完全可对偶且可逆的 $\mathcal{E}_n$-代数

Pablo Bustillo Vazquez

2026年3月9日

arXiv:2603.05688v1 [math.AT] 5 Mar 2026

摘要

我们证明了 Brochier、Jordan、Safronov 和 Snyder [BJSS21], 提出的一个猜想。该猜想最初由 Lurie[Lur09b], 提出，用于刻画作为高阶莫里塔范畴 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ [Lur09b, Sch14, Hau17b, Hau23]中对象的完全可对偶且可逆的 $\mathcal{E}_n$-代数。换言之，我们刻画了那些能够导出 $(n+1)$ 维拓扑量子场论（TQFT）的 $\mathcal{E}_n$-代数，以及那些能够导出可逆理论的 $\mathcal{E}_n$-代数。

目录

1 引言 **2**1.1 概述.3 1.2 致谢.5

2 (∞, n)-范畴中的伴随 5

2.1 具有伴随的 (∞, n)-范畴的余极限仍具有伴随.5 2.2 自由添加伴随和具有伴随的子范畴.9 2.3 提升一次全伴随态射.11 2.4 可逆性.12

3 可对偶性 性数据作为因子化同调 1 **3**

3.1 同调交换图.13 3.2 把手体作为对偶数据.18 3.3 迭代双模的可对偶性.21 3.4 可对偶化代数的中心.23

4 判据的证明 **26**

4.1 定理 A.26 4.2 定理 B.29

1 引言

现代拓扑量子场论（TQFT）研究的核心洞见之一是，场论的结构由高范畴可对偶化条件所支配。这一思想源于 Baez-Dolan [BD95], 的开创性工作，他们提出了配边假设。他们提出，一个 n 维完全扩展拓扑量子场论应当由一个对称幺半 (∞, m)-范畴 $\mathcal{A}$ 以及一个"完全-n-可对偶"对象 $a \in \mathcal{A}$ 的数据构成。于是，人们猜想，这样的初始拓扑量子场论由带框配边的 (∞, n)-范畴给出。通常，所关注的对称幺半 (∞, m)-范畴 $\mathcal{A}$ 源于对代数结构的研究，而配边假设可被视为代数与流形拓扑之间的一种对偶。

Lurie 在 [Lur09b 第 4.1] 节中观察到，在某个固定的、具有相容余极限的对称幺半 $(\infty, 1)$-范畴 $\mathcal{V}$ 中，$\mathcal{E}_n$-代数的全体可以组织成这样一个对称幺半 $(\infty, n+1)$-范畴$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$，称为高阶 Morita 范畴。这推广了众所周知的经典 Morita (2,2)-范畴，其对象为非交换环，其态射为双模。这一范畴的想法最早由 Lurie 在 [Lur09b 的定义 4.1.11] 中勾勒，随后由 Scheimbauer 与 Haugseng 在[Sch14、Hau17a、Hau23]中加以形式化。由该构造可知，对于 $1 \leq k < n$，$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的所有 k-态射都具有左伴随和右伴随；这意味着任意 $\mathcal{E}_n$-代数 A 都会自动给出一个 n 维的完全延拓拓扑量子场论。该拓扑量子场论的配分函数的计算恰好由以 A为系数的因子化同调给出，正如 Lurie 在 [Lur09b 的定理 4.1.24] 中所预言，并在 [Sch14]中得到形式化。然而，$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 的 n-态射未必具有伴随，这就提出了刻画那些$\mathcal{E}_n$-代数 A的问题，使得相应的拓扑量子场论能延拓到 $(n+1)$ 维，即完全可对偶的 $\mathcal{E}_n$-代数。本文的目的是回答这一问题，并进一步分类哪些 $\mathcal{E}_n$-代数构成可逆拓扑量子场论。

在经典情形下，经典 Morita (2,2)-范畴中的完全可对偶对象被称为光滑且适当代数，而可逆对象被称为 Azumaya 代数。这些概念由 To¨en [To¨e12] 推广到了 dg 环境。更明确地说，代数 A in ${}_k\mathbf{Mod}$ 是光滑的，如果 A 作为 $A^{op} \otimes_k A$-模是完美的，并且是适当的，如果 A 作为 k-模是完美的。光滑且适当代数 A 被称为 Azumaya 代数，如果典范

$$k \xrightarrow{\sim} \mathbf{HC}_{\mathcal{E}_1}(A)$$
$$A^{\mathrm{op}} \otimes_k A \xrightarrow{\sim} \mathbf{End}_k(A)$$

是等价。

Lurie 在 [Lur09b 的注 4.1.27] 中声称，展开配边假设的证明应当给出上述关于 $\mathcal{E}_n$-代数的全对偶可对偶性条件的一个显式推广，其中涉及因子化同调。该判据后来由 Brochier、Jordan、Safronov、Snyder 在 [BJSS21 的猜想1.8]中陈述为猜想，我们在下文所述的定理 A 中以更一般的形式证明了它，所用语言为因子化同调[AFT17b, AFR18a, AFT17a]。

定理 A

设 $\mathcal{V} \in \mathbf{Alg}\mathcal{E}_\infty(\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}^{\mathsf{geom}-\mathrm{colim}})$ 是一个具有几何实现和相容的张量积的对称幺半 $(\infty、1)$ 范畴。设 $0 \leq k < n$ 和 M 是 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的一个 k-态射。那么，当且仅当对于所有 $0 \leq i \leq n-k$，典范作用

$$\int_{(S^{i-1},D^i)} (M, A) \curvearrowright M$$
$$M \curvearrowleft \int_{(S^{i-1},D^i)} (M, B)$$

将 M 展示为一个可对偶模，其中 A （分别地， B）是 M 的（余）定义域（关于这些作用的详情，参见构造 ***4.1***）。

可以将分解 $\int_{(S^{i-1}、\ D^i)}$（M、 A）理解为相对于 A 的 M 的高阶版本 Hochschild 同调。Brochier *et al.* 还猜想了 Azumaya 代数特征的一种推广[BJSS21，猜想 1.9]，我们将在下文陈述的定理 B 中证明该猜想。

定理 B

令 $\mathcal{V} \in \mathbf{Alg}\mathcal{E}_\infty(\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}^{\mathsf{geom}-\mathrm{colim}})$ 为一个具有几何实现和相容的张量积的对称幺半$(\infty, 1)$范畴。设 $0 \leq k < n$和 M 是 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$中的一个 k-态射。当且仅当 M可逆时

它完全可对偶，并且对于所有 $1 \leq i \leq n-k$，泛 $\mathcal{E}_{n-k-i+1}$-代数映射

$$\int_{(S^{i-1},D^i)} (M,A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{HC}^B_{\mathcal{E}_{n-k-i}}(M)$$
$$\int_{(S^{i-1},D^i)} (M,B) \xrightarrow{\sim} \mathbf{HC}^A_{\mathcal{E}_{n-k-i}}(M)$$

是等价，其中 A（分别为 B）是 M 的（余）定义域（关于这些映射的详细信息，见构造 *3.9*）。

1.1 概述

第 2 节 为证明这些结果，我们首先需要在第 2 节证明一些关于具有伴随的 (∞,n)-范畴的预备结果。大多数结果虽为专家所熟知，但文献中缺少严谨的证明，因此我们在此给出，以求完备。本节的全部工作都高度依赖 Riehl 和 Verity 的开创性成果 [RV16, Thm. 4.4.11]，该成果将 $(\infty,2)$-范畴中的伴随纳入一个强大的同伦相干框架。这些民间定理中最重要的一条是，包含 $\mathbf{Cat}^{\mathrm{adj}}{}_{(\infty,n)} \hookrightarrow \mathbf{Cat}_{(\infty,n)}$ 具有左伴随和右伴随（见命题 2.10）。左伴随的存在性由定义显然可得，而右伴随的存在性则更为微妙。可以手动将其显式构造出来，其直观含义是：它由那些完全可伴随的态射所构成的全子 (∞,n)-范畴给出。此处我们选择以更形式化的方式构造这个函子，并运用伴随函子定理 [Lur18, Thm. 06Q5]，通过证明 $\mathbf{Cat}^{\mathrm{adj}}{}_{(\infty,n)} \hookrightarrow \mathbf{Cat}_{(\infty,n)}$ 保余极限：

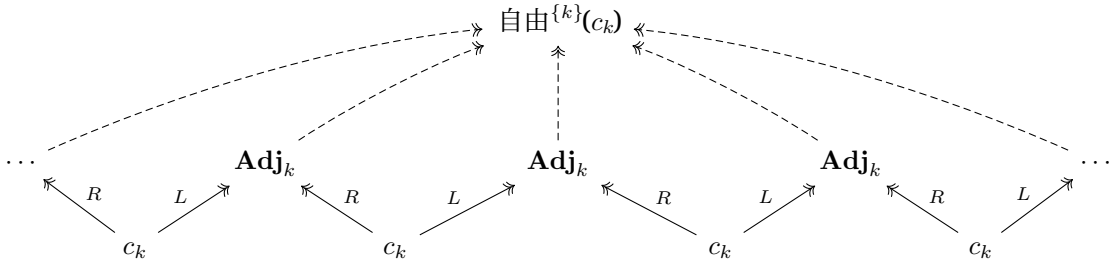
命题 2.8

设 $F\colon\ I \to \mathbf{Cat}_{(\infty,n)}$ 是一个由 $(\infty,\ n)$-范畴组成的图表，其中每个范畴都对所有 k-态射存在右（分别地，左）伴随。那么 $\operatorname{colim}_{\longrightarrow} F$ 也具有此性质。

论证依赖于 $(\infty,\ n)$-范畴的余极限的具体构造方式。更明确地说，某个余极限 $\operatorname{colim}_{\longrightarrow i\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_i$ 中的一个 k-态射，总是由 $\mathcal{C}_i$' 中的 k-态射经过某种复杂的粘贴得到的。这是针对 $(\infty,\ n)$-范畴的"Segal 化"构造所导致的内在结果，该构造见于 [BS24]。众所周知，伴随的复合应当具有伴随，这将进一步推出 $\mathbf{Cat}^{\mathrm{adj}}{}_{(\infty,\ n)}$ 对余极限封闭。这一方法的主要优势在于，它为证明某些以余极限定义的范畴具有伴随提供了一般方法。我们将其视为证明如下形式结果的有力工具："要构造一个 [*insert:* 高阶伴随概念]，，只需构造 [*insert:* 特定的一族通常的伴随]。"下面的结果给出了第一个此类论断：

命题 2.14

由单个完全可伴随的 k-态射生成的自由 $(\infty,k+1)$-范畴自由$^{\{k\}}(c_k)$ 是该图表的余极限



其中 所有投影均为满态射，并且$\mathbf{Adj}_k = \sigma^{k-1}(\mathbf{Adj})$ 是行走伴随 k-态射 .

这形式化了如下原则：给出一个"一次全伴随"的 k-态射，等价于将其嵌入一个伴随序列之中。主要定理 4.5 的证明依赖于类似的指导原则："要证明 f 是全伴随的，只需为形如 $\eta(\epsilon(\epsilon(\ldots\eta(f)\ldots)))$的迭代（余）单位找到伴随"（其中我们取遍由 ϵ 与 η 组成的、具有某个固定长度的所有字）。

第 3 节 接下来，我们将重点介绍证明所需的几何与代数工具。在几何方面，主要工具是 Ayala、Francis、Rozenblyum 和 Tanaka 在 [AFT17b, AFR18a, AFT17a] 中发展出的锥形光滑分层空间因子化同调理论。对我们而言，因子化同调是处理迭代双模中的这些 $\mathcal{E}_k$-代数的自然工具 M。遵循上述指导原则，因子化同调将使我们能够明确描述与这些迭代（余）单位中的每一个相对应的代数结构 $\epsilon(\eta(\epsilon(\ldots\eta(M)\ldots)))$。

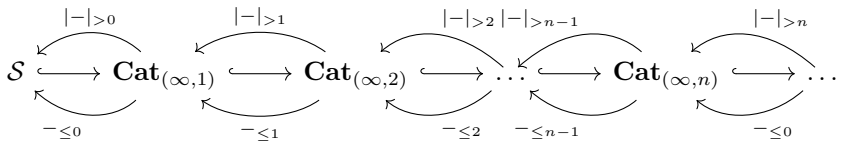
在第 3.1 小节中，我们引入同调映射 的概念，并提出一个结果，用以检验在分层空间之间传递代数结构的各种方式何时等价。在第 3.2 小节中，我们定义若干承载这些可对偶性数据的分层空间，以及若干分层映射；这些映射会诱导函子，将“M”映至这些“$\eta(\eta(\epsilon(\dots\epsilon(M)\dots)))$”。这些空间可以直观地表示为通常把手体的分层。其代数结构则可通过可构造丛映射，将这些把手体逐次“捏缩”来直观呈现。

最后，在第 3.3 小节和第 3.4 小节中，我们证明了几个技术性的代数结果。证明定理 A 的主要工具之一，是一个判据（命题 3.11），用于判断$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的 n-态射何时具有伴随；这实质上推广了 [Lur09b, 命题 4.6.2.13]。最后，为了完成定理 B 的证明，我们还需要理解霍赫希尔德上同调如何作为对偶数据出现在$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中，这一点将在命题 3.15 中证明。

第 4 节 本节较短，汇集了我们主要定理的证明。

记号 1.1. 我们将使用以下记号和约定。

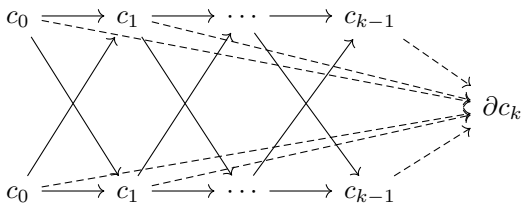
- 对于 $n \geq 0$，我们将$\mathbf{Cat}_{(\infty,n)}$ 记为 $(\infty,1)$-范畴 (∞,n)-范畴所成的可呈范畴。我们有一列反射与余反射：



- 对于 $n \geq 0$，我们有一个伴随

$$\mathbf{Cat}_{(n,n)} \underset{}{\overset{\mathcal{H}o_n}{\hookleftarrow}} \mathbf{Cat}_{(\infty,n)}$$

- 我们用 c_k 表示行走的 k-态射，它可视为任意 $n \geq k$下的一个（∞,n）-范畴。我们用 ∂c_k 表示行走的 k-态射的边界，即由一对平行的（$k-1$）-态射构成的行走范畴；它也可视为任意 $n \geq k-1$下的一个（∞,n）-范畴。它是以下图表的余极限



一个 k-态射 $f\colon c_k \to \mathcal{C}$也记作 $f\colon a_{k-1} \to b_{k-1} \colon \dots \colon a_0 \to b_0 \colon \mathcal{C}$，其中 $a_i, b_i \colon c_i \to \mathcal{C}$是上面诱导的投影。

- 我们将 $\mathbf{Cat}_{\mathsf{geom}-\mathrm{colim}\longrightarrow(\infty,1)}$ 记作如下对称幺半（$\infty,1$）-范畴：

(a) **对象** 是存在几何实现的（∞,1）-范畴 .

(b) **态射**是保几何实现的函子。

对称幺半结构由 [Lur17, Cor. 4.8.1.4] 给出。正如 Lurie 在 [Lur17, Rem.4.8.1.9] 中指出的，展开定义可知，$\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}^{\mathsf{geom}-\mathrm{colim}\longrightarrow}$ 中的对称幺半群恰好是一个具有几何实现和相容的张量积的对称幺半 $(\infty$,1)-范畴，其含义是：张量积在每个变量上分别与几何实现相交换。

- 分层空间的细化始终用虚线箭头 $X \dashrightarrow Y$表示。（弱）可构造丛始终用双向箭头 $X \twoheadrightarrow Y$表示。开嵌入始终用带钩箭头 $X \hookrightarrow Y$ 表示；若它是同痕等价，则用 $X \xrightarrow{\sim} Y$ 表示。闭含入始终用带钩箭头 $X \nhookrightarrow Y$ 表示，并标注“cl”。

- 我们令 $S^{-1}=\emptyset$ 和 $D^0=\{\bullet\}$。
- 我们用带下划线的 *à la* Lurie [Lur17, Chap. 2] 所述的 $\mathcal{O}\to\mathbf{FinSet}^*$ 来表示歌剧。它们的"底层范畴"，即纤维 $\mathcal{O}^{\{\bullet\}^+}$ 在 $\{\bullet\}^+$上的原像，记作不带下划线的形式。

1.2 致谢

作者谨向其博士导师 John Francis 致谢，感谢他进行了许多有益的讨论。

2 (∞,n)-范畴中的伴随

本节将确立若干关于具有伴随的（∞,n）-范畴的"常识性"结果，这些结果对于证明主要定理至关重要。尽管这些结果看起来或许理所当然，我们却未能在文献中找到任何严谨的证明，因此在此列出，以求完备。初读时读者可以放心跳过本节，待需要时再回来阅读。

我们的方法概述如下。为了处理稳健的同伦相干概念，我们将（$\mathcal{C}$ $\{1,\dots,n\}$ $\mathcal{C}$ ∞ $n+1$ $\hookrightarrow$ $,n+1$）-范畴 $\mathcal{C}$ 中的全可伴随态射定义为出现在 $\mathrm{Sub}^{\{1,\dots,n\}}(\mathcal{C})$ 的像中的态射，其中 Sub ( ) 是具有伴随的全子-（,）-范畴。为了使此定义有意义，我们接着需要证明 $\mathrm{Sub}^{\{1,\dots,n\}}(\mathcal{C})$ 定义良好，并且函子 $\mathrm{Sub}^{\{1,\dots,n\}}(\mathcal{C})\hookrightarrow\mathcal{C}$ 是单态射（见命题 2.10）；这正是第二小节 2.2 的内容。解决这一问题的一种方法是证明具有伴随的（∞,n）-范畴的余极限也具有伴随（见命题 2.8）；这正是第一小节 2.1 的内容。这一策略的优点在于，它促使我们发展工具，以判定一般而言何时（∞,n）-范畴的余极限具有伴随。这对于将全可伴随态射的定义与更经典的定义联系起来十分重要：具有伴随，并且（余）单位具有伴随，（余）单位具有伴随，依此类推。这是推论 2.15 的内容，也是小节 2.3 的主要结果。最后，我们证明自由／步行完全伴随的分类空间是可缩的；这属于小节 2.4 的内容，并将用于我们的第二个主要结果——定理 4.5。

在进入本节内容之前，我们先给出伴随态射的定义，以及 Riehl 和 Verity 的著名定理 [RV16，定理 4.4。11]

定义 2.1（伴随）。设 $n>k\geq 1$ 和 $\mathcal{C}\colon\mathbf{Cat}_{(\infty,n)}$。若 $l\colon a_{k-1}\to b_{k-1}\colon\dots\colon a_0\to b_0\colon\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{H}o_2(\mathcal{C}(a_0,b_0)(a_1,b_1)\dots(a_{k-2},b_{k-2}))$ 中的等价类是左伴随，我们就称它为左伴随。

