\eta_j + \frac{2\delta_j N_j}{j} \tag{167}$$

$$= \frac{1}{2}d(p,q) + \frac{2[(\frac{1}{2^{j+2}})(2^j d(p,q))]}{j} \tag{168}$$

$$= \frac{1}{2}d(p,q) + \frac{\frac{1}{2}d(p,q)}{j} \tag{169}$$

$$\leq \frac{1}{2}d(p,q) + \frac{\sqrt{2}}{2j} \tag{170}$$

$$= d_{\bar{f}_\infty}(p,q) + C_j, \tag{171}$$

其中 $C_j = \frac{\sqrt{2}}{2j}$。

接下来，为了证明 $d_{\bar{f}_n}$ 一致收敛到 $d_{\bar{f}_\infty}$，我们将分情形讨论，并在下一个情形中使用前面的结论。

情形 1： 考虑某个 $p=(x_0,y_0)$ $q=(x_1,y_1)$，其中 $p \in [0,\frac{1}{2}) \times [0,1], q \in (\frac{1}{2},1] \times [0,1]$。我们知道存在一个 $J \in \mathbb{N}$，使得对所有 $j \geq J$，都有 $p \notin [\delta_j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times [0,1]$，且 $q \notin (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+\delta_j] \times [0,1]$。令 p', $q' \in M = \{(\frac{1}{2}, y) | \ y \in [0,1]\}$。令 $p'' \in I_j$，其中 $I_j = \{\ell_{pp'} \cap \{\frac{1}{2} - \delta_j\} \times [0,1]\}$，且 $q'' \in I'_j$，其中 $I'_j = \{\ell_{q'q} \cap \{\delta_j + \frac{1}{2}\} \times [0,1]\}$。根据定理2.1，我们可以观察到，

$$L_{\bar{f}_j}(\ell_{pp'}) \leq L(\ell_{pp'}). \tag{172}$$

现在对于 $\phi_{pq} = \ell_{pp'} * \ell_{p'q'} * \ell_{q'q}$，我们可以计算

$$L_{\bar{f}_j}(\phi_{pq}) = L_{\bar{f}_j}(\ell_{pp'}) + L_{\bar{f}_j}(\ell_{p''p'}) + L_{\bar{f}_j}(\ell_{p'q'}) + L_{\bar{f}_j}(\ell_{q'q''}) + L(\ell_{q''q}) \tag{173}$$

$$\leq L(\ell_{pp''}) + L(\ell_{p''p'}) + L_{\bar{f}_j}(\ell_{p'q'}) + L(\ell_{q'q''}) + L(\ell_{q''q}) \tag{174}$$

$$= L(\ell_{pp'}) + L_{\bar{f}_j}(\ell_{p'q'}) + L(\ell_{q'q}) \tag{175}$$

$$\leq d(p,p') + \frac{1}{2}d(p',q') + d(q',q) + C_j, \tag{176}$$

其中最后一行由第一个断言推出。现在取下确界并应用定理2.8

$$d_{\bar{f}_j}(p,q) \leq d_{\bar{f}_\infty}(p,q) + C_j. \tag{177}$$

设 γ 是一条连接点 p 和 q 的路径。记 $r_0 = \gamma(t_0) = (x_{r_0}, y_{r_0})$ 为其首次与 $(\{\frac{1}{2}\} \times [0,1])$ 相交的时刻，记 $r_1 = \gamma(t_1) = (x_{r_1}, y_{r_1})$ 为其最后一次与该集合相交的时刻。此外，令 $a_{0,j} = \gamma(s_{0,j})$ 为伽马首次与 $\{\frac{1}{2} - \delta_j\} \times [0,1]$ 相交的时刻（对于 $t \in [0,t_0]$），并令 $a_{1,j} = \gamma(s_{1,j})$ 为 γ 最后一次与 $\{\frac{1}{2} + \delta_j\} \times [0,1]$ 相交的时刻（对于 $\bar{t} \in [t_1,1]$）。计算 γ 的长度，我们得到

