arXiv:2603.05733v1 [math.FA] 5 Mar 2026

广义 b-弱紧算子及其通过 KR-空间的分解

NABIL MACHRAFI 和 BIROL ALTIN

Abstract. 我们进一步研究局部凸实 Riesz 空间上广义 b-弱紧算子这一类，并针对这一主题给出新的序列刻画和算子刻画。我们明确引入所谓的 KR-空间，以类比著名的通过 KB-空间对 b-弱紧算子进行的分解，研究广义 b-弱紧算子的分解问题。

1. Introduction

本文进一步研究局部凸实 Riesz 空间上广义 b-弱紧算子这一类。这些算子将拓扑上 b-序有界集映射到巴拿赫空间中的相对弱紧集。它们自然地扩展了巴拿赫格上的 b-弱紧算子；这类算子将 b-序有界集映射到相对弱紧集。设 E 是具有分离序对偶的里斯空间，若其子集作为序二重对偶 $E^{\sim\sim}$ of E.的子集是序有界的，则称其为 b-序有界集。若 E 是局部凸实空间，则若某个子集作为 E.的强双对偶 E'' 的子集是序有界的，就称其为拓扑上b-序有界集。请注意，对于巴拿赫格这一特殊情形 E, 有 $E^{\sim\sim} = E''$，因此拓扑上 b-序有界集与 b-序有界集相同。这表明，如前所述，广义 b-弱紧算子将 b-弱紧算子很好地扩展到了局部凸实里斯空间的一般情形。

虽然后一类算子在文献中占有重要地位（例如参见 [3, 4, 5, 6, 7], ），但广义 b-弱紧算子类是近期才引入的。与关于巴拿赫格上 b-弱紧算子的丰富文献相比，作者成功地将若干结果推广到了 Fr´échet 格以及具有适当完备性、拓扑和定义域空间序条件的局部凸实空间；参见[8, 11]。在此，我们给出了局部凸实 Riesz 空间上这类算子的序列刻画，且不要求任何完备性，也不附加其他拓扑或序条件；见定理 3.4。

此外，为了展现这类算子的重要性，我们建立了一种新的算子刻画，用以刻画其在强双对偶中为带的 Fr´echet 格；见定理 3.8。这是巴拿赫格理论中一个众所周知事实的自然推广：巴拿赫格 E 是其二次对偶 E'' 中的带，当且仅当 E 是

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46A40，46B42，47B60。*Key words and phrases.* （拓扑） b-序有界集，（广义） b-弱紧算子，局部凸实 Riesz 空间，Fr´échet 格，巴拿赫格。

KB-空间，或者等价地， E 上的恒等算子是 b-弱紧的。这促使我们在第4节引入并研究局部凸固体里斯空间中与 KB-空间等价的概念。这类空间被我们称为 KR-空间（即康托罗维奇-里斯空间），其中拓扑有界的递增正网均收敛。

因此，在对这类空间进行内在研究之后，首先想到的问题是：类比于众所周知的关于通过 KB-空间分解 b-弱紧算子的分解定理，研究广义 b-弱紧算子通过 KR-空间的分解问题。该定理指出，从具有序连续范数的巴拿赫格到巴拿赫空间的连续算子，当且仅当它是 b-弱紧算子时，才能通过 KB-空间进行分解； [7, 命题 2]。我们将这一分解定理成功推广到广义 b-弱紧算子类；正如预期的那样，用 KR-空间替代了 KB-空间；定理 5.1。接下来，一个关于这一分解结果的有趣问题出现了：局部凸实 Riesz 空间上的广义 b-弱紧算子能否通过 KB-空间进行分解？对于这一问题，我们给出了部分肯定的答案，即当定义域空间是戴德金完备序连续赋范里斯空间时；定理 5.2；或者当该算子具有一种我们在本文中引入并称为序列正逆有界性的特殊逆有界性；定义5.3和定理 5.10。

最后，在全文中，我们给出了局部凸固体里斯空间这一推广框架所特有的关键概念的说明性例子，并考察从局部凸实 Riesz 空间到巴拿赫空间的广义 b-弱紧、序弱紧与弱紧算子之间的关系。

全文中，局部凸空间均为豪斯多夫空间，里斯空间均为阿基米德空间。算子一词指两个实向量空间之间的线性映射。局部凸空间 E 的拓扑对偶 E' 指强对偶，即赋予强拓扑 $\beta(E', E)$的 E' 。关于局部坚实Riesz空间与巴拿赫格的更多细节以及未加解释的术语与记号，请读者参阅 [1, 2, 12]。

2. Examples and some results

首先注意到，若里斯空间 E 具有分离序对偶 $E^{\sim}$，则E 可视为序二重对偶 $E^{\sim\sim}$ 的子集；于是，子集 $A \subset E$称为 b-序有界，如果它作为 $E^{\sim\sim}$. 的子集是序有界的。里斯空间 E 具有分离序对偶的一个典型情形是 E 为局部凸固体的，此时有 $E' \subset E^{\sim}$. 。注意，此时自然嵌入$E \hookrightarrow E''$ 是格嵌入。因此，在这一框架中出现了另一类 b-序有界性，即所谓拓扑 b-序有界集。由 [11], ，子集 $A \subset E$ 称为拓扑 b-序有界，如果它作为强双对偶 E''. 的子集是序有界的。关于这一概念及其与 b-序有界性之关系的更多细节，请读者参阅 [8, 11]。

现在让我们回顾 [11]： 从局部凸实里斯空间到巴拿赫空间的算子 T: $E \to X$ 称为广义 b-弱紧算子（下文简称 gbwc），如果它将 E 中拓扑 b-序有界集映射为 X. 中相对弱紧的集合。

我们给出以下例子，这些例子专门针对（非巴拿赫）局部凸实里斯空间的情形，表明从 E 到 X 的弱紧算子类（即将拓扑有界集映射为相对弱紧集的算子），一般可能真包含于从 E 到 X 的 gbwc 算子类。