构造 2.1（自由/行走伴随）。回想一下，Schanuel 和 Street [SS86]以组合方式定义了包含一个伴随 $L\colon\ +\frown-\colon R$ 的自由 $(2,2)$- 范畴 $\mathbf{Adj}$。此范畴后来由 Riehl 和 Verity [RV16], 在高阶范畴的背景下进行了深入研究。

本文的结果在很大程度上依赖于下面这个强有力的定理。

定理 2.1（伴随的同伦唯一性 [RV16，定理 4.4.11]）

令 $\mathcal{C}\colon\ \mathbf{Cat}_{(\infty,2)}$。由 $L,R\colon\ c_k\to\mathbf{Adj}$ 的前复合给出单态射

$$[\mathbf{Adj},\mathcal{C}]\underset{R^*}{\overset{L^*}{\rightrightarrows}}[c_1,\mathcal{C}]$$

它选取左（分别为右）伴随态射的连通分支。

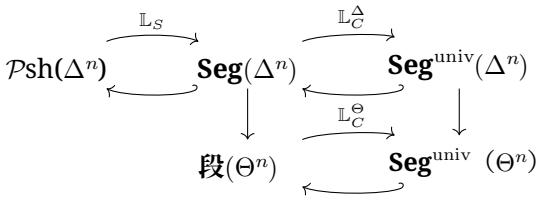
2.1 具有伴随的（∞， n）-范畴的余极限具有伴随

注意，在（∞， n）-范畴的余极限中，一个 k-态射应当表示为图表中各范畴内 k-态射的粘贴。此外，具有伴随的 k-态射的粘贴也应当具有伴随。在本小节中，我们将这一设想形式化，并在命题 2.8 中证明具有伴随的（∞， n）-范畴的余极限具有伴随。为此，我们使用以下等价定义来描述（∞， n）-范畴：

- Rezk 的完备 Segal Θ_n-空间 [Rez10], 受 Joyal 未发表的想法启发 [Joy97],
- Barwick 的 n重完备 Segal 空间 [Bar05], 受 Rezk 的完备 Segal 空间启发（用于 $n=1$）[Rez01],

在 [BSP20], 中，Barwick 和 Schommer-Pries 证明了这两个定义是等价的。在 [Hau17b],中，Haugseng 进一步证明，这两种理论在单价完备化之前是一致的。结合这两个结果，我们得到如下图表，其中左（分别为右）伴随与垂直方向的等价相交换，并且

最后一列等价于 $\mathbf{Cat}_{(\infty,n)}$。



(2.1)

请注意， Δ^n-Segal 化 $\mathbb{L}_S^{\Delta}$ 的显式公式由 Barkan 和 Steinebrunner 根据 Dugger 和 Spivak [DS11]发展的项链理论，在 [BS24，定理 D] 中建立。Ayala 和 Francis 也独立地为 $n=1$ [AF24，第 3]节建立了另一个公式。 Θ^n-单价完备化 $\mathbb{L}_C^{\Theta}$ 的显式公式由 [AF18，命题 2.4]建立，推广了 Rezk 的原始公式 [Rez01]。利用这些公式以及左伴随保持余极限这一事实，我们可以明确地了解范畴余极限中的 k-胞腔是如何由图表中各范畴的 k-胞腔构成的。

构造 2.2 （悬挂）. 回忆一下，我们有一个函子 $\sigma\colon \mathcal{P}\mathrm{sh}(\Delta^n) \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\Delta^{n+1})$，定义如下 ：

$$\sigma X_{a_1,\dots,a_{n+1}} = \{\bullet_-\} \sqcup \coprod_{i=1}^{a_1} X_{a_2,\dots,a_{n+1}} \sqcup \{\bullet_+\}$$

其中映射以显然的方式定义。注意，若 X 是约化的／Segal 的（沿 i^{th} 方向）／单价的，则 σX 是约化的／Segal 的（沿（$i+1$）th 方向）／单价的。我们可以迭代这一构造，得到

$$\sigma^k X_{a_1,\dots,a_{n+k}} = (\partial c_k)_{a_1,\dots,a_{k-1},0,\dots,0} \bigsqcup \left(X_{a_{k+1},\dots,a_{n+k}} \times \prod_{i=1}^{k} [a_i] \right)$$

注意 $\sigma^k c_l = c_{l+k}$。我们还有一个伴随

$$\mathbf{Cat}_{(\infty,n)} \underset{\sigma^k}{\overset{\hom}{\underset{\longrightarrow}{\longleftarrow}}} \mathbf{Cat}_{(\infty,n+k)} \quad \top \ \partial c_k \backslash$$

其中对于 $a_{k-1}, b_{k-1}\colon \dots\colon a_0 \to b_0\colon \mathcal{C}$，我们将相应的 $\hom(\partial c_k \to \mathcal{C}) = \mathcal{C}(a_0,b_0)(a_1,b_1)\dots(a_{k-2},b_{k-2}$).

记 $\mathbf{Adj}_k = \sigma^{k-1}\mathbf{Adj}$ 为包含一个伴随 k-态射的自由 $(\infty, k+1)$-范畴。由定理 2.1 可立即得到一个推论。

推论 2.2（（高阶）伴随的同伦唯一性 [RV16, 定理 4.4.11]）

Let $1 \le k < n$ 和 $\mathcal{C}\colon \mathbf{Cat}_{(\infty,n)}$。通过 $L, R\colon c_k \to \mathbf{Adj}_k$ 进行前复合，得到单态射 s

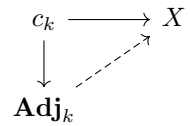
$$[\mathbf{Adj}_k, \mathcal{C}] \underset{R^*}{\overset{L^*}{\rightleftarrows}} [c_k, \mathcal{C}]$$

选取左（分别为右）伴随 k-态射的连通分支。

证明： σ^{k-1} 是一个左伴随与来自切片的遗忘函子复合而成，因此它保可缩余极限，进而保满态射。此外，伴随 k-态射的概念是伴随 1-态射概念的悬挂。 ■

为表述接下来的几个引理，我们现在将“具有伴随”的概念推广到 n-重单纯形空间。请注意，上述同伦唯一性结果不适用于一般的 n-重单纯形空间，只适用于 Segal 和单值/完备的情形。换言之，对于$k < n$， $c_k \to \mathbf{Adj}_k$ 在 $\mathcal{P}\mathrm{sh}(\Delta^n)$ 或 $\mathbf{Seg}(\Delta^n)$ 中不是满态射。

定义 2.2 （具有伴随的 n 重单纯空间）。 设 $1 \le k < n$。令 $X \in \mathcal{P}\mathrm{sh}(\Delta^n)$ 为一个约化的 n 重单纯空间。我们称 X 对所有 k-胞腔都有右伴随（分别为左伴随），若对所有 $c_k \to X$，都存在一个（不一定唯一的）提升



其中向下函子为 L （分别为 R）。

接下来的三个结果将说明 Segal 化与具有伴随之间的相互作用。下面的第一个引理及其直接推论，是引理 2.5 中归纳论证的关键技术工具。回顾 [BS24，定理 D] 指出，对于约化的 X，Segal 化函子可计算为 $\mathbb{L}_S^{\Delta} = \mathbb{L}_{S,n}^{\Delta} \circ \ldots \circ \mathbb{L}_{S,1}^{\Delta}$。

引理 2.3

Let $1 \leq i$ and X be a n-fold Segal space. Then $\mathbb{L}_{S,i}^{\Delta}\left(\sigma^i X \bigsqcup_{c_{i-1}} \sigma^i X\right)$ is a $(n+i+1)$-fold Segal space.

证明： 只需证明 $i = 1$ 的情形，因为容易看出 Segal 化与悬挂可交换。根据构造 2.2，我们有

$$\left(\sigma X \bigsqcup_{c_0} \sigma X\right)_{a_1,\ldots,a_{n+1}} = \{\bullet_0\} \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{a_1} X_{a_2,\ldots,a_{n+1}} \sqcup \{\bullet_1\} \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{a_1} X_{a_2,\ldots,a_{n+1}} \sqcup \{\bullet_2\}$$

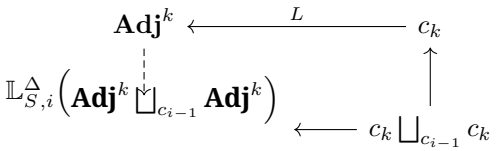
通过观察并使用项链公式 [BS24，定理 A],，可得

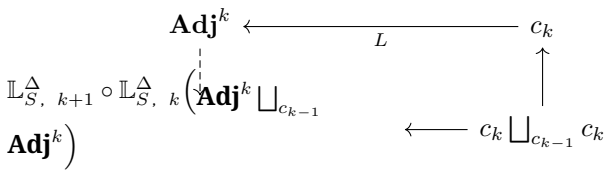
$$\left(\mathbb{L}_{S,i}^{\Delta}\left(\sigma X \bigsqcup_{c_0} \sigma X\right)\right)_{a_1,\ldots,a_n} = \{\bullet_0\} \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{a_1} X_{a_2,\ldots,a_{n+1}} \sqcup \{\bullet_1\} \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{a_1} X_{a_2,\ldots,a_{n+1}} \sqcup \{\bullet_2\} \bigsqcup_{1 \leq i < j \leq a_1} X^2_{a_2,\ldots,a_{n+1}}$$

容易看出这是 Segal 的。 ■

推论 2.4（伴随的复合）

令 $1 \leq i < k < n$。存在提升





证明： 由上面的引理 2.3，$\mathbb{L}_{S,i}^{\Delta}\left(\mathbf{Adj}^k \bigsqcup_{c_{i-1}} \mathbf{Adj}^k\right)$ 是 Segal 的。注意到 $\mathbb{L}_{S,k+1}^{\Delta} \circ \mathbb{L}_{S,k}^{\Delta}\left(\mathbf{Adj}^k \bigsqcup_{c_{k-1}} \mathbf{Adj}^k\right)$ 也由构造 2.2 自动成为 Segal 的。这些 n 重单纯集合中仅有的等价是恒等态射，因此它们也是完备的。由推论 2.2，只需在经典的（严格）(n, n)-范畴论中证明，k-伴随的 i^{th}-复合是一个伴随。这是普通范畴论中的标准结果。

■

利用上述两个结果，我们现在可以证明下面这个关键技术引理，以处理约化的 n-重单纯空间的 Segal 化中的伴随。

引理 2.5（Segal 化保伴随）

设 X 是一个约化的 n-重单纯空间，其所有 k-胞腔都有右伴随（分别地，左伴随）。那么，其 *Segal* 化 $\mathbb{L}_S^{\Delta}(X)$ 的所有 k-胞腔都有右伴随（分别地，左伴随）。

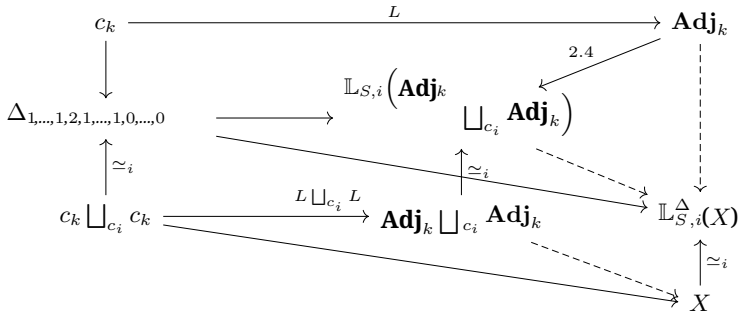
证明： 利用 $\mathbb{L}_S^{\Delta} = \mathbb{L}_{S,n}^{\Delta} \circ \ldots \circ \mathbb{L}_{S,1}^{\Delta}$ 对约化情形的结果，并利用 [BS24，引理 2.15.a]（该引理保证 X 在这些步骤中保持约化），可以看出只需分别证明以下情形：对于 $\mathbb{L}_{S,i}^{\Delta}$ 且满足 $1 \leq i \leq k-1$ 的情形，以及对于 $\mathbb{L}_{S,k+1}^{\Delta} \circ \mathbb{L}_{S,k}^{\Delta}$ 的情形。

• **情形 $i < k$：** 固定 $c_k = \Delta_{1,\ldots,1,0,\ldots,0} \to \mathbb{L}_{S,i}^{\Delta}(X)$。由项链公式 [BS24，定理 A] 以及约化性可知，我们可以找到 $m \geq 1$ 和一个图表

$$\begin{array}{ccccc} c_k & \longrightarrow & \Delta_{1,\ldots,1,m,1,\ldots,1,0,\ldots,0} & \longrightarrow & \mathbb{L}_{S,i}^{\Delta}(X) \\ & & \uparrow \simeq_i & & \uparrow \\ & & c_k \bigsqcup_{c_{i-1}} \cdots \bigsqcup_{c_{i-1}} c_k & \longrightarrow & X \end{array}$$

其中由 $\simeq_i$ 标记的箭头是满足 i^{th}-坐标 Segal 条件的 Segal 等价。不失一般性，只需考虑情形 $m = 2$。利用 $\mathbb{L}_S$ 的泛性质i 并利用

推论 2.4，我们得到一个图表



我们要证明顶部五边形交换。由于图表中的其他每个多胞体都交换，因此得到了所需的提升。

• **情形** $i = k$**：** 固定 $c_k = \Delta_{1,\dots,1,0,\dots,0} \to \mathbb{L}^{\Delta}_{S,k+1} \circ \mathbb{L}^{\Delta}_{S,k}(X)$。由于 $\mathbb{L}^{\Delta}_{S,k+1}$ 不会影响 k-态射的空间，因此我们可以将此映射分解为经过 $c_k = \Delta_{1,\dots,1,0,\dots,0} \to \mathbb{L}^{\Delta}_{S,k}(X)$。随后我们重复相同的论证，保持第一个图表不变，并在第二个图表中将 $\mathbb{L}^{\Delta}_{S,i}$ 处处替换为 $\mathbb{L}^{\Delta}_{S,k+1} \circ \mathbb{L}^{\Delta}_{S,k}$。

■

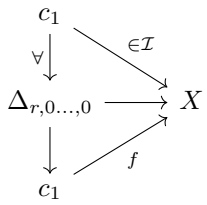
有时，在命题 2.14 这样的情形中，需要证明约化的n-重单纯空间 X 的 Segal 化具有伴随，即便严格来说，根据定义 2.2， X 本身并不具有伴随。事实上，如果 X 的任意 k-态射都可以表示为若干具有伴随的 k-态射的复合（或"粘贴"），那么 X 的 Segal 化对所有 k-态射都具有伴随。出于技术原因，要对一般的 k 证明这一点并不实际，因为"复合"的概念可能会变得相当复杂，而 n-重单纯空间这一概念并不能充分体现此概念的稳定性：复合的复合不容易看作一个复合。就本文而言，只需处理 $k = 1$，这要简单得多。

引理 2.6（Segal 化中的部分伴随）

Let X 是一个约化的 n 重单纯空间。令 $\mathcal{I} \subset \pi_0 X_{1,0,\dots,0}$ 为满足条件的最小子集 t:

• 若 $f\colon c_1 \to X$ 有右（分别为左）伴随（定义见定义 *2.2*）， f 则 $\pi_0 X_{1,0,\dots,0}$ 属于 $\mathcal{I}$,

• 若 $f\colon c_1 \to X$ 可写成 $\mathcal{I}$ 中态射的复合，则 f 属于 $\mathcal{I}$：换言之，若我们有保持端点的 $\Delta_{r,0\dots,0} \twoheadrightarrow c_1$，并且对所有连续的包含 $c_1 \hookrightarrow \Delta_{r,0\dots,0}$，其复合都属于 $\mathcal{I}$，那么 f 属于 $\mathcal{I}$。



假设 $\mathcal{I} = \pi_0 X_{1,0,\dots,0}$ 是整个集合。那么 $\mathbb{L}^{\Delta}_S(X)$ 对所有 1-胞腔都有右（分别为左）伴随。

证明： 证明与上文证明的第二部分几乎完全相同。只需观察同一个图表即可得出， $\mathcal{I}$ 中的任意 1-胞腔在 Segal 化中都有一个伴随。 ■

回想一下，我们在此的目标是证明，具有伴随的 (∞, n)-范畴的余极限也具有伴随。如本节开头所述，这需要证明其与 Segal 化（如上面的结果所示）以及完备化的相容性，后者将在下文证明。

引理 2.7（完备化保伴随）

设 X 是一个 n-重 *Segal* 空间。设 $c_k \to \mathbb{L}_C X$ 是 X 的完备化中的一个 k-胞腔。存在一个 k-胞腔 $c_k \to X$，使其分解 $c_k \to \mathbb{L}_C X$。

证明： 注意，根据（2.1），可以证明此结果适用于 Θ^n-空间，而非 n-重 Segal 空间。由 [AF18，命题 2.4]，我们得到单值完备化的显式公式：

$$[c_k, \mathbb{L}_C X] = \varinjlim_{\Theta_n} [c_k \times E(-), X]$$

其中 $E\colon \Theta_n \to \mathcal{P}\mathrm{sh}(\Theta_n)$ 将 $T \in \Theta_n$ 送至由 T 生成的自由严格 n-群胚（更多细节见 [AF18，定义 2.1]）。特别地，对于任意 $c_k \to \mathbb{L}_C X$，我们有一个分解

$$\begin{array}{ccccc} & & c_k & \longrightarrow & \mathbb{L}_C X \\ & \nearrow & \simeq_C \uparrow & & \uparrow \simeq_C \\ c_k \times E(\bullet) & \xrightarrow{\simeq_C} & c_k \times E(T) & \longrightarrow & X \end{array}$$

■

现在我们终于可以证明本小节的主要结果：

命题 2.8（余极限具有伴随）

设 $F\colon\ I \to \mathbf{Cat}_{(\infty,n)}$ 是一个由（∞，n）-范畴构成的图表，这些范畴对所有k-态射都存在右（分别为左）伴随。那么余极限$\varinjlim F$也满足这一性质。

证明： 根据（2.1），可以将余极限计算为 $\mathbb{L}_C \circ \mathbb{L}_S^{\Delta}\left(\text{余极限}\varinjlim F\right)$，其中余极限是在 $\mathcal{P}\mathrm{sh}(\Delta^n)$ 中计算的。根据定义，对于所有 k-态射都存在右（分别为左）伴随的单纯形空间构成的集合，在 $\mathcal{P}\mathrm{sh}(\Delta^n)$ 中对余极限封闭。根据引理 2.5，$\mathbb{L}_S^{\Delta}\left(\text{余极限}\varinjlim F\right)$ 对所有 k-态射都存在右（分别为左）伴随。固定一个 k-态射 $c_k \to \mathbb{L}_C \circ \mathbb{L}_S^{\Delta}\left(\text{余极限}\varinjlim F\right)$。根据引理 2.7，我们有一个经过 $c_k \to \mathbb{L}_S^{\Delta}\left(\text{余极限}\varinjlim F\right)$ 的分解，而后者存在伴随。

■

2.2 自由添加伴随与具有伴随的子范畴

利用上一小节的结果，我们现在来确立一些关于 $(\infty,\ n)$-具有伴随的范畴的基本“常识性”结果，其定义如下。本节最重要的结果是命题 2.10。

定义 2.3 (具有伴随的范畴)。设 $S \subset \{1,\dots,n\}$ 和 $\mathcal{A}\colon \mathbf{Cat}_{(\infty,n+1)}$。若对于所有 $k \in S$ 和所有 $c_k \to \mathcal{A}$，都有提升，则称 $\mathcal{A}$ 具有S-伴随

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{Adj}_k \\ & \nearrow & \uparrow L \\ c_k & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & \searrow & \downarrow R \\ & & \mathbf{Adj}_k \end{array}$$

Deno te by $\mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}{}_{(\infty,\ n+1)} \hookrightarrow \mathbf{Cat}_{(\infty,n+1)}$ 具有 S-伴随的 $(\infty,\ n+1)$-范畴的全子范畴 ts.