$$L_{\bar{f}_j}(\gamma) = L(\gamma|_{[0,s_{0,j}]}) + L_{\bar{f}_j}(\gamma|_{[s_{0,j},t_0]}) + L_{\bar{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) + L_{\bar{f}_j}(\gamma|_{[t_1,s_{1,j}]}) + L(\gamma|_{[s_{1,j},1]}) \tag{178}$$

$$\geq L(\ell_{pa_{0,j}}) + L_{\bar{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) + L(\ell_{a_{1,j}q}) \tag{179}$$

$$= L(\ell_{pr_0})) + (L(\ell_{pa_{0,j}}) - L(\ell_{pr_0})) + L_{\bar{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) \tag{180}$$

$$+ (L(\ell_{a_{1,j}q}) - L(\ell_{r_1q})) + L(\ell_{r_1q}) \tag{181}$$

$$= L(\ell_{pr_0}) - B_j + L_{\bar{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) - B'_j + L(\ell_{r_1q}) \tag{182}$$

$$\geq L(\ell_{pr_0}) - B_j + L_{\bar{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) - B'_j + L(\ell_{r_1q}). \tag{183}$$

其中 $L(\ell_{pa_{0,\ j}}) - L(\ell_{pr_0}) = B_j \to 0$，且 $L(\ell_{a_{1,\ j}1}) - L(\ell_{r_1}q) = B'_j \to 0$。

现在，我们希望对 $L_{\bar{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]})$ 得到更好的估计值。为此，我们断言只需考虑从 r_0 到 r_1 且满足 $\psi_j \subset [\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times [0,1]\ \forall j \in \mathbb{N}$ 的路径 ψ_j。

为证明这一断言，设 ψ_j 是连接 r_0 与 r_1 的一条路径。假设 $\psi_j([0,1]) \cap ([\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times [0,1])^c \neq \emptyset$。定义 $E_j = \{e_{0,j}, ..., e_{m,j}\}$ 为 ψ_j 相继离开并进入集合 $[\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times [0,1]$、且位于其边界上的那些点的集合。若我们将 $c_{i,j}$ 定义为 $\psi(c_{i,j}) = e_{i,j}$，则我们可以定义一条路径

$$\phi_j(t) = \begin{cases} \psi_j(t), & \text{if } t \in [0, c_{i,j}) \cup (c_{i+1,j}, c_{i+2,j}), \text{for } i \in \{0,1,...,m-2\} \\ \ell_{e_{i,j}e_{i+1,j}}, & \text{if } t \in [c_{i,j}, c_{i+1,j}],\ \text{for } i \in \{0,1,...,m-1\} \end{cases} \tag{184}$$

它包含于 $[\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times [0,1]$ 中。通过反复使用三角不等式，我们接着调整这种形式的每一条可能路径 γ，并证明存在一条长度更短的路径。

$$L_{\bar{f}_j}(\psi_j) = L_{\bar{f}_j}(\psi_j \cap ([\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times [0,1])) + L(\psi_j \cap ([\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times [0,1])^c) \tag{185}$$

$$\geq L_{\bar{f}_j}(\psi_j \cap ([\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times [0,1]) + \sum_{k=1}^{m} d(e_{k-1,j}, e_{k,j}) \tag{186}$$

$$\geq L_{\bar{f}_j}(\psi_j \cap ([\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times [0,1]) + \sum_{k=1}^{m} L_{\tilde{f}_j}(\ell_{e_{k-1,j}e_{k,j}}) \tag{187}$$

$$= L_{\bar{f}_j}(\phi_j). \tag{188}$$

因此，我们已经证明了这一断言，只需考虑从 r_0 到 r_1 且满足 $\psi_j \subset [\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times [0,1]\ \forall j \in \mathbb{N}$ 的曲线。此外，我们可以假设 ψ_j 在 y 中单调非减，因为对于在 y 中非单调的曲线，我们总能找到一条长度更短的单调曲线。

