旋转球面上非相干流体欧拉方程的解

B.G. Konopelchenko [1] 和 G.Ortenzi [2] *[1] INFN，莱切分部，via Provincialeper Arnesano，73100 莱切，意大利[2] 都灵大学“G.Peano”数学系，via CarloAlberto10，10123，都灵，意大利[2] INFN，都灵分部，via Pietro Giuria1，10125 都灵，意大利

2026年3月9日

arXiv:2603.05737v1 [math-ph] 5 Mar 2026

In memory of Francesco Calogero

摘要

本文研究旋转球面上恒定压力下可压缩无黏流体的运动，并给出了相应欧拉方程的 hodograph 方程。这些方程提供了一类由两个变量的两个任意函数参数化的欧拉方程解。文中给出了若干特定的显式解，并描述了速度导数发生爆破的爆破曲线。本文还考察了缓慢旋转和快速旋转球体的极限情形，并给出了描述椭圆函数模数变形的方程。

1 引言

旋转二维球面上的欧拉方程，是许多描述地球大气和海洋流动模型的主要组成部分（例如参见 [10, 18, 13, 16, 19, 1, 21, 23, 12, 17]）。这些模型所采用的特定近似和简化，使我们得以获得适用程度及与实际问题的吻合程度各不相同的多种结果（例如参见 [4, 2, 11, 5, 20]）。然而，尽管该领域已有大量研究成果，构造旋转球体上欧拉方程的精确解仍然是一项重要任务。

本文考虑一种最简化的模型，用以描述单位半径的二维球面 S^2 上不可凝聚（可压缩、无黏、恒定压力）流体的运动；该球面以速度 ω 绕极轴旋转。取 S^2 上的标准度量，相应的欧拉方程形式如下（例如参见 [4, 2, 11, 5, 20, 6]）

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial \theta}+v\frac{\partial u}{\partial \phi}=\mathcal{F}_1=\sin(\theta)\cos(\theta)\,(v+\omega)^2\,,\\ &\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial \theta}+v\frac{\partial v}{\partial \phi}=\mathcal{F}_2=-2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}u\,(v+\omega)\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $0\le\theta<\pi$、$0\le\phi<2\pi$ 是 S^2、$u=$ 上的标准角，$\theta/\mathrm{d}t$ 和 $v=\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ 是相应的速度，而力 $\mathcal{F}^i$、$i=1,\ 2$ 同时包含科里奥利力和离心贡献。

这里给出霍多图方程，它们为我们提供了系统（1.1）的精确解。构造基于积分超曲面的概念和特征线法。利用特征方程的四个函数独立积分，可以得到欧拉方程（1.1）的一般精确解类，该解类由两个变量的两个任意函数参数化。文中还给出了若干特定解的子类，包括精确显式解和时间周期性解。并指出了系统（1.1）的解与 $\omega=0$ 处的解之间的密切联系。

我们还考虑了 v 与 ω 之间具有不同相互关系的特殊情形。$\omega=0$ 情形已在文献 [14] 中讨论。小 ω 的情形，即 $\frac{\omega}{v}\ll 1$，此时将 $\mathcal{F}_1$ 中的 $(v+\omega)^2$ 近似为 $v^2+2v\omega$，对应于右端仅有科里奥利力起作用的情形。大 ω 的相反情形，即 $\frac{v}{\omega}\ll 1$，此时将力 $\mathcal{F}_i$、$i=1,\ 2$ 近似为 $\mathcal{F}_1=\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)$，$\mathcal{F}_2=-2\omega^{\cos(\theta)}{}_{\sin(\theta)}\,u$，也进行了分析。需要注意的是，这并非右端仅有离心力作用的情形。

约化 $v+$ $\omega=0$ 讨论了通常情形以及仅考虑科里奥利力的情形。对相应 - 方程的解释为 t 本文介绍了描述椭圆函数模数特殊变形类别的方程。

*通讯作者。电子邮箱：giovanni.ortenzi@unito.it

最后，我们还考虑了用物理速度 $\tilde{u} = u_1, \tilde{v} = v\sin(\theta)$ 表示的欧拉方程解。本文结构如下：第 2 节给出系统 (1.1) 的特征方程及相关积分。第 3 节推导霍多图方程，并讨论相应的解。第 4 节研究缓慢旋转球体的情形，第 5 节则讨论相反的情况，即快速旋转球体。第 6 节讨论仅存在科里奥利力时快速旋转球体上的欧拉方程解。第 7 节研究约化 $v + \omega = 0$ 以及椭圆模方程。第 8 节给出以物理速度表示的欧拉方程霍多图方程。附录 A 讨论方程 (1.1) 的一些特解。附录 B 简要讨论系统 (4.4) 的拉格朗日结构。

2 积分超曲面、特征线与积分

本节我们将分析由方程 (1.1) 所描述的旋转球体中非相干流体的特征线结构。

2.1 积分超曲面

积分超曲面是 拟线性偏微分方程（[7, 8]）研究中的核心对象之一。在我们的情形中，它是三 -
维超曲面 ce，在坐标为（t, θ, ϕ, u, v）的五维空间中，由方程系统定义 s

$$S_i(t, \theta, \phi, u, v) = 0\,, \qquad i = 1, 2 \tag{2.1}$$

使得对该系统关于 u 和 v 的求解为我们提供系统（1.1）的解。函数 S_i（t, θ, ϕ, u, v）满足某一线性方程系统 [8, 22]。对于欧拉方程（1.1），S_i、$i = 1, 2$是线性方程的两个独立解

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} + u\frac{\partial S_i}{\partial \theta} + v\frac{\partial S_i}{\partial \phi} + \mathcal{F}_1(t, \theta, \phi, u, v)\frac{\partial S_i}{\partial u} + \mathcal{F}_2(t, \theta, \phi, u, v)\frac{\partial S_i}{\partial v} = 0\,, \qquad i = 1, 2\,. \tag{2.2}$$

该系统的任一解在矩阵 $\left(\frac{\partial S_i}{\partial u}, \frac{\partial S_i}{\partial v}\right)$ 可逆的假设下，经由（2.1）为我们给出欧拉方程（1.1）的一个局部解。系统（2.2）的通解依赖于4个变量的2个函数。将这样的通解用于（2.1），便得到方程（1.1）的一个通解。

特征线法是构造线性方程 (2.2) 的解的标准方法。系统 (2.2) 的特征线由以下特征方程定义

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = u\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = v\,, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}_1 = \sin(\theta)\cos(\theta)\,(v + \omega)^2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}_2 = -2u\,(v + \omega)\cot\mathrm{an}(\theta)\,. \tag{2.3}$$

系统 (2.2) 的解沿特征线保持为常数，即

$$\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}\tau} = 0\,, \qquad i = 1, 2\,. \tag{2.4}$$

因此，S_i 是特征方程的积分。如果（I_1，.....，I_m）是系统 (2.3) 的函数独立积分，那么函数

$$S_i = \phi_i(I_1, \ldots, I_m)\,, \qquad i = 1, 2 \tag{2.5}$$

其中 ϕ_i 是任意 函数，是系统 (2.2) 的解。在这种情况下，利用 (2.1)，可得到.....的解 e
依赖于欧拉方程 取决于 $m - 2$ 两个变量的任意函数。当 $m = 4$ 时，存在通解。

2.2 特征线积分

因此，我们现在的任务是构 造方程（2 的特征线积分 .1）或者等价地，对于该动力系统

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} &= \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} + \omega\right)^2\,, \\
\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\tau^2} &= -2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} + \omega\right)\,.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

首先，很容易验证，存在 3 个关于 u 和 v 的线性积分：

$$\begin{aligned} L_1 &= -\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi+\omega\tau)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}+\omega\right)-\sin(\phi+\omega\tau)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\,,\\ L_2 &= -\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\phi+\omega\tau)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}+\omega\right)+\cos(\phi+\omega\tau)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\,,\\ L_3 &= \sin^2(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}+\omega\right)\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中球面的半径为 $R=1$。这些积分在球面 S^2 上并非相互独立。事实上，对所有值θ 和 ϕ，都有如下关系

$$\cos(\phi+\omega\tau)L_1+\sin(\phi+\omega\tau)L_2+\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}L_3=0\,. \tag{2.8}$$

该关系在动力学 (2.6) 下保持不变。于是容易验证，存在一个关于 u 和v 的二次积分，即

$$H=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\sin^2(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}+\omega\right)^2\right)\,. \tag{2.9}$$

在附录 B 中，我们将 该量与常微分方程组 (2.6) 的哈密顿量联系起来。积分 H 密切相关 d 与积分 (2.7)，即 ，有如下关系

$$L_1^2+L_2^2+L_3^2=2H\,. \tag{2.10}$$

然而，与情形 $\omega=0$ [14] 类似，积分 (2.9) 可用于构造另外两个积分。事实上，利用积分 L_3 和 H，可得这些方程

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=\sigma\sqrt{2H}\frac{\sqrt{\sin^2(\theta)-K^2}}{\sin(\theta)} \tag{2.11}$$

其中 $\sigma=\mathrm{sign}(u(0,\theta_0,\phi_0))$ 且 $K^2=\frac{L_3^2}{2H}\leq 1$。

对该方程进行积分，可得该积分

$$I_1=\tau+\sigma\frac{1}{\sqrt{2H}}\tilde{Q}(\theta)\,, \tag{2.12}$$

其中 $\tilde{Q}(\theta)=\arcsin\left(\frac{\cos(\quad\theta}{\sqrt{1-K^2}}\right)$。接下来，利用 (2.12) 对 $\cos(\theta)$ 求解，可得该方程的一个解

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}+\omega=\frac{L_3}{\sin^2(\theta)}\,, \tag{2.13}$$

从而得到该积分

$$I_2=\phi+\omega\tau+\arctan\left(K\tan(\sigma\tilde{Q}(\theta))\right)-\arctan\left(K\tan(\sqrt{2H}\tau+\sigma\tilde{Q}(\theta))\right)\,. \tag{2.14}$$