注意，根据推论 2.2，如果这些提升存在，则它们是唯一的。在开始证明命题 2.10 之前，我们先来看几个小结果。注意，根据推论 2.2，我们得到：

推论 2.9

Let $k \geq 0$. One can write $\mathbf{Adj}_k$ as a finite colimit diagram of the c_i's.

证明： L的存在性、R、η、ϵ 以及三角恒等式的交换性，可以很容易地编码为某个有限图表。由推论 2.2 可知，所得到的 $\mathbf{Adj}_k$ 上的典范余锥是余极限。 ■

利用上述结 果以及上一小节的主要结果（命题 2.8），我们可以证明 t he 存在 f 的性 具有伴随的自由范畴和全子范畴。

命题 2.10（具有伴随的自由子范畴）

设 $n \geq 0$ 和 $S \subset \{1,\dots,n\}$。包含 $\mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}{}_{(\infty,n+1)} \hookrightarrow \mathbf{Cat}_{(\infty,n+1)}$ 构成局部有限可呈范畴之间的一个双反射：

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\mathrm{Free}^S}{\curvearrowleft} & \\ \text{范畴}^{S\text{-adj}}{}_{(\infty,\ n+1)} & \hookrightarrow & \mathbf{Cat}_{(\infty,n+1)} \\ & \underset{\mathrm{Sub}^S}{\curvearrowright} & \end{array}$$

此外，上伴随 $\mathcal{C} \twoheadrightarrow$ 自由$^S(\mathcal{C})$ 的单位是满态射，而下伴随 子对象$^S(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}$ 的余单位是单态射。

证明： $\mathbf{Cat}_{(\infty,n+1)}$ 具有小余极限，且是局部小的。注意，$\mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}{}_{(\infty,n+1)}$ 是 $\mathcal{W}$-弱局部对象的范畴 [Lur18, Def. 04LH]，对应于小集合 $\mathcal{W} = \{c_k \xrightarrow{L} \mathbf{Adj}_k \mid k \in S\} \cup \{c_k \xrightarrow{R} \mathbf{Adj}_k \mid k \in S\}$。这些映射的定义域 $\mathcal{W}$ 全都是 c_k，因此是紧致的。这些映射的陪域全都是 $\mathbf{Adj}_k$，因此由推论 2.9 可知它们是紧致的。根据小对象论证 [Lur18, Cor. 04MD],，包含 $\mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}{}_{(\infty,n+1)} \hookrightarrow \mathbf{Cat}_{(\infty,n+1)}$ 具有左伴随 Free^S。

注意到，这意味着 $\mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}{}_{(\infty,\ n+1)}$ 具有所有余极限，并且这些余极限被 Free^S 保持。明确地说，这些余极限的计算方式是：通过包含将图表置于 $\mathbf{Cat}_{(\infty,n+1)}$ 中，在那里取其余极限，然后应用 Free^S。根据命题 2.8，最后一步并非必要：在 $\mathbf{Cat}_{(\infty,n+1)}$ 中取得的余极限本身已经具有 S-伴随。因此，该包含保持所有小余极限，因而是可达的。这表明 $\mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}{}_{(\infty,\ n+1)}$ 是一个局部有限呈示范畴。根据 Lur18，定理 06Q5]，中的伴随函子定理 [，包含 $\mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}{}_{(\infty,\ n+1)} \hookrightarrow \mathbf{Cat}_{(\infty,n+1)}$ 具有一个右伴随 Sub^S。

由于满态射在推出和超限复合下保持不变，单位 $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathsf{Free}^S(\mathcal{C})$ 按构造是一个满态射。对于 $\mathcal{A}\ \mathcal{B} \in {}_{(\infty,n+1)}$ $[\mathcal{A},\ \ \mathcal{B}\ ] \simeq [\ \ \mathcal{A}\ ,\ \ \mathcal{B}\ ] \simeq$，$\mathbf{Cat}$，我们于是有 $\mathsf{Sub}^S(\,)\,\mathsf{Free}^S(\,)$ $[{}^{S}\ \mathcal{A}\ \ \mathcal{B}] \hookrightarrow [\mathcal{A},\mathcal{B}]$ ${}_S\,\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}$ $\mathsf{Sub}^S(\,)\,\mathsf{Free}\,(\,)$，这表明余单位 $\mathsf{Sub}\,(\,)$ 是一个单态射。 ■

作为命题 2.10 的推论，我们现在可以定义态射具有全伴随这一性质。

定义 2.4（全伴随态射）。设 $n \geq k \geq 0$, $S \subset \{k+1,\ldots,n\}$, $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}_{(\infty,n+1)}$ 和 $f\colon c_k \to \mathcal{C}$ 一个 k-态射。若 f 可分解为 $c_k \to \mathsf{Sub}^S(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}$，则称 f 为全-S-伴随。若 $S = \{k+1,\ldots,n\}$，则我们简称 f 为全伴随或完全可对偶。

我们可以很容易地以此为基础，得到上述结果的相对版本。

推论 2.11

设 $S \subset K \subset \{1,\ldots,n\}$。包含 $\mathbf{Cat}^{K\text{-adj}}{}_{(\infty,\ n+1)} \hookrightarrow \mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}{}_{(\infty,\ n+1)}$ 构成局部有限可呈范畴之间的一个双反射：

$$\mathbf{Cat}^{K\text{-adj}}_{(\infty,n+1)} \underset{\mathsf{Sub}^{S\to K}}{\overset{\mathsf{Free}^{S\to K}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}_{(\infty,n+1)}$$

此外，上伴随 $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathsf{Free}^{S\to K}(\mathcal{C})$ 的单位是满态射，而下伴随 $\mathsf{Sub}^{S\to K}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}$ 的余单位是单态射。

证明： 论证与命题 2.10 的完全类似。我们可以将 $\mathbf{Cat}^{K\text{-adj}}{}_{(\infty,n+1)} \hookrightarrow \mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}{}_{(\infty,n+1)}$识别为小集合 $\mathcal{W} = \{\mathsf{Free}^S(c_k \xrightarrow{L} \mathbf{Adj}_k) \mid k \in K\} \cup \{\mathsf{Free}^S(c_k \xrightarrow{R} \mathbf{Adj}_k) \mid k \in K\}$对应的 $\mathcal{W}$-弱局部对象的全子范畴。函子 Free^S 保留紧对象（其右伴随保留滤过余极限）和满态射（因为它保留推出），因此我们可以应用与上文相同的论证。 ■

现在我们聚焦于几个对本文主要定理的归纳表述至关重要的结果。

引理 2.12（Free保留（某些）伴随）

令 $S \subset \{2,\ldots,n\}$ 和 $m < \min(S)$。则 Free^S 将 $\mathbf{Cat}^{\{m\}\text{-adj}}{}_{(\infty,n+1)}$ 映射到 $\mathbf{Cat}^{S\cup\{m\}\text{-adj}}{}_{(\infty,n+1)}$。

证明： 令 $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}^{\{m\}\text{-adj}}{}_{(\infty,n+1)}$。根据命题 2.10，回想反射 $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathsf{Free}^S(\mathcal{C})$ 是由 κ-多个 $\{c_k \xrightarrow{L} \mathbf{Adj}_k \mid k \in S\} \cup \{c_k \xrightarrow{R} \mathbf{Adj}_k \mid k \in S\}$ 中映射的推出所构成的超限复合，其中 κ 是某个序数。我们通过超限归纳证明，任意此类复合的陪域都落在 $\mathbf{Cat}^{\{m\}\text{-adj}}{}_{(\infty,n+1)}$ 中。

- **初始步骤：** 根据定义，$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \in \mathbf{Cat}^{\{m\}\text{-adj}}{}_{(\infty,n+1)}$。
- **后继步骤：** 令 $\alpha < \kappa$。存在一个 $k \in S$ 以及一个推出图

$$\begin{array}{ccc} c_k & \longrightarrow & \mathbf{Adj}_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_\alpha & \dashrightarrow & \mathcal{C}_{\alpha+1} \end{array}$$

由引理 2.7，只需证明 m-态射 $c_m \to \mathbb{L}^{\wedge}_S(\mathcal{C}_\alpha \sqcup_{c_k} \mathbf{Adj}_k)$ 都有伴随。显然，对于 $a_1,\ldots a_m \geq 0$，有 $(c_k)_{a_1,\ldots,a_m,0,\ldots,0} \simeq (\mathbf{Adj}_k)_{a_1,\ldots,a_m,0,\ldots,0}$。因此，我们有一个等价

$(\mathcal{C}_\alpha)_{a_1,\dots,a_m,0,\dots,0} \simeq (\mathcal{C}_\alpha \sqcup_{c_k} \mathrm{Adj}_k)_{a_1,\dots,a_m,0,\dots,0}$。因此，推出在前 m 个方向上已经是 Segal 的，而在迭代应用项链公式 [BS24, Thm. D], 时，前 m 步不起作用。最后几步也不会影响 m-态射的空间，因此我们有 $(\mathcal{C}_\alpha)_{a_1,\dots,a_m,0,\dots,0} \simeq (\mathbb{L}_S^{\Delta}(\mathcal{C}_\alpha \sqcup_{c_k} \mathrm{Adj}_k))_{a_1,\dots,a_m,0,\dots,0}$。根据假设， $\mathcal{C}_\alpha$ 中的每个 m-态射都有伴随，由此完成后继步骤。

- **极限步骤：** 设 $\lambda \le \kappa$ 是一个极限序数。我们可以写作 $\mathcal{C}_\lambda = \operatorname{colim}_{\alpha<\lambda} \mathcal{C}_\alpha$，这是一个由具有 m-伴随的范畴组成的余极限。由命题 2.8，我们有 $\mathcal{C}_\lambda \in \mathbf{Cat}^{\{m\}\text{-adj}}_{(\infty,\, n+1)}$。

根据超限归纳原理，我们得到 $\mathsf{Free}^S(\mathcal{C}) \in \mathbf{Cat}^{\{m\}\text{-adj}}_{(\infty,\, n+1)} \cap \mathbf{Cat}^{S\text{-adj}}_{(\infty,\, n+1)} = \mathbf{Cat}^{S\cup\{m\}\text{-adj}}_{(\infty,\, n+1)}$。 ■

推论 2.13（自由/子构造的复合）

设 $k < n$ 和 $S \subset \{k+1, \dots, n\}$。那么 自由$^{\{k\}\cup S} =$ 自由$^S \circ$ 自由$^{\{k\}}$。

证明： 设 $\mathcal{A} \in \mathbf{Cat}^{(\infty,n+1)}$。由引理 2.12，我们知道 $\mathsf{Free}^S \circ \mathsf{Free}^{\{k\}}(\mathcal{A})$ 具有 $\{k\}\cup S$-伴随。因此，只需验证它满足正确的泛性质。对于 $\mathcal{B} \in \mathbf{Cat}^{\{k\}\cup S\text{-adj}}_{(\infty,\, n+1)}$，我们有

$$[\mathsf{Free}^S \circ \mathsf{Free}^{\{k\}}(\mathcal{A}), \mathcal{B}] \simeq [\mathsf{Free}^{\{k\}}(\mathcal{A}), \mathcal{B}] \simeq [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$$

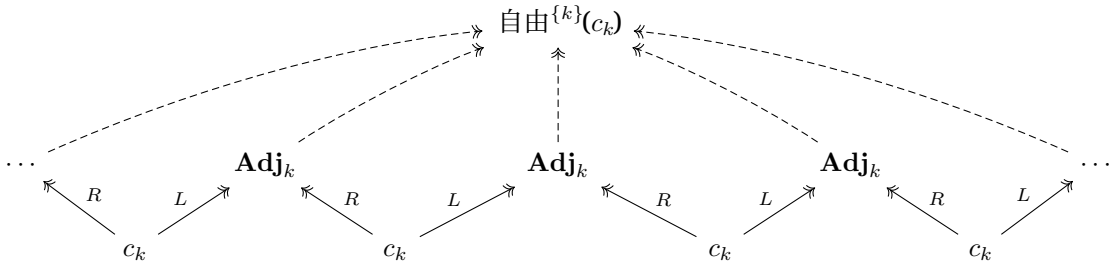
如所欲证。 ■

2.3 提升一次完全伴随态射

在本小节中，我们完成本文主要定理（定理 4.2）证明核心处归纳论证所需的范畴论预备知识。下述结果将“构造一个全{1}伴随等价于找到一个伴随序列”这一想法形式化

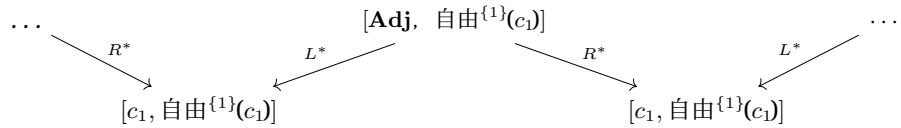
命题 2.14（自由完全伴随 ）

记 $\mathbb{Z}^{\to\leftarrow}$ 为以整数为对象、且对所有 n: $\mathbb{Z}$都有态射 $2n \to 2n \pm 1$ 的偏序集。我们有一个余极限图



我们用 $f^{\vee n}\colon\ c_k \twoheadrightarrow \mathsf{Free}^{\{k\}}(c_k)$ 表示第 n 个余锥投影（从左至右，即 $\vee$对应于取右伴随），它们都是满态射。

证明： 只需证明 $k = 1$ 的情形，因为根据构造 2.2，悬挂是一个左伴随与切片上的遗忘函子的复合，因此与可缩余极限交换。首先，我们构造余锥图。根据定义，我们知道 $\mathsf{Free}^{\{1\}}(c_1)$ 是完全-{1}-伴随的，并且接收一个泛函子 $c_1 \to \mathsf{Free}^{\{1\}}(c_1)$。余锥空间是下图的极限：



根据定理 2.1，这是一列无限的弱同伦等价之字形。选取零次空间中与泛函子 $c_1 \to \mathsf{Free}^{\{1\}}(c_1)$ 对应的点，我们便得到一个典范余锥图。

其次，我们构造一个函子 $\mathsf{Free}^{\{1\}}(c_1) \to \operatorname{colim}\longrightarrow(\mathbb{Z}^{\to\leftarrow} \to \mathbf{Cat}^{(\infty,2)})$。根据 $\mathsf{Free}^{\{1\}}(c_1)$ 的泛性质，只需证明 $\operatorname{colim}\longrightarrow(\mathbb{Z}^{\to\leftarrow} \to \mathbf{Cat}^{(\infty,2)})$ 具有 $\{1\}$- 伴随，并选取一个 1- 态射 $c_1 \to \operatorname{colim}\longrightarrow(\mathbb{Z}^{\to\leftarrow} \to \mathbf{Cat}^{(\infty,2)})$。第一部分由引理 2.6 和引理 2.7 得出，因为来自 $\mathbf{Adj}$ 的任意态射都可表示为 L 和 R 的复合，而它们都有伴随。第二部分则可通过选取 1-胞腔 $c_1 \to \operatorname{colim}\longrightarrow(\mathbb{Z}^{\to\leftarrow} \to \mathbf{Cat}^{(\infty,2)})$ 得出，该 1-胞腔由 c_1 的零次副本上的泛余锥投影给出。

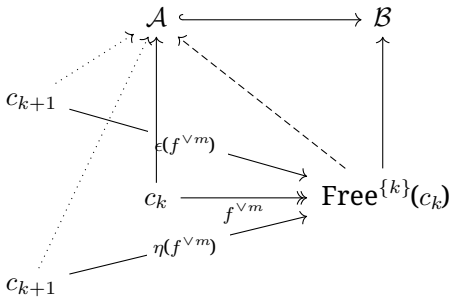
通过考察泛性质，很容易看出这两个函子 $\mathsf{Free}^{\{1\}}(c_1) \to \operatorname{colim}\longrightarrow(\mathbb{Z}^{\to\leftarrow} \to \mathbf{范畴}^{(\infty,2)})$ 和 $\operatorname{colim}\longrightarrow(\mathbb{Z}^{\to\leftarrow} \to \mathbf{范畴}^{(\infty,2)}) \to \mathsf{Free}^{\{1\}}(c_1)$ 互为逆函子。 ■

注2.3。这一结果可以推广，用余极限构造任意的 $\mathsf{Free}^{\{k,\dots,n\}}(c_k)$。然而，这需要对命题 2.8 作更谨慎的表述。甚至可以证明，对于 $k < n$，余极限图式可以选为有限的；为此，需要仔细考察伴随数据的冗余这一概念（此类结果的一个例子见引理 4.1）。

我们得到如下直接推论，它将用于本文主要定理（定理 4.2）的证明。

推论 2.15（提升一次完全可对偶化态射）

设 $1 \leq k \leq n$。假设我们有一个单态射 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} : \mathbf{Cat}^{(\infty,n+1)}$，以及一个映射 $\mathsf{Free}^{\{k\}}(c_k) \to \mathcal{B}$，使得与 $f^{\vee m} : c_k \to \mathsf{Free}^{\{k\}}(c_k)$ 的所有前复合都提升到 $\mathcal{A}$，如下方图表所示。那么，存在虚线提升当且仅当对所有 m都存在点线提升：



换言之：如果一个全-$\{k\}$-可对偶态射的所有单位与余单位都能提升，那么该态射也能提升。

2.4 可逆性

在最后这个小节中，我们计算自由/行走伴随的分类空间。这些空间的可缩性恰好对应于证明任意可逆态射都是完全可伴随的，这也是定理 4.5 陈述的一部分。

引理 2.16（Adj 的分类空间）

通过自由地将 $\mathbf{Adj}$ 中的 η 和 ϵ变为可逆态射所得到的局部化是可缩范畴。

证明： 在 $\mathbf{Cat}^{(\infty,n)}$ 中，终端函子 $c_1 \to \{\bullet\}$ 可以被视为一种局部化或截断。事实上，利用完备性，对该映射进行前复合会诱导出包含 $[c_1, \mathcal{C}]_{\simeq} \hookrightarrow [c_1, \mathcal{C}]$：它将所有可逆 1-态射组成的连通分支包含进来（例如，参见 [Rez01，第 6.2 节和命题 6.4]）。我们有一个分解 $c_1 \twoheadrightarrow \mathbf{Adj} \twoheadrightarrow \mathbf{Adj}[\eta^{-1}, \epsilon^{-1}] \to \{\bullet\}$，其中复合是满态射。这意味着 $\mathbf{Adj}[\eta^{-1}, \epsilon^{-1}] \twoheadrightarrow \{\bullet\}$也是满态射，因此，对其应用任意 $[-, \mathcal{C}]$，我们得到

$$[c_1, \mathcal{C}]_{\simeq} \hookrightarrow [\mathbf{Adj}[\eta^{-1}, \epsilon^{-1}], \mathcal{C}] \hookrightarrow [\mathbf{Adj}, \mathcal{C}] \hookrightarrow [c_1, \mathcal{C}]$$