有鉴于此，定义另一个集合 $U_j = \{u_{k_1,j}, u_{k_2,j}, ..., u_{k_b,j}\}$，它由 ψ_j 与某个 $([\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times \{s_{k,j}-\delta_j, s_{k,j}+\delta_j\})$ 的连续交点构成。此外，定义 $v_{k_i,\ j}$，使得 $\gamma(v_{k_i,\ j}) = u_{k_i,\ j}$，其中 $i \in \{1,...,b\}$，且 $\gamma(t_0) = u_{k_0,\ j} = \gamma(v_{k_0,\ j})$，$\gamma(t_1) = u_{k_{b+1},\ j} = \gamma(v_{k_{b+1},\ j})$。接着我们定义一条路径

$$\tau_j = \ell_{r_0 u_{k_1,j}} * ... * \ell_{u_{k_b,j} r_1} \tag{189}$$

并通过应用引理 2.6，我们知道，τ_j 恰好是估计距离时需要考虑的那类曲线。因此，我们可以观察到 $L_{\bar{f}_j}(\psi_j) \geq L_{\bar{f}_j}(\tau_j)$。令 $N_j = d_{(r_0, \frac{1}{2^j}r_1)} = 2^j d(r_0, r_1)$ 表示 r_0 和 r_1 之间盒子的估计数量。定义 $A_{i,j} = [\frac{1}{2}-\delta_j, \frac{1}{2}+\delta_j] \times [s_{i,j}-\delta_j, s_{i,j}+\delta_j]$，其中 $A_j = \bigcup_{0 \leq i \leq 2^j-1} A_{i,j}$。然后我们可以用它来估计 τ_j 的长度。

$$L_{\bar{f}_j}(\tau_j) = L_{\bar{f}_j}(\tau_j \cap A_j) + L_{\bar{f}_j}(\tau_j \cap (A_j)^c) \tag{190}$$

$$\geq L(\tau_j \cap (A_j)^c) \tag{191}$$

$$= \frac{1}{2^{j+1}} N_j \tag{192}$$

$$= \frac{1}{2} d(r_0, r_1) \tag{193}$$

接下来，我们可以用这个来给出 $L_{\bar{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]})$ 的下界。

$$L_{\bar{f}_j}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) \geq L_{\bar{f}_j}(\tau_j) \geq \frac{1}{2}d(r_0,r_1) \tag{194}$$

将 这些情形的观察结果结合起来，我们得到整个路径的一个下界 .

$$L_{\bar{f}_j}(\gamma_j) \geq d(p,r_0) + \frac{1}{2}d(r_0,r_1) + d(r_1,q) - B_j - B'_j, \tag{195}$$

并对连接 p 与 q 的所有路径取下确界，可得

$$d_{\bar{f}_j}(p,q) \geq d(p,r_0) + \frac{1}{2}d(r_0,r_1) + d(r_1,q) - B_j - B'_j \tag{196}$$

$$\geq d_{\bar{f}_\infty}(p,q) - B_j - B'_j \tag{197}$$

最后，将其与 (177) 结合，可得

$$d_{\bar{f}_\infty}(p,q) - B_j - B'_j \leq d_{\bar{f}_j}(p,q) \leq d_{\bar{f}_\infty}(p,q) \tag{198}$$

情形 2： $p=(\frac{1}{2}, y_0)$ 和 $q=(\frac{1}{2}, y_1)$ 对于 $y_0, y_1 \in [0,1]$

结合第一个断言与（190）–（193），我们得到

$$d_{\bar{f}_\infty}(p,q) - C_j \leq d_{\bar{f}_j}(p,q) \leq d_{\bar{f}_\infty}(p,q) + C_j. \tag{199}$$

情形 3： 考虑某个 $p=(x_0, y_0)$ $q=(x_1, y_1)$，其中 $p, q \in [0, \frac{1}{2}) \times [0,1]$ 或 $p, q \in (\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$。

然后，我们可以先沿连接 p与 q 的直线进行估计，并得到

$$d_{\bar{f}_j}(p,q) \leq L_{\bar{f}_j}(\ell_{pq}) \leq L(\ell_{pq}) = d(p,q). \tag{200}$$