因此得到系统 (2.6) 的 6 个系统积分，从而得到方程 (2.2) 的 6 个方程解。它们是 ($\tau\to t$, $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\tau\to u$, $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau\to v$)

$$\begin{aligned} L_1(t,\theta,\phi,u,v) =& -\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi+\omega t)\,(v+\omega)-\sin(\phi+\omega t)u\,,\\ L_2(t,\theta,\phi,u,v) =& -\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\phi+\omega t)\,(v+\omega)+\cos(\phi+\omega t)u\,,\\ L_3(\theta,u,v) =& \sin^2(\theta)\,(v+\omega)\,,\\ H(\theta,u,v) =& \frac{1}{2}\left(u^2+\sin^2(\theta)\,(v+\omega)^2\right)\\ I_1(t,\theta,u,v) =& t+\sigma\frac{1}{\sqrt{2H(\theta,u,v)}}Q(u,v,\theta)\,,\\ I_2(t,\theta,\phi,u,v) =& \phi+\omega t+\arctan\left(\frac{v+\omega}{u}\sin(\theta)\cos(\theta)\right)-\\ & -\arctan\left(\sigma\frac{\sin^2(\theta)(v+\omega)}{\sqrt{2H(\theta,u,v)}}\tan\left(\sqrt{2H(\theta,u,v)}t+\sigma Q(u,v,\theta)\right)\right)\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 $Q(u,v,\theta)=$反正弦$\left(\text{余弦}(\theta)\sqrt{\frac{u^2+\text{正弦}^{2\ \theta}_{2}\ \ \ \

3 霍多图方程和解

.....的构造　　上一节有一个霍多格拉夫对应形式，这对研究爆破解具有帮助　　-
方程的 tives（　　1.1)。

3.1 霍多图方程

列表 (2.15) 为我们提供了函数 ϕ_i 在 (2.5) 中自变量的各种可能选择，从而得到不同的霍多图方程。选取 $S_i = \Phi_i(I_1,\ I_2,\ H,\ L_3)$，$i = 1,\ 2$，并对方程 (2.1) 关于 I_1、I_2 求解，即可得到霍多图方程

$$I_1 = \Phi_1(H, L_3)\,, \qquad I_2 = \Phi_2(H, L_3)\,, \tag{3.1}$$

其中 $\Phi_i,\ i = 1,2$ 是任意函数。

改为选取 $S_i = \Phi_1(L_1, L_2, L_3, I_1)$、$i = 1, 2$，可避免复杂的积分 I_2，并得到以下霍多图方程

$$\begin{aligned} &t + \sigma \frac{1}{\sqrt{u^2 + \sin^2(\theta)(v+\omega)^2}} Q(u, v, \theta) = \Phi_1(L_1, L_2)\,, \\ &(v+\omega)\sin^2(\theta) = \Phi_2(L_1, L_2)\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $\Phi_i,\ i = 1, 2$ 是任意函数。显然，满足（3.1）或（3.2）的函数 $u(t, \theta, \phi)$ 和 $v(t, \theta, \phi)$ 是欧拉方程（1.1）的解。事实上，对（3.2）分别关于 t, θ 和 ϕ 求导，可得关系式

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \\ \\ -\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \end{pmatrix}, \\ M \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ \\ 2(v+\omega)\sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \\ M \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial \phi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \\ \\ -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \phi} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中矩阵 M 为

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} - \frac{\partial I_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} - \frac{\partial I_1}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} - \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

结合关系式（3.3），可得

$$M \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - (v+\omega)^2 \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2u(v+\omega)\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial \theta} + v\frac{\partial}{\partial \phi}$。因此，如果 $\det(M) \neq 0$，则由（3.2）给出的函数 u 和 v 是该系统的解 (1.1).

这些解的导数 $\partial_{\mathbf{u}}/\partial t$、$\partial_{\mathbf{u}}/\partial \theta$ 和 $\partial_{\mathbf{u}}/\partial \phi$ 会发生爆破，若 $\det(M) = 0$，即在由下列方程定义的子流形上

$$\sin^2(\theta)\frac{\partial}{\partial u}(I_1 - \Phi_1) - \frac{\partial}{\partial u}(I_1 - \Phi_1)\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}(I_1 - \Phi_1)\frac{\partial \Phi_2}{\partial u} = 0\,. \tag{3.6}$$

值得注意的是，由于在平移 $\omega \to \omega + 2\pi$ 下的不变性，霍多图方程（3.2）为我们提供了欧拉方程（1.1）的单值解，即 $\mathbf{u}(t,\ \theta,\ \phi) = \mathbf{u}(t,\ \theta,\ \phi + 2\pi)$。如果不选择 I_1，而选择 I_2，那么相应霍多图方程的解

$$I_1 = \Phi_1(L_1, L_2)\,, \qquad (v+\omega)\sin^2(\theta) = \Phi_2(L_1, L_2)\,, \tag{3.7}$$

一般而言并非单值

3.2 解

当 Φ_1 和 Φ_2 为常数时，可以得到霍多图方程 (3.2) 的最简单解。在这种情况下， u 和 v 与 ϕ 无关，其表达式为

$$u^2 = W^2(t,\theta) - \frac{\Phi_2^2}{\sin^2(\theta)}\,, \qquad v = \frac{\Phi_2}{\sin^2(\theta)} - \omega\,, \tag{3.8}$$

其中，函数 W 由方程定义

$$(t-\Phi_1)W + \sigma \arcsin\left(\cos(\theta)\frac{W}{\sqrt{W^2-\Phi_2^2}}\right) = 0\,. \tag{3.9}$$

解 (3.8) 在北极和南极处发散，而其导数在由方程 $\frac{\partial I_1}{\partial u} = 0$给出的曲线上发散。

当函数 Φ_1 和 Φ_2 关于 L_1 和 L_2为线性函数时，可以得到更复杂的显式解，即

$$\Phi_i = a_i L_1 + b_i L_2\,, \qquad i=1,2\,, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}\,. \tag{3.10}$$

事实上，在这种情况下，第二个方程 (3.2) 意味着

$$\begin{aligned} &A(\omega+v) = Bu\,,\\ &A = \sin^2(\theta) + a_2\sin(\theta)\cos(\theta)\cos\left(\phi+\omega t\right) + b_2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin\left(\phi+\omega t\right)\,,\\ &B = -a_2\sin\left(\phi+\omega t\right) + b_2\cos\left(\phi+\omega t\right)\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

将 (3.11) 代入 (3.2) 的第一个方程，得到

$$\begin{aligned} &\alpha u^2 + tu + \beta = 0\,,\\ &\alpha = a_1\sin(\phi+\omega t) - b_1\cos(\phi+\omega t) + \frac{B}{A}\sin(\theta)\cos(\theta)\left[a_1\cos(\phi+\omega t) + b_1\sin(\phi+\omega t)\right]\,,\\ &\beta = \frac{\sigma A}{\sqrt{A^2+B^2\sin^2(\theta)}}\arcsin\left(\cos(\theta)\sqrt{\frac{A^2+B^2\sin^2(\theta)}{A^2+B^2\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

因此，欧拉方程（1.1）有如下形式的一个解

$$\begin{aligned} u_\pm =& \frac{-t \pm \sqrt{t^2-4\beta\alpha}}{2\alpha}\,,\\ v_\pm =& -\omega + \frac{B}{A}\frac{-t\pm\sqrt{t^2-4\beta\alpha}}{2\alpha}\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 A, B和 α, β函数分别由（3.11）和（3.12）给出。

对于函数 Φ_1 和 Φ_2 的其他取值，可以得到形式相当复杂的解 $\mathbf{u}(t,\ \theta,\ \phi)$。

一类有趣的解对应于如下选择

$$S_i = \Phi_i(L_1, L_2, L_3)\,, \qquad i=1,2\,, \tag{3.14}$$

其中 Φ_1 和 Φ_2 是任意函数。将方程 (2.1) 对 L_1 和 L_2求解，可得以下霍多图方程

$$\begin{aligned} &(v+\omega)\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi+\omega t) + u\sin(\phi+\omega t) = F_1\left(\xi\right)\,,\\ &(v+\omega)\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\phi+\omega t) - u\cos(\phi+\omega t) = F_2\left(\xi\right)\,,\\ &\text{with}\quad \xi \equiv (v+\omega)\sin^2(\theta)\,, \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 F_1 和 F_2 是 e 任意函数。对 (3.15) 分别关于 t、θ 和 ϕ 求导，可得关系式 s

$$M\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial t}\\ \\ \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}=\omega\begin{pmatrix}(v+\omega)\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\phi+\omega t)-u\cos(\phi+\omega t)\\ \\ -(v+\omega)\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi+\omega t)-u\sin(\phi+\omega t)\end{pmatrix},$$

$$M\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial \theta}\\ \\ \frac{\partial v}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(v+\omega)\sin(2\theta)F_1'-(v+\omega)\cos(2\theta)\cos(\phi+\omega t)\\ \\ (v+\omega)\sin(2\theta)F_2'-(v+\omega)\cos(2\theta)\sin(\phi+\omega t)\end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

$$M\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial \phi}\\ \\ \frac{\partial v}{\partial \phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(v+\omega)\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\phi+\omega t)-u\cos(\phi+\omega t)\\ \\ -(v+\omega)\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi+\omega t)-u\sin(\phi+\omega t)\end{pmatrix},$$

其中

$$M=\begin{pmatrix}\sin(\phi+\omega t) & \sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi+\omega t)-F_1'\sin^2(\theta)\\ \\ -\cos(\phi+\omega t) & \sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\phi+\omega t)-F_2'\sin^2(\theta)\end{pmatrix} \tag{3.17}$$

并且 F' 表示 F 关于自变量的导数 .