要证明 $\mathbf{Adj}[\eta^{-1}, \epsilon^{-1}] \twoheadrightarrow \{\bullet\}$ 是等价，只需证明：对于任意伴随L：$a \rightleftarrows b$：R：$\mathcal{C}$，若 η和 ϵ可逆，则 L可逆。可逆性是一个可由截断到同伦（1,1）-范畴检测的性质；这在普通范畴论中是经典结果。

■

类似地，我们得到如下结果：

引理 2.17（高阶游走伴随的分类空间）

设 $1 \leq k \leq n$和 $S \subset \{k, \dots, n\}$。函子 $\mathsf{Free}^{S}(c_k) \twoheadrightarrow c_{k-1}$是满态射，并将 c_{k-1}表示为在所有 i-态射处的局部化，其中 $i > k$；这意味着它是局部化$|-|_{>k} : \mathbf{Cat}^{(\infty,n+1)} \to \mathbf{Cat}^{(\infty,k)}$中的反射映射。

证明： 如上所述，复合 $c_k \twoheadrightarrow \mathsf{Free}^{S}(c_k) \to c_{k-1}$是满态射，这就推出了陈述的第一部分。注意，对于 $1 \leq l < k$，我们有 $\mathsf{Free}^{\{l\}}(c_k) = c_k \twoheadrightarrow c_{k-1}$，而结论由完备性得出。根据推论 2.13，不失一般性，可假设 $S = \{k\} \sqcup S'$且 $S' \subset \{k+1, \dots, n\}$。我们对 $|S|$进行向下归纳。

- **基例** $|S| = 1$：截断函子 $|-|_{>k}$是一个左伴随，因此会保留命题 2.14 中的余极限。由于 $|-|_{>k} \circ \sigma^{k-1} \simeq \sigma^{k-1} \circ |-|_{>1}$，并且根据上面的引理 2.16，该图表被映射到终对象图表 $n \in \mathbb{Z}^{\to\leftarrow} \mapsto c_k$。由于 $\mathbb{Z}^{\to\leftarrow}$是可缩的，我们得到 $|\mathsf{Free}^{\{k\}}(c_k)|_{>k} \simeq c_{k-1}$。
- **归纳步骤：** 令 $|S| > 1$。类似于引理 2.16 的论证，我们想要证明包含 $[c_k, \mathcal{C}]_{\simeq} \hookrightarrow [|\mathsf{Free}^{S}(c_k)|_{>k}, \mathcal{C}]$是一个等价。根据推论 2.13，我们有 $[|\mathsf{Free}^{S}(c_k)|_{>k}, \mathcal{C}] \simeq [\mathsf{Free}^{S}(c_k)\ \mathcal{C}_{\leq k}] \simeq [\mathsf{Free}^{S'} \circ \mathsf{Free}^{\{k\}}(c_k)\ \mathcal{C}_{\leq k}] \simeq [\mathsf{Free}^{\{k\}}(c_k), \mathsf{Sub}^{S'}(\mathcal{C}_{\leq k})] \simeq [\mathsf{Free}^{\{k\}}(c_k)\ \mathcal{C}_{\leq k}] \simeq [c_k, \mathcal{C}_{\leq k}]_{\simeq}$由上述基例可得。

■

3 因子化同调中的可对偶性数据

本节的目标是确立我们判据证明中的代数和几何要素。在第 3.1 小节和第 3.2 小节中，我们使用因子化同调 [AFT17b, AFR18a, AFT17a]来构造迭代的“（余）单位的（余）单位的（余）单位的.....”；我们将其称为伴随数据。在第 3.3 小节中，我们证明高阶莫里塔范畴中顶层态射的伴随存在性判据（关于其定义，见 [Lur09a, Sch14, Hau17b, Hau23] ）。最后，在第 3.4 小节中，我们将可对偶性数据中的一些单位与某些高阶霍赫希尔德上同调的泛代数映射相联系。

约定 3.1 （固定 $\mathcal{V}$）。 在本节余下部分中，我们固定 $\mathcal{V} \in \mathbf{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}\left(\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}^{\mathsf{geom}-\mathrm{colim}}\right)$，这是一个具有几何实现和相容张量积的对称幺半 ∞,1-范畴。

3.1 同调交换图

本小节首先确立一个关键的技术工具，用于在不同分层空间之间“转移”其所承载的代数结构，该工具以引理 3.5 的形式陈述。我们先简要概述 Ayala、Francis、Rozenblyum 和 Tanaka 在 [AFT17a、AFR18a、AFT17b] 中发展起来的锥形光滑分层空间的因子化同调形式体系。我们考虑的所有分层空间都是锥形光滑的[AFT17b，第 4.1] 节，并且是有限型的 [AFT17b，定义 8.3.6]，因此本文余下部分将省略这些限定语。我们对 [AFT17b] 的原始记号稍作修改如下：

- Disk 表示带有开嵌入的“圆盘”对称幺半 (1,1)-范畴：基本分层空间的有限不交并，参见 [AFT17b，第 3.2.] 节，其中给出了它们的归纳定义，
- Mfld 表示带有开嵌入的分层空间的对称幺半 (1,1)-范畴，
- $\mathcal{D}$isk 表示带有开嵌入空间的圆盘的对称幺半 (∞,1)-范畴，参见 [AFT17b，第 4.1] 节（原文中记作 $\mathcal{S}$nglr），
- $\mathcal{M}$fld 表示带有开嵌入空间的分层空间的对称幺半 (∞,1)-范畴（原文中记作 $\mathcal{S}$nglr）。

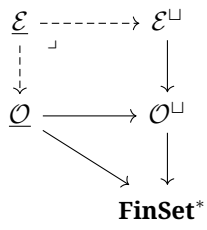
现在我们简要回顾讨论分层空间的因子化同调所需的运算子概念。我们再次稍微修改 [AFT17a] 的原始记号，以适应本文的阐述。

定义 3.2 （标记歌剧）。 一个歌剧 $\mathcal{O} \to \mathbf{FinSet}_*$ 被称为带标记的，如果它被赋予了一族称为预余笛卡尔的余笛卡尔态射，且该族包含所有惰性态射。对于两个带标记的运算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \to \mathbf{FinSet}_*$，代数范畴 $\mathbf{Alg}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \hookrightarrow [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{/\mathbf{FinSet}^*}$是 $\mathbf{FinSet}^*$ 上那些将预余笛卡尔态射映为预余笛卡尔态射的函子所构成的全(∞,1)-子范畴。

注意，通常的歌剧可被视为带标记的运算子，只需仅将惰性态射声明为预余笛卡尔态射；而对称幺半(∞, 1)-范畴可被视为带标记的运算子，只需将所有余笛卡尔态射声明为预余笛卡尔态射。回顾 [Lur17 的子子节 2.4.3] ：给定一个范畴$\mathcal{O}$，我们可以构造一个歌剧 $\mathcal{O}^{\sqcup} \to \mathbf{FinSet}_*$，其在 $\mathbf{n}^+$ 上的对象是 $\mathcal{O}$ 的对象的 n-元组。然后我们可以直接改写 [AFT17a] 中的下述结果。

Lemma 3.1（沿右纤维化拉回标记歌剧，[AFT17a，推论 1.20])

设 $\underline{\mathcal{O}} \to \mathbf{FinSet}_*$ 是一个带标记的运算子，$\mathcal{E} \to \mathcal{O}$ 是一个右纤维化。拉回



将 $\underline{\mathcal{E}}$ 视为标记歌剧，其预余笛卡尔态射是映射到 $\mathcal{O}$ 中预余笛卡尔态射的那些态射。

—

定义 3.3 ([AFT17a，构造 2.4])。利用上面的引理 3.1，对于 X 分层空间，我们定义

- $\underline{\mathsf{Disk}}_{/X}$ 作为由切片右纤维化 $\mathsf{Disk}_{/X} \to \mathsf{Disk}$ 以及 Disk 上的对称幺半结构得到的标记 (1,1)-歌剧，
- $\underline{\mathsf{Mfld}}_{/X}$ 作为由切片右纤维化 $\mathsf{Mfld}_{/X} \to \mathsf{Mfld}$ 以及 Mfld 上的对称幺半结构得到的标记 (1,1)-歌剧，
- $\underline{\mathcal{D}\mathsf{isk}}_{/X}$ 作为由切片右纤维化 $\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X} \to \mathcal{D}\mathsf{isk}$ 以及 $\mathcal{D}$isk 上的对称幺半结构得到的标记 (∞,1)-歌剧，
- $\underline{\mathcal{M}\mathsf{fld}}_{/X}$ 作为由切片右纤维化 $\mathcal{M}\mathsf{fld}_{/X} \to \mathcal{M}\mathsf{fld}$ 以及 $\mathcal{M}$fld 上的对称幺半结构得到的标记 (∞,1)-歌剧，

为简化记号，对于 $\mathcal{O}$ 一个标记歌剧，我们用 $\mathbf{Alg}_X(\mathcal{O})$ 表示 $\mathbf{Alg}^{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X}}(\mathcal{O})$。更明确地说，歌剧 $\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X}$ 如下给出：

- 位于 $\mathbf{n}^+$ 之上的对象是基本块的有限不交并到 X 的嵌入的集合 $(\bigsqcup_{1\le i\le k_j} B_{i,j} \hookrightarrow X)_{1\le j\le n}$，
- 从 $a = (\bigsqcup_{1\le i\le k_j} B_{i,\,j} \hookrightarrow X)_{1\le j\le n}$ 到 $b = (\bigsqcup_{1\le i\le l_j} B'_{i,\,j} \hookrightarrow X)_{1\le j\le m}$、在 ϕ之上的态射空间：$\mathbf{n}^+ \to \mathbf{m}^+$： $\mathbf{FinSet}_*$ 中空间拉回的

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}\mathsf{isk}(\mathcal{B})_{/X}(a,\ b) & \dashrightarrow & \{\bullet\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{1\le j'\le m} \text{嵌入}\big(\bigsqcup_{j\in\phi^{-1}(j')} \bigsqcup_{1\le i\le k_j} B_{i,j},\ \bigsqcup_{1\le i\le l_{j'}} B'_{i,j'}\big) & \longrightarrow & \prod_{j\in\phi^{-1}(\mathbf{m})} \mathrm{Emb}\big(\bigsqcup_{1\le i\le k_j} B_{i,j}, X\big) \end{array}$$

- 若上方的一个态射在左下方空间中的每个映射 $\bigsqcup_{j\in\phi^{-1}(j')} \bigsqcup_{1\le i\le k_j} B_{i,\,j} \hookrightarrow \bigsqcup_{1\le i\le l_{j'}} B'_{i,\,j'}$ 都是同痕等价，则称其为预余笛卡尔。

注意，这些构造关于开嵌入是函子性的 X，这直接源于切片构造本身具有函子性。特别地，我们有一个作用 $\mathbf{Aut}(X) \curvearrowright \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X}$，它由带标记的运算子的等价给出。

利用 [AFT17a, Thm. 2.43] 的等价，可以如下定义同调理论。

定义 3.4 （同调理论 [AFT17a, Def. 2.37]）。对于 X 一个分层空间，同调理论 $\mathcal{H}(\mathcal{M}\mathsf{fld}_{/X}, \mathcal{V})$ 的范畴是如下全子-(∞,1)-范畴

$$\mathcal{H}(\underline{\mathcal{M}\mathsf{fld}}_{/X}, \mathcal{V}) \hookrightarrow \mathbf{Alg}_{\underline{\mathcal{M}\mathsf{fld}}_{/X}}(\mathcal{V})$$

由满足以下等价条件的歌剧态射 $\mathcal{H}$ 组成：

- 对于所有 $Z \in \mathcal{M}\mathsf{fld}_{/X}$，典范态射

$$\varinjlim\big(\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/Z} \to \mathcal{M}\mathsf{fld}_{/X} \to \mathcal{V}\big) \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathcal{H}(Z)$$

是一个等价。

- 对于 X 上的所有 $Z \cong Z_- \cup_{\mathbb{R}\times Z_0} Z_+$ 领圈粘合，典范态射

$$\big|\mathcal{H}(Z_-) \otimes \mathcal{H}(\mathbb{R}\times Z_0)^{\otimes \bullet} \otimes \mathcal{H}(Z_+)\big|_\bullet \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathcal{H}(Z)$$

是一个等价。

类似地，我们将预同调理论 的范畴定义为满-∞，1-子范畴 $H(\mathsf{Mfld}_{/X},\ \mathcal{V}) \hookrightarrow \mathbf{Alg}^{\mathsf{Mfld}_{/X}}(\mathcal{V})$，其对象是满足相应余极限条件的那些代数。

在 [AFT17a]，的原文中，这一定义针对的是具有筛选余极限，且其幺半结构对筛选余极限具有分配性的对称幺半 ($\mathcal{V}$,1)-范畴。只要我们仅考虑有限型 分层空间，将筛选余极限替换为几何实现只是无害的推广；这里的有限型分层空间指通过一系列领圈粘合从基本块得到的分层空间 [AFT17b，定义 8.3.6]，本例正是如此。事实上，它

在 [AFT17a，推论 2.38] 中证明了，对于领圈粘合 $X \cong X_- \cup_{\mathbb{R}\times X_0} X_+$，我们有一个几何实现

$$\left|\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X_-} \times \mathcal{D}\mathsf{isk}^{\bullet}_{/\mathbb{R}\times X_0} \times \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X_+}\right|_{\bullet} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X}$$

因此， $\mathcal{D}$isk/−-索引余极限由几何实现生成，从而 Disk/−-索引余极限也由几何实现生成，因为 Disk $_{/X} \to \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X}$ 是一个局部化 [AFT17a, 命题 2.22] ，因而是终对象。

推论 3.2（Disk-代数是同调理论的系数）

设 X 为一个分层空间。沿包含映射 $\mathsf{Disk}_{/X} \hookrightarrow \mathsf{Mfld}_{/X}$ 和 $\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X} \hookrightarrow \mathcal{M}\mathsf{fld}_{/X}$作左 *Kan* 延拓，我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Alg}_X(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}(\underline{\mathcal{M}\mathsf{fld}}_{/X}, \mathcal{V}) & \hookrightarrow & \mathbf{Alg}_{\underline{\mathcal{M}\mathsf{fld}}_{/X}}(\mathcal{V}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{Alg}_{\underline{\mathsf{Disk}}_{/X}}(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\sim} & H(\underline{\mathsf{Mfld}}_{/X},\ \mathcal{V}) & \hookrightarrow & \mathbf{Alg}_{\underline{\mathsf{Mfld}}_{/X}}(\mathcal{V})
\end{array}$$

证明： 这是 [AFT17a 引理 2.16 的直接推论，且 2.17] 中可以找到有关左 Kan 延拓在带标记的运算子背景下如何运作的详细说明。 ■

因此，我们可以定义一种在同调理论之间进行转换的便捷方式。此定义是对 [AFT17a 第 2.5] 小节中可构造丛行为的一种简要抽象。

定义 3.5 （同调态射）。设 X，Y 为分层空间，并配有一个标记算子态射 $\alpha\colon \mathsf{Mfld}_{/Y} \to \mathsf{Mfld}_{/X}$。若此态射满足以下条件，则称其为同调的

(i) 函子 $\mathsf{Disk}_{/Y} \xrightarrow{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\alpha(-)}} \mathbf{Cat}_{(\infty,1)}$ 将同痕等价映为等价，且

(ii) 以下等价条件成立：

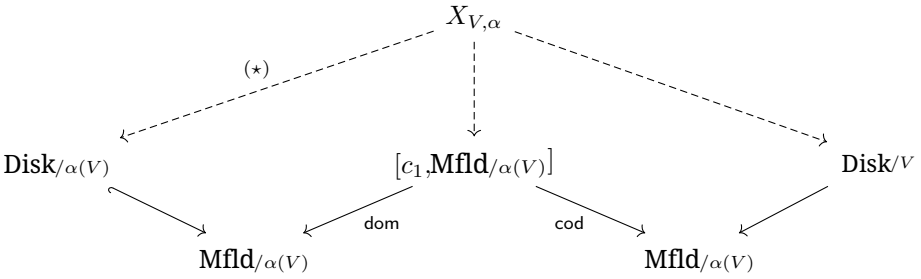
(a) 对所有 $V \in \mathsf{Mfld}_{/Y}$，下面的典范函子是等价

$$\varinjlim\left(\mathsf{Disk}_{/V} \xrightarrow{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\alpha(-)}} \mathbf{Cat}_{(\infty,1)}\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\alpha(V)}$$

(b) 对所有 $V \in \mathsf{Disk}_{/Y}$，下面逗号范畴 (1,1)-范畴中的典范投影 $X_{V,\alpha} \xrightarrow{(\star)} \mathsf{Disk}_{/\alpha(V)}$ 是 $(\infty,1)$-终对象

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{Disk}_{/V} & \xrightarrow{\alpha} & \mathsf{Mfld}_{/\alpha(V)} \\
\uparrow & \swarrow & \uparrow \\
X_{V,\alpha} & \xrightarrow[(\star)]{} & \mathsf{Disk}_{/\alpha(V)}
\end{array}$$

在 [AFT17a 的第 2.5] 小节所采用的记号中，逗号范畴 $X_{V,\alpha}$ 可描述为下图所示图表的极限。



条件等价性的证明： 该证明由 Joyal 的 $(\infty,1)$-范畴版本的 Quillen 定理 A [Lur18, Thm. 02NY] 得出。详细内容见 [AFT17a, Lem. 2.27] 的证明，其陈述与此基本相同。 ■

[AFT17a 的定理 2.25] 的证明经过调整后可应用于我们的语境，并通过使用"泛"代数 $A = \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/-}$ [AFT17a 的推论 2.38]，证明如下结论。

引理 3.3（复合保持同调性质）

同调态射在复合下封闭。

证明： 令 X, Y, Z 为分层空间，且 $\mathsf{Mfld}_{/Z} \xrightarrow{\beta} \mathsf{Mfld}_{/Y} \xrightarrow{\alpha} \mathsf{Mfld}_{/X}$ 为可复合同调态射。令 $W \in \mathsf{Mfld}_{/Z}$。考虑下面的图表。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{Disk}_{/W} & \xrightarrow{\beta} & \mathsf{Mfld}_{/\beta(W)} & & \\
\uparrow & \swarrow & \uparrow & \searrow^{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/-}} & \\
X_{W,\beta} & \xrightarrow[(\star)]{} & \mathsf{Disk}_{/\beta(W)} & \xrightarrow[\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/-}]{} & \mathbf{Cat}_{(\infty,1)}
\end{array}$$