为了完成上界的论证，可以重复导出（177）的论证，这次将（200）也包括在内，从而得出

$$d_{\bar{f}_j}(p,q) \leq d_{\bar{f}_\infty}(p,q) + C_j, \tag{201}$$

其中 $C_j \searrow 0$ 如 $j \to \infty$。同样，对于足够大的 j，我们知道 ℓ_{pq} 不包含在区域 $[\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [0,1]$内，因此可以观察到

$$L_{\bar{f}_j}(\ell_{pq}) = L(\ell_{pq}). \tag{202}$$

现在，重复几乎与导出（197）相同的论证，考虑那些试图利用正方形中线附近共形因子捷径的曲线，并结合（202），我们得到

$$d_{\bar{f}_j}(p,q) \geq d_{\bar{f}_\infty}(p,q) - C_j, \tag{203}$$

其中，当 $C_j \searrow 0$ 时， $j \to \infty$。

结合这三种情况与定理2.5，可得 $d_{\bar{f}_j} \to d_{\bar{f}_\infty}$。

为证明 $d_{\bar{f}_\infty}$ 不满足下 Lipschitz 界，考虑任意选定的 $i = 1, \ldots\ldots, 2^j - 1$，以及 $p_j = (\frac{1}{2}, s_{i,j} - \delta_j)$ 和 $q_j = (\frac{1}{2}, s_{i,j} + \delta_j)$。然后通过计算距离可得

$$d(p_j,q_j) = |s_{i,j} + \delta_j - (s_{i,j} - \delta_j)| = |2\delta_j| = \frac{2}{2^{j+2}} = \frac{1}{2^{j+1}} \tag{204}$$

这也意味着 $d_{\bar{f}_\infty}(p_j, q_j) = \frac{1}{j} d(p_j, q_j) = \frac{1}{j}\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right) = \frac{1}{j2^{j+1}}$

取 $c_j = \frac{2}{j}$，结合前面的结果可得

$$c_j d(p_j,q_j) = \frac{2}{j}\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right) = \frac{1}{j2^j} > \frac{1}{j2^{j+1}} = d_{\bar{f}_\infty}(p_j,q_j). \tag{205}$$

因此， $d_{\bar{f}_\infty}$ 不满足所需的 Lipschitz 下界。

□

在最后一个例子中，我们再次改变删除捷径部分的速率，以说明可以构造一个例子，使得捷径在极限中收缩至零。

定理3.9. 对于由下式定义的函数序列

$$S = \left\{ s_{i,j} = \frac{i}{2^j} \,:\, i = 1, 2, ...(2^j - 1),\, j \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{2}{8}, \tfrac{3}{8}, ... \right\} \tag{206}$$

它在 $[0,1]$ 中稠密，并且

$$\delta_j := \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{207}$$

Let

$$\tilde{f}_j(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{j} & (x,y) \in [\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2} + \delta_j] \times [s_{i,j} - \delta_j, s_{i,j} + \delta_j] \ for\ i = 1, 2, ..., (2^j - 1) \\ 1 & elsewhere \end{cases} \tag{208}$$

我们发现， $d_{\bar{f}_n}$ 一致收敛到 $d_{\hat{f}_\infty}$，但不满足下利普希茨界。

ˆ ˜证明。对于下界，注意到 $f_n \le f_n$，由此根据定理 2.1 可得 $d\hat{}_{f_n} \le d_{\tilde{f}_n}$；根据定理 3.6，我们知道 $d_{\hat{f}_n} \ge d\hat{}_{f_\infty} - C_n$，因此可知 $d\hat{}_{f_\infty} - C_n \le d_{\tilde{f}_n}$。N

现在我们ill establish th上界 bound b一致收敛idering th三种情形。

情形 1: $p \in [0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$, $q \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$

