arXiv:2603.05753v1 [math.DS] 5 Mar 2026

丢番图“心之泪”

Yu. S. Ilyashenko[1], S. Minkov[2], 和 I. Shilin[1]

[1]HSE大学，俄罗斯莫斯科[2]Brook Institute of ElectronicControl Machines，俄罗斯莫斯科

谨以此文纪念杰出的数学家、令人敬仰的人
Valentin Senderovich Afraimovich

摘要

近期对向量场展开的研究表明，对于具有“心之泪”多环的拓扑泛型展开——该多环包含一条内部和一条外部绕行分离曲线——在一个特殊的单参数子族中，若“心”得以保留而“泪”环发生破裂，则至少会出现四个弱拓扑分类不变量。本文表明，从度量角度考察会得到不同结果：对于原始向量场相关系数的几乎所有勒贝格值，这个特殊的单参数族只产生两个此类不变量。

关键词：平面向量场、多重周期轨道、典型动力学、丢番图-刘维尔型现象
MSC2010: 34C23, 37G99,37E35

1 引言

在 [6], 中描述了 $\mathbb{S}^2$上“心之泪”多环（见图1）的展开的一个开集。这些展开具有拓扑共轭的数值不变量，其个数取决于有多少条分离曲线绕该多环 [5]缠绕。

下文将考虑最简单的情形：一条分离曲线在“泪滴”分离曲线环内绕行一次，另一条分离曲线绕行整个多环[1]。我们用 L 和 M 表示多环的两个鞍点，并假设它们的特征数λ, μ 满足 $\lambda < 1, \quad \lambda^2\mu > 1$。根据 [4], ，多环内外的单值化映射

本研究得到HSE大学基础研究计划（项目编号075- 00648-25-00“对称性、信息、混沌”）的支持。[1] 按照惯例，我们假设该向量场限制在多环的一个窄邻域的补集上时是结构稳定的。我们还采用一个技术性的“非零速度”条件（参见例如 [4]）。该假设仅为满足我们从 [6, 4]所引用结果的假设条件所必需，并且在一族的开稠密集上成立。

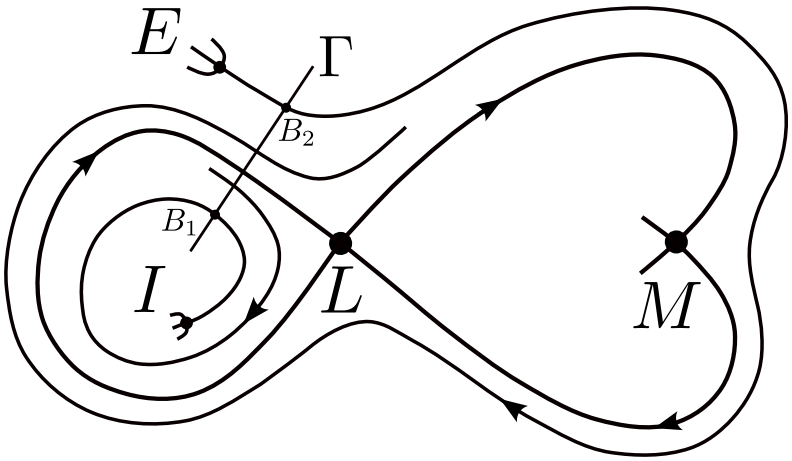

图　　图 1：具有外部和内部鞍点的“心之泪”多环　　es

分别与标准映射 $x \mapsto C_1 x^{\lambda}$ 和 $x \mapsto C_2^{-1} x^{\lambda^2 \mu}$ C^1-共轭。绕行分离曲线与半横截线的交点记为 B_1 和 B_2。[2]

由于“心之泪”有三个分离曲线连接，因此这种多环不会出现在一般二参数族中，研究并分类其 3 参数展开是很自然的。然而，这样的展开包含一个特殊的单参数子族，它涵盖了所有已知的数值不变量。

定义。“心之泪”的标准单参数族定义为一个子族，其中对应于“心”的分离曲线连接保持完整，而只有“泪”的连接（即 L 的分离曲线环）被打破。

尽管 [6, 5, 4] 的原始结果描述了关于中等拓扑等价的分类不变量，但本文将始终采用弱等价。事实上，检查原始证明可以发现，这些论证对于弱等价的情形仍然成立，因为核心问题归结为参数基底[3]之间适当同胚的存在性。

˜**定义**。 如果存在一个映射，则称 M 上的两族向量场 $\{v_\alpha \mid \alpha \in B\}$、 $\{\tilde{v}_{\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in B\}$ 是弱拓扑等价的

$$H : B \times M \to \tilde{B} \times M, \quad H(\alpha, x) = \big(h(\alpha), H_\alpha(x)\big) \tag{1.1}$$

˜使得 h: $B \to B$ 是一个同胚，并且对于每个 $\alpha \in B$，映射 H_α： $M \to M$ 是一个将 v_α 和 $\tilde{v}_{h(\alpha)}$的相图连接起来的同胚。