与 [AFT17a，定理 2.25] 的证明中一样，我们注意到右侧方块是一个逗号范畴，而左侧三角形是一个左 Kan 延拓，这意味着外侧三角形也是一个左 Kan 延拓。特别地，我们有

$$\varinjlim\left(\mathsf{Disk}_{/W} \xrightarrow{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\beta(-)}} \mathbf{Cat}_{(\infty,1)}\right) \xleftarrow{\simeq} \varinjlim\left(X_{W,\beta} \to \mathsf{Disk}_{/\beta(W)} \xrightarrow{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/-}} \mathbf{Cat}_{(\infty,1)}\right) \xrightarrow{\simeq} \varinjlim\left(\mathsf{Disk}_{/\beta(W)} \xrightarrow{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/-}} \mathbf{Cat}_{(\infty,1)}\right)$$

这给出了下面的交换图，采用下标记法以简化表达。

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim_{W' \subseteq W}\left(\varinjlim_{V \subseteq \beta(W')} \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\alpha(V)}\right) & \xrightarrow[\alpha \text{ hom.}]{\simeq} & \varinjlim_{W' \subseteq W} \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\alpha\circ\beta(W')} \\
\simeq \downarrow \beta \text{ hom.} & & \downarrow \\
\varinjlim_{V \subseteq \beta(W)} \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\alpha(V)} & \xrightarrow[\alpha \text{ hom.}]{\simeq} & \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\alpha\circ\beta(W)}
\end{array}$$

其中，水平函子由 α 的性质 $(ii.a)$ 可知是等价。因此，右侧的竖直函子也是等价。我们只需证明 $\mathsf{Disk}_{/Z} \xrightarrow{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\alpha\circ\beta(-)}} \mathbf{Cat}_{(\infty,1)}$ 将同伦等价映射为等价。若 $W \hookrightarrow W' \colon \mathsf{Disk}_{/Z}$ 是同伦等价，则由 β 的性质 (i)，诱导出的函子 $\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\beta(W)} \to \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\beta(W')}$ 是等价。由 α 的性质 (i)，在上方方形左下角计算的 W（分别是 W'）的余极限构成以下图表。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{Disk}_{/\beta(W)} & \xrightarrow{(\star)} & \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\beta(W)} & & \\
\downarrow & & \downarrow & \searrow^{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\alpha(-)}} & \\
\mathsf{Disk}_{/\beta(W')} & \xrightarrow[(\star)]{} & \mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\beta(W)} & \xrightarrow[\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\alpha(-)}]{} & \mathbf{Cat}_{(\infty,1)}
\end{array}$$

其中由 $(\star)$ 标记的函子是终对象，而由 $\sim$ 标记的函子是等价。因此，诱导的余极限态射也是等价，且 $\alpha \circ \beta$ 确实是同调的。 ■

以下结果说明了我们将"同调的"态射如此命名的理由。

引理 3.4（提升同调理论）

设 X、Y 为分层空间，且 α：$\mathsf{Mfld}_{/Y} \to \mathsf{Mfld}_{/X}$ 为同调的。那么，我们有唯一的提升

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}(\mathcal{M}\mathsf{fld}_{/X}, \mathcal{V}) & \cdots\cdots\to & \mathcal{H}(\mathcal{M}\mathsf{fld}_{/Y}, \mathcal{V}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{Alg}_{\mathsf{Mfld}_{/X}}(\mathcal{V}) & \longrightarrow & \mathbf{Alg}_{\mathsf{Mfld}_{/Y}}(\mathcal{V})
\end{array}$$

证明： 若这样的提升存在，则它必然唯一，因为竖直函子是全忠实的，因此根据推论 3.2，它们是单态射。要提升一个 $\mathcal{H} \in \mathcal{H}(\mathcal{M}\mathsf{fld}_{/X}, \mathcal{V})$，只需检查：

(a) 对于 $V \in \mathsf{Mfld}_{/Y}$，我们有一个等价 $\varinjlim\left(\mathsf{Disk}_{/V} \xrightarrow{H(\alpha(-))} \mathcal{V}\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\alpha(V))$，

(b) 对于 $V \hookrightarrow V'$：$\mathsf{Disk}_{/Y}$ 为一个同痕等价，诱导态射 $\mathcal{H}(\alpha(V)) \simeq \mathcal{H}(\alpha(V'))$ 是一个等价。

类似于引理 3 的证明 .3，我们有一个 Kan 延拓的粘贴

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{Disk}_{/V} & \xrightarrow{\alpha} & \mathsf{Mfld}_{/\alpha(V)} & & \\
\uparrow & \swarrow & \uparrow & \searrow^{\mathcal{H}} & \\
X_{V,\alpha} & \xrightarrow[(\star)]{} & \mathsf{Disk}_{/\alpha(V)} & \xrightarrow[\mathcal{H}]{} & \mathcal{V}
\end{array}$$

它诱导出

$$\varinjlim\left(\mathsf{Disk}_{/V}\xrightarrow{H(\alpha(-))}\mathcal{V}\right)\xleftarrow{\simeq}\varinjlim\left(X_{V,\alpha}\to\mathsf{Disk}_{/\alpha(V)}\xrightarrow{\mathcal{H}(-)}\mathcal{V}\right)\xrightarrow{\simeq}\varinjlim\left(\mathsf{Disk}_{/\alpha(V)}\xrightarrow{\mathcal{H}(-)}\mathcal{V}\right)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{H}(\alpha(V))$$

证明 (*a*)。现在 (*b*) 直接由上述公式以及定义 3.5 的条件 (*i*) 得出，该条件蕴含 $\mathsf{Disk}_{/\alpha(V)}\simeq\mathsf{Disk}_{/\alpha(V')}$。

■

我们现在描述分层空间之间的四类不同映射，它们诱导同调态射，从而允许我们在它们之间传递代数结构。我们将这些称为**同调映射**。

• **开嵌入：** 正如定义 3.3 末尾所解释的，开嵌入诱导带标记的运算子的态射，特别地，我们得到一个作用 $\mathbf{Aut}(X)\curvearrowright\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X}$。在 π_0 上，这可以看作是通过同调标记态射来作用。

• **细化：** 正如 [AFT17a 的引理 2.23] 中所解释的，分层空间的细化 $\tilde{X}\dashrightarrow X$ 诱导带标记的运算子的一个局部化 $\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/\tilde{X}}\dashrightarrow\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X}$。同样的论证证明，对任意 $V\in\mathsf{Mfld}_{/\tilde{X}}$，诱导函子 $\mathsf{Disk}_{/\tilde{V}}\to\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/V}$是一个局部化，因而为终对象。特别地，定义 3.5 中 (*ii.a*) 里的图表经由该函子分解，因而我们得到

$$\varinjlim\left(\mathsf{Disk}_{/\tilde{V}}\to\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/V}\xrightarrow{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/-}}\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}\right)\xrightarrow{\simeq}\varinjlim\left(\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/V}\xrightarrow{\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/-}}\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}\right)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/V}$$

by [AFT17a，推论 2.38]。因此，细化诱导标记歌剧的同调态射 s.

• **弱可构造丛：** 回顾，分层映射 $\pi\colon\ X\to Y$是弱可构造丛，如果对每个层 $Y_q\subset Y$，余限制 $\pi_{|\pi^{-1}(Y_q)}\colon\ \pi^{-1}(Y_q)\to Y_q$ 是纤维丛（见 [AFT17b，定义3.6.1]）。如 [AFT17a 引理 2.24 与定理 2.25] 中所解释，分层空间的弱可构造丛通过取原像诱导带标记的运算子的同调态射。

• **闭分层包含：** 对于 $Y\overset{\mathrm{cl}}{\hookrightarrow}X$ 分层的闭并的包含，我们有歌剧的典范态射 $\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X}\to\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/Y}$，它“遗忘”对应于其他层的代数数据。我们可以如下定义该函子。由 [AFT17b 命题 8.2.5]，我们得到一个自然的真可构造丛 $\mathsf{Link}_Y(X)\xrightarrow{\pi}X$，它诱导一个锥构造

$$Y\xleftarrow{}C(\pi)\dashrightarrow C(\pi)_{\mathrm{unref.}}\hookrightarrow X\tag{3.1}$$

其中左侧映射是一个可构造丛，中心那个是一个加细，右侧那个是一个开嵌入。右侧映射的构造可看作 Y 在 X中的管状邻域的一种分层概念。由此得到一个同调的标记态射$\mathsf{Mfld}_{/Y}\to\mathsf{Mfld}_{/C(\pi)}\to\mathsf{Mfld}_{/X}$。注意，$Y$中一个基本块的原像在 $C(\pi)$中仍是基本块，因此上述态射将基本块映为基本块。通常在此上下文中，我们将考虑这样的闭包含 $Y\overset{\mathrm{cl}}{\hookrightarrow}X$：它们只有在对目标进行加细之后才是闭分层包含（例如第一坐标上的包含 $\mathbb{R}\overset{\mathrm{cl}}{\hookrightarrow}\mathbb{R}^2$）。其构造与此处所述完全相同。

注记 3.1（管状邻域的可缩选择）。注意，上述管状邻域的选择是可缩的。更精确地说，这些邻域由考虑函子性的“拉开”构造（见 [AFT17b，第 7.2]节）并选取一个在链环（拉开过程的边界）上非零的向内向量场而给出。此类向量场的空间是可缩的。该构造可视为这个向量场空间映到$\mathsf{Emb}(C(\pi)_{\mathrm{unref.}},Y)$，而后者本身又映到空间 $\mathbf{Alg}^{C(\pi)_{\mathrm{unref.}}}(\mathcal{D}\mathsf{isk}_{/X})_{\leq 0}$。因此，管状邻域的任意两种选择都会产生自然等价的函子 $\mathcal{H}(\mathcal{M}\mathsf{fld}_{/X},\mathcal{V})\to\mathcal{H}(\mathcal{M}\mathsf{fld}_{/Y},\mathcal{V})$。

T以下结果是本文在因子化同调方面的关键技术工具 .

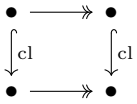
引理 3.5（交换图）

令 $\mathcal{V}\in\mathbf{Alg}^{\mathcal{E}_\infty}(\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}^{\mathsf{geom}-\varinjlim})$。分层空间之间的任意同调映射交换图，若其在相应的 $\mathsf{Mfld}_{/-}$ 之间诱导出一个同调态射交换图，则也将在相应的 $\mathbf{Alg}_{-}(\mathcal{V})\simeq\mathcal{H}(\mathcal{M}\mathsf{fld}_{/-},\mathcal{V})$ 之间诱导出一个函子交换图。

证明： 由于同调性在复合下封闭（引理 3.3），总复合也是同调的。引理 3.4 随即推出，在同调理论层面存在唯一的提升，因此在代数范畴层面也存在唯一的提升。提升的唯一性恰好保证了图表的交换性。

■

注 3.2（交换性的一个例子）。对于大多数由同调映射构成的图表，同调态射层面的交换性可由构造直接看出。这里我们将遇到的唯一微妙情形是如下形式的图表：



利用注记 3.1，我们可以为右侧的闭含入选取一个向量场，并将其拉回到左侧的闭含入。这在方程 3.1 的层面上诱导出一个交换图，进而保证满足引理 3.5 的条件。

3.2 把手体作为对偶数据

本小节的目标是构造分层空间，以便描述 k-态射的“对偶数据”。在本节中，我们固定 $n \geq 1$。我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 的各种分层，它们将“承载”对偶数据的代数结构，以及它们之间传递这些结构的同调映射（见定义 3.5）。我们将点 $x \in \mathbb{R}^n$ 的坐标记为 $(x_1, \ldots, x_n)$。i^{th}坐标应被视为 (∞, n)-范畴中 i-态射的复合方向。

第一个分层应被理解为承载任意 k-态射结构的分层：

定义 3.6（Bar-分层）。对于 $0 \leq k \leq n$，我们将 $\mathbb{R}^n_k$ 定义为由以下各层给出的 $\mathbb{R}^n$ 的分层：

- 对于 $1 \leq i \leq k$，由 $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = 0$ 给出的各层，以及 $\pm x_i > 0$，
- 由 $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1} = x_k = 0$ 给出的层。

This 总共有 $2k+1$ 个层（按照约定，当 $k = 0$ 时，只有一个层：$\mathbb{R}^n$ 本身 f).

注 3.3（Bar-分层上的代数）。若 $k < n$，代数 $M \in \mathbf{Alg}^{\mathbb{R}^n_k}(\mathcal{V})$ 的数据恰好是一个 $(\infty, n+1)$-范畴 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的 k-态射的数据。若 $k = n$，任何此类代数都会给出一个$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的 n-态射，并附带一个点的选择（一个 $\mathcal{E}_0$-结构）。

（余）定义域和复合的构造可以视为以下操作。在接下来的论述中，我们固定：

- 一个光滑函数 $\rho\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$，它在 $(-\infty, 0]$ 上严格递减，满足 $\forall n \geq 0, \rho^{(n)}(0) = 0$且 $\forall x \geq 0, \rho(x) = 0$。例如，可以对所有 $x < 0$ 取 $\rho(x) = e^{1/x}$，并对 $x \geq 0$ 取 $\rho(x) = 0$。
- 一个递增微分同胚 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$。

这些函数的选择空间是可缩的，且不会影响结果；由于精确表述对我们的目的并非必要，我们略去不述。

定义 3.7（（余）定义域）。对于 $1 \leq k \leq n$，我们有一个开嵌入 cod: $\mathbb{R}^n_{k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n_k$，它将 $x_k \mapsto \phi(x_k)$ 这诱导出一个等价 $\mathbb{R}^n_{k-1} \simeq \left(\mathbb{R}^n_k\right)_{x_k > 0}$。类似地，有 dom: $\mathbb{R}^n_{k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n_k$，由 $x_k \mapsto -\phi(-x_k)$ 给出

定义 3.8（复合）。对于 $1 \leq k \leq n$，我们将 $\mathbb{R}^n_{k \circ k}$ 定义为 $\mathbb{R}^n$ 的分层，其层如下：

- 对于 $1 \leq i < k$，由 $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = 0$ 给出的层，以及 $\pm x_i > 0$，
- 这些层ata given by $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1} = 0$ and $x_k < -1$, $x_k = -1$, $-1 < x_k < 1$, $x_k = 1$, $1 < x_k$

总共有 $2k+3$ 层。我们有一个可构造丛 $\mathbb{R}^n_{k \circ k} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n_k$，它将

$$x_k \mapsto x_k \left(\rho(1 - x_k^2) + \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 \right)$$

直观地捏缩这两个 $(n-k)$ 维层。

警告 3.4（复合次序）。注意，$\mathbf{Mor}_1(\mathcal{V})$ 中的复合 $A \xrightarrow{M} B \xrightarrow{N} C$ 由$N \circ M = M \otimes_B N$给出。约定是相反的：与张量化和因子化同调相比，范畴复合采用相反的排列顺序。

我们所关注的第二个分层应被理解为承载该结构的分层某个特定对偶数据的任意 k-态射。

定义 3.9（对偶数据）。设 $d < n$，由字母“ϵ、η”组成的长度为 d 的词 $\sigma \in \{\epsilon, \eta\}^d$ 称为 d-对偶数据。我们记作 $|\eta| = 1$ 和 $|\epsilon| = -1$。为简化记号，令 $\{\sigma = \eta\} = \{|\sigma| = 1\} = \{i \mid \sigma_i = \eta\}$ 和 $\{\sigma = \epsilon\} = \{|\sigma| = -1\} = \{i \mid \sigma_i = \epsilon\}$。

定义 3.10（柄体分层）。设 $1 + d \leq k + d \leq n$ 和 $\sigma = \sigma_{k+d-1} \dots \sigma_k \in \{\epsilon, \eta\}^d$ 是一个 d-对偶数据。我们将 $\mathbb{R}^n_{k,\sigma}$ 定义为由以下各层给出的 $\mathbb{R}^n$ 的分层：

- **Bar层：** 对于 $1 \leq i \leq k-1$，由 $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = 0$ 和 $\pm x_i > 0$ 给出的各层，
- **柄体层：** $x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} = 0$，以及
  - (a) $x_{k+d} > \sum_{i=k}^{k+d-1} |\sigma_i| x_i^2$，
  - (b) $x_{k+d} = \sum_{i=k}^{k+d-1} |\sigma_i| x_i^2$，
  - (c) $x_{k+d} < \sum_{i=k}^{k+d-1} |\sigma_i| x_i^2$。

总共有 $2k+1$ 个层。

注意，通过将 x_{k+d} 发送到 $x_{k+d} - \sum_{i=k}^{k+d-1} |\sigma_i| x_i^2$，并对坐标顺序进行置换，上述分层与 k-bar-分层同构。特别地，$\mathbb{R}^n_{k,\sigma}$ 上的代数也是 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的（带基点）k-态射，不过这种对应或许不那么典范（因为它取决于置换的选择）。

最后，第三种分层应被理解为这样一种分层：它“承载”了如下理解，即 k-态射的 σ-对偶数据构成一个 $(k+d)$-态射。我们建议读者初读时跳过此定义，读完定义 3.13 后再回来阅读。的确，这种分层看起来可能相当复杂，但它只是使“full-pinch”映射成为分层映射所需的最小分层。

定义 3.11（全带状把手体分层）。设 $1 + d \leq k + d \leq n$和 $\sigma = \sigma_{k+d-1} \dots \sigma_k \in \{\epsilon, \eta\}^d$ 是一个 d-对偶数据。我们将 $\mathbb{R}^n_{k,\sigma}$ 定义为由以下各层构成的 $\mathbb{R}^n$ 分层：

- Bar层：</style>对于 $1 \leq i \leq k-1$，由 $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = 0$和 $\pm x_i > 0$给出的各层，
- **把手体带状分层：** 对于 $k \leq i < k+d$，按约定 $\Delta_{k+d} = -1$，记 $\Delta_i = |\sigma_i| \left(x_{k+d} - \sum_{j=i}^{k+d-1} |\sigma_i| x_i^2 \right)$。对于 $k \leq j \leq k+d$，有以下各层

  （a）对于 $u \in \{1, \dots, j-1\}$，由 $\pm x_j > 0$、$\Delta_j < 0$和 $x_u = 0$给出的 2 个层；（b）对于 $k \leq i < j$，由 $x_u = 0$给出的 $u \in \{1, \dots, k-1\} \sqcup \{|\sigma| = |\sigma_i|\} \cap \{k, \dots, i-1\} \sqcup \{|\sigma| = -|\sigma_i|\} \cap \{k, \dots, j-1\}$ 的 3 个层，以及以下二者之一：i. $\Delta_i > 0$，或 ii. $\Delta_i = 0$ 和 $\pm x_i > 0$。

  最后，我们有由 $x_1 = \dots = x_{k+d} = 0$ 给出的层。

注意，我们有一个显然的细化映射 $\mathbb{R}^n_{k,\sigma} \dashrightarrow \mathbb{R}^n_{k,\sigma_\circ}$