我们知道 $\min\{|x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}|, d(p,q)\} = |x_0 - \frac{1}{2}| + |x_1 - \frac{1}{2}|$。设 $a_0 = (\frac{1}{2}, y_0)$、$a_1 = (\frac{1}{2}, y_1)$，并考虑路径

$$\alpha = \ell_{p,a_0} * \ell_{a_0,a_1} * \ell_{a_1,q} \tag{209}$$

设 $b_0 = (\frac{1}{2}, 0)$、$b_1 = (\frac{1}{2}, 1)$、$A_{i,j} = (\{\frac{1}{2}\} \times [s_{i,j} - \delta_j])$，并注意到对每个$k, l \in \{1, 2, ..., 2^j - 1\}$、$k \ne l$，有 $A_{k,j} \cap A_{l,j} = \emptyset$。为了计算扭曲函数下的长度，我们必须注意到

$$L_{\tilde{f}_j}(\ell_{b_0 b_1}) = L_{\tilde{f}_j}(\ell_{b_0 b_1} \cap (\bigcup_{i=1}^{2^j-1} A_{i,j})) + L_{\tilde{f}_j}(\ell_{b_0 b_1} \cap (\bigcup_{i=1}^{2^j-1} A_{i,j})^C) \tag{210}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2^j-1} L_{\tilde{f}_j}(\ell_{b_0 b_1} \cap A_{i,j}) \right) + L_{\tilde{f}_j}(\ell_{b_0 b_1} \cap (\bigcup_{i=1}^{2^j-1} A_{i,j})^C) \tag{211}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2^j-1} \frac{2\delta_j}{j} \right) + \left(1 - \left(\sum_{i=1}^{2^j-1} 2\delta_j \right) \right) \tag{212}$$

$$= (2^j - 1)\frac{2\delta_j}{j} + (1 - (2^j - 1)2\delta_j) \tag{213}$$

我们可以将 α 的长度估计值取为长度，即为

$$d_{\tilde{f}_j}(p,q) \leq L_{\tilde{f}_j}(\alpha) \tag{214}$$

$$= L_{\tilde{f}_j}(\ell_{p,a_0}) + L_{\tilde{f}_j}(\ell_{a_0,a_1}) + L_{\tilde{f}_j}(\ell_{a_1,q}) \tag{215}$$

$$\leq L_{\tilde{f}_j}(\ell_{p,a_0}) + L_{\tilde{f}_j}(\ell_{b_0b_1}) + L_{\tilde{f}_j}(\ell_{a_1,q}) \tag{216}$$

$$\leq |x_0 - \frac{1}{2}| + (2^j - 1)\frac{2\delta_j}{j} + (1 - (2^j - 1)2\delta_j) + |\frac{1}{2} - x_1| \tag{217}$$

$$= |x_0 - \frac{1}{2}| + (1 - \frac{1}{2^{j+1}})\frac{1}{j} + \frac{1}{2^{j+1}} + |\frac{1}{2} - x_1| \tag{218}$$

$$= d_{\hat{f}_\infty}(p,q) + C_n \tag{219}$$

情形 2： $p,\ q \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,1]$ 考虑路径 γ，使其不与 $\{\frac{1}{2}\} \times [0,1]$相交，那么~存在某个 N，使得 $f_j = 1$ 对所有 $n \geq N$都成立。在这个区域中，我们知道连接 p和 q的任意曲线的最短长度为 $d(p,\ q)$。如果 $\gamma \cap (\{\frac{1}{2}\} \times [0,1]) \neq \emptyset$，那么考虑路径

$$\phi = \ell_{p,a_0} * \ell_{a_0,a_1} * \ell_{a_1,q} \tag{220}$$

我们可以估计其长度为

$$L_{\tilde{f}_j}(\phi) = L_{\tilde{f}_j}(\ell_{p,a_0}) + L_{\tilde{f}_j}(\ell_{a_0,a_1}) + L_{\tilde{f}_j}(\ell_{a_1,q}) \tag{221}$$

$$\leq L(\ell_{p,a_0}) + L_{\tilde{f}_j}(\ell_{(\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},1)}) + L(\ell_{a_1,q}) \tag{222}$$

$$= |\frac{1}{2} - x_0| + (1 - \frac{1}{2^{j+1}})\frac{1}{j} + \frac{1}{2^{j+1}} + |\frac{1}{2} - x_1| \tag{223}$$

$$= |\frac{1}{2} - x_0| + |\frac{1}{2} - x_1| + C_j. \tag{224}$$

由于连接 p 和 q 的任意曲线都属于这两种情形之一，我们可以取这两个估计值中的较小值来求得上界

$$d_{\tilde{f}_j}(p,q) \leq \min(d(p,q), |\frac{1}{2} - x_0| + |\frac{1}{2} - x_1| + C_j) \tag{225}$$