显然，建立 3 参数基底等价关系的同胚 h 必须将第一个展开中的标准单参数子族映射到第二个展开中的标准子族。

[2]显然， B_1， B_2的选取并不唯一。然而， C_1， C_2的选取比预期的更加微妙，并且在某种意义上与下面的引理“同步”；详情请参见 [4] 。[3]这一点已在 [6]中指出。

最近，[4] 表明，对于<未 style id='2'>拓扑上一般的族，至少存在四个拓扑分类不变量。如上所述，所有这些不变量都源自标准单参数子族：只需考察标准单参数子族，即可看出当这些不变量不一致时不存在等价关系。

以下结果与前述事实形成了鲜明对比。

定理1（关于丢番图族）。存在一个系数空间中的全勒贝格测度集合 $\mathcal{A} \subset (\lambda, \mu, B_i, C_i) \simeq \mathbb{R}^6_+$，使得对于任意两个系数属于 $\mathcal{A}$的标准单参数族 $\{v_\varepsilon\}$ 和 $\{\tilde{v}_{\tilde{\varepsilon}}\}$，其弱等价由两个数值不变量是否相同决定。更准确地说，假设与未扰动的“心之泪”多环相对应的原始向量场轨道拓扑等价（$v_0 \approx \tilde{v}_0$），且两个展开的系数元组均来自 $\mathcal{A}$，那么当且仅当

$$A = \tilde{A}$$

and

$$\tau = \tilde{\tau} \mod (1, A)$$

其中 $A = -\ln \lambda / \ln(\lambda^2 \mu)$，$\tau = s/\ln(\lambda^2\mu)$，$s = \ln\left(\frac{\ln C_1}{1-\lambda} - \ln B_1\right) - \ln\left(\ln 1 - \frac{C_2}{(\lambda^2\mu)^{-1} - \ln B_2}\right)$，波浪号表示与第二个族相关联的参数。

此后，我们始终假设 A 是无理数。对于这种情况，[5, 6] 证明了“仅当”部分。请注意，这一假设不会改变 $\mathcal{A}$ 的测度，因为与有理数 A 对应的集合是零测度的。“当”部分是本文的主要结果。

综合定理1和 [4] 的结果可见，在具有“心之泪”的度量一般族与拓扑一般族中，两者的行为存在显著差异。

注。我们应强调，定理1仅在恰有一条内部分离曲线绕行和一条外部分离曲线绕行的条件下成立。额外分离曲线的存在会引入新的不变量（见 [5]）。然而，我们猜想，在这种情况下，在我们所采用的丢番图族框架内（见下文），除 [5, 6], 中给出的数值不变量外，不存在其他新的数值不变量，尽管可能会出现一些组合不变量。

注。请注意，尽管定理陈述仅适用于标准的单参数子族，但上述“差异”会延伸至整个三参数展开。

注。上述四个李乌维尔（更准确地说，所谓的移位指数李乌维尔）族的不变量为 λ，μ，τ 模 1，A，以及相对尺度系数（在 [4] 中引入）的对数模 $\ln \lambda$。

2 个 LMF 图

LMF 图（Leontovich、Mayer、Fedorov 图）是证明 $\mathbb{S}^2$ 上的两个向量场轨道拓扑等价的便捷工具。本节介绍 LMF 图时，我们遵循 [3] 中的论述。

非正式地说，LMF 图是一种表示相图中可见拓扑信息的方法。我们给出向量场仅具有双曲奇点时的定义，并省略一般情形所需的一些细节（见 [3]）。我们还假设向量场只有有限多个周期轨道。为了定义 LMF 图，我们需要在向量场 v 的每个源点和汇点周围设置一个小的横截环；此外，我们还在多环的单调侧附近以及每个极限环的两侧选取横截环。这些环的具体选取不会影响 LMF 图的同痕类。如果这样的环与鞍点的分离曲线相交，我们就标记这些交点，并称之为截断顶点，因为分离曲线将在这些位置截断，以避免出现无限长的边（例如，当一条分离曲线绕向一个周期轨道时）。

现在，具有双曲奇点的向量场 v 在 $\mathbb{S}^2$ 上的 LMF图是嵌入在 $\mathbb{S}^2$ 中的一个图像$LMF\,(v)$，由以下元素组成。

顶点：（1） v 的所有奇点；（2）所有截断顶点： v 的分离曲线与上述所选横截环的交点；（3）每个周期轨道上的一个点；（4）每个空横截环上的一个点，即与 v 的分离曲线不相交的横截环上的点。

边： （1）鞍点的不稳定（稳定）分离曲线，前提是其 ω-（分别为 α-）极限集由一个非焦点奇点构成；（2）鞍点截断后的不稳定（稳定）分离曲线——即连接一个鞍点和一个截断顶点的分离曲线弧段——若这些分离曲线不满足情形 1）的条件；（3）极限环（这类边的起点和终点均为类型 3 的顶点）；（4）相邻截断顶点之间的横截环片段，或整个空横截环（这些与类型 4 的顶点相连）。