例 *2.1.* 设 $E=(l_1,|\sigma|(l_1,c_0))$ 且 $I:(l_1,|\sigma|(l_1,c_0)) \to (l_1,\|.\|_1)$ 为恒等算子。于是，$E''=E$，其中此处的等式指半自反性意义下的等式。因此，在拓扑意义下，b-序有界子集与序有界子集相同。由于 l_1 具有序连续范数，因此 I 是序弱紧的，即 *gbwc*。现在，l_1 的闭单位球 B_{l_1} 是 $\sigma(l_1,c_0)$-有界的。由于 $|\sigma|(l_1,c_0)$ 与对偶 $\langle c_0,l_1\rangle$ 相容，因此，l_1 的 $|\sigma|(l_1,c_0)$-有界子集与 $\sigma(l_1,c_0)$-有界子集相同。因此，B_{l_1} 是 $|\sigma|(l_1,c_0)$-有界的。但是，B_{l_1} 在 $(l_1,\|.\|_1)$ 中并非相对弱紧。这表明算子 I 不是弱紧的。

注意，拓扑 $|\sigma|(l_1,c_0)$ 不可度量化。事实上，若它可度量化，由于 $|\sigma|(l_1,c_0)$ 是完备的（见 [15, 命题 0.6.2]），那么 $|\sigma|(l_1,c_0)$ 就可赋范，因为该空间至多只有一种 Fr´echet 格拓扑。但这意味着 c_0 有一个序单位（见 [13, 命题 1.3]），矛盾。以下

g example p说明了不完备的情形。 p。

例 2.2. 设里斯空间 c_{00} 是由最终为零的实数列构成的空间，并赋予其范数 $\|.\|_1$ *of* l_1，考虑单射 $i:\ c_{00} \to (l_1,\|.\|_1)$。由于$c_{00}''=l_1''=l_\infty'$，因此 c_{00} 中每个拓扑上 b-序有界集在 l_1. 中也序有界。后一个空间是具有性质 (b) 的巴拿赫格，因此其（拓扑上）b-序有界集与序有界集相同。由于 l_1 具有序连续范数，其序区间是弱紧的。因此，单射 i 是 *gbwc*。现在，c_{00} 的单位球 $B_{c_{00}}$ 在 l_1 中的闭包为 B_{l_1}，它不是弱紧的。这表明单射 i 不是弱紧的。

另一方面，如果 $(E,\ \tau)$ 是半自反局部凸实里斯空间，那么 E 的每个拓扑有界子集都是相对弱紧的，因此从 $E \to X$ 到任意巴拿赫空间的每个连续算子（尤其是每个连续 gbwc 算子）T 都是弱紧的。注意，E 是戴德金完备的，由 [1, 定理 22.4] 可知，拓扑 τ 和 β（E'，E）都是勒贝格的。

这些事实促使我们得到以下结果。

定理 2.3. 设 (E,τ) 是一个戴德金完备局部凸固体黎曼空间，且拓扑 τ 和 $\beta(E',E)$ 都是勒贝格的。那么，从 E 到巴拿赫空间 X 的每个连续 *gbwc* 算子 T 都是弱紧的。

证明。设 A 是 τ-有界子集。根据麦基定理，A 弱有界。因此，A° 是 A 的一个 $\beta(E',E)$- 零邻域。由阿劳格卢 - 布尔巴基定理可知，相对于对偶 $\langle E',E''\rangle$，A° 的极集 $A^{\circ\circ}:=(A^\circ)^\circ$ 在 E''. 中是 $\sigma(E'',E')$-紧的。由于 $A\subset A^{\circ\circ}$，因此 A 在 E''. 中是相对 $\sigma(E'',E')$-紧的。现在，由于 T 是 gbwc，根据 [11, 定理 3.18] T''（$B(E)$）$\subset X$，其中 $B(E)$ 是 E''. 中由 E 生成的带。由于 $\beta(E',E)$ 是勒贝格的，根据 [1, 定理 22.3] B（E）$=E''$.。因此，$T(A)=T''(A)\subset X$。由于 T''：$E''\to X''$ 是弱星到弱星连续的，且 $\sigma(X'',X')$ 诱导 $\sigma(X,X')$

在 X，容易证明 $T(A)$ 在 X 中是相对弱紧的。这表明 T 如所需为弱紧。□

注记 2.4. （1）我们不能去掉条件 β（E'，E）为勒贝格的，因为恒等算子 I：$l_1 \to l_1$ 的例子已经在巴拿赫格的情形中表明了这一点。（2）另一方面，由 [3] 存在一个巴拿赫格 E，使得 E' 具有序连续范数，并且存在一个 b-弱紧算子 T：$E \to X$，它不是弱紧的。这表明，在上述定理中不能去掉条件 τ 为勒贝格的。（3）此外，例 *2.1* 表明，T 的连续性在上述定理中是必不可少的。

下面的推论是上述定理的直接结果。

推论 2.5. 若 E 是一个戴德金完备的赋范 *Riesz* 空间，使得 E 与 E' 的范数都是序连续的，则从 E 到巴拿赫空间 X 的每个连续 *gbwc* 算子T 都是弱紧的。

回顾一下，若算子 $T : E \to X$ 将E 的序有界集（等价地，序区间）映射到 X.的相对弱紧集，则称其为序弱紧（下文简称 owc）。

此外，在定义域空间不完备的一般情形下，从 E 到 X 的 gbwc 算子类可能真包含于从 E 到 X.的 owc 算子类。

例 2.6。考虑单射 $i : (c_{00}, \|.\|_\infty) \to (c_0, \|.\|_\infty)$。由于 c_{00} 的闭单位球 $B_{c_{00}}$ 在 $l_\infty = c_{00}''$ 中范数有界，因此它在 c_{00}''中序有界，也就是说，$B_{c_{00}}$ 在 c_{00}. 中是拓扑 b-序有界的。但由于$B_{c_{00}}$ 的范数闭包是 B_{c_0}，即 c_0的闭单位球，因此 i 不是 *gbwc*。现在，若 $[-x, x]_{c_{00}}$ 是 c_{00}中的一个序区间，则 $[-x, x]_{c_{00}}$ 在 c_0 中的范数闭包是 c_0. 中的序区间$[-x, x]_{c_0}$。由于后一个空间的范数序连续，c_0 的序区间是弱紧的。这说明 i 确实是序弱紧的。

回顾 [10]，如果局部坚实 Riesz 空间（E，τ）满足 BOB- 性质，那么对于任意网（x_α）$\subset E$，只要 $0 \le x_\alpha \uparrow$ 且（x_α）拓扑有界，它就是序有界的；也就是说，存在元素 x 属于 E，使得$0 \le x_\alpha \le x$；参见 [8, 10]。

下面的命题给出了一个充分条件，在该条件下，从 E 到 X 的 gbwc 算子类与 owc 算子类相同。

命题 2.7. 设 E 是具有 *BOB-* 性质的局部凸实 *Riesz* 空间，且 X 是巴拿赫空间。那么，算子 $T : E \to X$ 是 *gbwc* 算子，当且仅当它是 *owc* 算子。