将关系式（3.16）进行线性组合，可得

$$M\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-(v+\omega)^2\sin(\theta)\cos(\theta)\\ \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+2u(v+\omega)\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \\ 0\end{pmatrix} \tag{3.18}$$

因此，当 $\det(M)\neq 0$ 时，函数 $u(t,\theta,\phi)$ 和 $v(t,\theta,\phi)$ 是欧拉方程（1.1）的解。这类解由两个单变量任意函数参数化。这些解对变量 t 和 ϕ 具有特定的依赖关系，即函数 u 和 v 仅依赖于 θ 和 $\phi+\omega t$。因此，它们以周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 随时间周期性变化。在 $\omega=0$ 处，它们是非旋转球面上的欧拉方程的定常解（参见 [14]）。

方程 $\det M=0$ 定义了爆破解曲线，在该曲线上 $\mathbf{u}$ 的导数发生爆破。

霍多图方程 (3.15) 的解可以显式构造。事实上，这两个方程等价于以下方程

$$\begin{aligned}(v+\omega)\sin(\theta)\cos(\theta)-F_1(\xi)\cos(\phi+\omega t)-F_2(\xi)\sin(\phi+\omega t)&=0,\\ F_1(\xi)\sin(\phi+\omega t)-F_2(\xi)\cos(\phi+\omega t)&=u.\end{aligned} \tag{3.19}$$

因此，问题简化为求解 (3.19) 中的第一个方程。对于多种函数 F_1 和 F_2，都可以显式求解。对于线性函数

$$F_i=a_i+b_i\xi,\qquad a_i,b_i\in\mathbb{R},\qquad i=1,2, \tag{3.20}$$

解为

$$\begin{aligned}u=&a_1\sin(\phi+\omega t)-a_2\cos(\phi+\omega t)+\frac{(a_1\cos(\phi+\omega t)+a_2\sin(\phi+\omega t))(b_1\sin(\phi+\omega t)-b_2\cos(\phi+\omega t))\sin(\theta)}{\cos(\theta)-(b_1\cos(\phi+\omega t)+b_2\sin(\phi+\omega t))\sin(\theta)},\\ v=&-\omega+\frac{a_1\cos(\phi+\omega t)+a_2\sin(\phi+\omega t)}{\sin(\theta)\cos(\theta)-\sin^2(\theta)(b_1\cos(\phi+\omega t)+b_2\sin(\phi+\omega t))}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

这一族解中的一个简单解的图像见图1。

霍多图方程 (3.15) 的一类精确解与特殊函数 F_1 和 F_2 相关，即:

$$F_1=a\xi F(\xi),\qquad F_2=b\xi F(\xi),\qquad a,b\in\mathbb{R}, \tag{3.22}$$

且 F 是任意函数。在这种情况下，欧拉方程的解为

$$\begin{aligned}u&=-\mathrm{cotan}(\theta)\mathrm{cotan}(\phi+\alpha+\omega t)F^{-1}\left(\sqrt{a^2+b^2}\frac{\mathrm{cotan}(\theta)}{\sin(\phi+\alpha+\omega t)}\right),\\ v&=-\omega+\frac{1}{\sin^2(\theta)}F^{-1}\left(\sqrt{a^2+b^2}\frac{\mathrm{cotan}(\theta)}{\sin(\phi+\alpha+\omega t)}\right).\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中 $\sin(\alpha)\equiv\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 和 $F^{-1}(\xi)$ 表示 $F(\xi)$ 的反函数。

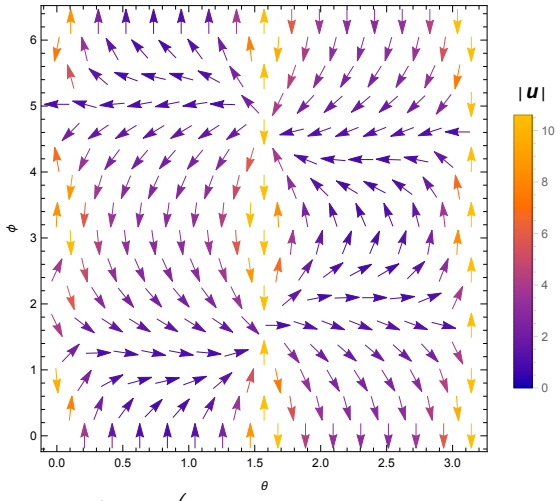

图1：在 $F_1 = 1, F_2 = 0$ 处，定常解 (3.19) 为$\mathbf{u} = \Big(\sin(\phi+\omega t),\ 2\cos(\phi+\omega t)/\sin(2\theta) - \omega\Big)$。它在 $\omega = 1, t = 0$ 处给出。该解在所有时刻于 $\theta = 0,\ \pi/2,\ \pi$ 存在奇异性。除赤道和极点附近外，这是一个局部定义良好的解。

取特定值

$$F(\xi) = \sqrt{-\log(\xi)} \tag{3.24}$$

有 ($F^{-1}(\xi) = \exp(-\xi^2)$)

$$\begin{aligned} u &= -\mathrm{cotan}(\theta)\mathrm{cotan}(\phi+\alpha+\omega t)\exp\left(-(a^2+b^2)\frac{\mathrm{cotan}^2(\theta)}{\sin^2(\phi+\alpha+\omega t)}\right), \\ v &= -\omega + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\exp\left(-(a^2+b^2)\frac{\mathrm{cotan}^2(\theta)}{\sin^2(\phi+\alpha+\omega t)}\right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

该解在北极附近具有以下行为

$$\begin{aligned} u &\sim -\frac{\mathrm{cotan}(\phi+\alpha+\omega t)}{\theta}\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{\theta^2\sin^2(\phi+\alpha+\omega t)}\right), \\ v &\sim \frac{1}{\theta^2}\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{\theta^2\sin^2(\phi+\alpha+\omega t)}\right), \qquad \theta \to 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

而在赤道附近，其行为为

$$\begin{aligned} u &\sim -\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\mathrm{cotan}(\phi+\alpha+\omega t)\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2\sin^2(\phi+\alpha+\omega t)}\right), \\ v &\sim -\omega + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2\sin^2(\phi+\alpha+\omega t)}\right), \qquad \theta \to \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

注意，u 和 v 的行为随时间以 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为周期发生周期性变化。 —

3.3 单值解

前面已经指出，t 霍多图方程（3.2）为我们提供了欧拉的单值解 r
方程（1.1），而 些由霍多图方程（3.7）给出的并不是单值的。

一般而言，为构造欧拉方程的单值解，应当考虑表达式（.）中在平移下不变的函数 Φ_i、
$i = 1\ 2$ $2\ 5$ $\phi \to \phi+2\pi$ $\Phi_i\ t\ \theta\ \phi+2\pi\ u\ v = \Phi_i\ t\ \theta\ \phi\ u\ v$ ，即（，，，，）（，，，，），$i = 1,\ 2$；或者等价地，应当选择在此种平移下不变的积分 $I_1, \ldots, I_4$。

在我们的情形中，（2.15）所给出的积分中有五个，即 $L_1,\ L_2,\ L_3,\ H,\ I_1$ 是不变的，而 I_2 则不是。因此，只需考虑积分 $\mathcal{T}$（I_2），使得 $\mathcal{T}$（I_2） $= \mathcal{T}$（$I_2 + 2\pi$），其中 $\mathcal{T}$（I_2）是一个一般周期函数。将 S_i 取为如下形式

$$S_i = \Phi(L_1, L_2, L_3, H, I_1, \mathcal{T}(I_2)), \qquad i = 1, 2, \tag{3.28}$$

可得 si 欧拉方程 (1 1) 的单值解。例如，可以选取 $\mathcal{T}(I_2) . = \sin(I$ $_2)$.

3.4 与非旋转情形的关系：时间周期解 .

将上述公式与 [14] 中针对情形 $\omega = 0$ 推导出的公式进行比较，可以很容易地发现它们之间密切的联系。事实上，可以从非旋转情形 ($\omega = 0$) 的解出发，构造系统 (1.1) 的解，即

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} = \tilde{v}^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\,, \\ &\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \phi} = -2\tilde{u}\tilde{v}\mathrm{cotan}(\theta)\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

容易验证，若 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 满足（3.29），则函数

$$u(t,\theta,\phi) = \tilde{u}(t,\theta,\phi+\omega t)\,, \qquad v(t,\theta,\phi) = \tilde{v}(t,\theta,\phi+\omega t) - \omega\,, \tag{3.30}$$

是方程（1.1）的解。

注意，由于关系式（3.30），欧拉系统（3.29）的所有单值定常解，即满足 $\tilde{u}_t = \tilde{v}_t = 0$ 与 $\tilde{u}(\theta,\phi+2\pi) = \tilde{u}(\theta,\phi)$ 且 $\tilde{v}(\theta,\phi+2\pi) = \tilde{v}(\theta,\phi)$ 的解，都成为欧拉方程（1.1）的时间周期解，周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$。

当然，从非旋转球体过渡到旋转球体时，发生 $\phi \to \phi+\omega t$ 和 $v \to v+\omega$ 这样的变化是很自然的。然而，变换（3.30）的存在，并不会使上述公式变得无关紧要，因为这些公式的推导完全没有涉及非旋转情形。在讨论方程（1.1）的若干特殊极限时，它们反而会很有用。

逆变换 $\tilde{u} \to u$, $\tilde{v} \to v$ 显然由以下关系给出

$$\tilde{u}(t,\theta,\phi) = u(t,\theta,\phi-\omega\,t)\,, \qquad \tilde{v}(t,\theta,\phi) = v(t,\theta,\phi-\omega\,t) + \omega\,. \tag{3.31}$$

因此，变换 (3.30)、(3.31) 表示旋转与非旋转情况下欧拉方程解之间的一一映射。

对于不依赖于 ϕ 的欧拉方程（1.1）和（3.29）的解，上述变换可简化为以下平凡关系

$$u(t,\theta) = \tilde{u}(t,\theta)\,, \qquad v(t,\theta) = \tilde{v}(t,\theta) - \omega\,. \tag{3.32}$$