定向。 类型1、2、3的边的定向由时间参数化诱导。类型4的边的定向，相对于包含与该横截环对应的 α-或 ω-极限集的圆盘而言，为逆时针。

标记。 LMF图的每个顶点均按其类型的描述进行标记，具体而言，这些标签分别为奇点（SP）、截断顶点（TV）、极限环上的顶点（VLC）、空横截环上的顶点（VETL）。类似地，边上的标签分别为稳定分离曲线（SS）、不稳定分离曲线（US）、分离曲线连接（SC）、稳定截断分离曲线（STS）、不稳定截断分离曲线（UTS）、极限环（LC）、出射横截环（OTL）、入射横截环（ITL）。若一条横截环是围绕其 ω-极限集的环，则称该横截环为入射；否则称该横截环为出射。

下面的 Fedorov 定理（基于 Andronov、Leontovich、Gor- don、Mayer [1]的先前结果）给出了一个基于 LMF 图的判据，用于判断球面上向量场的共轭。

定理2 (R. Fedorov, [2])。 如果两个向量场$v\,w$ 的 ***LMF*** 图 $LMF(v)$ $LMF(w)$ 在球面上同痕（即存在一个保定向同胚，将一个图映射到另一个图，同时保持边的定向，并使边和顶点上的标签相匹配），那么 v 和 w 轨道拓扑等价。

实际上，这一定理弥合了几何直觉与形式证明之间的间隙：它确保了那些“从图形上看”似乎共轭的域在拓扑上确实

共轭。

3 丢番图族的集合

设 A 和 s 如定理1中所述，并设 $\gamma = \ln(\lambda^2\mu)$。

定义。 如果包含关系丢番图 仅对有限个整数对成立，则称一个族为

$$A - m/n \in \left[\frac{s - 1/(m^2+n^2)}{\gamma n}, \frac{s + 1/(m^2+n^2)}{\gamma n}\right]$$

$(m,\ n)$。

定理1中的满测度集合 $\mathcal{A}$ 是满足附加条件 $A = {}^{-}\ln\lambda\ \ln\lambda^2\mu$ 为无理数的丢番图族的系数集合。我们来验证，丢番图族对应于系数空间中一个满勒贝格测度集合；同样的结论也将显然适用于集合 $\mathcal{A}$。

命题3.1。 对于关于勒贝格测度几乎所有的参数 (λ, μ, B_i, C_i)，相应的族都是丢番图的。

证明。 对于固定的 $\lambda^2\mu, B_i, C_2$ 和 $\ln C_1/(1-\lambda)$，γ 和 s 的值也随之固定，而 A 可以通过改变 λ 和 μ 来调整（同时 $\lambda^2\mu$ 保持不变）。对于任意的 $T > 0$，我们来证明：对任意固定的 γ 和 s，几乎每个 $A \in [-T, T]$ 都满足丢番图性质。事实上，令

$$J = 1 + (|s| + 1)/|\gamma|.$$

情形 1。 如果 $|m| > (|A| + J)|n|$，则可得 $|A - m/n| > J$。由于

$$\left[\frac{s - 1/(m^2+n^2)}{\gamma n}, \frac{s + 1/(m^2+n^2)}{\gamma n}\right] \subset [-J, J],$$

在这种情况下不存在解。

情形 2。 另一种可能是 $|m| \le (|A| + J)|n| \le (T + J)|n|$。

对于任意一对 (m, n)，该包含关系对构成长度为 $\frac{2}{\gamma n (m^2+n^2)}$ 的线段的 A 成立。因此，固定 n 并考虑所有可能的 m 时，这些线段的并集 J_n 的总测度可估计为

$$\sum_{|m| \le (T+J)|n|} \frac{2}{\gamma n (m^2+n^2)} \le \frac{2}{\gamma |n|} \sum_{|m| \le (T+J)|n|} \frac{1}{n^2} \le \frac{2}{\gamma n} \cdot \frac{2(T+J)}{n}.$$

因此，J_n 在 $|n| > N$ 上的并集的总测度至多为

$$\frac{4(T+J)}{\gamma} \sum_{|n| > N} \frac{1}{n^2} = o(1), \quad n \to +\infty.$$

如果 A不满足丢番图性质，那么 A 就属于 J_n 中无穷多个 n，这意味着对于任意 N，它都位于尾集 $\cup_{|n|>N} J_n$中。由于这些尾集的测度随着 $N \to \infty$趋于零，因此 A 的禁值集合是零测度的。

因此，对于固定的 γ 和 s，关于勒贝格测度，丢番图性质对几乎所有 A 都成立。当我们固定 $\lambda^2\mu$、B_1、B_2、C_2 以及 $C_1/(1-\lambda)$ 的值时，会在系数空间中得到一条曲线。用 A 对这条曲线进行参数化后，几乎每个参数值都对应于一个丢番图族。由于映射 $\lambda \mapsto \ln\lambda/\ln(\lambda^2\mu)$ 是一个微分同胚（回顾一下，$\lambda^2\mu > 1$ 是固定的），因此，当我们用 λ 重新参数化这条曲线时，结论仍然成立。将富比尼定理应用于把系数空间分叶成这些曲线的叶层，证明即告完成：对于几乎每个系数元组，该族都是丢番图的。

