arXiv:2603.05763v1 [gr-qc] 5 Mar 2026

利用新型多步四阶 Runge-Kutta 方法加速数值相对论模拟

Lucas Timotheo Sanches‡
计算与技术中心 – 路易斯安那州立大学，美国路易斯安那州巴吞鲁日，S. Stadium Dr. 888号
电子邮箱：lsanches@lsu.edu

Steven Robert Brandt
计算与技术中心 – 路易斯安那州立大学，美国路易斯安那州巴吞鲁日

电子邮箱：sbrandt@cct.lsu.edu

Jay Kalinani
计算相对论与引力中心 数学科学学院 — 罗切斯特理工学院，罗切斯特，纽约州，美国
电子邮箱：jaykalinani@gmail.com

Liwei Ji
计算相对论与引力中心 数学科学学院 — 罗切斯特理工学院，罗切斯特，纽约州，美国
电子邮箱：ljsma@rit.edu

Erik Schnetter
周界研究所 — 加拿大安大略省滑铁卢 物理与天文学系 — 滑铁卢大学，加拿大安大略省滑铁卢

电子邮箱：eschnetter@perimeterinstitute.ca

2025年6月

摘要。 许多用于求解微分方程的高性能计算应用都依赖龙格-库塔方法族进行时间积分。在这些方法中，四阶精度RK4格式尤为常用。该时间积分格式要求应用计算四个中间阶段，才能完成一个时间步。

‡ 通讯作者

根据所求解问题的复杂程度，计算这些中间阶段可能会带来很高的计算开销。

本文提出了显式四阶精度的多步龙格–库塔（MSRK）方法。这类方法的优势在于能够重复利用先前时间步的数据，从而减少中间阶段求值次数，并有望加快应用程序的运行速度。我们概述了通过调整稳定区域来确定并优化方法系数的过程，以尽可能增大时间步长。我们在 EinsteinToolkit 中应用这些新方法，对其进行了验证和评估。我们认为，这些方法和结果也应能推广到采用显式龙格–库塔方法的其他应用中。

已获《经典与量子引力》接受发表

关键词：多步龙格–库塔方法、数值相对论、双黑洞模拟， `EinsteinToolkit`, `CarpetX`，图形处理器。

1. 引言

由于 LIGO 因发现黑洞合并释放的引力波而荣获诺贝尔奖 [1], ，以及里程碑式地在引力与电磁辐射谱中观测到中子星碰撞 [2], ，引力波物理学和多信使天体物理学开启了一个新时代。然而，这些令人振奋的新发现依赖于数值相对论和计算天体物理学领域的理论预测。由于这些数值计算的参数空间十分庞大，而且单次探测可能需要与许多计算结果进行比较，因此尽可能提高这些相对论代码的运行速度十分重要。

这类模拟的一个关键要素称为时间积分器，它是一种数学算法，用于根据系统当前（以及可能的过去）状态近似计算其下一状态。时间积分器可以从隐式方法或显式方法中选择。在显式方法（我们在此讨论的方法）中，Runge-Kutta （ RK ）方法是最常用的方案。在数值相对论（NR）中尤其如此。这种方法之所以广受欢迎，是因为它们具有良好的稳定性，形式简单，而且在数学上已得到充分理解。

这些方法会在计算一个时间步更新的过程中，多次计算系统的时间导数。这些计算统称为阶段。这些阶段结合起来，能够以稳定、高效且准确的方式随时间向前演化方程组。

线性多步（LM）方法或亚当斯–巴什福思（AB）族提供了另一类显式时间积分算法。这些方法利用过去的时间步和当前时间步（阶段）来外推未来的时间步。从计算角度看，与龙格–库塔方法相比，这种方法增加了算法的内存需求，但降低了其运算复杂度，因为

只需计算单个阶段。然而，除三阶阿达姆斯–巴什福思法（AB3） [32], 外，这些方法所需的时间步对于数值相对论中所关注的应用而言过短，从而抵消了它们因计算较少阶段而可能获得的任何计算优势。