证明. 由 [8，命题 1] 可得。□

推论 2.8. 设 E 和 X 分别为局部凸实 *Riesz* 空间和巴拿赫空间，且典范嵌入 $E \hookrightarrow E''$ 连续。那么，对于每个算子 $T : X \to E$，其伴随算子 $T' : E' \to X'$ 是 *gbwc* 算子，当且仅当它是 *owc* 算子。

证明。这由上述命题和 [8, 定理 6]得出。□

命题 2.9。 设 E 和 X 分别为局部凸实 *R* 空间和巴拿赫空间。那么，对于每个算子 T: $E \to X$，若 T'': $E'' \to X''$ 是 *owc*，则 T: $E \to X$ 是 *gbwc*（因此也是 *owc*）。

证明。 假设子集 $A \subset E$ 在拓扑意义下是 *b*-序有界的。由于 A 在 E'' 中序有界，且 T'': $E'' \to X''$ 是序弱紧的，因此 $T(A) = T''(A)$在 X''. 中相对弱紧。由于单射 i: $X \to X''$是从 X 到 $i(X)$的巴拿赫空间同构，因此 $T(A)$在 X. 中相对弱紧。这表明 T 是 gbwc 算子，证毕。□

推论 2.10。 设 E 和 X 分别为局部凸实 *Riesz* 空间和巴拿赫空间。那么，对于每个算子 T: $E \to X$，若 T'': $E'' \to X''$ 是 *gbwc* 算子，则 T: $E \to X$也是 *gbwc* 算子。

Meyer-Nieberg 的以下例子表明，在巴拿赫格的情形下，gbwc 算子的二次伴随不一定是 gbwc 算子。为作完整说明，我们在此详细介绍该例子。

例 2.11 ([12, p 95]). 设 $E = c_0(l_1^n)$ 定义如下:

$$c_0(l_1^n) = \left\{x = (x_n) : x_n = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^n) \in \ell_1^n \text{ and } (\|x_n\|_1)_{n=1}^{\infty} \in c_0\right\}$$

赋予范数

$$\|x\| = \max\{\sum_{i=1}^{n} \left|x_n^i\right| : n \in \mathbb{N}\}.$$

那么，

$E' = l_1(l_\infty^n) := \left\{x = (x_n) : x_n = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^n) \in l_\infty^n \text{ and } (\|x_n\|_\infty)_{n=1}^{\infty} \in l_1\right\}$

∞赋予范数$\|x\| = \sum \|x_n\|_\infty$. 由此可知， E' 是一个 *KB* 空间，但 E 的三次$_{n=1}$对偶 E''' 不是 *KB* 空间（因此不具有序连续范数）。所以， E' 上的恒等算子 I 是 *b*-弱紧（序弱紧）的。但， I 的二次伴随是 E''' 上的恒等算子，而该算子不是 *b*-弱紧（序弱紧）的。

还请注意， E 的二次对偶 E'' 为

$E'' = l_\infty(l_1^n) := \left\{x = (x_n) : x_n = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^n) \in l_1^n \text{ and } (\|x_n\|_1)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty\right\}$

赋予范数

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_1 .$$

因此， E'' 的范数不是序连续的。

当巴拿赫格 E 及其对偶 E' 的范数都是序连续的时，情况有所不同。如下命题给出了定义域空间关于 gbwc 算子具有 gbwc 二阶伴随算子的一个充分条件。

命题 2.12。 设 (E, τ) 是一个戴德金完备局部凸固体黎曼空间，使得 E' 是一个 *Fr´echet* 格，且拓扑 τ 和 $\beta(E', E)$ 都是勒贝格的。那么，对于从 E 到巴拿赫空间 X 的连续算子 T，以下断言等价:

(1) T: $E \to X$ 是 gbwc。(2) T: $E \to X$ 是弱紧。

(3) $T'' : E'' \to X''$ 是弱紧。(4) $T'' : E'' \to X''$ 是 gbwc。

证明。 $1 \Rightarrow 2$ 由定理 2.3 得出。$2 \Rightarrow 3$ 由 [14, 定理 3.1] 得出。$3 \Rightarrow 4$ 显然。$4 \Rightarrow 1$ 由推论 2.10 得出。 □

3. Characterizations of gbwc operators

定理 3.1。设 $T : E \to X$ 是从局部凸实 *Riesz* 空间到巴拿赫空间的 *gbwc* 算子。那么，对于每个递增且拓扑有界的序列$(x_n) \subset E^+$， $T(x_n)$ 在 X 中范数收敛。

证明。设 (x_n) 是 E^+中的递增且拓扑有界序列。那么，由 [1, 定理 19.17] $x'' \in E''_+$ 存在 $0 \le x_n \uparrow x''$. 。定义格范数$\|x\|_{x''} = \inf \{\lambda > 0 : |x| \le \lambda x''\}$ 在 $E_{x''} = E \cap I_{x''}$, 上，其中 $I_{x''}$ 是 E''.中由 x'' 生成的主理想。令 $T_{x''}$ 为 T 在 $E_{x''}$. 上的限制。那么，$T_{x''} : E_{x''} \to X$是弱紧算子。由 [14, 定理 3.1]， $T''_{x''} : E''_{x''} \to X''$ 同样是弱紧算子，因此是 b-弱紧的。由于 (x_n) 是$E^+_{x''}$, 中的递增且拓扑有界序列，$(T_{x''}(x_n))$ 在 X''. 中收敛。由于 X 在X'', 中范数闭，因此 $(T_{x''}(x_n))$ 在 X. □中收敛。

下面的主要结果刻画了赋范里斯空间 E 上的连续 gbwc 算子：其连续延拓到$\widehat{}$范数完备化 E of E后是 b-弱紧的。

定理 3.2. 设 $T : E \to X$ 是从赋范里斯空间到巴拿赫空间的连续算子。那么，以下断言成立：

(1) T 是 *gbwc*。(2) $T(x_n)$ 在 X 中范数收敛，对每个递增且范数有界的序列$(x_n) \subset E^+$.$\widehat{}$ $\widehat{}$(3) 连续延拓 $T : E \to X$ 是 b-弱紧的。