□

4 主定理的证明

4.1 闪烁鞍连接与有用引理 as

考虑一个标准单参数族，其中内鞍点 I 位于环的内部。于是，对于一列无穷多个值 $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$， L 与 I 之间会出现闪烁鞍连接；也就是说，对应于 ε_n 的向量场具有一条分离曲线连接，它会“绕着消失的分离曲线环转过 n 次”。对于 L 和外鞍点 E，情况同样如此。无损一般性地，假设这些分岔发生在 $\varepsilon > 0$ 处；如有必要，可通过变换 $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$ 实现这一点。

在双对数坐标图 $\ln(-\ln\varepsilon)$中，分岔参数构成两列受扰动的等差数列 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$； e_n 对应于 EL 连接。值得注意的是，一对受扰动的等差数列不一定总能通过实直线上的同胚映射为另一对这样的数列（见 [6, 4]）。这引出了以下定义。

定义。 如果存在一个 0 的邻域上的同胚，将一组实直线 $\mathbb{R}_+$ 上的带标记点列映射到另一组带标记点列，同时保持标记不变，即每个数列都映射到另一组中相应的数列（至多有有限个点例外），则称这两组带标记点列在 0 处序等价 。

以下引理基于 [4]的结果。

˜引理4.1。 当 $A = A$ 和 $\tau = \tilde{\tau}$ 模 $(1, A)$时，对于丢番图族，对应于 LI 连接和 LE 连接的数列是序等价的。

证明。 首先，假设 LI 和 LE 连接不会同时发生。正如在 [4], 中引理4.1关于两个标准子族的证明所示，对应于 LI 和 LE 连接的数列对序等价，当且仅当满足条件： A 不属于某个区间族。更确切地说，存在函数 $Q_i(m,\ n)$ $i = 1,\ 2$，它们根据鞍点˜连接参数值 $i_n,\ e_m,\ i_n,\ \tilde{e_m}$的渐近展开定义，使得 LI和 LE的数列对

连接序等价，当且仅当满足条件

$$A - m/n \notin \frac{s + (Q_1(m,n), Q_2(m,n))}{\gamma n}$$

对所有充分大的 m 和 n 都成立（参见 [4] 的公式 (4.2)； $Q_i(m,n)$ 的显式形式就在该公式之后给出）。重要的是， $Q_i(m,n)$ 在 (m,n) 中呈指数衰减；其首项已在 [4, 命题 4.1] 中明确计算。

对于丢番图族，这一包含关系

$$A - m/n \in \left[\frac{s - 1/(m^2+n^2)}{\gamma n}, \frac{s + 1/(m^2+n^2)}{\gamma n}\right]$$

仅对有限多个整数对 (m,n) 成立。由于 $|Q_i(m,n)|$ 呈指数衰减，因此渐近地有 $|Q_1(m,n)|+|Q_2(m,n)| < 1/(m^2+n^2)$ 成立，从而完成了此情形下引理的证明。

根据 [4] 中的计算（见引理3.1）， LI 和 LE 连接同时出现当且仅当

$$n \ln \lambda - m \ln(\lambda^2 \mu) = s - r_1(n) + r_2(m),$$

其中 $r_1(n) = O(\lambda^n)$ 且 $r_2(m) = O((\lambda^2\mu)^{-m})$。这可以写成

$$A - m/n = s/(\gamma n) + O(\lambda^n) + O((\lambda^2\mu)^{-m}),$$

只要 (m,n) 足够大，这对丢番图族来说是不可能的。证明完毕。

□

原则上，标准单参数族中的其他鞍连接也可能产生新的数值不变量。不过，下面两个引理排除了这种可能性。

引理 4.2. 标准单参数族中，除 LI 连接、 LE 连接和 EI 连接外，不存在闪烁鞍连接。

证明。 在标准单参数族中，只有四条分离曲线可能形成连接： L的两条分离曲线、 I的一条分离曲线，以及 E的一条分离曲线。连接总是由一条入射分离曲线和一条出射分离曲线形成，因此只有四种可能。然而， L 的两条分离曲线无法形成连接，因为对 $\varepsilon > 0$ 而言，它们构成一个本迪克森袋，即一个陷获区域。因此只剩下引理中列出的三种可能。

□

引理 4.3. 如果两个族的 LE 连接和 LI 连接序等价，那么这两个族的所有 LE、 LI和 EI 连接的集合也序等价。

这个引理正式指出，在标准单参数族的情形下， EI 连接不会产生额外的不变量。证明推迟到第5节。

4.2 无额外组合学引理

在证明定理1之前，我们还需要一个最后的引理，用以排除非平凡组合不变量的存在：

引理 4.4. 假设鞍点 I 的稳定分离曲线是在反向时间下绕行至“心之泪”环路的唯一分离曲线，而 E 的不稳定分离曲线是绕行至整个多环的唯一分离曲线。那么， I 的两条不稳定分离曲线共有同一个吸引子，且 E 的两条稳定分离曲线共有同一个排斥子。