为了表征一种时间积分格式的计算效率，通常会计算该方法能够采用的最大时间步（且不致使演化变得不稳定）与该方法推进解时所执行的计算工作量之间的比值。对于显式龙格–库塔格式，工作量通常以该方法所需的阶段数来衡量。这是因为，计算单个阶段很可能是应用中计算量最大的任务（在数值相对论中确实如此）。

需要指出的是，按照通常的术语，计算当前步的时间导数既计作一个“步”，也计作一个“阶段”。因此，标准四阶龙格–库塔方法使用一步、四个阶段，而四阶线性多步法使用一个阶段、四步。

然而，许多研究人员，尤其是数值相对论领域的研究人员，似乎并未意识到，龙格–库塔方法和线性多步法都属于一类已得到深入研究的广义方法，即一般线性方法，它可以采用不同方式组合步和阶段。参考文献 [27, 11]对这一主题进行了全面讨论。根据阶段数及所用的各种系数（例如，四阶方法可采用两步三阶段或三步两阶段），可以得到比单步 Runge-Kutta 方法更高效的算法。本文将重点研究多步 *Runge-Kutta* （MSRK）方法，文献中有时也称其为“加速 Runge-Kutta”方法。

本文的主要贡献如下：(1) 三种新的四阶 MSRK 方法；(2) 推导这些方法所用的技术；(3) 新方法的“稠密输出”公式，可用于外推场，从而获得时间步之间的数值。我们通过在数值相对论模拟中进行多种测试和比较，对这些方法进行了测试和验证。将新方法与四阶龙格–库塔法和 低存储方法的性能进行比较后得出的最重要结果总结于表 2。据我们所知，我们的工作首次成功构建并将这些方法应用于数值相对论，尤其是双黑洞碰撞模拟。

2. 多步 Runge-Kutta 方法的构建及相关研究

本节将简要回顾 Runge-Kutta、线性多步法及其稳定性分析的数学理论。

我们将推导并介绍两种新颖的四阶显式 MSRK 方法：一种使用 2 个时间步和 3 个中间阶段，命名为 `RK4-2(1)`和`RK4-2(2)`；另一种使用 3 个时间步和 2 个中间阶段，命名为 `RK4-3`。

我们提出的方法属于一般线性方法这一广泛类别。这些方法包括龙格–库塔方法、线性多步法，以及这些方法的组合。

一般线性方法和 MSRK 方法背后的数学理论范围广泛且发展成熟。然而，这一理论在数值相对论领域似乎相对鲜为人知。本文仅介绍充分理解我们技术所必需的内容，但我们鼓励感兴趣的读者查阅参考文献 [27, 11, 47, 34, 12] ，以了解更多信息。

我们的 RK4-2 方法在数学文献中被归类为两步龙格–库塔（TSRK）方法，因为它们使用 2 个时间步和 3 个阶段。参考文献 [26, 25]是这一类方法的奠基性工作，并对隐式和显式 TSRK 方法进行了详细的数学研究，给出了具体示例。

据作者所知，采用多步 Runge–Kutta 方法的科学计算代码似乎很少（对于数值相对论而言可能为零）。我们对文献的调查仅发现了一个实例，见参考文献 [49], ，其中作者在 `OpenFOAM` 计算流体力学基础设施中实现了参考文献 [48] 首次提出的三阶两步龙格–库塔方法。在这项工作中，作者将这些方法称为加速型 Runge-Kutta 方法。

在我们的工作中，我们选择专注于一类特定的 2 步和 3 步方法，并将在第 2.3 节中详细介绍，即那些会重复利用演化方程右端项（RHS）先前值的方法。

我们选择这一限制有几个原因。首先是为了缩小搜索空间；其次是为了尽量减少线性组合的计算量和存储开销；最后是因为我们希望采用一种形式上与标准 RK4 算法相似的方法。不过，未来的研究中，我们也可能考虑范围更广的方法类别。

2.1. 龙格–库塔法与线性多步法

为求解数值相对论（以及许多其他领域）中出现的偏微分方程，通常会采用直线法 [38, 21, 39]。该方法的基本思路是对偏微分方程进行空间半离散化，从而得到一个耦合常微分方程系统，进而可使用标准常微分方程求解器求解。因此，我们关注的是求解柯西问题的方法：

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

where t_0 是 t 的任意初值，而 y_0 是任意初始条件 .