$$\leq \min(d(p,q) + C_j, |\frac{1}{2} - x_0| + |\frac{1}{2} - x_1| + C_j) \tag{226}$$

$$\leq \min(d(p,q), |\frac{1}{2} - x_0| + |\frac{1}{2} - x_1|) + C_j \tag{227}$$

$$= d_{\hat{f}_\infty}(p,q) + C_j. \tag{228}$$

情形 3： $p,\ q \in [\frac{1}{2},1] \times [0,1]$与情形 2 对称

结合上述三种情况以及此前得到的下界估计值，我们已证明 $d_{\hat{f}_\infty}(p,\ q) - C_j \leq d_{\tilde{f}_j}(p,\ q) \leq d_{\hat{f}_\infty}(p,\ q) + C_j$，从而证明 $d_{\tilde{f}_j} \to d_{\hat{f}_\infty}$一致成立。

为了说明 $d_{\tilde{f}_j}$不满足下利普希茨界，我们令 $p_j = (\frac{1}{2} - \delta_j,\ s_{i,\ j})$ 和$q_j = (\frac{1}{2} + \delta_j,\ s_{i,\ j})$，并令 p_j与 q_j之间的距离

$$d(p_j,q_j) = \left|\frac{1}{2} - \delta_j - (\frac{1}{2} + \delta_j)\right| \tag{229}$$

$$= |-2\delta_j| = \left(\frac{1}{2^j}\right), \tag{230}$$

因此，我们可以计算 $d_{\tilde{f}_j}(p_j,q_j) = \frac{1}{j}d(p_j,q_j) = \frac{1}{j2^j}$的值。

我们将选取 $c_j = \frac{2}{j}$–来证明利普希茨下界不成立，因为

$$c_j d(p_j, q_j) = \frac{2}{j}\left(\frac{1}{2^j}\right) > \frac{1}{j2^j} = d_{\tilde{f}_n}(p_j, q_j). \tag{231}$$

因此， $d_{\tilde{f}_j}$ 如预期那样不满足 Lipschitz 下界。 □

4. Proof of Main Theorems

我们先证明定理1.1，它可由关于曲线长度的一个简单观察得出。

定理的证明 *1.1.* 任取一条连接 γ 与 $p, q \in [0,1]^2$ 的分段光滑曲线，并计算

$$L_{g_1}(\gamma) = L_{g_1}(\gamma \cap U) + L_{g_1}(\gamma \cap U^c) \tag{232}$$
$$\geq L_{g_1}(\gamma \cap U) \tag{233}$$
$$\geq cL_{g_0}(\gamma \cap U) \tag{234}$$
$$= cL_{g_0}(\gamma) \geq cd_{g_0}(p, q), \tag{235}$$

其中我们在 (234) 中使用了 (13)，并在 (235) 中使用了 $\mathcal{H}^1_{g_0}(M \setminus U) = 0$。现在对所有曲线 γ 取下确界，得到

$$d_{g_1}(p, q) \geq cd_{g_0}(p, q), \tag{236}$$

如所期望的。 □

现在我们证明定理 1.3；该定理也可由对曲线长度的一个简单观察得到。

定理 *1.3* 的证明。令 γ 为任意一条分段光滑曲线，连接 $p, q \in [0,1]^2$，并计算

$$L_{g_n}(\gamma) = L_{g_n}(\gamma \cap U) + L_{g_n}(\gamma \cap U^c) \tag{237}$$
$$\geq L_{g_n}(\gamma \cap U) \tag{238}$$
$$\geq cL_g(\gamma \cap U) \tag{239}$$
$$\geq cL_g(\gamma) - cC_n \geq cd_g(p, q) - cC_n, \tag{240}$$

