布莱克威尔妖 – 随机游走中的事后推断与预测

作者：James D. Stein（加利福尼亚州立大学长滩分校）

摘要 – 麦克斯韦妖是一种虚构的存在，最早由物理学家詹姆斯·克拉克·麦克斯韦描述（尽管“麦克斯韦妖”这一名称是开尔文勋爵所取）。麦克斯韦在一项思想实验中利用统计均匀系统中存在的非均匀性，尝试违反热力学第二定律。布莱克威尔妖（据我们所知）首次出现在本文中，它展示了双信封问题的一种随机游走变体中一个违反直觉的情形[1], ：在限制性条件下，可以预测由抛掷一枚公平硬币生成的随机游走方向，且成功概率为 > 1/2。与麦克斯韦妖一样，布莱克威尔妖通过利用统计均匀系统中存在的非均匀性来实现其效果。麦克斯韦妖通过判断分子何时运动迅速、何时并非如此来实现其效果。布莱克威尔妖则通过判断预测策略何时成功、何时失败来实现其效果。麦克斯韦提出他的妖时，它面临着一项技术上的珠穆朗玛峰——既要能够打开和关闭闸门以允许单个分子通过，又要能够测量接近的分子的速度。布莱克威尔妖只需开关一盏灯、进行视觉观察，并保存简单的统计记录。

需要指出的是，本文的分析并未证明能够以 > 1/2 的成功概率从头开始预测公平硬币的翻转结果，因为要实现这一结果，必须将公平硬币嵌入某种具有一定复杂性的环境中。

引言 ——麦克斯韦妖

Maxwell 想象了一个处于热平衡状态的气体罐体，由于没有可转换为功的温差，因此无法做功。罐体中央有一道闸门，恶魔可以打开和关闭它，从而允许单个分子从一侧通过到另一侧。尽管气体处于热平衡状态，但有些分子移动得比其他分子快，因为温度是根据所有分子的运动情况取平均得到的。当容器 A 侧一个温度高于平均值的分子接近闸门时，恶魔便将其打开，允许该分子通过到 B 侧。分子通过到 B 侧后，恶魔便关闭闸门。一段时间后，足够多的高温分子聚集在 B 侧，形成温差，从而可以做有用的功。

提出麦克斯韦妖时，Maxwell显然意在说明，热力学第二定律是一种统计规律，而非绝对确凿的定律。多年来，围绕麦克斯韦妖及其可能对热力学第二定律造成的违反，人们展开了大量讨论。Leo Szilard和Rolf Landauer等物理学家借助麦克斯韦妖，建立了信息、熵以及可逆和不可逆热力学过程之间的联系。

本文并非一篇物理论文，但麦克斯韦妖的背景（当然，还有Maxwell和Blackwell这两个名字的相似之处）促使我为本文拟定了这个标题。此外，正如文章末尾的“备注”中将会看到的，两个恶魔之间有相当大的相似之处，摘要中也对此有所说明。

第一节——Blackwell的赌注

David Blackwell 是 20 世纪最具影响力的统计学家之一，也对概率论和信息论作出了重要贡献。他一项巧妙的

决策策略经 Len Wapner 改编，并更名为 Blackwell的赌注[3]. 下面将介绍 Wapner 对这个问题的表述。

有两个信封，一个红色，一个蓝色，里面装着不同数额的钱。你随机选一个信封，打开后数一数里面的钱。然后，你可以选择留下这个信封里的钱，也可以打开另一个信封，留下里面的钱。当然，目标是最终拿到更多的钱。

Blackwell 的贡献在于提出：打开第一个信封后，当事人可以从任意概率分布中选取一个随机数。假设打开的信封里有 m 元，随机数为 r。布莱克威尔策略是：如果 r < m，就留下打开的信封里的钱；如果 r >m，就拿未打开的信封里的钱。

计算很简单。假设两个信封里的金额分别为 S 和 L，且 S < L。起初，选中任一信封的概率都相同。设随机数小于 > L 的概率为 p，随机数小于 < S 的概率为 q。

如果选中了装有 S 的信封（这种情况发生的概率为 1/2），那么做出正确决策的概率为 1-q；因此，选中装有 S 的信封并做出正确决策的综合概率为 1⁄2(1-q)。