我们现在定义一些“捏合映射”，它们将有助于形式化如下想法：任意k-态射的 σ-对偶数据是一个 $(k+d)$-态射。

定义 3.12 (末坐标捏合). 如上所述，设 $1 + d \leq k + d \leq n$与 $\sigma = \sigma_{k+d-1} \dots \sigma_k \in \{\epsilon, \eta\}^d$为一个 d-对偶数据。我们按如下方式定义一个分层映射 π_k: $\mathbb{R}^n_{k,\sigma} \to \mathbb{R}^n_{k+1, \sigma_{k+d-1} \dots \sigma_{k+1}}$，~~称为“捏合映射”~~：

- 它保持所有坐标不变，唯独第 k个坐标除外，

- 它将第 k个坐标 x_k 映射为

$$x_k \longmapsto x_k\left(\rho\left(|\sigma_k|\left(x_{k+d}-\sum_{i=k}^{k+d-1}|\sigma_i|x_i^2\right)\right)+\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2\right)$$

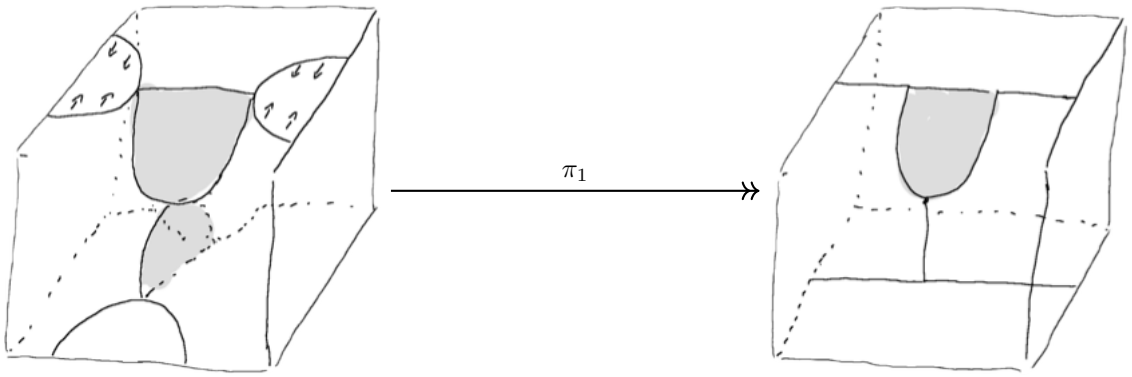


图1: Pinchi ng $\mathbb{R}^3_{1,\epsilon,\eta} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{R}^3_{1,\eta}$。小箭头表示把手"内部"发生的塌缩

虽然我们只需要较为简单的弱可构造丛概念，但很容易看出，这些映射是可构造丛。

引理3.6

如上所述，设 $1+d \le k+d \le n$ 和 $\sigma = \sigma_{k+d-1}\dots\sigma_k \in \{\epsilon,\eta\}^d$ 是一个 d-对偶数据。捏合

$$\mathbb{R}^n_{k,\overline{\sigma}} \xrightarrow{\pi_k} \mathbb{R}^n_{k+1,\overline{\sigma_{k+d-1}\dots\sigma_{k+1}}}$$

是一个弱可构造丛，即在限制到陪域的每个层上时，它是一个分层纤维丛。

证明： 考虑陪域的一个层 $\mathbb{R}^n_{k+1,\sigma_{k+d-1}\dots\sigma_{k+1}}$。我们需要验证，捏合映射在此层上的余限制是其上的一个分层纤维丛。为简化记号，我们将应用捏合映射后的新 k^{th} 坐标记为 x_k。我们用"路径"记法表示各层，以指明选择的顺序。

- Bar层： </style}由 $i.\pm$ 给出的 Bar层在 $i \le k-1$ 中保持不变。Bar层 $k.\pm$ 的原像由把手体带状分层 $k.a.\pm$ 给出。在这两种情况下，捏合映射都是微分同胚。
- **把手体带状分层：** 令 $k+1 \le j \le k+d$。若 $\sigma_k = \sigma_j$，则把手体带状分层 $j.a.\pm$ 的原像由把手体带状分层 $j.a.\pm$ 给出，且捏合映射是微分同胚。若 $\sigma_k \ne \sigma_j$，则把手体带状分层 $j.a.\pm$ 的原像由三个把手体带状分层 $j.k.$ 的并给出，其中捏合映射逐点等价于映射 $[-1,1] \to \{0\}$。在这些层上，可以验证捏合映射是一个纤维丛。对于 $\bar{k}+1 \le i \le j$，把手体带状分层 $j.i.$ 的原像由相应的把手体带状分层 $j.i.$ 给出，其中捏合映射是微分同胚。
- **底部横杠层：** 限制到由 $x_1 = \dots = x_{k+d} = 0$ 给出的层上，捏合映射是恒等映射，因而是一个纤维丛。

■

特别地，我们可以复合这些捏合映射，从而得到下面的推论。

定义 3.13（完全捏映射）。如上，设 $1+d \le k+d \le n$ 和 $\sigma = \sigma_{k+d-1}\dots\sigma_k \in \{\epsilon,\eta\}^d$ 是一个 d-对偶数据。我们将完全捏映射定义为以下复合

$$\mathbb{R}^n_{k,\overline{\sigma}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n_{k+1,\overline{\sigma_{k+d-1}\dots\sigma_{k+1}}} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n_{k+d-1,\overline{\sigma_{k+d-1}}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n_{k+d,\overline{\emptyset}} = \mathbb{R}^n_{k+d}$$

我们将 $\sigma\colon \mathbf{Alg}^{\mathbb{R}^n_k}(\mathcal{V}) \to \mathbf{Alg}^{\mathbb{R}^n_{k+d}}(\mathcal{V})$ 定义为由同调映射诱导的函子的复合（见第 3.1 小节）

$$\mathbb{R}^n_k \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n_{k,\sigma} \dashleftarrow \mathbb{R}^n_{k,\overline{\sigma}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n_{k+d}$$

推论 3.7

如上所述，设 $1+d \le k+d \le n$ 和 $\sigma \in \{\epsilon,\eta\}^d$ 是一个 d-对偶数据。完全捏映射 $\mathbb{R}^n_{k,\sigma} \to \mathbb{R}^n_{k+d}$ 是一个弱可构造丛，也就是说，将其限制在陪域的每个层上时，它是一个纤维丛。

证明： 这是 [AFR18b，命题 6.1.8] 的直接推论。 ■

我们简要验证，对于 $d=1$，上文引入的记号 $\eta(f)$ 和 $\epsilon(f)$ 确实在高阶 Morita 范畴中构成一个伴随。

引理 3.8（对偶数据构成伴随）

设 $k<n$ 和 $f\in \mathbf{Alg}_{\underline{\ }}^{\mathbb{R}^n_k}(\mathcal{V})$ 是 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的一个 k-态射。设 f° 是由 $x_k\mapsto -x_k$ 在 $\mathbb{R}^n_k$ 上诱导的 k-态射。那么，$(k+1)$-态射 $\eta(f)$ 和 $\epsilon(f)$ 分别是 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中伴随 $f\dashv f^\circ$ 的单位和余单位。

证明： 直接观察可知，根据定义 3.7 和定义 3.8，$\mathrm{cod}(\eta(f))\simeq f^\circ\circ f$ 以及 $\mathrm{dom}(\epsilon(f))\simeq f\circ f^\circ$。另一个定义域和陪域同样可以确定。随后，三角恒等式由伴随的通常图形演算得到。 ■

注意到，根据构造，我们有交换性质（f°）$^\circ\simeq f$ 和 η（f°）$\simeq\epsilon$（f）$^\circ$。因此可直接得到上述命题 2.14 和引理 3.8 的一个推论。

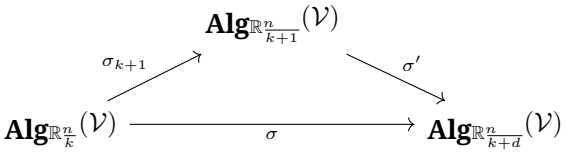
推论 3.9（莫里塔中的单位）

设 $k<n$ 和 $f\in Alg^{\mathbb{R}^n_k}_{\underline{\ }}(\mathcal{V})$ 是 $Mor_n(\mathcal{V})$ 中的一个 k-态射。我们有一个提升 $c_k\twoheadrightarrow Free^{\{k\}}(c_k)\to Mor_n(\mathcal{V})$，其中所有诱导的（余）单位均由以下四个代数之一给出：$\eta(f)$、$\epsilon(f)$、$\eta(f^\circ)$、$\epsilon(f^\circ)$。

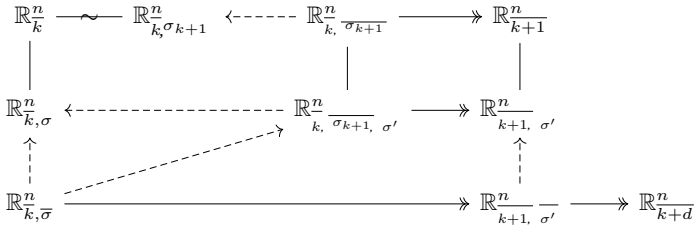
现在我们证明一个结合性引理，可以将其理解为“$\sigma(\eta(M))\simeq\sigma\eta(M)$”（$\epsilon$的情形亦然）。该引理是定理 4.2 证明中归纳过程的关键。

引理 3.10（左结合性）

设 $1+d\le k+d\le n$ 与 $d\ge 2$，并设 $\sigma=\sigma_{k+d-1}\dots\sigma_k\in\{\epsilon,\eta\}^d$ 为一个 d-对偶数据。定义 $\sigma'=\sigma_{k+d-1}\dots\sigma_{k+2}\in\{\epsilon,\eta\}^{d-1}$。我们有一个交换图



证明： 可以定义一个“部分条形”柄体分层$\mathbb{R}^n_{k,\ \sigma_k,\ \sigma'}$，它细化$\mathbb{R}^n_{k,\ \sigma}$，并且是极小的，使得捏合映射$\mathbb{R}^n_{k,\ \sigma_k,\ \sigma'}\xrightarrow{\pi_k}\mathbb{R}^n_{k+1,\ \sigma'}$成为分层空间的映射。于是我们有一个分层空间之间同调映射的交换图



显然，该图表满足引理 3.5 的条件，因此导出相应代数范畴之间的函子的交换图。外侧上方的复合导出 $\sigma'\circ\sigma_{k+1}$，而外侧下方的复合导出 σ。 ■

3.3 迭代双模的可对偶性

本小节专门讨论下面的结果。我们在此改编了 [Lur17, Prop. 4.6.2.13]中的一个论证（该命题是我们下面结果的 $n=1$ 情形），并结合了 [Ram24, Cor. 3.8] 中的思路（该推论给出了 (op)lax-模函子何时可能成为模函子的条件）。

构造3.5（命题 3.11 的作用）。设 M 是 $\mathcal{V}$ 中的一个 $\mathbb{R}^n_n$-代数。由最后一个坐标的闭分层包含 $\mathbb{R}_{\le 0}\xrightarrow{\mathrm{cl}}\mathbb{R}^n_n$（$\ge$ 时类似），可得到一个同调映射。根据引理 3.4，这诱导出一个 $\mathbb{R}_{\le 0}$-代数（分别为 $\mathbb{R}_{\ge 0}$-代数），记作 $A\curvearrowright M$（分别记作 $M\curvearrowleft B$）。这个代数可视为 1-态射$M\colon\ A\to\mathbb{1}_{\mathcal{V}}\colon$ **态射**$_1(\mathcal{V})$（分别为 $M\colon\ \mathbb{1}_{\mathcal{V}}\to B\colon$ **态射**$_1(\mathcal{V})$）。我们称 A（分别称 B）为其定义域（分别为陪域）

M。注意，此定义对应于在定义 3.7 上应用引理 3.4，并通过纤维丛 $\mathbb{R}^n_{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ （其投影到最后一个坐标）进行推前，从而额外遗忘 $\mathbb{R}^n_{n-1}$-代数的结构。

命题 3.11（迭代双模的可对偶性）

设 M 是 $\mathbb{R}^n_n$ 中的一个 $\mathcal{V}$-代数，将其视为 $\mathbf{Mor}_n$ 中的一个 n-态射$(\mathcal{V})$。使用上文构造 *3.9* 中的记号，

当且仅当诱导的 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-代数 $M \curvearrowleft B$ 作为一个 1-态射$M\colon \mathbb{1}_{\mathcal{V}} \to B\colon \mathbf{Mor}_1(\mathcal{V})$ 是左伴随时，• M 才是 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的左伴随，

当且仅当诱导的 $\mathbb{R}_{\leq 0}$-代数 $A \curvearrowright M$ 作为一个 1-态射$A\colon \mathbf{Mor}_1(\mathcal{V}) \to M\colon \mathbb{1}_{\mathcal{V}}$ 是右伴随时，• M 才是 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的右伴随。

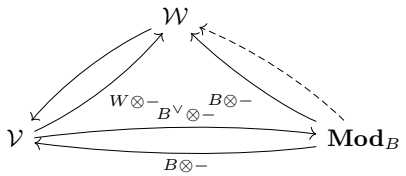
警告 3.6（可伴随）。请注意，Lurie 使用“左可伴随”一词，表示我们在此所说的“是右伴随”或“有左伴随”。

证明： 第二个陈述由第一个陈述通过“n-op”运算 $x_n \mapsto -x_n$ 得出。考虑以下可构造丛的复合 $\mathbb{R}^n_n \twoheadrightarrow \left(\mathbb{R}^2_2\right)_{r\geq 0} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^1_1$，其中中间那份 $\mathbb{R}^2$ 的坐标记作 $(x_n,\ r)$，其定义为

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \left(x_n, \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\right) \longmapsto x_n$$

利用 Morita 范畴 [的迭代构造 Hau23, Cor. 7.6]，或 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中复合的因子化同调构造，我们看到，M 在 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中是左伴随，当且仅当它作为 $\mathrm{Mor}_1(\mathrm{Mod}_W(\mathcal{V}))$ 中的 1-态射也是左伴随，其中 W 是推前 $(x_n, r)^*(M)$ 中由 $r > 0$ 支撑的 $\mathcal{E}_2$-代数。根据 [Lur17, Prop. 4.6.2.13]，这等价于诱导出的 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-代数在 $\mathrm{Mor}_1(\mathrm{Mod}_W(\mathcal{V}))$ 中是左伴随。接下来只需证明这等价于它在 $\mathrm{Mor}_1(\mathcal{V})$ 中是左伴随。一个方向由伴随在复合下的稳定性得出，因此只需证明在 $\mathrm{Mor}_1(\mathcal{V})$ 中是左伴随蕴含在 $\mathrm{Mor}_1(\mathrm{Mod}_W(\mathcal{V}))$ 中是左伴随。论证的第一部分基于与 [Lur17, Prop. 4.6.2.13] 证明中相似的思路，而第二部分则是 [Ram24, Cor. 3.8] 中论证（一个无关紧要的推广）的推论。

令 $\mathcal{W} = \mathbf{Mod}_W(\mathcal{V})$，并令 B 表示由此诱导的 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-代数。注意到 $\mathbf{Mod}_B(\mathcal{V}) \simeq \mathbf{Mod}_B(\mathcal{W})$，因此我们可以滥用记号，将这两个范畴都记作 $\mathbf{Mod}_B$。考虑下面的提升问题：



(3.2)

其中我们希望证明虚线所示的左伴随存在。我们可以考虑全子范畴 $\mathcal{W}' \hookrightarrow \mathcal{W}$，其对象为满足 $\mathcal{W}(w, B\otimes -)\colon \mathbf{Mod}_B \to \mathcal{S}$ 可被余表示的对象 w。显然，$\mathcal{W}'$ 包含自由 W-代数（即函子 $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 的像），并且在几何实现下封闭。因此，$\mathcal{W}' = \mathcal{W}$，左伴随存在。

这个左伴随自动保持余极限。要证明它由与某个提升 $B^\vee \in \mathcal{W}$ 张量化给出，只需验证该伴随是一个 $\mathcal{W}$-模映射。这可由 [Ram24, Cor. 3.8] 中的论证得到。作为模映射的左伴随，它自动是一个 oplax-$\mathcal{W}$ 映射。由于 $\mathcal{W}$ 由其单位 W 在余极限下生成，特别地，它也由可对偶对象在余极限下生成。于是，[Ram24, Prop. 3.4] 中的“迹映射”构造表明，oplax 结构映射都是等价。 ■

特别地，我们立即得到谱范畴中的以下推论。

推论 3.12（谱中迭代双模的可对偶性）

令 M 是$\mathbb{R}^n_n$-代数，在 $\mathcal{S}p$ 中视为一个 n-态射$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{S}p)$。使用上文构造 *3.9* 中的记号，

- M 是$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的左伴随，当且仅当它作为诱导的 $\mathbb{R}_{>0}$-代数B上的模是紧致的；当且仅当它作为诱导的 $\mathbb{R}_{>0}$-代数 B上的模是完备的，
- M 是$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的右伴随，当且仅当它作为诱导的 $\mathbb{R}_{<0}$-代数A上的模是紧致的；当且仅当它作为诱导的 $\mathbb{R}_{<0}$-代数 A上的模是完备的。

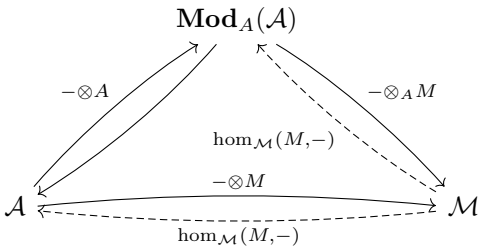
证明： 这是 [Lur17 7.2.4.4] 的直接推论，该文刻画了 $\mathcal{S}p$ 中的可对偶模。 ■

3.4 可对偶化代数的中心

我们在此回顾 [Lur17 5.3.1] 节的内容，并详细说明其如何应用于我们的情形。

引理 3.13（单位元作为到中心的映射）

设 $(\mathcal{A},\mathcal{M}) \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\left(\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}^{\mathsf{geom}-} \longrightarrow\right)_{\mathrm{colim}}$ 以及 (A, M) 是 $(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 中的一个 $\mathcal{D}\mathsf{isk}^{/\mathbb{R}_{\geq 0}}$-代数。假设我们可以用以下虚线右伴随扩展下方的图表。



(3.3)