证明。 反设鞍点 I 的两条不稳定分离曲线趋于不同的吸引子。由此可知，绕行的稳定分离曲线 I 位于它们吸引域的公共边界上，而这些吸引域是开集。考虑环路附近分离曲线第 n 圈与第 $(n+1)$ 圈之间的一条条带。在这条带内，两个吸引域都存在，因此必定由另一条分离曲线将它们分隔开。由于 n 是任意的，这条“新”分离曲线将绕行至环路。这与环内只有一条绕行分离曲线的假设矛盾。因此，两条分离曲线必定趋于同一个吸引子。鞍点 E 的论证类似。

□

4.3 定理1的证明

为了证明定理1，我们需要确立：对 ε的所有取值，这两个族的LMF 图都是同痕的。首先，我们处理情形 $\varepsilon < 0$。此时，在多环之外出现一个吸引型双曲极限环，而在环的内部则出现一个排斥型极限环（参见，例如， [1, 第254页，图 143]）。两条不稳定分离曲线（即 L 与 E的那些）趋向该吸引环。类似地， L 与 I 的稳定分离曲线从该排斥环螺旋远离。

结合该族中向量场“外部”部分的结构稳定性，这表明对应于 $\varepsilon < 0$ 的LMF 图是同痕的。因此，Fedorov 定理确立了限制在 $\{\varepsilon \leqslant 0\}$上的这些族的弱等价，其中底空间 $\{\varepsilon \leqslant 0\}$ 的恒等同胚（或者实际上任意同胚）都可以取作参数映射。

剩下的情况是 $\varepsilon > 0$。根据引理4.1， LE 和 LI 连接˜对于具有 $A = A$ 和 $\tau = \tilde{\tau}$（模 1， A）的丢番图族而言是序等价的。因此，根据引理 4.3，这两个族的 LE、 LI 和 EI 连接也同样是序等价的。令 h表示实现基 $\{\varepsilon \geqslant 0\}$之间这一等价的同胚。

首先，假设 v_ε 不存在鞍连接。在此子情形中，由连续性可知， L 和 E 的不稳定分离曲线趋向于 I 的不稳定分离曲线的吸引子（注意，根据引理 4，该吸引子是唯一的；且由于双曲性，吸引域是开集）。类似地，在时间反演下， L 和 I 的稳定分离曲线趋向于 E 的稳定分离曲线的排斥子。注意，LMF 图的所有其他顶点和边均源自向量场v_0 的结构稳定分支。因此，此子情形中的所有 LMF 图都同痕，且向量场 v_ε 和$\tilde{v}_{h(\varepsilon)}$ 拓扑等价。

反过来，假设存在 v_ε连接。根据引理 4.2，它必定是 EI、 LE或 LI 连接。于是（根据 h的构造）， $\tilde{v}_{h(\varepsilon)}$也会出现同类型的连接。因此，此子情形的 LMF 图可通过图手术从前一子情形的 LMF 图得到，并且对两个向量场v_ε 和 $\tilde{v}_{h(\varepsilon)}$而言，所进行的图手术完全相同。因此，对于 v_ε 和 $\tilde{v}_{h(\varepsilon)}$ ，LMF 图仍然同痕。

既然所有情形均已穷尽，证明便告完成。

5 引理 4.3 的证明

5.1 排序的显式描述

现在我们给出引理 4.3 的证明，该证明在上一节中暂且搁置。回顾一下，引理 4.3 指出：如果两个族的 LE 连接和 LI 连接序等价，那么所有 LE、 LI 和 EI 连接构成的集合也序等价。

下面的命题对 EI连接的排列给出了显式描述。

命题 5.1. 与 *LE* 和 *LI* 连接对应的分岔参数将参数线划分为一列区间。当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，任意这样的开区间内恰有一个 *EI*连接，而这一点与其端点处连接的类型无关。

有了这个命题，我们就可以证明引理 4.3。

引理 *3*。 根据引理的假设，给定参数线的一个同胚，它将 LE 连接映射到 LE 连接，并将 LI 连接映射到 LI连接。因此，它将它们之间的开区间映射到像中的相应区间。根据命题 2，这样的每个区间——无论在定义域中还是在像中——都恰好包含一个 EI 连接。接着，只需在每个区间上修改该同胚，同时固定端点，使定义域中的 EI连接映射到像中的 EI 连接即可。这个调整后的同胚给出了所需的序等价，证明完毕。

□

5.2 命题 5.1 的证明

设 Γ 是一个横截面，它经过“心之泪”多环的鞍环上的一点。横截面 Γ 与参数 ε无关。当环在 $\varepsilon > 0$下展开时， Γ 与 L 的稳定分离曲线和不稳定分离曲线的第一个交点之间会在 Γ上出现一条线段。我们称这条线段为“间隙”。注意，对于 $\varepsilon > 0$ ，鞍点 E 的不稳定分离曲线与间隙恰好相交于一点，鞍点 I的稳定分离曲线也同样如此；此外，当且仅当这两个点重合时，才会出现 EI 连接。

我们将考察参数相关的自然坐标图中， E 的一条分离曲线进入间隙的点，该坐标图定义在 Γ 上，其中 $x = 0$ 对应于与 L的稳定分离曲线的交点。这个点通过迭代受扰动的“心之泪”多环的单值化映射$\mathcal{F}_\varepsilon$ 得到。对于入口点，也可以采用类似的步骤