需要注意的是，对于方程（1.1）的解，变换（3.31）通常不同于形式上的极限 $\omega \to 0$ 。

4 缓慢旋转的球体：科里奥利力。

这里我们开始考察欧拉方程（1.1）的特定极限，并将旋转速度 ω 视为参数。第一个自然的极限对应于较小的 ω，即对于所有 t，θ，ϕ，都有 $\frac{\omega}{v} \ll 1$。在这种情况下，自然的做法是舍去（1.1）右端的 ω^2 项，只保留关于 ω 的线性项。相应的系统为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \theta} + v\frac{\partial u}{\partial \phi} = \sin(\theta)\cos(\theta)v\,(v+2\omega)\,, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial \theta} + v\frac{\partial v}{\partial \phi} = -2\mathrm{cotan}(\theta)u\,(v+\omega)\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

该系统表示旋转球体上非相干流体的欧拉方程，此时忽略离心力的贡献，仅保留科里奥利力的效应。此类情形已在若干论文中讨论过（例如参见 [11]）

这里我们将 构造系统 (4.1) 的霍多图方程，并讨论其解的性质。

4.1 特征线与积分

我们将以与一般情形相同的方式进行。按照一般的霍多图方程方法，首先需要求出由两个方程组成的系统所给出的通有积分超曲面

$$S_i(t,\theta,\phi,u,v) = 0\,, \qquad i = 1,2 \tag{4.2}$$

其中 S_i、$i = 1$，2 是该线性方程的两个相互独立的解

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} + u\frac{\partial S_i}{\partial \theta} + v\frac{\partial S_i}{\partial \phi} + \sin(\theta)\cos(\theta)\left(v^2+2\omega v\right)\frac{\partial S_i}{\partial u} - 2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\left(uv+2\omega u\right)\frac{\partial S_i}{\partial v} = 0\,, \qquad i = 1,2\,. \tag{4.3}$$

线性方程（4.3）的解可以通过特征线法求得。方程（4.3）的特征方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = u\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = v\,, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \sin(\theta)\cos(\theta)\left(v^2 + 2\omega v\right)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = -2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\left(uv + \omega u\right)\,. \tag{4.4}$$

等价地

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} &= \sin\theta\cos\theta\left(\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} + \omega\right)^2 - \omega^2\right) \qquad , \\ \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\tau^2} &= -2\mathrm{cotan}(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} + \omega\right) \qquad . \end{aligned} \tag{4.5}$$

动力系统 (4.4) 只有一个关于速度的一次积分，即

$$L_3 = \sin^2(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} + \omega\right)\,, \tag{4.6}$$

而一个关于速度的二次积分为

$$H = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \sin^2(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right)\,. \tag{4.7}$$

Note 积分 (4.7) 就是 $\omega = 0$ 处的积分 (2.9)，而积分 (4.6) 则保留了对 $\omega = 0$ 的依赖 对 ω 的依赖 .

I为了寻找其他积分，必须求解方程 (4.4)。利用 (4.6) 和 (4.7)，可得 s

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 2H + 2\omega L_3 - \frac{L_3^2}{\sin^2\theta} - \omega^2\sin^2(\theta)\,. \tag{4.8}$$

对（4.8）分离变量，得到

$$\mathrm{d}\tau = \pm\frac{\sin(\theta)\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(2H + 2\omega L_3)\sin^2(\theta) - L_3^2 - \omega^2\sin^4(\theta)}}\,. \tag{4.9}$$

用变量 $x = \cos(\theta)$ 表示时，方程（4.9）可写为

$$\mathrm{d}\tau = \mp\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{c + bx^2 + ax^4}} \tag{4.10}$$

其中， $a = -\omega^2$、 $b = 2\omega^2 - 2H - 2\omega L_3$ 和 $c = 2H + 2\omega L_3 - L_3^2 - \omega^2$。

众所周知，关系式（4.10）左端的积分可用第一类不完全椭圆积分表示（例如参见 [3]）。我们将以适合本文目的的形式给出积分结果。首先，将（4.10）改写为

$$\omega\mathrm{d}\tau = \pm\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(A_+ - x^2)(x^2 - A_-)}}\,, \tag{4.11}$$

其中 $A_\pm$ 是方程 $-\omega^2 y^2 + by + c = 0$ 的根，即

$$A_\pm = \frac{\omega^2 - (H + \omega L_3) \pm \sqrt{(H + \omega L_3)^2 - L_3^2\omega^2}}{\omega^2} = 1 - \frac{H + \omega L_3}{\omega^2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{\omega^2 L_3^2}{(H + \omega L_3)^2}}\right)\,. \tag{4.12}$$

从最后一个表达式显然可知，对于所有可能的初始数据， $A\pm < 1$ 和 $(H + \omega L_3)^2 - L_3^2\omega^2 = H(H + 2\omega L_3) > 0$，因为

$$H > 0\,, \qquad H + 2\omega L_3 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \sin^2(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} + 2\omega\right)^2\right) > 0\,. \tag{4.13}$$

那么，(4.11) 为实数值的条件是 $A_+ > 0$。

在这些条件下，对 (4.11) 的积分给出（参见例如 [3], 公式 217.00）

$$-\frac{1}{\sqrt{A_+}}F\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{A_+ - x^2}{A_+ - A_-}}\right), \sqrt{\frac{A_+ - A_-}{A_+}}\right) = \pm\omega\tau + const\,, \tag{4.14}$$

其中 $F(\xi,k)$ 是模为 k 的第一类不完全椭圆积分。因此，对于特征方程 (4.4)，可得该积分

$$P=\pm\sqrt{A_+}\omega\tau+F\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{A_+-x^2}{A_+-A_-}}\right),\sqrt{\frac{A_+-A_-}{A_+}}\right). \tag{4.15}$$

为了求得第四积分，必须对方程 (4.6) 积分，即对方程

$$\mathrm{d}\phi=\frac{L_3}{1-x^2(\tau)}\mathrm{d}t-\omega\mathrm{d}\tau \tag{4.16}$$

其中 $x(t)$由 (4.15) 给出。关系式 (4.15) 意味着

$$\sqrt{\frac{A_+-x^2}{A_+-A_-}}=\mathrm{sn}\left(\pm\sqrt{A_+}\omega\tau+const,k\right), \tag{4.17}$$

其中 sn(F(arcsin(ξ) k)) $=\xi$且 $k=\sqrt{\frac{A_+-A_-}{A_+}}$所以

$$x^2(\tau)=A_+-(A_+-A_-)\mathrm{sn}^2\left(\pm\sqrt{A_+}\omega\tau+const,k\right). \tag{4.18}$$

因此，关系式 (4.16) 变为

$$\mathrm{d}\phi=\frac{L_3\mathrm{d}\tau}{1-A_++(A_+-A_-)\mathrm{sn}^2\left(\pm\sqrt{A_+}\omega\tau+const,k\right)}-\omega\mathrm{d}\tau\,, \tag{4.19}$$

或者等价地

$$\mathrm{d}\phi=\frac{L_3}{\sqrt{A_+}\omega(1-A_+)}\frac{\mathrm{d}y}{1-\alpha^2\mathrm{sn}^2\,(y,k)}-\omega\mathrm{d}\tau\,, \tag{4.20}$$

其中 $y=\sqrt{A_+}\omega\tau+const$ 和 $\alpha^2=\frac{A_+-A_-}{A_+-1}$, $k=\sqrt{\frac{A_+-A_-}{A_+}}$(参见 [3] 公式（110.04）中的记号）。由于

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{1-\alpha^2\mathrm{sn}^2\,(y,k)}=\Pi(y,\alpha^2,k)\,, \tag{4.21}$$

where $\Pi(y,\ \alpha^2,\ k)$ 是第三类不完全椭圆积分 [3]。(4.20) 的积分给出 s

$$N=\phi+\omega\tau-\frac{L_3}{\omega(1-A_+)\sqrt{A_+}}\Pi\left(\omega\sqrt{A_+}t,\frac{A_+-A_-}{A_+-1},\sqrt{\frac{A_+-A_-}{A_+}}\right)=const.. \tag{4.22}$$

这就是第四积分。

$\Pi(y,\ \alpha^2,\ k)$ 在区间 $-\theta<\alpha^2<-\infty$ 内取 α^2 不同值时的具体形式，见 [3], 公式（431.01）—（436.01）。

P 和 N，见（4 .15）和（4 .22)，经直接计算可验证，它们是方程（4 .4).

4.2 霍多格拉夫方程与解

上述构造的量 P 和 N，连同 H 和 L_3，为我们提供了特征线（4.4）的四个函数独立积分。容易验证，将公式（4.6）、（4.7）、（4.15）和（4.22）中的

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2\sin^2(\theta)\,,\\ L_3=&(v+\omega)\sin^2(\theta)\,,\\ A_\pm=&\frac{1}{2\omega^2}\left\{2\omega^2-\left[u^2+\sin^2(\theta)((v+\omega)^2+\omega^2)\right]\pm\sqrt{2Hu^2+\sin^2(\theta)(v+2\omega)^2}\right\}\end{aligned} \tag{4.23}$$

代入后，得到方程（4.3）的解，其中 $\tau\to t$。

由此可得函数 S_i的以下通解,

$$S_i=\Phi_1(H,L_3,M,N)\,. \tag{4.24}$$

关于 M 和 N 求解方程 $S_i=0$、$i=1,\ 2$，可得到霍多格方程 ns

$$P=\Psi_1(H,L_3)\,,\qquad N=\Psi_2(H,L_3)\,, \tag{4.25}$$

其中 Ψ_1 和 Ψ_2 是任意函数。

验证霍多图方程 (4.25) 的解给出欧拉方程 (4.1) 的解，这与第 3 节中的验证类似。事实上，对 (4.25) 关于 t、θ 和 ϕ 求导，可得

$$M\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial t}\\ \\ \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial t}\\ \\ \frac{\partial N}{\partial t}\end{pmatrix},\qquad M\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial \theta}\\ \\ \frac{\partial v}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial \theta}\\ \\ \frac{\partial N}{\partial \theta}\end{pmatrix},\qquad M\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial \phi}\\ \\ \frac{\partial v}{\partial \phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial \phi}\\ \\ \frac{\partial N}{\partial \phi}\end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