其中我们在 (239) 中使用了 (9)，并在 (240) 中利用了 $\mathcal{H}^1(M \setminus U) \leq C_n$。现在对所有曲线 γ 取下确界，得到

$$d_{g_n}(p, q) \geq cd_g(p, q) - cC_n, \tag{241}$$

如所期望的。 □

接下来研究上界，我们证明定理 1.5，该定理需要用曲线对区域进行叶状分解。这是一种在 [2, 8, 4]中广泛使用的技巧。其思路是，通过用连接各点的曲线对一个具有全体积的区域进行叶状分解，我们可以将体积假设（或积分假设）与关于曲线长度的预期结论联系起来。这类论证通常会用到余面积公式，正如下述证明所示。

定理 *1.5* 的证明。考虑 $p,\ q \in M$ 以及一条关于 g连接p 与 q 的距离极小光滑测地线 γ_0，即 $L_g(\gamma_0) = d_g(p,\ q)$。现在定义 C_ε 为 γ_0 的一个半径为 ε 的正规邻域；当 $\varepsilon > 0$ 取得足够小时，该邻域可以由光滑曲线叶状分解。于是我们看到，$\mathrm{Vol}(U \cap C_\varepsilon) = \mathrm{Vol}(C_\varepsilon)$，因此在曲线族 C_ε 中必定存在一条曲线 γ，使得$L_g(\gamma \cap U) = L_g(\gamma)$。为进一步说明这一论断，若叶状分解 C_ε 的每条曲线 γ 都满足$L_g(\gamma \cap U) < L_g(\gamma)$，那么余面积公式将导出矛盾。因此，叶状分解中必定存在一条曲线 γ，使得 $L_g(\gamma \cap U) = L_g(\gamma)$，如所求。此外，这意味着

$L_{g_n}(\gamma) = L_{g_n}(\gamma \cap U)$，因为若我们用 g 对 γ 作弧长参数化，则 γ 和 $\gamma \cap U$ 的弧长测度 ds_g 相同，这意味着

$$L_{g_n}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{g_n(\gamma', \gamma')} ds_g = \int_{\gamma \cap U} \sqrt{g_n(\gamma', \gamma')} ds_g = L_{g_n}(\gamma \cap U). \tag{242}$$

现在，对于任意的 $\delta > 0$，通过选取足够小的 $\varepsilon > 0$，利用沿 C_ε 叶状分解的曲线的 g 长度的连续性，我们可以确保对于所有沿 C_ε 叶状分解的 γ，都有 $|L_g(\gamma) - L_g(\gamma_0)| \leq \delta$。这意味着

$$d_{g_n}(p, q) \leq L_{g_n}(\gamma) \tag{243}$$

$$= L_{g_n}(\gamma \cap U) \tag{244}$$

$$\leq C L_g(\gamma \cap U) \tag{245}$$

$$= C L_g(\gamma) \tag{246}$$

$$\leq C L_g(\gamma_0) + C\delta = C d_g(p, q) + C\delta. \tag{247}$$

因此令 $\delta \to 0$，即可得到所需结论。 □

最后，我们给出定理 1.6 的证明，该定理利用直径界假设从上方估计曲线长度。

定理 *1.6* 的证明。考虑 $p, q \in [0,1]^2, \varepsilon > 0$，以及一条分段光滑曲线，使得 $L_g(\gamma) \leq d(p, q) + \varepsilon$ 按照 d 弧长参数化。于是我们可以计算

$$d_{g_n}(p, q) \leq L_{g_n}(\gamma) \tag{248}$$

$$= L_{g_n}(\gamma \cap U_n) + L_{g_n}(\gamma \cap U_n^c) \tag{249}$$

$$\leq C L_g(\gamma \cap U_n) + \frac{C_n}{V_n} L_g(\gamma \cap U_n^c) \tag{250}$$

$$\leq C L_g(\gamma) + \frac{C_n}{V_n} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}(W_k) \tag{251}$$