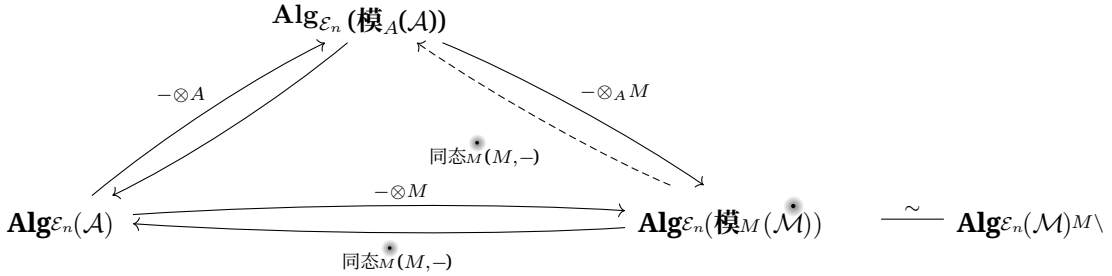
那么，在 $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ 处求值时，下伴随的单子给出 M 的中心（视为 $\mathcal{A}$ 中的对象），而诱导的单子映射给出与 $A \curvearrowright M$ 的作用（视为 $\mathcal{A}$ 中的态射）相对应的普适 $A \to$ 同态$_{\mathcal{M}}(M,M)$。

请注意，我们仅针对映射 $A \to \hom_{\mathcal{M}}(M,M)$ 作为 $\mathcal{A}$ 中的映射陈述并使用这一断言。它作为 $\mathbf{Alg}_{\mathcal{E}_1}(\mathcal{A})$ 中的映射也成立，此时使用单子映射上的诱导 $\mathcal{E}_1$-代数结构，但我们在此处不需要这一事实。

证明： 根据定义，$\hom(M,\ M)$ 是 M [Lur17, Def. 4.2.1.28] 中的自同态对象，因此也是 M [Lur17, Lem. 5.3.1.11] 中的中心。根据态射对象的泛性质，要确定映射 $A \to \hom_{\mathcal{M}}(M,\ M)$，只需确定诱导映射 $A \otimes M \to M$。由构造可知，单子的映射会在 M 上诱导出正确的作用映射。 ■

注 3.7（ A 在对偶上的作用的提升）。 实际上可以证明，顶部虚线箭头存在，当且仅当底部虚线箭头存在。这基本包含在 [Lur17, Sec. 5.3.1] 中。观察到左侧的伴随是单子性的，并遵循 [Lur17, Sec. 4.7.3] 中的思路，即可看出这一点： A 在 M 上的一个（左）作用给出单子 $-\otimes A$ 在 $-\otimes M$ 上的一个（右）作用，而这等价于单子 $-\otimes A$ 在 $\hom_{\mathcal{M}}(M,\ -)$ 上的一个（左）作用，进而等价于点线提升的存在。

为使图景完备，我们提出如下方法来重新证明 [Lur17 第 5.3.1] 节的结果。现设 $(\mathcal{A},\mathcal{M}) \in \mathbf{Alg}^{\mathbb{R}_{\leq 0}\times\mathbb{R}^n}(\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}^{\mathsf{geom}-\ \mathrm{colim}} \longrightarrow)$，且 (A,M) 是 $(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 中的一个 $\underline{\mathcal{D}\mathsf{isk}}^{/\mathbb{R}_{\leq 0}\times\mathbb{R}^n}$-代数。考虑一个类似的图表，但将 $\mathcal{M}$ 替换为 $\mathbf{Mod}_M(\mathcal{M})$，并再次假设虚线右伴随存在。所有左伴随函子都是 $\mathcal{E}_n$-幺半的。于是，正如也可由 [HHLN24 推论 C] 看出的那样，所有右伴随函子都典范地是松-$\mathcal{E}_n$-幺半的，且该图表诱导

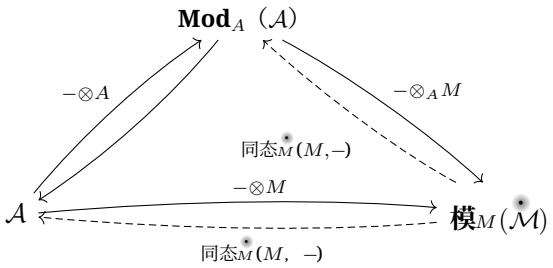


非正式地，对下伴随的诱导单子在恒等映射 $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$处求值后，会提升为 $\mathbf{Alg}_{\mathcal{E}_1}(\mathbf{Alg}_{\mathcal{E}_n}(\mathcal{A})) \simeq \mathbf{Alg}_{\mathcal{E}_{n+1}}(\mathcal{A})$，并可识别为 M 的 $\mathcal{E}_n$- 中心。诱导单子映射在恒等映射处求值后，曾道人对象 $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ 可以与指向中心 $A \to \hom_M(M,M)$ 的泛 $\mathcal{E}_{n+1}$-映射相识别。所幸，我们在这里无需访问这些映射的任何 $\mathcal{E}_{n+1}$-幺半结构，因此以下结果足以满足我们的需要。

引理 3.14（单位作为到 $\mathcal{E}_n$-中心的映射）

As above, let $(\mathcal{A},\mathcal{M}) \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{R}_{\leq 0}\times\mathbb{R}^n}(\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}^{\mathsf{geom}-\ \mathrm{colim}} \longrightarrow)$ *and* (A,M) *a* $\underline{\mathcal{D}\mathsf{isk}}_{/\mathbb{R}_{\leq 0}\times\mathbb{R}^n}$*-algebra in* $(\mathcal{A},\mathcal{M})$*. Suppose*

我们可以用以下虚线表示的右伴随扩展下图。



(3.4)

于是，在 $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ 处取值时，下伴随的单子给出 M （视为 $\mathcal{A}$ 中的对象）的 $\mathcal{E}_n$-中心，而单子诱导映射给出与 $A \curvearrowright M$ 的作用相对应的普适 $A \to$ 同态$_{\mathcal{M}}(M,M)$ （视为 $\mathcal{A}$ 中的态射）。

证明： 这直接由引理 3.13 以及 Lurie 关于中心的章节中主定理的证明得出 [Lur17, 定理 5.3.1.30]。 ■

在我们的情形中，图表右上方的 $-\otimes_A M$ 函子可以用因子化同调显式定义如下。

注记 3.8（$\mathcal{E}_n$-“双模”版本）。设 $(\mathcal{A},\ \mathcal{M},\ B) \in \mathbf{Alg}^{\mathbb{R}^{n+1}_1}(\mathcal{V})$。我们可以考虑上文中的 $(\mathcal{A},\ \mathcal{M}) = (\mathcal{V},\ \mathbf{Mod}_B(\mathcal{V}))$，它经由 $x_1 \geq 0$ 区域 $\mathbb{R}^{n+1}_1 \twoheadrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^n$ 的坍缩而典范地继承正确的代数结构。则上述函子 $\mathbf{Mod}_A(\mathcal{V}) \xrightarrow{-\otimes_A M} \mathbf{Mod}_M(\mathbf{Mod}_B(\mathcal{V}))$ 由同调映射所诱导的模作用给出

$$\mathbb{R}^{n+1}_{\overline{1}} \xleftarrow{\text{cl.}} (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}^n) \bigsqcup_{\{0\}^{n+1}} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}_{\overline{1}}$$

其中第二个映射是由在 $x_1 > 0$ 区域中取半径所诱导的可构造丛 n.

利用这一点，我们现在可以证明本小节的主要结果，我们将其表述为如下 ng 构造。

构造 3.9（命题 3.15 中的作用）。设 $0 \leq k < n$ 与 $a,\ b \geq 0$ 满足 $a+b = n-k = d$。设 M 为 $\mathcal{V}$ 中的一个 $\mathbb{R}^n_k$ -代数。我们有同调映射

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^n_{\overline{k}} \\ \text{cl}\big\uparrow \\ (\{0\}^{a+1} \times \mathbb{R}^b \subset \{0\} \times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d) \bigsqcup_{\{0\}^{a+1} \times \mathbb{R}^b} (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}^a \times \mathbb{R}^b) \end{array} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^{b+1}_{\overline{1}}$$

其中垂直包含由最后 $d+1$ 个坐标 $\mathbb{R}^{d+1}_1 \xrightarrow{\text{cl.}} \mathbb{R}^n_k$ 的包含所诱导。若 $k > 0$，我们将构造 3.5 中所述的诱导 $\mathbb{R}_{<0}$-代数（相应地，$\mathbb{R}_{>0}$-代数）记为 A （相应地，B）。若 $k = 0$，我们简单地将 $\mathcal{V}$ 的单位记为 $A = B = \mathbb{1}_{\mathcal{V}}$。由引理 3.4，这些同调映射诱导一个 $\mathbb{R}^{b+1}_1$ -代数 $\int_{(S^{a-1},\ D^a)}(M,\ A) \overset{\mathcal{E}_b}{\curvearrowright} M \overset{\mathcal{E}_b}{\curvearrowleft} B$。利用注记 3.8 与引理 3.14，我们进而得到一个**万有 $\mathcal{E}_{b+1}$-映射**

$$\int_{(S^{a-1},D^a)} (M,A) \longrightarrow \mathbf{HC}^B_{\mathcal{E}_b}(M)$$

其中，$\mathbf{HC}^B_{\mathcal{E}_b}(M)$ 是 $\mathcal{E}_b$-中心，其 $(\mathcal{A},\mathcal{M}) = (\mathcal{V}, \mathbf{Mod}_B(\mathcal{V}))$。

命题 3.15（将单位与到中心的泛映射对应起来）

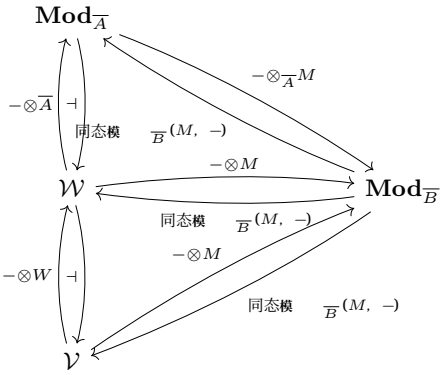
设 n, k, d, a, b, M, A, B 如上文构造 *3.9* 所述。设 $\sigma = \sigma_{k+d-1} \ldots \sigma_k \in \{\epsilon, \eta\}^d$ 是一个 d-对偶数据，使得 $a = |\{k \leq i < k+d \mid \sigma_i = \epsilon\}|$。假设 $\sigma(M)$，视为$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$中的一个 n-态射，具有右伴随 $\sigma(M)^{\vee}$。那么，伴随的单位在 $\mathcal{V}$ 中的像可以与 $\mathcal{V}$ 的像对应起来，后者是泛 $\mathcal{E}_{b+1}$-映射

$$\int_{(S^{a-1},D^a)} (M,A) \longrightarrow \mathbf{HC}^B_{\mathcal{E}_b}(M)$$

如上所述。

请注意，通过推广任意单位都是 $\mathcal{E}_1$-映射这一观点，上述伴随的单位也可以视为一个 $\mathcal{E}_{b+1}$-映射。不过，我们的陈述只涉及 $\mathcal{V}$ 中的底层映射，不考虑任何代数结构。为了证明定理 4.5，我们只需了解这些映射何时为等价。由于遗忘函子 $\mathbf{Alg}^{\mathcal{E}_{b+1}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}$ 是保守的，这一结果便足够了。

证明： 令 A 和 B 为如构造 3.5 中所述，将其应用于 $\sigma(M)$ 后得到的诱导 $\mathbb{R}_{\leq 0}$ 和 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-代数。可以对图表 (3.2) 取对偶，并利用它将图表 (3.3) 扩展为如下形式：



在向下的遗忘函子 $\mathcal{W} \to \mathcal{V}$ 作用下，在 A 处取值的上伴随单位，等价于上三角形的诱导单子映射在 $\mathbb{1}_{\mathcal{W}}$ 处的取值；而后者又等价于外三角形的诱导单子映射在 $\mathbb{1}_{\mathcal{V}}$ 处的取值。根据上述讨论，这个单位可以识别为到某个中心的典范映射。

现在只需将函子 $\mathbf{Mod}_{\overline{A}} \xrightarrow{-\otimes_{\overline{A}} M} \mathbf{Mod}_{\overline{B}}$ 与由注记 3.8 中所述作用诱导的函子识别起来（其中，注记中的“n”就是我们的“b”）。根据构造，上面的函子 $- \otimes_{\overline{A}} M$ 对应于由限制到最后一个坐标 $\mathbb{R}_{\overline{1}} \hookrightarrow \mathbb{R}^n_{\overline{n}}$ 所诱导的$_{\mathrm{cl}}$双模结构：

$$\begin{array}{ccc} X & \twoheadrightarrow & \mathbb{R}_{\overline{1}} \\ {\scriptstyle (i)}\big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}} \\ \mathbb{R}^n_{\overline{k}} \; - \sim - \; \mathbb{R}^n_{k,\sigma} & \dashleftarrow & \mathbb{R}^n_{k,\overline{\sigma}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n_{\overline{n}} \end{array}$$

其中 $X = \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^a \times \{0\}^b \bigsqcup_{\{0\}^{d+1}} \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}^a \times \mathbb{R}^b \twoheadrightarrow \mathbb{R}_{\overline{1}}$，而包含 (i) 由以下内容诱导：

- 通过映射 $\{1, \ldots, a+1\} \mapsto \{k \leq i < k+d \mid \sigma_i = \epsilon\}$ 和映射 $\{a+2, \ldots, d+1\} \mapsto \{k \leq i < k+d \mid \sigma_i = \eta\}$ 对坐标进行置换，
- 若 $a > 0$，则当置换的符号为负时，翻转第二个坐标的符号。

于是我们得到如下图表（下方的图 2 展示了该图表上半部分的直观解释）：

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathbb{R}^{b+1}_{\overline{1}} & & \\ & & & & \big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{cl}} & & \\ & & & Y & \big(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}^b\big) \bigsqcup_{\{0\}^{b+1}} \big(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^b\big) & & \\ & & {\scriptstyle \mathrm{cl}}\swarrow & \big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{cl}} & \searrow\!\!\searrow & \big\downarrow & \\ \mathbb{R}^n_{\overline{k}} & \xleftarrow{\mathrm{cl}} & \mathbb{R}^d_{\overline{1}} & \xleftarrow{\mathrm{cl}} & X & \twoheadrightarrow & \mathbb{R}_{\overline{1}} \\ {\scriptstyle (ii)}\big\downarrow & & & {\scriptstyle (i)}\big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}} & \\ \mathbb{R}^n_{\overline{k}} & - \sim - & \mathbb{R}^n_{k,\sigma} & \dashleftarrow & \mathbb{R}^n_{k,\overline{\sigma}} & \twoheadrightarrow & \mathbb{R}^n_{\overline{n}} \end{array} \tag{3.5}$$

其中，$Y = (\{0\}^{a+1} \times \mathbb{R}^b \subset \{0\} \times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d) \bigsqcup_{\{0\}^{a+1} \times \mathbb{R}^b} (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}^a \times \mathbb{R}^b)$ 是结果陈述中的中间空间，而 (ii) 是由与 (i) 相同的置换和符号翻转所诱导的分层自同构。特别地，(ii) 与恒等映射同伦。特别利用注记 3.2，可以看出图表的每个面都满足引理 3.5 的条件，从而得到代数范畴之间的函子交换图。利用同伦 $(ii) \sim \mathbb{1}$，左侧/顶部对应于陈述中描述的作用。右侧对应于注记 3.8 中的构造。底部对应于定义 3.11 中给出的原始描述。综合以上各点，即可得到所需的识别。

■

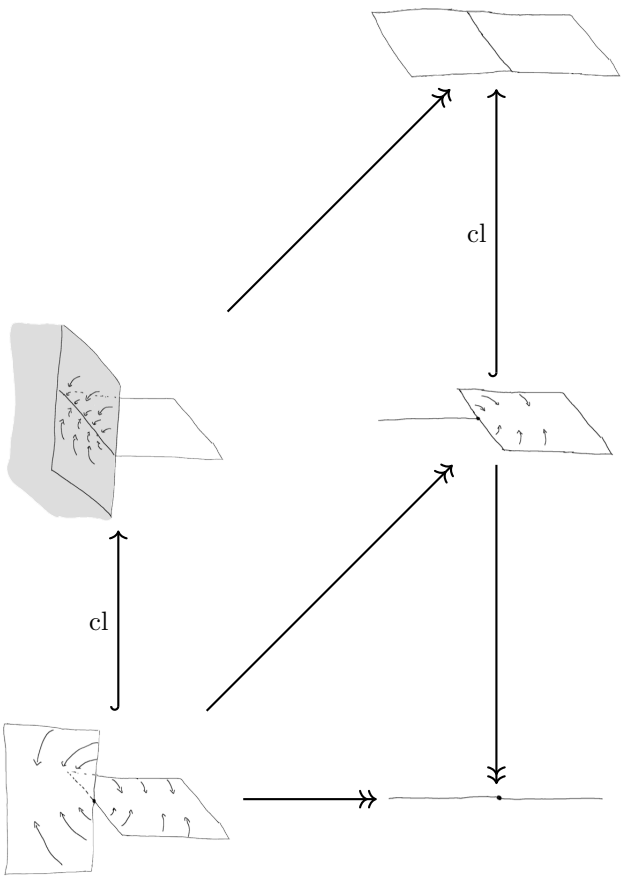


图 2：图表 (3.5) 的可视化。

4 判据的证明

在本节最后，我们证明主要定理（定理 4.2 和定理 4.5）。论证的核心是归纳法：正如第 2 节所证明的，要证明某个对象是完全可对偶的（分别地，可逆），在已知它是可对偶的前提下，只需证明其（余）单位是完全可对偶的（分别地，可逆）。第 3 节中发展的工具则使我们能够精确描述在高阶莫里塔范畴中反复进行“$f \mapsto$ (co)units of f”这一构造时会发生什么。结合这两点，我们便立即得到判据。

4.1 定理 A

在开始证明之前，我们先建立一个众所周知的小引理。这个引理的核心思想是，将态射展示为高阶全伴随的数据具有很强的冗余性。在文献中，这一性质有时称为双向性。

引理 4.1（对偶性的冗余）

> 设 $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}^{(\infty,3)}$，并假设我们有一个伴随 L: $+ \frown - :$ R，其单位与余单位ϵ, η 均存在左伴随和右伴随。那么 ϵ 和 η 是全伴随。

证明： 令 $\epsilon^r \dashv \epsilon \dashv \epsilon^l$ 和 $\eta^r \dashv \eta \dashv \eta^l$。对每个三角恒等式取左伴随，可知 ϵ^l 和 η^l 分别是 $R \dashv L$的单位和余单位。类似地，对每个三角恒等式取右伴随，可知 ϵ^r 和 η^r 分别是同一伴随 $R \dashv L$的单位和余单位。由伴随的唯一性可得 $\epsilon^l \simeq \epsilon^r$ 和 $\eta^l \simeq \eta^r$，进而得到所需结论。 ■

现在我们可以证明主要定理。

构造 4.1（定理 4.2 中的作用）。设 $\mathcal{V} \in \mathbf{Alg}^{\mathcal{E}_\infty}(\mathbf{Cat}^{\mathsf{geom-colim}}_{(\infty,1)} \longrightarrow)$ 是一个具有几何实现和相容张量积的对称幺半（$\infty, 1$）范畴。设 $0 \le k < n$ 和 M 是 k-态射，属于$\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$。若 $1 \le k$，则令 A（分别为 B）为 M 的（余）定义域；否则，若 $k = 0$，则令 A（分别为 B）为恒等映射 $\mathbb{1}_{\mathcal{V}}$。回顾一下，按照约定，我们令 $S^{-1} = \emptyset$。对于 $0 \le i \le n-k$，同调映射

$$\mathbb{R}^n_{\overline{k}} \xleftarrow[\text{cl}]{} \{0\}^{k-1} \times \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}^i \times \{0\}^{n-k-i} \xrightarrow{r} \mathbb{R}_{\ge 0}$$