其中

$$M=\begin{pmatrix}u\frac{\partial \Psi_1}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial u} & v\sin^2(\theta)\frac{\partial \Psi_1}{\partial H}+\sin^2(\theta)\frac{\partial \Psi_1}{\partial L_3}-\frac{\partial P}{\partial v}\\ \\ u\frac{\partial \Psi_2}{\partial u}-\frac{\partial N}{\partial u} & v\sin^2(\theta)\frac{\partial \Psi_2}{\partial H}+\sin^2(\theta)\frac{\partial \Psi_2}{\partial L_3}-\frac{\partial N}{\partial v}\end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

并且 $P=P(t,\theta,\phi,u,v)$、$N=N(t,\theta,\phi,u,v)$。结合前面的关系，可得

$$M\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\sin(\theta)\cos(\theta)\left(v^2+2v\omega\right)\\ \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+2\mathrm{cotan}(\theta)u\left(v+\omega\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \\ 0\end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

因此，若 $\det(M)\neq 0$，则函数 u 和 v 满足方程 (4.1)。反之，若 $\det(M)=0$，则 u 和 v 的导数会发生爆破。方程 $\det(M)=0$ 定义了爆破曲面。

最后，我们指出，积分 P 和 N 可以改写为不同的等价形式。特别地，在 (4.15) 和 (4.22) 中进行倒数模变换 $kF(\phi,k)=F(\phi,1/k)$，$\sin(\psi)=k\sin\phi$（见 [3]），可得积分

$$\begin{aligned}P^*=&\pm\sqrt{A_+}\omega t+\sqrt{\frac{A_+}{A_+-A_-}}F\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{A_+-\cos^2(\theta)}{A_+}}\right),\sqrt{\frac{A_+}{A_+-A_-}}\right).,\\ N^*=&\phi+\omega t-\frac{L_3\sqrt{A_+-A_-}}{\omega(1-A_+)}\Pi\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{A_+-A_-}{A_+}}\sin(\sqrt{A_+}\omega t)\right),\frac{A_+}{A_+-1},\sqrt{\frac{A_+}{A_+}}\right).\end{aligned} \tag{4.29}$$

霍多图方程

$$P^*=\Psi_1^*(H,L_3),\qquad N^*=\Psi_2^*(H,L_3), \tag{4.30}$$

为我们提供与那些 (4 25) 相同类别的解 . .

方程 (4.1) 的单值解由与函数 S_i, $i=1$,2 相关联的霍多图方程给出，这些函数具有形式 $S_i=\Phi_i(H,L_3,P,\mathcal{T}(N))$，$i=1,2$，即

$$P=\Psi_1(H,L_3),\qquad \mathcal{T}(N)=\Psi_2(H,L_3), \tag{4.31}$$

其中 $\mathcal{T}(N)$ 是任意函数，使得 $\mathcal{T}(N+2\pi)=\mathcal{T}(N)$。

4.3 解与约束的特殊类

选择不同的 对于函数 S_i 的.....，可以得到特定的解的子类。例如，在.....情况下， e $S_i=\Phi_i(H,L_3,P)$，$i=1$，2 对应的霍多图方程的解显式地仅依赖于 t 和 θ。

考虑一个函数 S 而非两个函数，可得到 u 与 v 之间的一个约束。例如，令我们施加关系 $S(H,L)=0$，其中 S 是某个函数。解这个关系，可得 $H=\Phi(L_3)$，其中 Φ 是某个函数，即

$$u^2=-v^2\sin^2(\theta)+2\Phi((v+\omega)\sin^2(\theta)). \tag{4.32}$$

直接验证可知，约束 (4 32) 对系统 (4 1) 是可容许的，此系统可化为单个方程 .

$$\frac{\partial v}{\partial t}\pm\sqrt{-v^2\sin^2(\theta)+2\Phi((v+\omega)\sin^2(\theta))}\frac{\partial v}{\partial \theta}+v\frac{\partial v}{\partial \phi}=\mp\mathrm{cotan}(\theta)\left(v+\omega\right)\sqrt{-v^2\sin^2(\theta)+2\Phi((v+\omega)\sin^2(\theta))}. \tag{4.33}$$

5 快速旋转球体

在高速 ω 的情况下，即当 $\omega/|v|\gg 1$ 欧拉方程（1.1）右侧的力主要由 ω 中的最高次项决定时，欧拉方程可写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial \theta}+v\frac{\partial u}{\partial \phi}&=\sin(\theta)\cos(\theta)\,\omega^2,\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial \theta}+v\frac{\partial v}{\partial \phi}&=-2u\,\mathrm{cotan}(\theta)\,\omega.\end{aligned} \tag{5.1}$$

特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=u\,,\qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}=v\,,\qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=-2\omega\mathrm{cotan}(\theta)\,. \tag{5.2}$$

方程 (5.2) 立即给出两个积分

$$I_1=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}\omega^2\sin^2(\theta)\,,\qquad I_2=v+2\omega\log\sin(\theta)\,. \tag{5.3}$$

事实上，这些积分是一般系统中由 H (2.9) 和 L_3 (2.7) 生成的积分环内两个特定元素的极限。具体而言，积分

$$I_1^*=H-\omega L_3=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}\omega^2\left(1-\left(\frac{v}{\omega}\right)^2\right)\sin^2(\theta)\,, \tag{5.4}$$

在大 ω 的极限下可得

$$\lim_{\frac{v}{\omega}\to 0} I_1^*=I_1\,. \tag{5.5}$$

为了得到积分 I_2 ，先从积分开始

$$I_2^*=\omega\log\frac{L_3}{\omega}. \tag{5.6}$$

在极限 $v/\omega\to 0$ 下，有

$$\lim_{\frac{v}{\omega}\to 0} I_2^*=\lim_{\frac{v}{\omega}\to 0}\omega\log\left[\left(1+\frac{v}{\omega}\right)\sin^2(\theta)\right]=\lim_{\frac{v}{\omega}\to 0}\left\{\omega\log\left[\left(1+\frac{v}{\omega}\right)\right]+\omega\log\sin^2(\theta)\right\}=I_2\,. \tag{5.7}$$

利用积分 I_1，得到方程

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{k+\sin^2(\theta)}}=\omega\mathrm{d}\tau\,, \tag{5.8}$$

其中 $k=2I_1/\omega^2$。在变量 $x=\sin(\theta)$ 下，方程 (5.8) 给出标准的不完全椭圆积分，因此，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)(k+x^2)}+\omega\tau=const\,. \tag{5.9}$$

对于 $k>0$ ，积分结果为（见 [3] 中的 214.00）

$$\frac{1}{\sqrt{1+k}}F\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{(1+k)x^2}{k+x^2}}\right),\frac{1}{\sqrt{1+k}}\right)+\omega\tau=const\,. \tag{5.10}$$

当 $k<0$ 时，有（见 [3] 中的 214.00）

$$F\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k+x^2}{(1+k)x^2}}\right),\sqrt{1+k}\right)+\omega\tau=const\,. \tag{5.11}$$

公式 (5.10) 和 (5.11) 为方程 (5.2) 提供了第三个积分 I_3 。

接下来，利用积分 I_2 (5.3)，可得到方程

$$\mathrm{d}\phi=(I_2-\omega\log x^2(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{5.12}$$

其中 $x(\tau)$ 由 (5.10) 或 (5.11) 给出，即 $k>0$

$$x^2(\tau)=\frac{k\,\mathrm{sn}^2\left(I_3-\omega\tau\sqrt{1+k^2},\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)}{1+k-\mathrm{sn}^2\left(I_3-\omega\tau\sqrt{1+k^2},\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)}\,. \tag{5.13}$$

因此，第四积分为（$k>0$）

$$I_4=\phi-\int\left(I_2-\omega\log\frac{k\,\mathrm{sn}^2\left(I_3-\omega\tau\sqrt{1+k^2},\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)}{1+k-\mathrm{sn}^2\left(I_3-\omega\tau\sqrt{1+k^2},\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)}\right)\mathrm{d}\tau\,. \tag{5.14}$$

系统 (5.1) 的积分超曲面由方程给出

$$S_i(I_1, I_2, I_3, I_4) = 0\,, \qquad i = 1, 2\,, \tag{5.15}$$

其中 S_1 和 S_2 是任意函数。

解出 (5.15) 关于 I_3 和 I_4，可得到霍多格拉夫方程

$$I_3 = \Phi_1(I_1, I_2)\,, \qquad I_4 = \Phi_2(I_1, I_2)\,, \tag{5.16}$$

最后得到系统 (5.1) 的解。

这些解的爆破解曲线由方程给出

$$\det \begin{pmatrix} u\frac{\partial \Phi_1}{\partial I_1} - \frac{\partial I_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial I_2} - \frac{\partial I_3}{\partial v} \\ u\frac{\partial \Phi_2}{\partial I_1} - \frac{\partial I_4}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial I_2} - \frac{\partial I_4}{\partial v} \end{pmatrix} = 0\,. \tag{5.17}$$

方程（5.1）的单值解由霍多图方程给出

$$I_2 = \Phi_1(L_1, L_2)\,, \qquad \mathcal{T}(I_4) = \Phi_2(L_1, L_2)\,, \tag{5.18}$$

w这里，$\mathcal{T}(I_4)$ 是任意周期函数，且满足 $\mathcal{T}(I_4) = \mathcal{T}(I_4 + 2\pi)$，例如 $\mathcal{T}(I_4) = \sin(I_4)$.