证明。 $1 \Rightarrow 2$ 即为定理 3.1。

$\sim 2 \Rightarrow 3$ ：设 $\varepsilon > 0$ 和 (x_n) 范数有界，且 $0 \le x_n \uparrow$ 属于 E.。这里，我们采用与定理 4.11 (Luxemburg) 的证明相同的思路，或者也可以参照引理 3.3] 的证明。存在一个序列 $(y_n) \subset E^+$ ，使得$\|x_n - y_n\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|} 2^{-n}$.。对每个 n，令 $z_n = \vee_{i=1}^n y_i$，并注意到 $0 \le z_n \uparrow$。根据引理 3.2], ，有

$$|x_n - z_n| = |\vee_{i=1}^n x_i - \vee_{i=1}^n y_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

对每一个 n，因此 $\|x_n - z_n\| \le \frac{\varepsilon}{\|T\|}$ 对每一个 n. 成立。因此，

$$\|z_n\| \le \|z_n - x_n\| + \|x_n\| \le \frac{\varepsilon}{\|T\|} + \|x_n\|$$

对每个 n, 因此，(z_n) 在 E中是范数有界的。由假设可知，对某个 $y_0 \in X$，$T(z_n) \to y_0$ 依范数。因此，存在自然数 n_0，使得对每个 $n \ge n_0$. ， $\|T(z_n) - y_0\| \le \varepsilon$ 。于是，

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{T}(x_n)-y_0\right\| &= \left\|\widehat{T}(x_n)-\widehat{T}(z_n)+\widehat{T}(z_n)-y_0\right\| \\ &\le \left\|\widehat{T}(x_n-z_n)\right\|+\|T(z_n)-y_0\| \\ &\le \|T\|\,\|x_n-z_n\|+\|T(z_n)-y_0\|\le 2\varepsilon\end{aligned}$$

对每个 $n\ge n_0$. 。也就是说，$T(x_n)\to y_0$ 依范数。由 [7, 命题 1]，T： $E\to X$是 b-弱紧的，即为所求。

$3\Rightarrow 1$: 若 A 在拓扑意义下是 b-序有界的，那么 A 是 b-序有界的。从假设 $T(A)$ 可知，$=T(A)$ 在 X 中相对弱紧。因此，T 是 gbwc。□

接下来，以下引理将在后文中派上用场。

引理 3.3。设 T： $E\to X$ 是从赋范 *Riesz* 空间到巴拿赫空间的算子。若对于每个递增的范数有界序列 $(x_n)\subset E^+$，(Tx_n) 都收敛，则 T 是连续算子。

证明。假设 T 无界。则存在$(x_n)\subset E$，满足 $\|x_n\|=1$，且对每个 n有 $\|T(x_n)\|\ge n^3$。对每个 n，令 $u_n=\sum_{i=1}^{n} x_i^+/i^2$ 与 $v_n=\sum_{i=1}^{n} x_i^-/i^2$。显然，$(u_n)$与$(v_n)$在 E^+. 中递增且范数有界。由假设，序列 $T(u_n)=\sum_{i=1}^{n} T(x_i^+/i^2)$与 $T(v_n)=\sum_{i=1}^{n} T(x_i^-/i^2)$收敛。由于 X是巴拿赫空间，$T(x_n^+/n^2)\to 0$ 与 $T(x_n^-/n^2)\to 0$依范数收敛。由此可得 $T(x_n/n^2)\to 0$依范数收敛，这是不可能的。因此，T 如所期望是连续的。□

现在，我们得到局部凸实 Riesz 空间上 gbwc 算子的如下序列刻画。

定理 3.4。从局部凸实 *Riesz* 空间到巴拿赫空间的算子 T： $E\to X$ 是 *gbwc*，当且仅当对于每个递增且拓扑有界的序列 $(x_n)\subset E^+$，(Tx_n) 收敛。

证明。“仅当”部分即为定理 3.1。对于“当”部分，只需证明对于每个拓扑 b-序有界集 $A\subset E^+$.，$T(A)$ 在 X 中是相对弱紧的。对于这样的集合，存在 $x''\in E_+''$，使得对于每个 $a\in A$. 都有 $0\le a\le x''$。由于 E 中的拓扑 b-序有界集是拓扑有界的（见 [11,命题 3.8]），根据假设，对于每个递增且范数有界的序列（x_n）$\subset E_{x''}^+$，$(T_{x''}x_n)$ 都收敛，其中 $T_{x''}$： $E_{x''}\to X$ 是 T 在 $E_{x''}$ 上的限制。注意到，根据上面的引理 3.3，$T_{x''}$ 是连续的。由定理 3.2 可知，$T_{x''}$： $E_{x''}\to X$ 是 b-弱紧的。令 $\mathcal{A}$ 为 A. 中有限多个元素的上确界所组成的集合。于是，$0\le\mathcal{A}\uparrow\le x''$. 。也就是说，$\mathcal{A}$ 在 $E_{x''}^+$. 中递增且范数有界。由此，$\mathcal{A}$ 在 $E_{x''}$ 中是拓扑 b-序有界的；或者 $\mathcal{A}$ 在 $E_{x''}$. 中是 b-序有界的。因此，$T_{x'}(\mathcal{A})$ 在 X. 中是相对弱紧的。于是，$T(A)=T_{x''}(A)\subset T_{x''}(\mathcal{A})$ 在 X. 中是相对弱紧的。这表明，T 是一个 gbwc，证毕。□

注释 3.5。上述定理拓展了相关文献中的结果，而这些结果通常假设定义域空间满足完备性条件；参见[7,命题 1] 和 [11,定理 3.11(3)]。

推论 3.6。 设 S、T： $E \to X$ 是从一个局部凸实 *Riesz* 空间到一个巴拿赫格 X 的两个算子，且 $0 \leq S \leq T$。那么，当T 为 *gbwc* 时， S 也是 *gbwc*。

证明。 如果 (x_n) 在 E_+ 中递增且拓扑有界，并且在 $n \geq m$ 中，那么

$$|S(x_n) - S(x_m)| = S(x_n - x_m) \leq T(x_n - x_m) = T(x_n) - T(x_m).$$

由此可得 $\|S(x_n) - S(x_m)\| \leq \|T(x_n) - T(x_m)\|$. 根据定理 3.4，$(Tx_n)$ 是 X 中的柯西序列，而后一个不等式表明 (Sx_n) 在 X. 中也是柯西序列。再次由定理 3.4 可知， S 是一个 gbwc 算子。□