如果选中了装有 L 的信封（其概率为 1/2），那么做出正确决策的概率为 1-p，因此选中装有 L 的信封并做出正确决策的综合概率为 1⁄2(1-p)。

因此，做出正确决策的概率为 1⁄2(1-q) + 1⁄2(1-p) = 1⁄2 + 1⁄2 (1- (p+q))，或者说为 1⁄2 + 1⁄2 所选随机数落在 S 和 L 之间的概率。只要随机数落在 S 和 L 之间的概率不为零（许多知名分布都能保证这一点），成功决策的概率就是 > 1⁄2。

第二节——借助布莱克威尔妖进行的事后推断

麦克斯韦妖有一项工作要做——根据有关即将到来的分子的信息打开和关闭闸门。布莱克威尔妖也有类似的任务：根据有关列车的信息，在铁路轨道上开关灯光，观察随机变量在轨道上的位置，并保存记录。

铁路轨道呈圆形，设有 N 个等距分布的站点。每对相邻站点之间的中点处设有一盏灯。恶魔乘坐列车时，携带一台笔记本电脑，可以用它打开和关闭这些灯。关于 N 的限制将在稍后说明。

列车通过公平硬币的抛掷结果进行随机游走。如果硬币落地为正面，列车便沿顺时针方向前进 1 个站点；如果落地为反面，列车便沿逆时针方向前进 1 个站点。

我们假设已经达到极限分布，此时列车位于任意站点的概率都相等。恶魔是列车上的一名乘客。他不知道自己身在何处，却听到列车长宣布：“下一站，Willoughby。”恶魔是经典电视节目的忠实粉丝，于是想起了 20 世纪 60 年代《阴阳魔界》电视系列剧中的那一集《威洛比站》[4] 。

列车长宣布下一站的那一刻，恶魔点亮了大约位于 Willoughby 站正对面的灯。恶魔的笔记本电脑点亮了这盏灯，但没有提供

关于位置的任何指示，无论是当前站点还是 Willoughby 站的位置。由于已经达到极限分布，恶魔在 Willoughby 站顺时针方向相邻一站或逆时针方向相邻一站的可能性相等。

尽管恶魔不知道硬币落下时是正面还是反面，但恶魔可以采用 Blackwell 决策策略的一种变体，以概率 > 1⁄2 猜测硬币落下时是正面还是反面。

图1展示了该图示。

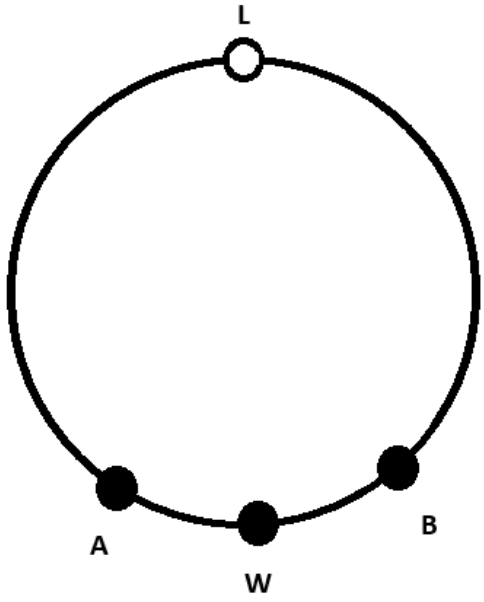

图1

Willoughby 用 W 表示，灯用 L 表示。A 站位于 W 顺时针方向一站处，B 站位于 W 逆时针方向一站处。选择足够大的 N，以确保 L 与 A、B 和 W 位于圆的相对两半（在图1中，L 与它们正好 diametrically opposite）。

Blackwell 决策原理的一个变体实现如下。我们假设轨道的周长为 1，并且从轨道上随机位置的均匀分布中选取一个随机位置 R

。注意，W 位于列车位置的顺时针方向还是逆时针方向，相当于猜测决定前往 Willoughby 方向的硬币是正面还是反面。从 A 或 B 出发，都有两条弧从该位置通向 L。R 位于其中一条弧上。恶魔猜测 W 位于这样一条弧上：沿该弧前进时，会先遇到 R，再遇到 L。如果 X 是圆上的一条弧，则令 len(X) 表示 X 的长度。

列车位于 A 或 B 的概率相等。如果列车位于 A（概率为 = 1⁄2），那么当 R 位于弧 AWL 上时，恶魔就能猜对；这种情况发生的概率为 len(AWL)。列车位于 A 且猜对的联合概率为 1⁄2 len(AWL)。