6 快速旋转球体：科里奥利力的情形

在前面各章节讨论的一般情形中，由于方程（5.1）中存在 ω^2 项，离心力的作用至关重要。

然而，出于各种原因，一些论文在仅存在科里奥利力的情况下考虑了极限 $\omega \gg |v|$（例如参见 [20, 6]）。这里我们将给出相应的霍多图方程。在极限 $\omega \gg |v|$ 下，方程（4.1）变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \theta} + v\frac{\partial u}{\partial \phi} &= 2v\omega\sin(\theta)\cos(\theta)\,, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial \theta} + v\frac{\partial v}{\partial \phi} &= -2\omega u\,\mathrm{cotan}(\theta)\,, \end{aligned} \tag{6.1}$$

特征方程变为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = u\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = v\,, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = 2v\omega\sin(\theta)\cos(\theta)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = -2\omega u\,\mathrm{cotan}(\theta)\,. \tag{6.2}$$

值得注意的是，方程 (6.1) 意味着

$$\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t} + \sin^2(\theta)\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = 0\,, \tag{6.3}$$

以及对于特征方程

$$\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}\tau} + \sin^2(\theta)\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}\tau} = 0\,. \tag{6.4}$$

系统 (6.2) 的前两个积分可以很容易地计算出来。它们是（参见公式 (5.3)）

$$I_1 = \frac{1}{2}u^2 - \omega(v + \omega)\sin^2(\theta)\,, \qquad I_2 = v + 2\omega\log\sin(\theta)\,. \tag{6.5}$$

事实上，这两个积分是系统 (4.3) 的积分环中两个特定元素的某些极限。的确，让我们考虑积分 $I_1^* = H - \omega L_3$，其中 H 和 L_3，其中 H 和 L_3 在 (4.7) 和 (4.6) 中给出。将 I_1^* 改写为如下形式

$$I_1^* = \frac{1}{2}u^2 - \omega^2\left(1 + \frac{v}{\omega} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\omega}\right)^2\right)\sin^2(\theta)\,, \tag{6.6}$$

并在极限 $\frac{|v|}{\omega} \ll 1$ 中舍去含有 $\left(\frac{v}{\omega}\right)^2$的项，便得到积分 I_1。为了得到积分 I_2，可以采用第 5 节中的方法。仅使用两个积分 I_1 和 I_2 (6.5)，即可构造方程 (6.1) 的约束，其形式如下：

$$S(I_1, I_2) = 0\,, \tag{6.7}$$

其中 S 是一个任意函数。对 (6.7) 关于 I_2求解，可得关系式

$$u^2 = 2\omega(v+\omega)\sin^2(\theta) + 2\Phi(v + 2\omega\log\sin(\theta)) \tag{6.8}$$

其中 Φ 是任意函数。容易验证，关系式 (6.8) 是系统 (6.1) 的一个可容许约束。在这种情况下，只需在 u 由公式 (6.8) 给定时，求解方程 (6.1) 的第二个方程。将所得的 v 代入 (6.8)，可得函数 $u(t,\ \theta,\ \phi)$。对于仅依赖于 θ 的解这一特殊情形，有

$$u(\theta) = \sqrt{2\Phi(a) + 2\omega(\omega + a - 2\omega\log\sin(\theta))\sin^2(\theta)}\,, \qquad v(\theta) = a - 2\omega\log\sin(\theta) \qquad a \in \mathbb{R}\,. \tag{6.9}$$

为了构造系统 (6.1) 的通解，需要求出方程 (6.2) 的其他函数独立积分。利用积分 I_2，可将积分 I_1 的表达式改写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2I_2 + 2\omega(I_1 + \omega - \omega\log\sin^2(\theta))\sin^2(\theta)\,. \tag{6.10}$$

因此，有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{I_2 + \omega(I_1 + \omega - \omega\log\sin^2(\theta))\sin^2(\theta)}} = \sqrt{2}\mathrm{d}\tau\,. \tag{6.11}$$

引入变量 $x = \sin(\theta)$，可将前一个方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(I_2 + \omega(\omega + I_1)x^2 - \omega^2x^2\log(x^2))}} = \sqrt{2}\mathrm{d}\tau\,, \tag{6.12}$$

因此，可得积分

$$I_3 = \sqrt{2}\tau + \mathcal{G}(\sin^2(\theta), \omega, I_1, I_2) \tag{6.13}$$

其中

$$\mathcal{G}(x, \omega, I_1, I_2) = \int^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(I_2 + \omega(\omega + I_1)\xi^2 - \omega^2\xi^2\log(\xi^2))}}\,. \tag{6.14}$$

将 (6.13) 中的 τ 用 t、I_1 替换，并将 I_2 替换为表达式 (6 8)，可得到方程 S_i 的解。为求第四积分，使用积分 I_2，得到

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = I_2 - \omega\log\sin^2(\theta)\,. \tag{6.15}$$

利用 (6.13) 中 $\sin^2(\theta)$ 的表达式，可得

$$\phi = I_2 t - \omega\int^t \log\sin^2(\theta(\xi))\mathrm{d}\xi + const\,, \tag{6.16}$$

因此，积分为

$$I_4 = \phi + \omega\int^t \log\sin^2(\theta(\xi))\mathrm{d}\xi - (v + 2\omega\log\sin(\theta))t\,. \tag{6.17}$$

积分 I_1、I_2、I_3 和 I_4 在函数意义下相互独立。因此，积分超曲面一般由方程给出

$$S_i(I_1, I_2, I_3, I_4) = 0\,, \qquad i = 1, 2\,, \tag{6.18}$$

其中 S_1 和 S_2 是任意函数。因此得到霍多图方程

$$I_3 = \Phi_1(I_1, I_2)\,, \qquad I_4 = \Phi_2(I_1, I_2)\,, \tag{6.19}$$

其中 Φ_1 和 Φ_2 是任意函数，因此它们是方程 (6.1) 的解。该方程的导数在曲线

$$\det\begin{pmatrix} u\frac{\partial\Phi_1}{\partial I_1} - \frac{\partial I_3}{\partial u} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial I_2} - \omega\sin^2(\theta)\frac{\partial\Phi_1}{\partial I_1} - \frac{\partial I_3}{\partial v} \\ u\frac{\partial\Phi_2}{\partial I_1} - \frac{\partial I_4}{\partial u} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial I_2} - \omega\sin^2(\theta)\frac{\partial\Phi_2}{\partial I_1} - \frac{\partial I_4}{\partial v} \end{pmatrix} = 0\,. \tag{6.20}$$

方程 (6.1) 的单值解由霍多图方程给出

$$I_3 = \Phi_1(L_1, L_2)\,, \qquad \mathcal{T}(I_4) = \Phi_2(L_1, L_2)\,, \tag{6.21}$$

其中，$\mathcal{T}(I_4)$ 是任意满足 $\mathcal{T}(I_4) = \mathcal{T}(I_4 + 2\pi)$ 的周期函数。

7 约化 $v+\omega=0$

欧拉方程（1.1 ）满足各种约束。约束 $v(t,\theta,\phi)=-\omega$ 是最简单的一种，而且显然 y
几乎是平凡的。

7.1 一般情形

在此约束下，一般的欧拉方程（1.1）被约化为单一方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial \theta}-\omega\frac{\partial u}{\partial \phi}=0\,. \tag{7.1}$$

相应的特征方程（2.3）在 $v=-\omega$ 处有三个明显的积分

$$I_1=u\,,\qquad I_2=\theta-ut\,,\qquad I_1=\phi+\omega t\,. \tag{7.2}$$

积分超曲面由方程给出

$$S(u,\theta-ut,\phi+\omega t)=0\,, \tag{7.3}$$

由此得到霍多图方程

$$\theta-ut=\Phi(u,\phi+\omega t)\,, \tag{7.4}$$

其中，Φ 是与初始数据 $u(\theta,\ \phi,\ t=0)$ 互逆的任意函数。
方程解的 u 导数在曲线 $\frac{\partial\phi}{\partial u}+t=0$ 上爆破。方程 (7.1) 通过变换 (3.30) 与 $\tilde{v}=0$ 相连。
— —

7.2 科里奥利力情形

对于仅包含科里奥利力的欧拉方程，即系统 (4.1)，情况稍复杂。在此情形下，在约束 $v=-\omega$ 下可得到方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial \theta}-\omega\frac{\partial u}{\partial \phi}=-\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,. \tag{7.5}$$

特征方程 (4.4) 变为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1\,,\qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=u\,,\qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}=-\omega\,,\qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=-\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=0, \tag{7.6}$$

或者，等价地，

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}+\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)=0\,. \tag{7.7}$$

这个关于 θ 的方程是 数学摆的运动方程，这是一个经典的教科书问题
（例如参见 [15]）。方程 n (7.6) 有三个积分 ($L_3=0$)

$$H=\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}\omega^2\sin^2(\theta)\,,\qquad P=-\sqrt{2H}\,t+F\left(\theta,\frac{\omega}{\sqrt{2H}}\right)\,,\qquad N=\phi+\omega t\,. \tag{7.8}$$

其中 $F(\theta,\ k)$ 是第一类不完全椭圆积分。因此，积分超曲面由下式给出

$$S(H,P,\phi+\omega t)=0\,. \tag{7.9}$$

将此方程对 P 求解，可得霍多图方程

$$-\sqrt{u^2+\omega^2\sin^2(\theta)}\,t+F\left(\theta,\frac{\omega}{\sqrt{u^2+\omega^2\sin^2(\theta)}}\right)=\Phi(u^2+\omega^2\sin^2(\theta),\phi+\omega t)\,, \tag{7.10}$$

其中 Φ 是一个任意函数。
分别对 t、θ 和 ϕ 求（7.10）的导数，可得

$$\begin{aligned}-\sqrt{u^2+\omega^2\sin^2(\theta)}-\omega\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}&=M\frac{\partial u}{\partial t}\,,\\ \sqrt{u^2+\omega^2\sin^2(\theta)}&=M\left(u\frac{\partial u}{\partial\theta}+\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\\ -\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}&=M\frac{\partial u}{\partial\phi}\,,\end{aligned} \tag{7.11}$$