以下推论也可由定理 3.4 立即得到。从局部凸实 Riesz 空间 E 到巴拿赫空间 X 的所有 gbwc 算子和连续算子所构成的空间，分别记为 $\mathcal{W}_{gbc}(E,\ X)$ 和 $\mathcal{L}(E,\ X)$，。

推论 3.7。 如果 E 是赋范 *Riesz* 空间，且 X 是巴拿赫空间，那么 $\mathcal{W}_{gbc}(E, X)$ 是 $\mathcal{L}(E, X)$ 的范数闭向量子空间。

在陈述下面的主要定理之前，我们需要注意到，根据 [8, 命题 11]，每个 Fr´echet 格 E 在其强双对偶中都是一致闭的。另一方面，我们知道，里斯空间的带也都是一致闭的。下面的定理根据其 gbwc 算子，为作为其强双对偶中的带的 Fr´echet 格给出了算子（以及序列）刻画（其他刻画见 [1, 定理 22.2]）。

定理 3.8。 对于 *Fr´échet* 格 (E, τ)，以下陈述等价：

(1) E 是 E''.中的一个带。(2) 每个连续算子 T： $E \to X$ 到任意巴拿赫空间 X 都是 *gbwc* 算子。(3) 每个正算子 T： $E \to F$ 到任意巴拿赫格 F 都是 *gbwc* 算子。(4) 每个递增且拓扑有界序列 $(x_n) \subset E^+$ 都是收敛的。(5) 每个递增且拓扑有界网 $(x_\alpha) \subset E^+$ 都是收敛的。

证明。 $1 \Rightarrow 2$： 由于 E 是 E''中的一个带，由 [1, 定理22.2] 可知 τ 是勒贝格的（因此，由于 E 是 τ-完备的，它是戴德金完备的；见[1, 定理10.3]）。因此，由 [11, 定理3.18] 2成立。

$2 \Rightarrow 3$: 显然，因为在这种情况下每个正算子 T： $E \to F$ 是连续的。

$3 \Rightarrow 4$ ： 设（x_n） $\subset E$ 是拓扑有界的，且满足 $0 \leq x_n \uparrow$.那么存在 $x'' \in E''$ 满足 $0 \leq x_n \uparrow x''$. 为完成证明，我们证明（x_n）是一个 τ-柯西序列。设（q_k）是 E 上的一列格半范数，它们诱导出拓扑 τ. 对于 $k \in \mathbb{N}$，考虑赋范 Riesz 空间 $\left(E/q_k^{-1}(0)\ \ \|.\|_k\right)$，其范数为 $\|\pi\ (x)\ \|_k = q_k\ (x)$，其中 π： $E \to E/q_k^{-1}(0)$是典范满射，并将其完备化为巴拿赫格 F. 。于是定义正算子 T： $E \to F$，其中 $T = i \circ \pi$， i： $E/q_k^{-1}\ (0) \to F$ 是自然嵌入。根据假设，T 是 gbwc，因此由 [11, 推论 3.20 和 3.4] 可知，序列（π （x_n）） 在 F中收敛，或者说（π （x_n）） 在 $E/q_k^{-1}(0)$中是范数柯西的。也就是说， （x_n）在 E. 中是q_k-柯西的。由于后一个事实对每个 k都成立，因此（x_n）是 τ-柯西的，证毕。

$4 \Rightarrow 5$ ：这由巴拿赫格情形中的同样论证得到；参见 [2,定义 4.58]之后的注释。

$5 \Rightarrow 4$：由 [1, 定理 22.2]得出。 □

4. KR-SPACES

巴拿赫格理论中的一个众所周知的概念是 KB-空间。若巴拿赫格 E 中的每个递增拓扑有界序列（x_n） $\subset E^+$ 都收敛，则称其为 KB-空间。自反巴拿赫格和勒贝格 L_1（μ）-空间都是此类空间的例子。

秉承 KB-空间概念的思路，我们在此为局部凸实 Riesz 空间引入相应的概念。

定义 4.1。设 E 是一个局部凸实 *Riesz* 空间。若每个递增且拓扑有界的网 (x_α) $\subset E^+$ 都收敛，则称E 为 *KR*-空间。

同时也是 *KR*-空间的 *Fr´echet*（分别为 *Banach*）格称为 *KF*-（分别为 *KB*-）空间。

请注意，这一 KR空间概念已在 [1, 第 22] 节中被隐含地研究过。此处，我们对其进行了明确的引入和研究，以便陈述局部凸实 Riesz 空间上 gbwc 算子的分解定理，这与巴拿赫格上 b-弱紧算子的分解定理相类似。

由 [1, 定理 22.2] 和我们的主要结果定理 3.8，可立即得到以下结果。

定理 4.2。对于局部凸实 *Riesz* 空间 E，以下断言等价:

(1) E 是一个 *KR*-空间。(2) E 是 E''.中的一个带。(3) E 同时具有 *Levi* 性质和勒贝格性质。(4) E是 $|\sigma|(E, E')$-完备的。

此外，若 E 是一个 *Fr´échet* 格，则还可以补充

(5) E 是一个 *KF*-空间。(6) 每个从 $T: E \to X$ 到任意巴拿赫空间 X 的连续算子都是 *gbwc*。(7) 每个从 $T : E \to F$ 到任意巴拿赫格 F 的正算子都是 *gbwc*。(8) 每个递增且拓扑有界的序列$(x_n) \subset E^+$ 都是收敛的。

因此，KR-空间必然具有 BOB 性质和勒贝格性质。此外，根据[1, 定理 22.2] ，KR-空间必然是拓扑完备的（因而 Dedekind 完备）。因此，KR-空间是 KB-空间的自然推广。

此外，由定理 4.2 和 [8,定理 6]，我们得到以下结果。

定理 4.3. 设 E 是一个局部凸实固体里斯空间，且典范嵌入 $E \hookrightarrow E''$ 连续。那么， E' 是 *KR*-空间当且仅当其拓扑是勒贝格拓扑。

推论 4.4. *Fr´echet* 格的强对偶是 *KR*-空间，当且仅当其拓扑是勒贝格的。

以下推论在巴拿赫格理论文献中广为人知，如今则是上述定理的特例。

推论 4.5. 对于巴拿赫格 E，以下命题等价:

(1) E 是 *KB*-空间。(2) 每个递增且拓扑有界的序列 $(x_n) \subset E^+$ 都收敛。(3) E 是 E''.中的一个带。(4) E 的范数既具有 *Levi* 性，又是序连续的。(5) E 是 $|\sigma|(E, E')$-完备的。(6) 每个从 $T: E \to X$ 到任意巴拿赫空间 X 的连续算子都是b-弱紧的。(7) 每个从 $T: E \to F$ 到任意巴拿赫格 F 的正算子都是 b-弱紧的。(8) 恒等算子 $T: E \to E$ 是 b-弱紧的。

推论 4.6. 巴拿赫格的范数对偶是 *KB*-空间，当且仅当其范数序连续。

我们以一些例子结束本节，这些例子阐释了将 KR-空间的概念推广到（非巴拿赫）局部凸实 Riesz 空间这一扩展框架下的情形。

由定理 4.2，半自反局部凸实里斯空间是 KR-空间，例如 $E = (l_1, |\sigma|(l_1, c_0))$，或者以下自反 KF-空间：所有实数列组成的空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，以及由下式定义的快速递减实数列空间 s

$$s = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} n^k |x_n| = 0 \ \text{ for every } k \in \mathbb{N} \right\},$$

并赋予逐坐标序，以及由以下半范数生成的拓扑

$$p_k(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1, 2, ...$$

5. Factorization of gbwc operators through KR-spaces

现在，我们可以陈述关于局部凸实里斯空间上 gbwc 算子的第一个分解定理。

定理5.1。 设连续算子 $T: E \to X$从具有勒贝格性质的戴德金完备局部凸实里斯空间映入巴拿赫空间。那么， T是 *gbwc* 算子，当且仅当它存在一个经由 *KR*-空间(H, τ)的分解 SR，其因子为 $R: E \to H$ 和 $S: H \to X$，且 R 是连续格同态， S是$(\tau - \sigma(X, X'))$-连续的。

证明。 假设 $T = SR$ 具有上述描述的因子 R 和 S 。设$A \subset E$ 是一个拓扑有界且序有界的集合。不失一般性，我们可以假设 $A \uparrow \subset E^+$. 。由于 R 是正的，因此 $R(A) \uparrow \subset H^+$. 。由于 A 是拓扑有界的（见 [11, 命题 3.8]），所以 $R(A)$也有界。 因此，由于 H具有 BOB 性质，存在 $h \in H^+$ 使得 $R(A) \subset [0, h]$. 。现在，由于 τ是勒贝格的，根据[1, 定理 22.1]，序区间 $[0, h]$ 在 H中是弱紧的。因此，由于 S 也是（$\sigma(H, H') - \sigma(X, X')$)-连续的，故 $S[0, h]$ 是弱紧的。因此，$T(A) \subset S[0, h]$ 是相对弱紧的，证毕。

反过来，假设 $T:\ E\to X$ 是 gbwc。由 [11, 定理 3.18] 可得 $T''(B(E))\subset X.$。赋予 $H=B(E)$ 局部凸实拓扑

$$|\sigma|(B(E),E'):=|\sigma|(E'',E')\,|_{B(E)}$$

并定义 $S:\ H\to X$ 由 $Sx''=T''x''.$ 给出。由此可得 $T=SR$，其中 $R:\ E\to H$ 是由 $Rx=i(x)$定义的格同态，而 $i:\ E\to E''$ 是典范嵌入。注意，很容易看出 R 和 S 满足所需的连续性条件。现在，为结束证明，我们将证明 H 是一个 KR-空间。为此，设 $(\varphi_\alpha)\subset H$ 是 $|\sigma|(B(E)\ E')$-有界的，且满足 $0\le\varphi_\alpha\uparrow$。对于每个 $\alpha\in(\alpha)$，取一个递增网 $(x_{\beta\alpha})\subset E$，使得 $0\le x_{\beta\alpha}\uparrow\varphi_\alpha.$。接着考虑集合

$$A=\left\{\vee_{i=1}^{n}x_{\beta_i^{\alpha_i}}:\beta_i\in(\beta),\,\alpha_i\in(\alpha),\,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

显然，A 是一个递增集，并且对每个 $n\in\mathbb{N}$ 及每个 $f\in E'_+$，都有

$$0\le f\left(\vee_{i=1}^{n}x_{\beta_i^{\alpha_i}}\right)\le\varphi_{\gamma_n}(f)\le\sup_{\alpha}\varphi_\alpha(f)<+\infty,$$

其中 $\gamma_n\in(\alpha)$ 是 α_i中的某个主元。这表明 A 是$|\sigma|(E,\ E')$-有界的。由 [1, 定理 19.17] 可知，存在 $\varphi\in E''$，使得 $0\le A\uparrow\varphi$，并且我们有 $\varphi\in B(E)$。由于对每个 α，$0\le x_{\beta\alpha}\uparrow\varphi_\alpha$，且对每个 β，$0\le x_{\beta\alpha}\le\varphi$，我们得到对每个 $\alpha.$，$0\le\varphi_\alpha\le\varphi$。由于 $B(E)$ 是 Dedekind 完备的，因此存在 $\psi\in B(E)$，使得 $0\le\varphi_\alpha\uparrow\psi$。因此，对于 $|\sigma|(B(E)\ E')$，有 $\varphi_\alpha\to\psi$。也就是说，H是一个 KR-空间，证毕。□

上述定理中的分解空间能否进一步细化为 KB-空间？下面的定理对赋范里斯空间的情形给出了部分答案，从而推广了巴拿赫格上 b-弱紧算子的分解定理。

定理 5.2. 从具有序连续范数的戴德金完备赋范里斯空间到巴拿赫空间的连续算子 $T:\ E\to X$ 是 *gbwc*，当且仅当 T 存在一个经由 *KB*-空间 H 的分解 SR，其中格同态因子 $R:\ E\to H$ 连续且区间保持，另一个因子 $S:\ H\to X.$ 连续。

证明。证明“若”部分：在此情形下，因子 S 也是从 H 到 $(X,\ \sigma(X,\ X'))$ 的连续算子，结论由定理5.1得出。

反之，设 E 是 E 的范数完备化。因此，由定理 3.4 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，T 的连续延拓 $T:E\to X$ 是 b- 弱紧的。由于 E 的范数序连续（见 [1, 定理 10.6]），根据分解 $\widehat{\ }$ 定理，存在一个经由 KB-空间 H 的分解 $T=SR$，其中区间保持 $\widehat{\ }$ 格同态因子 $R:\ E\to H$，以及连续因子 $S:\ H\to X.$。由于 $\backsim E$ 是 E'' 中 E 的范数闭包，且 E 是 E'' 中的理想（见 [1, 定理 22.1]），因此，R 在 E 上的限制 $R_1:E\to H$ 同样是连续的区间保持格同态。因此，$T=SR_1$ 就是所需的分解。□