对于内部鞍点 I，则需要另一个自然坐标图，其中 $y = 0$对应于 L的不稳定分离曲线上的点；并且，我们将在反向时间下考察沿受扰动鞍环的单值化，并将其记为 $\mathcal{G}_\varepsilon$。由于我们可以自由选择论证中使用的自然坐标，因此假设它们满足以下坐标变换公式：

$$y = -\rho(\varepsilon) - x.$$

这里的 $\rho(\varepsilon) \geq 0$ 表示用我们的两个自然坐标之一测量的间隙大小。注意，对于坐标 x和 y，间隙都位于负半轴上，见图2。

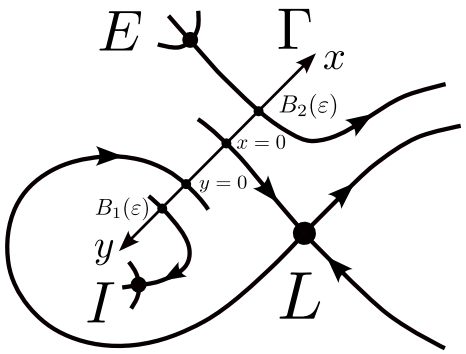

图2：横截线 Γ上的间隙以及坐标 x和 y。

假设对于某个特定的 ε，从 $B_2(\varepsilon)$ 出发的 E 的不稳定分离曲线的一段在到达间隙前绕多环转了 n 圈。同样，假设 I 的稳定分离曲线在反向时间中从 $B_1(\varepsilon)$ 走向间隙时绕扰动环转了 k 圈。回忆一下，$\mathcal{F}_\varepsilon$ 是扰动后的“心之泪”在正向时间中的单值化映射，而 $\mathcal{G}_\varepsilon$ 是扰动环在反向时间中的单值化映射。每个映射都定义在包含于 Γ 中的一条依赖参数的半横截线上。E 和 I 的分离曲线进入间隙的位置分别为 $\mathcal{F}_\varepsilon^n(B_2(\varepsilon))$ 和 $\mathcal{G}_\varepsilon^k(B_1(\varepsilon))$。我们考虑这两个点的位置之差，并用 y 坐标表示：

$$d_{n,k}(\varepsilon) = y(\mathcal{G}_\varepsilon^k(B_1(\varepsilon))) - y(\mathcal{F}_\varepsilon^n(B_2(\varepsilon))) = y(\mathcal{G}_\varepsilon^k(B_1(\varepsilon))) + x(\mathcal{F}_\varepsilon^n(B_2(\varepsilon))) + \rho(\varepsilon). \quad (5.1)$$

命题5.2. 当 n 和 k 足够大时，函数$d_{n,k}(\varepsilon)$ 单调递减。

证明。我们用 F_ε 表示在 x坐标图中写出的映射 $\mathcal{F}_\varepsilon$，用 G_ε 表示在 y坐标图中写出的映射 $\mathcal{G}_\varepsilon$。稍微滥用一下记号，下文用 $F_\varepsilon(B_2(\varepsilon))$代替$F_\varepsilon(x(B_2(\varepsilon)))$，用 $G_\varepsilon(B_1(\varepsilon))$代替 $G_\varepsilon(y(B_1(\varepsilon)))$，并将到相应坐标图的转换隐含处理。

我们将证明，$F_\varepsilon^n(B_2(\varepsilon))$ 在自然坐标图中的导数满足一个估计

$$\partial_\varepsilon F_\varepsilon^n(B_2(\varepsilon)) < -\frac{3}{4}\rho'(\varepsilon) < 0. \quad (5.2)$$

通过类似的方法可以得到 $G_\varepsilon^k(B_1(\varepsilon))$ 的相同估计。由此立即可得

$$d'_{n,k}(\varepsilon) = \partial_\varepsilon G_\varepsilon^k(B_1(\varepsilon)) + \partial_\varepsilon F_\varepsilon^n(B_2(\varepsilon)) + \rho'(\varepsilon) < -\rho'(\varepsilon)/2 < 0,$$

由此确立了单调性。

我们现在着手证明估计（5.2）。首先，注意 $F_\varepsilon(0) = -\rho(\varepsilon)$：单值化将间隙的一个端点映到另一个端点，并且相对于所选的自然坐标，该间隙出现在负半轴上。其次，我们将需要映射 F 的两个性质，它们由 [6] 的引理5以及推论2和3得出（另见[4] [6]中引理6的证明）：

- 对于任意 $\delta \in (0,\ 1)$，当 $|\varepsilon|$ 和 $|x|$充分小时，映射 $F_\varepsilon(\cdot)$是 δ-压缩的；
- The derivative $\partial_\varepsilon F_\varepsilon(x)$ is $\partial_\varepsilon F_\varepsilon(0)|_{\varepsilon=0} + o(1)$ as $(\varepsilon, x) \to (0,0)$, where $\partial_\varepsilon F_\varepsilon(0) = -\rho'(\varepsilon) < 0$.