求解式 (1) 的第一步是将 t 离散为一组 时间步 t_i，其中每个时间步由下式给出

$$t_i = t_0 + nh, \tag{2}$$

其中， n 是一个整数， h 称为时间步长。根据这些定义，我们引入以下记号

$$y_n \equiv y(t_n). \tag{3}$$

为了将式 (1) 描述的柯西问题从时间 t_n 的状态 y_n 演化到时间 $t_n + h$ 的状态 y_{n+1} ，通常会采用龙格–库塔方法。它们通过计算数值演化中的若干中间阶段来求出下一个时间步。

阶段是对 $f(t, y)$ 的额外求值，我们将其称为式 (1) 的右端项（RHS）；这些求值发生在 t_n 和 $t_n + h$ 之间的中间点，随后会在更新公式中合并。一般的显式 s 阶龙格–库塔方法可写为 [34, 12]

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \tag{4}$$

其中 k_s 为该方法的阶段，定义如下：

$$k_s = f(t_n + c_s h, Y_s) \tag{5}$$

而 Y_s 定义如下：

$$Y_s = y_n + h \sum_{i=1}^{s-1} a_{si} k_i. \tag{6}$$

另一方面，线性多步法通过对 y_n 和先前的若干步进行线性组合来计算 y_{n+1}。一般的 r 步线性多步法可表示为 [34, 12]。

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j}), \tag{7}$$

对于显式方法，必须选择 $\beta_r = 0$。按照上述术语，计算 y_{r-1}既算作一步，也算作一个阶段，因为这涉及对 $f(t, y)$的显式计算（见式（1））。当 $j < r-1$时，β_j的值可以通过保存先前对 β_{r-1}的计算结果来实现。

2.2. 常微分方程求解器的绝对稳定域

为了分析我们提出的新方法，我们将绘制其绝对稳定域，并与标准四阶龙格–库塔方法的绝对稳定域进行比较。

我们的可视化算法基于参考文献 [34] 中的方法。首先，将方程 y_{n+1}（对于龙格–库塔方法和线性多步法，分别为方程 (4) 和 (7)）应用于模型问题 $y'(t) = \lambda y(t)$。然后引入量 $z \equiv \lambda h$，使 λ（因而也使 z）可以取虚数值。之后，将得到的每个 y_{n+i} 替换为复变量 ζ^{n+i}（这里的上标表示 ζ 的幂，而非索引），从而构造出关于 ζ 的多项式 $\rho(\zeta; z)$，称为该方法的稳定性多项式。因此，绝对稳定区域是所有满足稳定性多项式的每个根的绝对值都小于 1 的复数点 z 的集合，即

$$|r_n(z)| < 1 \; \forall \; n. \tag{8}$$

其中，$r_n(z)$ 是 $\rho(\zeta; z)$ 的第 n 个根。方程 (8) 在文献中称为绝对稳定性的根条件。

给定时间积分器的绝对稳定区域形状具有重要的实际意义。通过直线法对偏微分方程组进行离散时，可以证明，要使时间积分器成功求解所得的常微分方程，

半离散系统的特征值必须落在该方法的绝对稳定区域内。对标量波动方程进行空间离散和时间离散后可以发现，该系统的特征值纯为虚数，这限制了可用时间积分器的类型。值得注意的是，波动方程与广义相对论中使用的演化方程在数学上有重要的相似之处，因此它常被用于研究数值格式的稳定性。上述内容的详细说明请参见参考文献 [16]。