现在，为了在定义域空间上不加任何附加条件的情况下分解局部凸固体里斯空间上的算子，我们需要为这些算子引入如下逆有界性性质。

定义5.3 从局部凸实 *Riesz* 空间到局部凸空间的算子 $T:\ E \to X$ 称为具有序列正逆有界性（*SPIB*）性质，如果对每个序列$(x_n) \subset E^+$，(Tx_n) 在X 中拓扑有界蕴含(x_n) 在 E.中亦然

恒等算子 $I:(c_0,\ |\sigma|(c_0,\ l_1)) \to (c_0,\ \|.\|_\infty)$ 具有 SPIB，但不是连续的。事实上，由于 $|\sigma|(c_0,\ l_1)$ 与里斯对偶性 $\langle c_0,\ l_1\rangle$ 一致，因此$|\sigma|(c_0,\ l_1)$-有界集与 c_0 的范数有界集相同。

此外，下面的两个例子表明，gbwc 算子与具有 SPIB 的算子彼此独立。

例 5.4。设 $T:\ \ C[0,1] \to \mathbb{R}$ 是由下式定义的正算子：$T(f) = \int_0^1 f(x)dx$ 对每个 $f \in C[0,1]$. 若 $(f_n) \subset C[0,1]$ 是范数有界的且满足 $0 \le f_n \uparrow$，则 (Tf_n) 在 $\mathbb{R}$ 中递增且有界，因此它是收敛的。由定理 *3.4* 可知，这表明 T 是 b-弱紧的。现在考虑由下式定义的序列 $(f_n) \subset C[0,1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

对每个 $n \ge 2$. 因此，显然 (Tf_n) 在 $\mathbb{R}$ 中有界，但 (f_n) 在 $C[0,1]$. 中按范数无界。这表明 T 不满足 *SPIB*。

例 5.5. 设 $T:(c_{00}, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad x = (x_n) \in c_{00}.$$

对每个 $x = (x_n) \in c_{00}^+$，有

$$\|x\|_\infty = \sup_n x_n \le \sum_{n=1}^{\infty} x_n = |Tx|.$$

这清楚地表明 T 满足 *SPIB*。现在，对 $n \in \mathbb{N}$，考虑由 $u_n = \sum_{k=1}^n e_k$定义的序列$(u_n) \subset c_{00}^+$，其中 $e_n \in c_{00}$ 表示第 n 个单位向量，对每个 n. 由此可知 (u_n) 是一个递增且拓扑有界序列，使得 $(Tu_n) = (n)$ 在 $\mathbb{R}$ 中不收敛。由定理 *3.4* 可知，T 不是 *gbwc*。

为陈述下面的主要结果，我们需要以下引理。

引理 5.6. 若 $T: E \to X$ 是从局部凸实 *Riesz* 空间到局部凸空间的算子，且 T 具有 *SPIB*性质，则 $N_T \cap E^+ = \{0\}$，其中 N_T 表示 T. 的零空间

证明. 设 $x \in E^+$ 满足 $Tx = 0$. 。若 $x > 0$，则序列 $x_n = nx$ 在 E 中拓扑无界，但对于每个 n，$Tx_n = 0$，这与
T. □的 SPIB性质矛盾

引理 5.7. 设 $T:\ E \to X$ 是从局部凸实 *Riesz* 空间到巴拿赫空间的连续算子。则由下式定义的 $q_T:\ E \to \mathbb{R}^+$

$$q_T(x) = \sup\{\|Ty\| : |y| \le |x|\}$$

是 E 上的里斯半范数，使得 $\|Tx\| \le q_T(x)$ 对每个 $x \in E$.

证明。 对于巴拿赫格情形，沿用定理 5.58] 的证明 [2, 中相同的论证即可得出。□

引理 5.8. 设 $T\colon E \to X$ 是从局部凸实 *Riesz* 空间到巴拿赫空间的连续算子，且 T 具有 *SPIB*。则存在 $c > 0$，使得 $q_T(x) \le c\|Tx\|$ 对每个 $x \in E^+.$ 都成立

证明。若 $x \in E^+$ 满足 $\|Tx\| = 0$，则引理 5.6 表明所需的不等式成立。因此，只需证明存在 $c > 0$ ，使得对每个 $x \in E^+$， $\|Tx\| = 1$ 蕴含 $q_T(x) \le c.$ 。否则，存在一个序列 (x_n) $\subset E^+$ ，满足 $\|Tx_n\| = 1$ ，且对每个 $n.$ ， $q_T(x_n) \ge n$ 。因此存在一个序列 $(y_n) \subset E$，满足 $|y_n| \le x_n$，且对每个 $n.$， $\|Ty_n\| \ge \frac{1}{2}q_T(x_n) \ge \frac{1}{2}n$。令序列 $(z_n) \subset E$ 定义为 $z_n = \frac{y_n}{\|Ty_n\|}\cdot$。由此可得，对每个 $n.$， $|z_n| \le \frac{x_n}{\|Ty_n\|}$。由于 T 具有 SPIB, –因此 (x_n) 在 $E.$ 中拓扑有界。由此可得，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{x_n}{\|Ty_n\|} \to 0$，因为 $\|Ty_n\| \to \infty$ 当 $n \to \infty.$ 时。于是，当 $n \to \infty.$ 时，$z_n \to 0$。由于 T 是连续的，因此当 $n \to \infty.$ 时， $Tz_n \to 0$。但这与对每个 $n.$ □都有 $\|Tz_n\| = 1$ 矛盾。

最后，我们还需要文献中的以下已知结果。首先回顾一下 [1] ，如果局部坚实Riesz空间 E 中的每个递增且拓扑有界序列（x_n） $\subset E^+$ 都是柯西序列，则称该空间满足 B-性质。

定理 5.9 ([1, 定理18。5])。 可度量化局部凸坚实里斯空间 E 的完备化 E 是 *KF*-空间，当且仅当 E 满足 *B*-性质。

我们的下一个主要结果如下。

定理 5.10。 设 $T : E \to X$ 是从局部凸坚实里斯空间到巴拿赫空间的连续算子，且 T 具有 *SPIB*。则， T 是 *gbwc*，当且仅当它存在一个经由 *KB*-空间 H 的分解 SR ，其中格同态因子 $R\colon E \to H$ 是连续且区间保持的，另有连续因子 $S\colon H \to X.$ 。此外，如果 X 是巴拿赫格，那么只要 T 是正的， S 也是正的。