其中

$$M = \left(u^2 + \omega^2 \sin^2(\theta)\right)^{-1/2} ut + u\omega\left(u^2 + \omega^2 \sin^2(\theta)\right)^{-3/2} \frac{\partial F}{\partial \xi} + 2u\Phi' , \tag{7.12}$$

且 $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ 表示 $\frac{\partial F(\theta,\ \xi)}{\partial \xi}$，而 Φ' 表示 Φ 对第一个自变量的导数。结合关系式 (7.11)，可得

$$M\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \theta} - \omega\frac{\partial u}{\partial \phi} + \omega^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\right) = 0 . \tag{7.13}$$

因此，若 $M \neq 0$ 霍多图方程 (7 10) 的解 $u(t,\ \theta,\ \phi)$ 满足方程 (7.5)，则在 $M = 0$ 的情况下，u 的导数会爆破。

因此，霍多图方程 (7.10) 给出了方程 (7.5) 的通解，其形式为

$$u = \sqrt{\zeta(t, \theta, \phi) - \omega^2 \sin^2(\theta)} , \tag{7.14}$$

其中，函数 $\zeta = \zeta(t,\ \theta,\ \phi)$ 是超越方程的一个解

$$-\zeta\, t + F\left(\theta, \frac{\omega}{\zeta}\right) - \tilde{\Phi}(\zeta, \phi + \omega t) = 0 , \tag{7.15}$$

且 $\tilde{\Phi}$ 是一个任意函数。

值得注意的是，函数 S 的不同选取会给出方程 (7.5) 的其他特解。例如，取 $S = \Psi(H,\ N)$，可得解

$$u = \pm\sqrt{\tilde{\Phi}(\phi + \omega t) - \omega^2 \sin^2(\theta)} , \tag{7.16}$$

其中 $\tilde{\Phi}$ 是一个任意函数。该函数族中的一个简单解如图 2 所示。

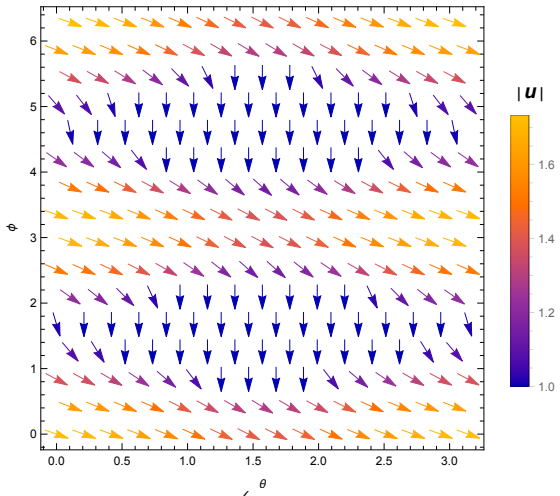

图 2：当 $\tilde{\Phi}(x) = \cos(2x)$ 时的定常解 (7.16)，其为 $\mathbf{u} = \left(1 + \cos(2(\phi + \omega t)) - \omega^2 \sin^2(\theta)\ -\omega\right)$。图示位置为 $\omega = 1,\ t = 0$。

我们还注意到方程 (7.5) 的一些等价形式。首先，将其改写为守恒律形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega\frac{\partial}{\partial \phi}\right) u + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \sin^2(\theta)\right) = 0 , \tag{7.17}$$

它蕴含关于势函数 ψ $\left(u = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)$ 的哈密顿-雅可比型方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \psi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \sin^2(\theta) = 0 . \tag{7.18}$$

其次，变量代换 $\tilde{t} = t,\ \tilde{\phi} = \phi + \omega t,\ \tilde{u} = u(\tilde{t}, \theta, \tilde{\phi} - \omega\tilde{t})$ 将方程 (7.5) 化为以下方程

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \omega^2 \sin(\theta)\cos(\theta) = 0 . \tag{7.19}$$

这类方程已在多篇论文中讨论过（例如参见 [9]）

7.3 椭圆模方程

霍多图方程 (7.10) 的形式也提示我们引入新的因变量

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{u^2 + \omega^2 \sin^2(\theta)}}\,, \tag{7.20}$$

即函数 $F(\theta,\ k)$ 的椭圆模，或 $k = \omega/\sqrt{2H}$。相应的方程为

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\omega\sqrt{1 - k^2\sin^2(\theta)}}{k}\frac{\partial k}{\partial \theta} - \omega\frac{\partial k}{\partial \phi} = 0\,. \tag{7.21}$$

该方程的霍多图方程为

$$-\omega t + kF(\theta, k) = \tilde{\Phi}(k, \phi + \omega t)\,, \tag{7.22}$$

其中 $\tilde{\Phi}$ 是任意函数。容易验证，方程 (7.22) 的解通常也是方程 (7.21) 的解。爆破解曲线为

$$F(\theta, k) + k\frac{\partial F(\theta, k)}{\partial k} - \frac{\partial \tilde{\Phi}(k, \phi + \omega t)}{\partial k} = 0\,. \tag{7.23}$$

值得注意的是，公式 (7.21) 和 (7.22) 可解释为描述第一类标准椭圆积分一类变形的方程

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\xi)}}\,. \tag{7.24}$$

事实上，设椭圆模 k 发生变形，即 $k = k(t,\ \theta)$。那么方程（方程 (7.21)，其中 $\frac{\partial k}{\partial \phi} = 0$ 和 $\omega = 1$）

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\theta)}}{k}\frac{\partial k}{\partial \theta} = 0\,, \tag{7.25}$$

描述了对 k 的变形，使得

$$kF(\theta, k) = t + \Phi(k)\,, \tag{7.26}$$

其中 $\Phi(k)$ 是任意函数。这类变形可能具有的几何意义将在其他地方讨论。

8 关于物理速度的欧拉方程

欧拉方程（1.1）中的速度 u 和 v 是局部坐标 θ 和 ϕ 关于时间的导数：$u = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ 和 $v = \frac{\partial \phi}{\partial t}$。在这些变量下，非旋转球面（$\omega = 0$）上的欧拉方程在一般坐标变换下保持不变（例如参见 [11]）。物理速度是与球面相切的向量，其分量为

$$\tilde{u} = u\,, \qquad \tilde{v} = v\sin(\theta)\,. \tag{8.1}$$

用 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 表示时，欧拉方程（1.1）具有如下形式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{\sin(\theta)}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} = (\tilde{v} + \omega\sin(\theta))^2\cot(\theta)\,,\\
&\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{\sin(\theta)}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \phi} = -\tilde{u}(\tilde{v} + 2\omega\sin(\theta))\cot(\theta)
\end{aligned} \tag{8.2}$$

并且已有多篇论文对此进行了讨论（例如参见 [11, 20]）。

在一般情况下，系统（8.2）的解可通过简单的变换（8.1），由章节（2）和（3）中给出的解得到。对于小 ω 的极限，情况也相同。事实上，当 $\omega \ll |v|$ 很小时，方程（8.2）可近似为以下系统

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{\sin(\theta)}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} = \tilde{u}(\tilde{v} + 2\omega\sin(\theta))\cot(\theta)\,,\\
&\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{\sin(\theta)}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \phi} = -\tilde{u}(\tilde{v} + 2\omega\sin(\theta))\cot(\theta)\,,
\end{aligned} \tag{8.3}$$

(8.3) 的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 1\,, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{u}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\tilde{v}}{\sin(\theta)}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{u}(\tilde{v} + 2\omega\sin(\theta))\cot(\theta)\,, \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau} = -\tilde{v}(\tilde{v} + 2\omega\sin(\theta))\cot(\theta)\,. \tag{8.4}$$

不难验证，方程 (4.1)、(4.4) 与 (8.3)、(8.4)，以及相应的解，均通过变换 (8.1) 相互关联。

对于快速旋转球体（ $\omega \gg |v|$较大），情况显然有所不同。按照与方程（5.1）相同的推理方式，即在方程（8.2）的右端只保留关于 $\omega/|v|$的最高阶项，可得方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}+\frac{\tilde{v}}{\sin(\theta)}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi}=\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,,\\ &\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta}+\frac{\tilde{v}}{\sin(\theta)}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \phi}=-2\tilde{u}\omega\cos(\theta)\,. \end{aligned} \tag{8.5}$$

相应的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1\,,\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{u}\,,\quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\tilde{v}}{\sin(\theta)}\,,\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tau}=\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,,\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau}=-2\tilde{u}\omega\cos(\theta)\,. \tag{8.6}$$

直接检验可知，关于 v 和 $\tilde{v}$ 的方程，因此整个系统（5.1）、（5.2）与（8.5）、（8.6），并不通过映射（8.1）相互关联。因此，当 $\omega \gg |v|$ 较大时，系统（1.1）和（8.2）的朴素极限在形式上不同：除去小项 $uv \ll 2\omega u$ 后，它们通过变换（8.1）相互关联。

我们来构造　　系统（8.5）的霍多图方程。公式（8.6）立即给出两个积分　　ls

$$I_1=\frac{1}{2}\tilde{u}^2-\frac{1}{2}\omega^2\sin^2(\theta)\,,\qquad I_2=\tilde{v}+2\omega\sin(\theta)\,. \tag{8.7}$$

利用积分 I_1，可得方程 (5.8) 以及公式 (5.10)、(5.11)，从而得到积分 I_3，与第 5 节相同。

然后，将积分 I_2 代入 (8.7)，可得方程

$$\mathrm{d}\phi+2\omega\mathrm{d}\tau=\frac{I_2}{x(\tau)}\mathrm{d}\tau\,, \tag{8.8}$$

其中 $x(\tau)$ 由 (5.14) 给出。

因此，可得第四积分

$$I_4=\phi+2\omega\tau-\frac{I_2}{2k}\int^{\tau}\left(\frac{\sqrt{k+\mathrm{cn}^2\left(I_3-\sqrt{1+k}\omega\xi,\frac{1}{\sqrt{1+k}}\right)}}{\mathrm{sn}\left(I_3-\sqrt{1+k}\omega\xi,\frac{1}{\sqrt{1+k}}\right)}\right)\mathrm{d}\xi\,. \tag{8.9}$$