设 R 为$(\varepsilon,\ x)$平面中原点的一个小矩形邻域，在其中我们有 $\partial_\varepsilon F_\varepsilon(x) < -\frac{9}{10}\rho'(0)$，且每个 F_ε都是以 $\delta = 1/10$为常数的 δ-压缩映射。记$K = \frac{9}{10}\rho'(0)$。

当 ε 足够小时，绕行总次数 n 很大，而从 $B_2(\varepsilon)$ 到 R 所需的绕行次数有界。因此，我们可以固定 $r \in \mathbb{N}$，使得 $F_\varepsilon^r(B_2(\varepsilon))$ 以及轨道上直到 $F_\varepsilon^{n-1}(B_2(\varepsilon))$ 的所有后续点都在 R 中，并且可以分解 $n = t + r$ 和 $F_\varepsilon^n = F_\varepsilon^t \circ F_\varepsilon^r$。由于 $F_\varepsilon^r(x)$ 在 $(B_2(\varepsilon), 0)$ 的某个邻域内关于 (x, ε) 光滑，表达式 $|\partial_\varepsilon F_\varepsilon^r(B_2(\varepsilon))|$ 一致有界，例如可由常数 $M > 0$ 控制。

根据链式法则，

$$\partial_\varepsilon F_\varepsilon^{r+1}(B_2(\varepsilon)) = \partial_\varepsilon F_\varepsilon + \partial_x F_\varepsilon \cdot \partial_\varepsilon F_\varepsilon^r(B_2(\varepsilon)) < -K + \delta M.$$

为简洁起见，我们省略 F_ε 的导数中的自变量 $F_\varepsilon^r(B_2(\varepsilon))$。对于下一次迭代，同理可得

$$\partial_\varepsilon F_\varepsilon^{r+2}(B_2(\varepsilon)) = \partial_\varepsilon F_\varepsilon + \partial_x F_\varepsilon \cdot \partial_\varepsilon F_\varepsilon^{r+1}(B_2(\varepsilon)).$$

如果关于 $\partial_\varepsilon F_\varepsilon^{r+1}(B_2(\varepsilon))$ 的估计 $a_1 = -K + \delta M$ 为负，那么第二项为负，因此可以写成

$$\partial_\varepsilon F_\varepsilon^{r+2}(B_2(\varepsilon)) < -K.$$

若 a_1 为正，则可得到一个估计

$$\partial_\varepsilon F_\varepsilon^{r+2}(B_2(\varepsilon)) < -K + \delta a_1 = a_2.$$

设 $(a_j)_{j\geq 1}$ 为仿射映射 ξ下 M的正半轨道： $u \mapsto -K + \delta \cdot u$。归纳地论证，我们得到：当 $a_{j-1} > 0$时，点 a_j 可作为相应导数的一个上估计：

$$\partial_\varepsilon F_\varepsilon^{r+j}(B_2(\varepsilon)) < a_j.$$

[4]请注意，与 [6], 不同，后者的作者将 $\rho(\varepsilon)$作为新参数，而我们则基于原始的 ε进行分析。 [6] 中的重新参数化之所以成立，正是因为第一条脚注中提到的非零速度条件，该条件确保 $\rho'(\varepsilon) > 0$。

仿射映射 ξ 在 $\frac{-K}{1-\delta}$ 处有一个吸引不动点。由于 $K = \frac{9}{10}\rho'(0)$ 且 $\delta = \frac{1}{10}$，我们有 $\frac{-K}{1-\delta} = -\rho'(0) < 0$。因此，我们最终得到第一个满足 $a_{j-1} < 0$ 的 j。然后，如上所述，对所有 $i \geq j$，我们得到一个估计

$$\partial_\varepsilon F_\varepsilon^{r+i}(B_2(\varepsilon)) < -K.$$

特别地，这对 $i = t$ 成立，由此可得所需的估计

$$\partial_\varepsilon F_\varepsilon^{n}(B_2(\varepsilon)) < -\frac{3}{4}\rho'(\varepsilon).$$

□

我们回到命题 5.1 的证明。如上所述，在 ln(–ln(ε)) 图表中，LE 和 LI 连接对应的参数值构成两个受扰动的等差数列（随着参数 ln(–ln(ε)) 增大，扰动呈指数衰减；见 [4]）。令 a_n 表示公差较小的数列，b_n 表示公差较大的数列。[5] 函数 G_ε^n(B_1(ε)) 和 F_ε^n(B_2(ε)) 中，一个在 $[a_n, a_{n+1})$ 上连续，另一个在 $[b_n, b_{n+1})$ 上连续。我们来考虑这样的情形：EL 连接值 (e_n) 扮演 (a_n) 的角色；相反的情形类似。