如果列车位于 B（概率为 = 1⁄2），那么当 R 位于弧 BWL 上时，恶魔就能猜对；这种情况发生的概率为 len(BWL)。列车位于 A 且猜对的联合概率为 1⁄2 len(BWL)。

因此，猜对的联合概率为 1⁄2 (len(AWL) + len(BWL))。只要 L 位于连接 A 和 B 的优弧上（N 的选取确保了这一点），猜对的联合概率就是 1⁄2 + 1⁄2 len(AB)。由于 len(AB) = 2⁄N，因此猜对的概率为 1⁄2 + 1⁄N。

这是一次事后推断——硬币已经抛出，目的地也已确定。尽管恶魔不知道那次 50-50 硬币投掷的结果，但他仍能以 1⁄2 + 1⁄N 的概率猜对。

为确保成功事后推断的概率大于 1⁄2，需要假设灯 L 位于连接 A 与 B 的优弧上。如果灯位于连接 AB 的劣弧上，则正确猜测的概率很容易看出为 1⁄2 (len(AL) + len(BL)) = 1⁄2 len(AB) =1⁄N。

如果灯处于恶魔无法控制的固定位置，那么事后预测的长期平均值似乎会是 1/2。无论灯位于何处，只有两个目的地——即灯两侧的那些——会使得灯位于连接两个可能的起始站的劣弧上。以概率 (N-2)/N，目的地会使得灯位于连接该目的地两侧两个车站的优弧上，而以概率 2/N，灯位于劣弧上。在这种情况下，上述事后预测策略的成功概率为 (N-2)/N x (1/2 +1/N) + (2/N) x (1/N) = 1/2，正如人们可能料想的那样。

请注意，如果 Willoughby 是列车所在的位置，而不是它的目的地，问题就会发生变化。此时，在图1中，A 和 B 是两个可能的目的地，简单计算可知，同样的策略在预测决定下一个目的地的抛硬币结果时毫无优势。

因此，当恶魔可以打开一盏灯来确保图1所示的情形成立时，他就能以概率 > 1/2 事后推断硬币的正反面。但如果决定下一个目的地的硬币尚未抛出，因此下一个目的地也尚未确定，那又会怎样呢?

恶魔无法打开一盏与下一个目的地相反的灯，因为那个目的地尚未确定。在下一节中，我们将概述一种策略，使人能够猜出下一个目的地——从而猜出硬币的正反面，且成功概率大于 1/2。

第三节——布莱克威尔妖以成功率 > 1/2 进行预测

在达到稳态之前的某个时刻，恶魔随机打开一盏灯（也可以打开指定的一盏灯，这不会影响接下来的论证）。在随机游走期间，这盏灯始终亮着。它的位置固定，不受列车移动的影响。

尽管硬币尚未抛出，只要列车仍在轨道上，下一目的地就是 D_k，在下图中我们将其简称为 D。

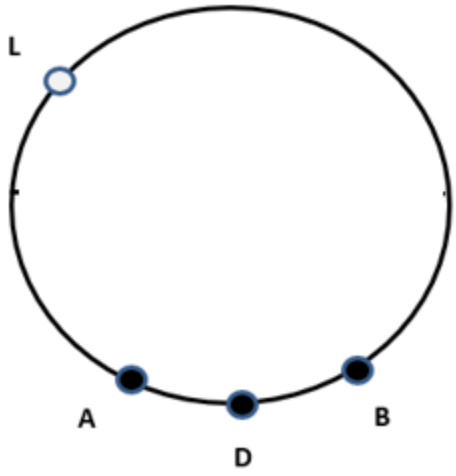

图2

这种情况下的计算与图1中恶魔无法控制灯的位置时完全相同。我们假设车站从0到N-1编号，灯位于车站0和1之间。预测策略的总体成功率为1⁄2——但当下一个目的地是车站0或1以外的车站时，成功预测的概率为1⁄2 + 1⁄N；当下一个目的地是车站0或1时，成功预测的概率为1/N。将车站0和1以外的任意车站定义为“强站”，将车站0或车站1定义为“弱站”。

恶魔会按照站点编号记录自己的预测。随着时间推移，恶魔会注意到，在某些站点——也就是两侧都有强站的站点——他的预测成功率高于 1⁄2，而在其他站点，他的预测成功率低于 1⁄2。当这一现象在统计上具有显著性时，恶魔会修改自己对那些成功率低于 1⁄2 的站点的预测，转而直接猜测硬币会落在正面