证明。假设 T 是 gbwc。在 E 上定义引理 5.7 中的里斯半范数 q_T 。令 $N = q_T^{-1}(0)$为 q_T的零理想，并令 E/N为赋予黎曼范数 $\left\|\dot{x}\right\| = q_T(x)$的商空间。将 E/N完备化为巴拿赫格 $H.$。根据引理 5.7，对每个 $x \in E.$都有 $\|Tx\| \le \left\|\dot{x}\right\|$。因此，由 $S_1\dot{x} = Tx$定义的算子 $S_1\colon E/N \to X$是良定义的连续算子。然后，将其延拓为连续算子 $S\colon H \to X.$。接着，定义 $R\colon E \to H$如下： $Rx = \dot{x}.$。显然， $T = SR$, R 是连续的区间保持格同态；若 T 是正的，则S 也是正的。为完成证明，我们将证明 H 是 KB-空间。设(x_n) $\subset E$ 满足 $0 \le \dot{x_n} \uparrow$ ，且 $\left(\dot{x_n}\right)$ 在 $E/N.$ 中范数有界。由于典范投影 $E \to E/N$ 是格同态，我们可以假设$0 \le x_n \uparrow .$ 。由于对每个 n都有 $\|Tx_n\| \le \left\|\dot{x_n}\right\|$ ，因此(Tx_n)在 $X.$中范数有界。现在，由于 T 满足 SPIB，故(x_n)在 $E.$ 中拓扑有界。因此，由于 T 是 gbwc，根据定理 3.4，(Tx_n)在 $X.$ 中范数收敛。由引理 5.8可知， $\left(\dot{x_n}\right)$ 在 $E/N.$ 中范数柯西。现在，定理 5.9使我们得以得出所需结论。

逆命题的证明是例行的，因此省略。 □

最后，我们给出上述分解定理的一些推论。回顾一下，算子 $T\colon E \to X$ 从赋范空间到巴拿赫空间，称为

嵌入，如果存在两个常数 K，$M > 0$ 使得

$$K \|x\| \leq \|Tx\| \leq M \|x\|$$

对于每个 $x \in E.$，如果 E 和 X 分别是赋范里斯空间和巴拿赫格，那么若 T 是格同态嵌入，则称其为格嵌入。显然，赋范里斯空间到巴拿赫空间的嵌入满足 SPIB。因此，我们得到以下推论。

推论 5.11. 赋范 *Riesz* 空间到巴拿赫空间的嵌入 $T: E \to X$ 是 *gbwc*，当且仅当它存在如下分解：通过一个 *KB*-空间 H 进行分解 SR，其中包含一个连续的区间保持格同态因子 $R : E \to H$ 以及一个连续因子 $S : H \to X.$。此外，若 X 是巴拿赫格且 T 是格嵌入，则 S 为正。

最后，我们还有以下推论。

推论 5.12. 设 $T : E \to X$ 是从局部凸实 *Riesz* 空间到巴拿赫空间的连续 *gbwc* 算子，且 T 具有 *SPIB*。那么，对 E^+ 中每个拓扑上 b-序有界序列 (x_n)，若 $x_n \to 0$ 对 $\sigma(E, E')$ 成立，则 $T(x_n) \to 0$ 在范数下收敛。

证明。根据定理 5.10，T 可通过因子 $R : E \to H$ 进行分解 SR，其中 $R : E \to H$ 是到 KB-空间 H 的连续区间保持格同态，而 $S : H \to X.$ 是连续因子。设 (x_n) 在 E^+中拓扑上 b序有界，且对 $\sigma(E, E')$ 有 $x_n \to 0$。由于 R是正且连续的，因此 (Rx_n) 在 $H.$ 中 b序有界且弱零。由于 H 是 KB 空间，(Rx_n) 在 H中也序有界。结合定理 5.57 (3)] ，并利用 S 是序弱紧的，可得 $Tx_n = SRx_n \to 0$ 在范数下成立，正如所需。□

References

[1] Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O：局部实里斯空间。施普林格，柏林（1978）。[2] Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O：正算子，第119卷。施普林格，柏林（2006）。[3] S. Alpay，论强 B 型算子，《哈杰泰佩数学与统计学杂志》，**41** (5)（2012），627-633。[4] Alpay, S., Altin, B.：关于 b-弱紧算子的注记，Positivity，11（2007），575–582。[5] Alpay, S., Altin, B., Tonyali, C.：关于向量格的性质 (b)，Positivity，7（2003），135–139。[6] Alpay, S., Altin, B., Tonyali, C.：关于具有性质-b 的里斯空间的注记，Czech. Math. J.，56 (131)（2006），765-772。[7] Altin, B.：关于巴拿赫格上的 b-弱紧算子，Taiwanese Journal of Mathematics，11 (1)（2007），143-150。[8] Ety mez, S., Machrafi, N., Altin, B.：关于具有 BOB 性质的局部凸固体里斯空间，Positivity 29:37（2025）。[9] Hajji, M., Mahfoudhi, M.：关于 b-AM-紧算子和 AM-紧算子，Positivity 26:57（2022）。[10] Labuda, I.P.：关于有界序完备的局部坚实Riesz空间，数学研究，T.LXXXI.，（1985）。[11] Machrafi, N., Altin, B.：关于拓扑 b-序有界集和广义 b-弱紧算子的注记，Hacet. J.Math. Stat.，51 (2)（2022），483-493。[12] Meyer-Nieberg, P.：巴拿赫格，纽约，美国，施普林格，1991。[13] Peressini, A. L.：论序向量空间中的拓扑，Math. Annalen 144，199-223（1961）。[14] Ruess, W.：[弱] 紧算子与 DF 空间，太平洋数学杂志，98 (2)（1982），419-441。

[15] Wnuk, W.，具有序连续范数的巴拿赫格，波兰科学出版社 PWN，华沙，（1999）。（N. Machrafi）

Mohammed V University in Rabat Faculty of Sciences Department of , Mathematics CeReMAR Center LAMA Laboratory B.P. 1014 RP Rabat Morocco.

, , , , , , *Email address*: n.machrafi@um5r.ac.ma, nmachrafi@gmail.com（B. Altin）

Faculty of Science Department of Mathematics Gazi University Ankara , 06500 Turkey.

, , , *Email address*: birola@gazi.edu.tr