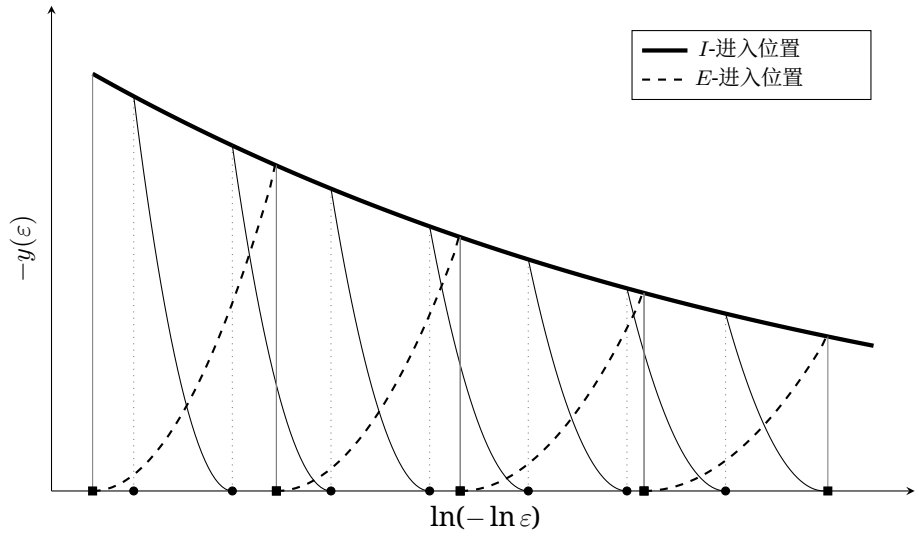

图 3：I-分离曲线和 E-分离曲线到达间隙处各点的定性图。由于差值$d_{n,\ k}$的单调性，交点（对应于 EI 连接）的位置如命题 5.1 所述。

考虑一个曲边梯形，其水平底边 $[e_j, e_{j+1}]$ 位于 ln(− ln ε)-轴上，有两条竖边，且上边界是间隙长度作为 ln(− ln ε) 的函数图像的一段弧。若 $[e_j, e_{j+1})$ 不含数列 (i_n) 中的点，则它包含在

[5]请注意，由于 $A \notin \mathbb{Q}$，这些等差数列的公差不可能相同。

某个 $[i_k, i_{k+1})$ 中，并且 $F_\varepsilon^j(B_2(\varepsilon))$ 的图像连接梯形的两个对角，而 $G_\varepsilon^k(B_1(\varepsilon))$ 的图像连接两条竖边上的某些点。于是，由介值定理，式 (5.1) 中的差值 $d_{j,\,k}(\varepsilon)$ 至少有一个零点；又由 $d_{j,\,k}$ 的单调性，它至多有一个零点。这个零点对应一个 EI连接。若区间 $[e_j, e_{j+1})$ 含有数列 (i_n) 中的一个元素，那么只要 ε 足够小，这个元素 i_k 就是唯一的。直线 $\{\ln(-\ln\varepsilon) = i_k\}$ 将梯形分成两个子区域，可对它们应用上述相同的推理，见图 3。命题 5.1 得证。

6 结论

主定理以及 [4] 的结果表明，在一般位置向量场族的分类中，拓扑方法与度量方法之间存在一道间隙。研究表明，这种差异根源于该问题出人意料的算术性质，反映了刘维尔型参数固有的类似小分母的性质与度量意义下典型参数的规律性之间的根本对比。

上述讨论表明，具有“心之泪”的拓扑一般位置向量场可能产生新系列的数值不变量，而度量一般位置的丢番图情形则有望实现完整分类。不过应当注意，即使在后一种情形下，也可能出现组合不变量。例如，对于具有“心之泪”的完整三参数族的分岔图中是否会出现不等价链环或纽结这一问题，任何解答都将引起相当大的关注。

参考文献

[1] Andronov, A. A.、Leontovich, E. A.、Gordon, I. I. 和 Mayer, A. G.《二阶动力系统定性理论》，莫斯科：Nauka，1966。[2] Fedorov, R. M. 关于平面多项式向量场模去极限环后的轨道拓扑类型数目的上界，载于《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，2006 年，第 254 卷，第 1 期，第 238–254 页。[3] Goncharuk, N.、Ilyashenko, Yu.，《大分岔支撑》，*arXiv:1804.04596v3*（2019 年 1 月 8 日）。[4] Ilyashenko, Yu. S.、Minkov, S. S.、Shilin, I. S.，《多环“心之泪”展开的新数值不变量》，即将在《俄罗斯数学物理杂志》发表。[5] Goncharuk, N.、Kudryashov, Yu.，《多环“心之泪”的分岔：多个数值不变量》，《离散与连续动力系统》，2022 年，第 42 卷，第 1 期，第 239–259 页。[6] Ilyashenko, Yu.、Kudryashov Yu.、Schurov I.，《二球面上的全局分岔：一种新视角》，*Invent.Math.*，2018 年，第 213 卷，第 461–506 页。

Yu. S.Ilyashenko,俄罗斯莫
斯科 HSE 大学，电子邮箱:
yulijs@gmail.com
Stanislav Minkov, Brook电子控制机器研究所，莫斯科,
俄罗斯 电子邮箱： stanislav.minkov@yandex.ru

Ivan Shilin, HSE大学，莫斯科,
俄罗斯 电子邮箱:
i.s.shilin@yandex.ru