（因此列车将沿顺时针方向行进），这一猜测的正确概率为 1⁄2。在所有其他站点，猜测正确的概率为 > 1⁄2，因此猜测正确的总体概率将高于 1⁄2。

这里给出的论证很容易推广到一条直线上有限个站点之间的随机游走。将其视为带有反射壁的马尔可夫链，可以很容易看出，若直线上有 N 个站点，则两个端点站的稳态概率为 1/(2(N-1))，其余所有站点的稳态概率为 1/(N-1)。在 [5] 中使用均匀分布的随机位置进行布莱克威尔指针论证，可得内部站点的预测成功概率为 (1/2 + 1/(N-1))。再一次，记录恶魔在内部站点猜对的概率为 > 1⁄2，并会在其他站点修改自己的猜测。

备注

所概述的策略并不只是要以超过一半的概率成功预测公平硬币的投掷结果。当前示例涉及大量基础设施，但它似乎展示了这样一种情形：预测随机游走的成功概率高于人们通常认为的水平。

与任何反直觉的结论一样，分析中也可能存在错误。一种可能的质疑是，由于目的地尚未确定，因此恶魔落在目的地任一侧的可能性并不相同。然而，尽管前面的分析只针对硬币的一次抛掷，但从整体平均来看确实如此——从长远而言，无论目的地是什么，恶魔落在目的地任一侧的可能性都相同。这正是成功猜测概率计算所依据的唯一假设

是 基于此得出的。当下一个目的地是强站时，平均预测成功概率为 1⁄2 + 1⁄N；当下一个目的地是弱站时，平均预测成功概率为 1/N。

看来，如果前面的分析经得起检验，那么这就是以下一系列事件共同作用的结果。

（1）当这一特定的随机游走达到稳态时，每个车站成为下一个目的地的概率都相等。即使并非所有目的地都同样可能，结论仍然可能成立。关于成功概率如何随两侧车站的目的地概率变化的初等连续性论证，可以清楚地说明这一点。只要存在正确猜测概率大于 1/2 的车站，统计记录就应当能够使人预测结果的能力高于通常预期的水平。

目前尚不清楚这是否能在实直线上的简单随机游走中发生，因为不存在稳态分布。不过，也许可以将这里的结果推广到其他具有稳态分布的随机游走。

（2）灯的存在造成了各车站之间在成功预测概率方面的非均匀性。

（3）统计记录可以利用（2）中提到的偏差。

麦克斯韦妖与布莱克威尔妖的相似性

统计均匀系统中非均匀性的存在 – 对麦克斯韦妖而言，这些非均匀性之所以存在，是因为单个分子的移动速度各不相同。

对布莱克威尔妖而言，非均匀性源于灯的存在以及所采用的预测策略。

非均匀性的识别——麦克斯韦妖能够区分以不同速度运动的分子。布莱克威尔妖能够区分各个站点预测成功率的差异。

非均匀组分的利用——麦克斯韦妖利用闸门将非均匀组分分隔到两个温度不同的腔室中，从而使热机能够做有用功。布莱克威尔妖则利用这样一种知识：在某些站点，所采用的预测策略表现“低于平均水平”，于是便在这些站点改用更好的预测策略。

麦克斯韦似乎并不认为他的妖提供了一种切实可行的方法来违反热力学第二定律，但他很可能会对自己的设想所产生的种种路径极感兴趣。希望本文的讨论也能促使人们研究在什么情况下会出现看似违反直觉却成功的预测。

致谢

本文受益于作者与伊利诺伊大学的 Steven Portnoy教授多年来的讨论。令人惋惜的是，2025年夏天，Portnoy遭遇心脏骤停，并于当年12月下旬离世。统计学界失去了一位值得尊敬的成员，而本文作者也失去了一位同事和朋友。

参考文献

[1] 《麦克斯韦妖》。《自然》。***20***（*501*）：*126*。*1879*

[2] S. Portnoy, 《一般分布的双信封问题》, 《统计理论与实践杂志》（2020）

[3] Leonard M. Wapner, 《意外的期望：数学水晶球的奇妙之处》，2012，继 David Blackwell 的《离散变量的平移参数问题》之后, 《数理统计年刊》22: 3 [1951], 393–399。）

[4] 《威洛比站》, 《阴阳魔界》第30集（1960）

[5] J. Stein & L. Wapner, 如何预测硬币的正反面，收录于《各种趣味主题的数学》第*3*卷（2019）普林斯顿大学出版社