一般而言，对于包含纯虚特征值的系统，绝对稳定区域最好能覆盖较大范围的虚轴。在实践中，这意味着绝对稳定区域与虚轴的截距 越大，数值演化时可采用的时间步长就越大。1

2.3. 新型多步龙格–库塔时间积分器系列

在继续之前，我们有必要回顾并认识给定数值格式中所谓的 *Courant-Friedrichs-Lewy* 数的重要性。尽管使用时间积分器求解常微分方程时，只需选择合适的时间步，但通过直线法求解偏微分方程时，空间离散步长也会影响稳定性。数值格式的时间步长与空间步长之比称为该格式的 Courant-Friedrichs-Lewy 数（CFL）。数值格式稳定的一个必要但非充分条件是，CFL 低于某一阈值；该阈值取决于所求解的系统以及求解过程中采用的离散格式 [14]。我们可以通过计算有效 *CFL* 数 （ECF）来衡量数值格式的计算效率；它是系统稳定演化所能达到的最大 CFL 与所采用的中间时间积分器阶段数之比。同样，这一指标假定，在数值演化过程中，对常微分方程系统右端项（本例中为经过空间离散后得到的系统）的求值是计算量最大的任务。

人们提出了替代性的龙格–库塔方法，以降低计算成本并提高用于求解偏微分方程的数值格式的稳定性。特别是，我们希望重点介绍所谓的低存储方法族，该方法由 Williamson 在参考文献 [50] 中提出，并由 Ketcheson 在参考文献 [31, 30, 37] 及相关工作中进行了详细研究和改进。这些方法能够满足更大的 CFL条件，但代价是需要计算更多的中间阶段。它们已成功应用于多个领域，而我们尤其关注的是它们在 `AthenaK` [45]中的应用；这是一个用于数值相对论模拟的图形处理器加速框架。

爱因斯坦方程的完整数值演化需要规范条件 来描述时空如何切片。最常用的规范条件*GammaDriver* 移位条件会限制最大时间步长，且该限制与空间分辨率无关，详见参考文献 [40]。这一限制仍然

与所用时间积分器的稳定性特征有关。

基于这些考虑，我们开始思考：能否设计出阶段数更少、同时保留低存储方法稳定性特征的方法，从而有望获得更大的有效计算因子。因此，我们研究了基于线性多步（LM）方法与龙格–库塔（RK）方法混合形式的方法，在文献中称为多步龙格–库塔方法（MSRK）。其思路是结合阶段计算与先前的时间步，从而减少阶段求值次数并获得更高的有效计算因子。本文考虑用一到两个先前的右端项计算替换 RK4 方法中的一到两个阶段。接下来的挑战是为这种新型 RK 方法找到合适的系数，以保留我们希望研究的数值相对论问题所需的稳定性。现在，我们将介绍用于求得并调整此类方法系数的过程。

尽管在类似 RK 的方法中引入状态复用有许多方式，本文将仅考虑以下这类两步法

$$k_0 = f\left(t_{n-1},\, y_{n-1}\right) \tag{9}$$
$$k_1 = f\left(t_n,\, y_n\right) \tag{10}$$
$$k_2 = f\left[t_n + c_2 h,\, y_n + h\left(a_{20}k_0 + a_{21}k_1\right)\right] \tag{11}$$
$$k_3 = f\left[t_n + c_3 h,\, y_n + h\left(a_{30}k_0 + a_{31}k_1 + a_{32}k_2\right)\right] \tag{12}$$
$$y_{n+1} = y_n + h\left(b_0 k_0 + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3\right) \tag{13}$$

以及以下这类三步法

$$k_0 = f\left(t_{n-2},\, y_{n-2}\right) \tag{14}$$
$$k_1 = f\left(t_{n-1},\, y_{n-1}\right) \tag{15}$$
$$k_2 = f\left(t_n,\, y_n\right) \tag{16}$$
$$k_3 = f\left[t_n + c_3 h,\, y_n + h\left(a_{30}k_0 + a_{31}k_1 + a_{32}k_2\right)\right] \tag{17}$$
$$y_{n+1} = y_n + h\left(b_0 k_0 + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3\right). \tag{18}$$