于是，通过方程选取积分超曲面

$$S_i(I_1,I_2,I_3,I_4)=0,\qquad i=1,2\,, \tag{8.10}$$

其中 S_1 与 S_2 为任意函数，可得系统 (8.5) 的霍多图方程。例如

$$\tilde{u}^2-\omega^2\sin^2(\theta)=\Phi_1(I_3,I_4)\,,\qquad \tilde{v}+2\omega\sin(\theta)=\Phi_2(I_3,I_4)\,, \tag{8.11}$$

其中 Φ_1 和 Φ_2 是任意函数。系统（8.11）的解通常也是系统（8.5）的解。这些解的导数会在曲线上爆破

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\tilde{u}}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial I_4}\frac{\partial I_4}{\partial\tilde{u}}-2\tilde{u} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\tilde{v}}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial I_4}\frac{\partial I_4}{\partial\tilde{v}}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\tilde{u}}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial I_4}\frac{\partial I_4}{\partial\tilde{u}} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\tilde{v}}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial I_4}\frac{\partial I_4}{\partial\tilde{v}}-1 \end{pmatrix}=0\,. \tag{8.12}$$

上述欧拉方程精确解的特定类别所具有的特殊性质将在别处进行分析。

Si系统（8.5）的单值解通过使用拟坐标方程获得　　n

$$\tilde{u}-\omega^2\sin^2(\theta)=\Phi_1(I_3,\mathcal{T}(I_4))\,,\qquad \tilde{v}+2\omega\sin(\theta)=\Phi_2(I_3,\mathcal{T}(I_4))\,, \tag{8.13}$$

其中 $\mathcal{T}(I_4)$ 是一个一般的周期函数，使得 $\mathcal{T}(I_4)=\mathcal{T}(I_4+2\pi)$。

关于不存在奇异性且具有若干与物理应用相关的特定性质的欧拉方程（1.1）的解，将另行讨论。

致谢

作者谨向 L. Fatibene 和 A. A. Veselov 致谢，感谢他们进行的有益讨论。本项目获得欧盟地平线2020研究与创新计划玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助，资助编号为-，并获得 PRIN 2022TEB52W-PE1 项目“可积性的魅力：从非线性波到随机矩阵”的资助。我们还谨此感谢 INdAM 的 GNFM 分部提供支持，本工作的部分内容正是在其支持下完成的；同时感谢 INFN 的 MMNLP（非线性物理的数学方法）项目提供的经费支持。

A 常数 L_3 的解

取 $\Psi_1 = 0$ 且 $\Psi_2 = L_3 =$ 为常数，可得霍多图方程 (3.2) 的简单解。事实上，在这种情况下

$$\begin{aligned} &t + \sigma \frac{1}{\sqrt{u^2 + \sin^2(\theta)(v+\omega)^2}} Q(u, v, \theta) = 0\,, \\ &v = \frac{\Phi_2}{\sin^2(\theta)} - \omega\,. \end{aligned} \tag{A.1}$$

在 u 不依赖于 t 的特殊情况下，量

$$u^2 + \frac{\Phi_2^2}{\sin^2(\theta)} = A = \text{const.} \tag{A.2}$$

是方程 (A.1) 的一个积分。

因此可得解

$$u_\pm = \pm\sqrt{A - \frac{\omega^2}{\sin^2(\theta)}}\,, \qquad v = \omega \operatorname{cotan}^2(\theta)\,. \tag{A.3}$$

在形式极限 $\omega \to 0$ 下，解 $u_\pm$，v 变为

$$u_\pm|_{\omega=0} = \pm\sqrt{A}\,, \qquad v_\pm|_{\omega=0} = 0\,. \tag{A.4}$$

注意，另一个解

$$u_\pm = \pm\sqrt{A}\,, \qquad v_\pm = -\omega\,, \tag{A.5}$$

在 $\omega = 0$处具有相同的极限 $\overline{u} = \pm\sqrt{A}$，$v = 0$。

值得强调的是，变换 (3.31) 将解 (A.3) 转化为

$$\tilde{u} = \sqrt{A - \frac{\omega^2}{\sin^2(\theta)}}\,, \qquad \tilde{v} = \frac{\omega}{\sin^2(\theta)} \tag{A.6}$$

方程 (3.29) 的解，而对解 (A.5) 进行变换则得到

$$u_\pm|_{\omega=0} = \pm\sqrt{A}\,, \qquad v_\pm|_{\omega=0} = 0\,. \tag{A.7}$$

这一事实说明了变换 (3.31) 与方程 (1.1) 的解的形式极限 $\omega \to 0$ 之间的区别。

B 系统 (4.1) 特征线的拉格朗日量

本文揭示了（4.1）的特征线所具有的拉格朗日结构：它们等价于球面上受科里奥利力作用的质点运动，这与流体运动的拉格朗日解释相一致。本文给出了特征方程（4.5）

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \sin\theta\cos\theta\left(\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \omega\right)^2 - \omega^2\right) \qquad , \\ &\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = -2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \omega\right) \qquad . \end{aligned} \tag{B.1}$$

这类方程相对于该拉格朗日量是拉格朗日方程

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =&\frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2+\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right)+\omega\sin^2(\theta)\dot{\phi}\\ =&\frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2+\sin^2(\theta)\left(\dot{\phi}+\omega\right)^2\right)-\frac{1}{2}\omega^2\sin^2(\theta)\,,\end{aligned} \tag{B.2}$$

其中 $\dot{f}=\mathrm{d}f\_\mathrm{d}t$。共轭动量为

$$p_\theta=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=\dot{\theta}\,,\qquad p_\phi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}=\sin^2(\theta)\left(\dot{\phi}+\omega\right)\,. \tag{B.3}$$

与拉格朗日量对应的雅可比积分为

$$E=p_\theta\dot{\theta}+p_\phi\dot{\phi}-\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2+\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right)\,, \tag{B.4}$$

这与非旋转球面上粒子的能量相同（$\omega=0$）。该系统的哈密顿量为

$$\mathcal{H}=\frac{p_\theta^2}{2}+\frac{p_\phi^2}{2\sin^2(\theta)}-\omega p_\phi+\frac{1}{2}\omega^2\sin^2\theta\,. \tag{B.5}$$

拉格朗日量 (B.2) 也是恒定磁场 $\mathbf{B}=(0,0,2\omega)$ 中球面上一个单位电荷、单位质量粒子的拉格朗日量。

参考文献

[1] V. I. Arnold 年）[2] A. Babin、A. Mahalov、B. Nicolaenko *Global splitting, integrability and regularity of 3D Euler and Navier-Stokes equations for uniformly rotating fluids* 《欧洲力学杂志B辑：流体》15(3) 291-300（1996）[3] P. F. Byrd 和 M. D. Friedman *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists* 施普林格出版社 纽约（1971）[4] S. Caprino、C. Marchioro *On nonlinear stability of stationary Euler flows on a rotating sphere* 《数学分析与应用杂志》129(1) 24-36（1988）[5] B. Cheng、A. Mahalov *Euler equation on a fast rotating sphere: Time-averages and zonal flows* 《欧洲力学杂志B辑：流体》37 48-58（2013）[6] A. Constantin、P. Germain *Stratospheric Planetary Flows from the Perspective of the Euler Equation on a Rotating Sphere* 《理性力学与分析档案》245(1) 587-644（2022）[7] R. Courant、D. Hilbert *Methods of Mathematical Physics 1* 威利出版社 纽约 美国（1989）[8] R. Courant、D. Hilbert *Methods of Mathematical Physics 2: Partial Differential Equations* 威利出版社 纽约 美国（1989）[9] T. Curtright、D. Fairlie *Morphing quantum mechanics and fluid dynamics* 《物理学杂志A辑：数学与一般》36 8885-8902（2003）[10] C. Eckart *Hydrodynamics of oceans and Atmospheres* 培格曼出版社 英国（1960）[11] W. L. Gates *Derivation of the Equations of Atmospheric Motion in Oblate Spheroidal Coordinates* 《大气科学杂志》61 2478-2487（2004）[12] T. Gerkema、J.T.F. Zimmerman、L.R.M. Maas、H. VanHaren *Geophysical and astrophysical fluid dynamics beyond the traditional approximation* 《地球物理学评论》46(2) RG2004（2008）[13] A. E. Gill *Atmosphere-Ocean Dynamics* 学术出版社 美国（1982）[14] B. G. Konopelchenko、G. Ortenzi *On Euler equation for incoherent fluid in curved spaces* 《物理学D辑》476 134667（2025）[15] L. D. Landau、E. M. Lifshitz *Mechanics* 培格曼出版社 英国（1969）[16] L. D. Landau、E. M. Lifshitz *Fluid Mechanics* 培格曼出版社 英国（1987）[17] I. I. Mokhov、S. G. Chefranov 和 A. G. Chefranov *Point vortices dynamics on a rotating sphere and modeling of global atmospheric vortices interaction* 《流体物理学》（ ）[18] J. Pedlosky *Geophysical Fluid Dynamics* 施普林格出版社 纽约 美国（1979）

[19] R. Salmon *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics* 牛津大学出版社 英国（1998年）[20] M. Tort、T.Dubos、F.Bouchut、V.Zeitlin *Consistent shallow-water equations on the rotating sphere with complete Coriolis force and topography* 748 789 821 2014 《流体力学杂志》-（ ）[21] G. K. Vallis *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*剑桥大学出版社 英国（2006年）[22] G. B. Whitham *Linear and Nonlinear Waves* 约翰·威立父子出版公司 纽约 美国（1999年）[23] V. Zeitlin（编者） *Nonlinear Dynamics of Rotating Shallow Water: Methods and Advances* 爱思唯尔科学出版社 荷兰（2007年）