（分别地，取 $\leq$），其中 r 是半径函数，在 M 上诱导出 $\mathcal{E}_1$-代数结构，作用于 $\int_{(S^{i-1},D^i)}(M,A)$（分别为 $\int_{(S^{i-1},D^i)}(M,B)$）。我们将这些称为典范的 $\int_{(S^{i-1},D^i)}(M,A) \curvearrowright M$ 和 $M \curvearrowleft \int_{(S^{i-1},D^i)}(M,B)$ 作用。下方的图 3 对这些作用作了直观说明。

定理 4.2（完全可对偶性判据）

设 $\mathcal{V} \in \mathbf{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}^{\mathsf{geom}-\varinjlim})$、$0 \leq k < n$ 和 $M\colon c_k \to \mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 如上文构造 *4.1* 所述。那么，M 完全可对偶，当且仅当对所有 $0 \leq i \leq n-k$，典范作用

$$\int_{(S^{i-1},D^i)}(M,A) \curvearrowright M$$

$$M \curvearrowleft \int_{(S^{i-1},D^i)}(M,B)$$

将 M 展现为一个可对偶模，其中 A（分别地，B）是 M 的（余）定义域（关于这些作用的详情，见上文构造 *4.1*）。

注意，当 $k=0$ 时，我们得到了 Lurie [Lur09b，注记 4.1.27] 首次提出的通常判据：

$$\forall 0 \leq i \leq n, \qquad M \text{ is a dualizable } \int_{S^{i-1}} M\text{-module.}$$

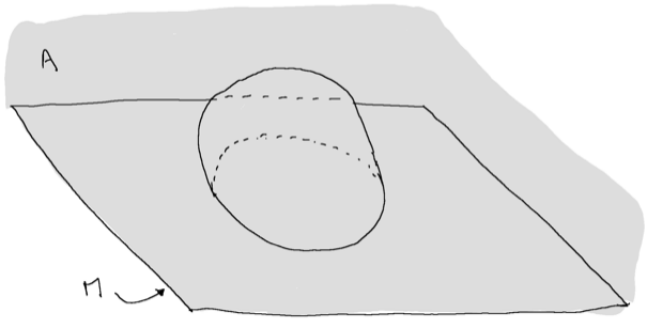


图 3：对 $i=2$，对 (4.1) 左侧作用的可视化。背景空间为 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$，其中 A 支撑在三维层上（因而视为一个 $\mathcal{E}_3$-代数），而 M 支撑在二维层上（因而视为一个由 A 以 $\mathcal{E}_1$单侧方式作用的 $\mathcal{E}_3$-代数）。所关注的 $\mathcal{E}_1$-代数是上半球穹顶的因子化同调，其 $\mathcal{E}_1$-结构由径向对称性给出，并作用于底平面中心所示的 M。这种因子化同调可解释为 Hochschild 同调的一种相对形式。

证明： 设 $d=n-k$。首先，注意构造 4.1 中所描述的作用恰好对应于将命题 3.11 应用于由以下给出的 n-态射族时所涉及的全部作用：对 $\sigma \in \{\epsilon,\eta\}^d$ 一个 d-对偶数据，$\sigma(M)$ 与 $\sigma(M^\circ)$。事实上，与命题 3.15 的证明类似，存在一个同调映射的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^n_k & \xleftarrow{\text{cl}} & \mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^i & \xrightarrow{\text{r}} & \mathbb{R}_{\geq 0} \\
{\scriptstyle (I)}\downarrow & & \searrow^{\text{cl}}\ {\scriptstyle (II)} & & \downarrow{\scriptstyle \text{cl}} \\
\mathbb{R}^n_k & \longrightarrow & \mathbb{R}^n_{k,\sigma} & \dashleftarrow & \mathbb{R}^n_{k,\overline{\sigma}} \longrightarrow \mathbb{R}^n_n
\end{array}$$

其中 $i=|\{\sigma=\eta\}|$（关于此记号的细节见定义 3.9），(II) 是坐标 $\{\sigma=\eta\} \subset \{k,\dots,k+d-1\}$ 的包含，且 (I) 定义如下：

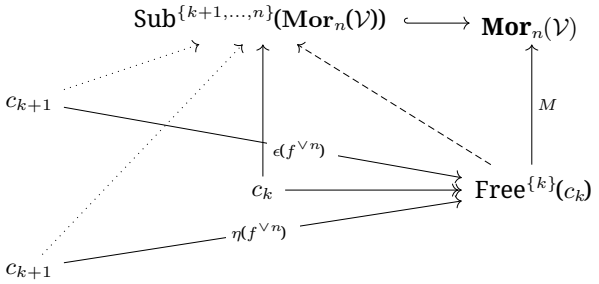
- 若 $i=n-k$，则 (I) 为恒等映射，
- 若 $i<n-k$，则 (I) 是一个自同构，它通过将 $\{\sigma=\eta\}+1$ 送到 $\{k+1,\dots,k+d\}$ 来置换坐标，并在必要时翻转其余坐标之一的符号，以确保定向得以保持。

无论如何，(I)都同位于恒等映射。根据注记 3.2，图表的每个面都满足引理 3.5 的条件，从而得到代数范畴之间函子的交换图。这证明了所声称的作用。

因此，其次只需对 k 向下归纳证明以下结果：M 完全可对偶，当且仅当对于所有 $\sigma \in \{\epsilon,\eta\}^d$ 的 d-对偶数据，$\sigma(M)$ 和 $\sigma(M^\circ)$ 作为 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的 n-态射时，都有左伴随和右伴随。

• **情形 $k = n - 1$：** 由引理 4.1，上述条件等价于完全-$\{n-1\}$-伴随中的每个单位与余单位都具有左伴随和右伴随。由推论 3.9，这些单位与余单位由代数 $\eta(M)$、 $\epsilon(M)$、 $\eta(M^\circ)$、 $\epsilon(M^\circ)$ 描述。由命题 3.11，这等价于定理陈述中的条件。

• **归纳步骤：** 首先注意到，根据推论 2.13 和推论 2.15，由于 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 具有 $\{1,\dots,n-1\}$-伴随， M 是完全可对偶的，当且仅当我们可以提升虚线箭头；而这又当且仅当我们可以提升每一条点线箭头：



换言之， M 是完全可对偶的，当且仅当完全-$\{k\}$-伴随中涉及的所有单位与余单位本身都是完全可对偶的。如上所述，由推论 3.9，这些单位与余单位由代数 $\eta(M)$、 $\epsilon(M)$、 $\eta(M^\circ)$、 $\epsilon(M^\circ)$ 描述。由归纳假设，对偶则等价于：对所有 $\sigma \in \{\epsilon,\eta\}^{d-1}$ a $(d-1)$-对偶数据， $\sigma(\eta(M))$、 $\sigma(\epsilon(M))$、 $\sigma(\eta(M^\circ))$、 $\sigma(\epsilon(M^\circ))$、 $\sigma(\eta(M)^\circ)$、 $\sigma(\epsilon(M)^\circ)$、$\sigma(\eta(M^\circ)^\circ)$ 和 $\sigma(\epsilon(M^\circ)^\circ)$ 在被视为 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的 n-态射时，都具有左伴随和右伴随。利用引理 3.10 以及 $\circ$ 与 $\eta \leftrightarrow \epsilon$ 的交换性质，我们可以完成证明。 ■

特别是，在谱的范畴 $\mathcal{S}p$ 中，可对偶化模作用已得到充分理解，因此我们可以立即得到以下推论。

推论 4.3（环谱的完全可对偶化）

设 $0 \le k < n$ 和 $M\colon\ c_k \to \mathbf{Mor}_n(\mathcal{S}p)$ 如上文构造 *4.1* 所述，并满足 $\mathcal{V} = \mathcal{S}p$。那么， M 完全可对偶，当且仅当对于所有 $1 \le i \le n-k$，典范作用

$$\int_{(S^{i-1},D^i)} (M,A) \curvearrowright M$$

$$M \curvearrowleft \int_{(S^{i-1},D^i)} (M,B)$$

使 M 成为完美模或紧模，其中 A （分别为 B）是 M 的（余）定义域（关于这些作用的详情，见构造 *4.1*）。

证明： 这直接由定理 4.2 和推论 3.12 得出。 ■

注 4.2（刻画其他高阶范畴中的全对偶可对偶性）。 证明中隐含地用到了以下事实：如果 f 是 $k \le l$中的完全可对偶 k-态射，那么对于一个 $l-k+1$-对偶数据，完全对偶可对偶等价于所有 σ（f）都具有针对 $\sigma \in \{\epsilon,\eta\}^{l-k+1}$ 的左伴随。利用第 2 节的工具，可以在任意高阶范畴中按照相同的论证独立证明这一点。只需再证明几个“冗余性”引理即可。在我们的情形中，Morita 范畴是借助自然对称性 $\mathbf{Aut}(X) \curvearrowright \mathbf{Alg}_X$构造的（见定义 3.3），这使我们能够轻松利用这种冗余性。

备注 4.3（其他证明策略）。 对于这一结果，有许多可能的证明策略，按与此处所述证明的接近程度从近到远排列如下：

• 可以改为对 k 进行向上归纳，并在捏缩构造中使用某种右结合引理。要详细阐述这一引理会复杂得多，因为其中涉及的分层更为复杂，但核心思路相同。

• 也可以设想一种更初等的证明，不明确描述上述结果中的捏合映射，而是直接写出归纳论证。不过，这种方法不太适用于定理 B 的证明；在那里，明确描述捏合映射对于阐明命题 3.15 很有帮助。

• 也可以尝试写出 (∞,n)-函子 $\mathcal{B}\mathrm{ord}_{\mathrm{fr}_n} \to \mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$，并利用把手体分解来确定在最高 n-态射层级上哪些作用需要可对偶。这是一种技术性强得多的方法。 [Sch14] 使用因子化代数和相对范畴的语言，为 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 的带基点版本构造了这样一个函子。遵循这一方法的证明将涉及重新证明

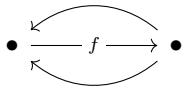
许多已经在 [AFT17b, AFR18a, AFT17a] 中给出、但采用不同形式体系的技术性结果，或者证明这两种形式体系等价。我们通过采用一个关键思路避免了这一点：判定一个态射是否完全可对偶，并不一定是一个同伦凝聚问题。

4.2 定理 B

与定理 A的证明类似，我们从一个冗余引理开始。只是这一次，我们关注的是可逆性性质的冗余。

引理 4.4（可逆性的冗余）

设 $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}^{(\infty,2)}$，并假设我们有两个平行伴随



在 $\mathcal{C}$ 中，且它们的单位都是等价。那么 f 是等价。

证明： 注意，等价和伴随可在同伦 (2,2)-范畴中检测。不失一般性，可以假设 $\mathcal{C}$ 是一个 $(2,2)$-范畴。在这种情况下，可以利用双范畴米田引理 [JY21，引理 8.3.12]，将问题归约到 $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}^{(1,1)}$ 的情形。在 $\mathbf{Cat}^{(1,1)}$ 中，下伴随的单位是自然同构，这意味着 f 是全忠实的，而这又意味着上伴随的余单位是自然同构。因此，上伴随将 f 呈现为一个（伴随）等价。 ■

利用上述引理，我们便可以证明第二个准则。

定理 4.5（可逆性准则）

设 $\mathcal{V} \in \mathbf{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathbf{Cat}_{(\infty,1)}^{\mathsf{geom}-\mathrm{colim}})$ 是一个具有几何实现和相容的张量积的对称幺半 *{style id='12'>(*$\infty, 1$)-范畴。设 $0 \le k < n$ 和 M 是 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的一个 k-态射。那么，M 可逆，当且仅当它是完全可对偶的，并且对于所有 $1 \le i \le n-k$，泛 $\mathcal{E}_{n-k-i+1}$-代数映射

$$\int_{(S^{i-1},D^i)} (M, A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{HC}^B_{\mathcal{E}_{n-k-i}}(M)$$
$$\int_{(S^{i-1},D^i)} (M, B) \xrightarrow{\sim} \mathbf{HC}^A_{\mathcal{E}_{n-k-i}}(M)$$

都是等价，其中 A（分别地，B）是 M 的（余）定义域（关于这些映射的详细信息，见构造 *3.9*）。

从根本上说，可以将这些映射的可逆性理解为：M 相对于 A 的 $(i-1)^{\text{th}}$-高阶霍赫希尔德同调计算了以 B-线性方式作用于 M 的泛 $\mathcal{E}_{k-n-i+1}$-代数，反之亦然。注意，再一次地，我们得到了 Lurie 关于 $k=0$ 的准则；更熟悉地，当 $n=1$ 和 $k=0$ 时，我们得到了 Azumaya 代数的通常条件：M 是可对偶的，并且

$$k \xrightarrow{\sim} \mathbf{HC}_{\mathcal{E}_1}(M)$$
$$M^{\mathrm{op}} \otimes_k M \xrightarrow{\sim} \mathbf{End}_k(M)$$

证明： 根据引理 2.17，函子 $\mathrm{Free}^{\{k,\dots,n\}}(c_k) \twoheadrightarrow c_{k-1}$ 是满态射，并且在前复合下对应于某个 $[c_k, \mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})]_{\simeq} \hookrightarrow [\mathrm{Free}^{\{k,\dots,n\}}(c_k), \mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})]$。因此，任何可逆的 k-态射都自动是完全可对偶的。于是我们可以假设 M 是完全可对偶的，并证明可逆性等价于这些代数映射全部可逆。

设 $d = n-k$（它可以为零）。与定理 A 类似，现在利用命题 3.15，我们首先注意到，这些映射全部可逆，恰好等价于以下陈述：对于任意 $\sigma \in \{\epsilon, \eta\}^d$ 的一个 d-对偶数据，$\sigma(M) \dashv \sigma(M)^\vee$ 以及 $\sigma(M)^\circ \dashv (\sigma(M)^\circ)^\vee$ 的单位均可逆。因此，只需通过对 k 作向下归纳，证明 M 的可逆性与这一条件等价。

- **基例** $k = n$**：** 这直接由上面的引理 4.4 得出。
- **归纳步骤：** 根据引理 2.16 和推论 3.9，M可逆，当且仅当 $\epsilon(M)$ 和 $\eta(M)$ 作为 $\mathbf{Mor}_n(\mathcal{V})$ 中的 $(k+1)$-态射是可逆的。由归纳假设和引理 3.10，结论随即成立。

■

参考文献

[AF18] David Ayala 和 John Francis。带标记的高阶范畴。2018 年。[AF24] David Ayala 和 John Francis。缠结假设：维数 1。2024 年。[AFR18a] David Ayala、John Francis 和 Nick Rozenblyum。因子化同调 I：高阶范畴。《数学进展》，333：1042–1177，2018 年 7 月。[AFR18b] David Ayala、John Francis 和 Nick Rozenblyum。分层同伦假设。《欧洲数学会杂志》，21(4)：1071–1178，2018 年 12 月。[AFT17a] David Ayala、John Francis 和 Hiro Lee Tanaka。分层空间的因子化同调。《数学选刊》，23(1)：293–362，2017 年 4 月。[AFT17b] David Ayala、John Francis 和 Hiro Lee Tanaka。分层空间上的局部结构。《数学进展》，307：903–1028，2017 年 2 月。[Bar05] Clark Barwick。（∞, n）-范畴作为闭模型范畴。博士论文，2005 年。版权 - 数据库版权归 ProQuest LLC 所有；ProQuest 不主张对底层单独作品享有版权；最后更新于 2023-03-03。[BD95] John C. Baez 和 James Dolan。高维代数与拓扑量子场论。《数学物理学杂志》，36(11)：6073–6105，1995 年 11 月。[BJSS21] Adrien Brochier、David Jordan、Pavel Safronov 和 Noah Snyder。可逆编织张量范畴。《代数与几何拓扑》，21(4)：2107–2140，2021 年 8 月。[BS24] Shaul Barkan 和 Jan Steinebrunner。Segal 化与 Boardman-Vogt 张量积。2024 年。[BSP20] Clark Barwick 和 Christopher Schommer-Pries。关于高阶范畴同伦论的唯一性。《美国数学会杂志》，34(4)：1011–1058，2020 年 4 月。[DS11] Daniel Dugger 和 David Spivak。拟范畴的刚性化。《代数与几何拓扑》，11(1)：225–261，2011 年 1 月。[Hau17a] Rune Haugseng。 $\mathbb{E}_n$-代数的高阶 Morita 范畴。《几何与拓扑》，21(3)：1631–1730，2017 年 5 月。[Hau17b] Rune Haugseng。关于 Θ_n-空间与迭代塞加尔空间之间的等价。《美国数学会会刊》，146(4)：1401–1415，2017 年 12 月。[Hau23] Rune Haugseng。关于高阶 Morita 范畴的一些注记。2023 年。[HHLN24] Rune Haugseng、Fabian Hebestreit、Sil Linskens 和 Joost Nuiten。松幺半伴随、双变量纤维化与伴随变换演算。2024 年。[Joy97] Andr´e Joyal。圆盘、对偶与 θ-范畴。1997 年。[JY21] Niles Johnson 和 Donald Yau。二维范畴。牛津大学出版社，牛津，2021 年 1 月。[Lur09a] Jacob Lurie。高阶托扑斯理论。（AM-170）。普林斯顿大学出版社，2009 年。[Lur09b] Jacob Lurie。拓扑场论的分类。2009 年。[Lur17] Jacob Lurie。高阶代数。https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf，2017 年 9 月。[Lur18] Jacob Lurie。Kerodon。https://kerodon.net，2018 年。[Ram24] Maxime Ramzi。局部刚性的 ∞-范畴。2024 年。[Rez01] Charles Rezk。同伦论之同伦论的模型。《美国数学会汇刊》，353(3)：973–1007，2001 年。[Rez10] Charles Rezk。弱 n–范畴的笛卡尔表示。《几何与拓扑》，14(1)：521–571，2010 年 1 月。

[RV16] Emily Riehl 和 Dominic Verity。《同伦相干伴随与单子形式理论》。《数学进展》，286:802–888，2016年1月。[Sch14] Claudia Isabella Scheimbauer。《作为完全扩展拓扑场论的因子化同调》。博士论文，苏黎世联邦理工学院，苏黎世，2014年。论文，苏黎世联邦理工学院 ETH 苏黎世，编号 22130。[SS86] Stephen Schanuel 和 Ross Street。《自由伴随》。拓扑与微分几何范畴手册，27(1):81–83，1986年。[To¨e12] Bertrand To¨en。《导出阿祖玛雅代数与扭曲导出范畴的生成元》。数学发明，189(3):581–652，2012年1月。