我们遵循参考文献 [11] 中针对 Runge-Kutta 方法概述的过程，通过在 $h = 0$ 附近使用两个泰勒级数展开，得到 a_{ij}、 b_i 和 c_i 的阶条件。第一个展开使用更新公式之一，即方程（13）和（18）；第二个展开使用函数 $y(t + h)$。两个展开都包含 $\mathcal{O}(h^4)$ 阶的项。通过收集系数并令两个级数相匹配，我们得到一个包含 8 个方程和 11 个变量的两步法系统，以及一个包含 8 个方程和 8 个变量的三步法系统。为简化这些系统，我们通过应用相容性条件消去 b_0

$$\sum_{i=0}^{3} b_i = 1. \tag{19}$$

此外，我们应用针对 c_i 给出的条件

$$c_i = \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij}. \tag{20}$$

对所得方程组中剩余的 a_{ij} 和 b_i求解，可得由 c_2 和 c_3参数化的解。对于两步法，该系统有两个含两个参数的解，我们用上标（1,2）表示，具体见方程（A.1）–（A.18）。对于三步法，该系统有一个含一个参数的解，见方程（A.1）–（A.7）。我们注意到，Butcher 在文献 [11], 第189页给出的两步显式龙格–库塔法（本文称为 Bu4-2）是方程（A.1）–（A.18）的一个特定解，可通过选择$c_2 = 1/2$ 和 $c_3 = 1$得到，其系数列于表1。

2.4. 参数调优

一旦选定 c_2 和 c_3 系数，方程 (A.1)–(A.7) 就完整描述了多步方法族中的一种方法。原则上，这些系数可以任意选择，但我们设计了一种方案，用于寻找这些常数的取值，使所得方法的绝对稳定区域（ASR）与稳定性图中虚轴的交点值最大（我们将其称为截距值）。

我们计算截距的方法首先是按照第 2.2 节所述过程，根据方程 (9)–(14) 求出稳定性多项式$\rho(\zeta;\ z)$。对于我们的系统，可以解析地求出 $\rho(\zeta;\ z)$的根集 $r_n(c_i;\ z)$。将方程 (A.1)–(A.7) 代入 $r_n(c_i;\ z)$，也可以解析地确定绝对稳定区域（ASR）的不等式条件，即方程 (8)。由于我们关注的是满足方程 (8) 的纯虚数值，因此令 $z \to Bi$，其中 i是虚数单位，B 是任意实数。随后，我们构造一个夹逼方案，以 c_i 和 B为输入；若条件成立则返回 1，否则返回 -1。这实际上将绝对稳定区域（ASR）的根条件转化为一个阶跃函数，该函数恰好在区域与实轴相交的位置从 -1 跃变至 1。

为了找到使绝对稳定区域与虚轴的交点最大的 c_i，我们必须先选定 c_i 值可取的试验区间。在我们的搜索中，我们选择了 $c_i \in [-2, 2]$。随后，我们将这些区间各离散为 400 个点，并构建试验 c_i列表。例如，对于 RK4-2，我们创建了一个包含（c_2，c_3）点的列表，每个维度有 400 个点，取值范围为 $[-2, 2]$ 区间，总计 160，000 个试验值。

获得试验 c_i 值后，我们使用上文所述的程序计算每个c_i 对应的截距。然后将结果保存到（c_i，ι）列表中，其中 ι 为得到的截距值。截距函数的重复计算很容易并行化，这样做可以大幅加快参数搜索。计算完所有值后，我们按 ι 降序排列结果列表。因此，排序后列表中的第一个元素就是参数搜索得到的最大 ASR 截距。

为确保取值合理，每当某个 c_i 取值会导致$|a_{ij},\ b_i| > \delta$，其中 δ 为任意界时，就会将系数集合 c_i 从搜索中剔除。本文选择了 $\delta = 4$，该值经实证确定，能够产生良好的结果。

表1：方程 (9)–(13) 中所述两步法的解 (1) 和 (2)（分别称为 RK4-2(1,2)）以及方程 (14)–(18) 中所述方法（称为 RK4-3）的最大化 ASR 截距的系数。RK4-2(1)、RK4-2(2) 和 RK4-3 的最大 ASR 截距值分别为 2.53865、2.46201 和 1.30711。