$$\leq C d_g(p, q) + C\varepsilon + C_n. \tag{252}$$

取 $\varepsilon \to 0$ 后，我们得到所需的界。 □

References

[1] Clara L. Aldana、Gilles Carron 和 Samuel Tapie。a_∞ 权重与曲率界下共形度量的紧性。 *Analysis and PDE*，即将发表。[2] Brian Allen。从 l^p 界到黎曼流形的 Gromov–Hausdorff 收敛。 *Geometriae Dedicata*，218 30 2024( )，。[3] Brian Allen 和 Edward Bryden。Sobole夫界与黎曼流形的收敛。 *Nonlinear Anal.*，185 142 169，2019：–。[4] Brian Allen 和 Edward Bryden。黎曼度量与距离函数的 Sobole夫不等式及其收敛。 *Ann. Global Anal. Geom.*，63(4)，2023。[5] Brian Allen、Raquel Perales 和 Christina Sormani。上方体积与下方距离。 *J. Differential Geom.*，126 3 837 874，2024( )：–。[6] Brian Allen、Bryan Sanchez 和 Yahaira Torres。扭曲积长度空间序列的紧性。 *Journal of Topology and Analysis*，2025。[7] Brian Allen 和 Christina Sormani。几何分析中各种收敛概念的对比。 *Pacific Journal of Mathematics* 303 1 1 46, 2019，( )：–。

[8] Brian Allen 和 Christina Sormani。几何分析中收敛概念之间的联系。 *Nonlinear Analysis*，200 2020，。[9] Brian Allen、Wenchuan Tian 和 Changliang Wang。共形情形下的标量曲率紧性猜想，2024年。arXiv:2406.03988（即将在 Calculus of Variations and Partial Differential Equations 发表）。[10] Lashi Bandara。流形上的粗糙度量与二次估计。 *Math. Z.*，283(3-4):1245–1281，2016。

[11] Lashi Bandara 和 Paul Bryan。光滑流形上粗糙度量的热核与正则性。

Math.，( )：–。[12]

Nachr. 293 12 2255 2270, 2020

Lashi Bandara 和 Anisa Hassan。粗糙黎曼度量空间，2025年。arXiv:2507.10274[math.DG]。[13] Lashi Bandara、Medet Nursultanov 和 Julie Rowlett。带边界粗糙黎曼流形上加权拉普拉斯方程的特征值渐近。 *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 22(4):1843–1878，2021年。[14] Annegret Y. Burtscher。具有连续黎曼度量的流形上的长度结构。 *New York J. Math.*，21 273 296，2015：–。[15] Giuseppe De Cecco 和 Giuliana Palmieri。LIP流形上的曲线长度。

Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci.，( )：–。[16]

Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 1 3 215 221, 1990

Giuseppe De Cecco 和 Giuliana Palmieri。Lipschitz黎曼流形上的积分距离。 *Math. Z.*，207 2 223 243，1991年( )：–。[17] Giuseppe De Cecco 和 Giuliana Palmieri。LIP芬斯勒流形上的内蕴距离。

Rend. Accad. Naz.：–。[18]

Sci. XL Mem. Mat. (5) 17 129 151, 1993

Giuseppe De Cecco 和 Giuliana Palmieri。LIP流形：从度量到芬斯勒结构。 *Math. Z.*，218 2 223( )：–237，1995年。[19] Conghan Dong。关于一致渐近平坦三维流形上正质量定理的若干稳定性结果。*Ann. Math. Qué.*，48(2):427–451，2024年。[20] Conghan Dong、Yuxiang Li 和 Ke Xu。 $W^{1,\,p}$-度量与具有 $L^{n/2}$有界标量曲率的共形度量。*Commun. Contemp. Math.*，25(1):论文编号 2150047，22，2023年。[21] Jiewon Park、Wenchuan Tian 和 Changliang Wang。正标量曲率旋转对称黎曼流形的紧性定理。 *Pure Appl. Math. Q.*，14(3-4):529–561，2018年。[22] Christina Sormani。关于收敛与标量曲率的猜想。载于 Mikhail L Gromov 和 H Blaine Lawson, Jr. 编， *Perspectives in Scalar Curvature*。世界科学出版社，2023年。[23] Christina Sormani、Wenchuan Tian 和 Changliang Wang。具有非负标量曲率的极端极限。

Nonlinear Anal. 239 2024

，，。[24]

Wenchuan Tian 和 Changliang Wang。具有非负标量曲率的球面上扭曲积圆序列的紧性。 *Mathematische Annalen*，2024年。