系数	RK4-2(1)	RK4-2(2)	RK4-3	Bu4-2
b_0	$-643/1536$	$-191/882$	$-85/1416$	0
b_1	$-4237/1092$	$48241/59994$	$131/408$	$1/6$
b_2	$38125/10752$	$193750/4351347$	$-29/24$	$2/3$
b_3	$4375/2496$	$100000/271791$	$15625/8024$	$1/6$
a_{20}	$-49/1250$	$1309/15500$	—	$-1/8$
a_{21}	$399/1250$	$-31999/15500$	—	$5/8$
a_{30}	$7033/960000$	$-241289/5880000$	$2511/62500$	$1/2$
a_{31}	$-217633/210000$	$22846301/16170000$	$-2268/15625$	$-3/2$
a_{32}	$5473/10752$	$-936169/2587200$	$29061/62500$	2
c_2	$7/25$	$-99/50$	—	$1/2$
c_3	$-13/25$	$101/100$	$9/25$	1

表1列出了通过上述过程得到的、使绝对稳定区域（ASR）截距值最大化的系数数值。表1的前两列对应于式（9）–（13）所给两步法的解（1）和（2）的系数。第三列对应于式（14）–（18）所给三步法的系数。最后一列列出了 Bu4-2 的系数，以供参考。

对于 RK4-2，所得的最大 ASR截距值分别为解 (1) 的 2.53865 和解 (2) 的 2.46201；而对于 RK4-3，最大截距值为 1.30711。我们在图 1 中绘制了 RK4-2(1,2) 和 RK4-3 对应的 ASR。为便于参考和比较，我们还绘制了 RK4 方法的绝对稳定区域，并指出标准四阶龙格–库塔方法的 ASR截距值在文献 [16] 中给出为 $\sqrt{8} \approx 2.8284$。 –

3. 数值测试

我们已在用于数值相对论的 `Einstein Toolkit`[20]软件基础设施上实现了 RK4-2(1)、RK4-2(2) 和 RK4-3，并用这些新的时间积分器进行了一系列标准测试与实际测试。我们通过扩展 `CarpetX` [41]（由 `AMReX` [53] 支持且启用图形处理器的 `Cactus` [19] 驱动程序）的功能完成了这项工作。

在继续之前，有必要讨论在 MSRK 方法中初始化并维护过去的右端项信息这一实际问题。这里有两种情况。第一种是在初始化时，此时尚无先前的步，因此没有可用的过去右端项信息。第二种情况是在自适应网格重新网格化时，

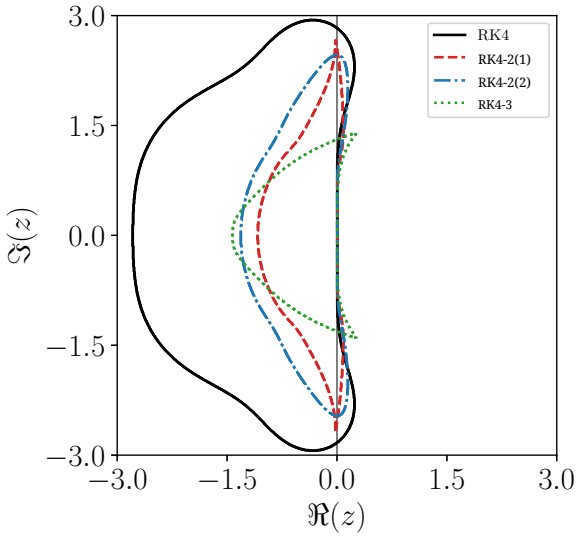


图1：根据表1中的系数得到的 RK4-2(1)、RK4-2(2) 和 RK4-3 格式的绝对稳定区域（ASR）。作为比较，我们还绘制了标准四阶龙格–库塔方法的 ASR。 x 轴和 y 轴分别表示z的实部和虚部，记为 $\Re(z)$和 $\Im(z)$。

当 `CarpetX` 更改网格层级时，无论是因为跟踪某个物体，还是细化某个区域的网格，已存储的先前右端项信息都会失效，因为这些信息对应的是旧的网格层级。为解决这两种情况，我们会根据需要执行若干步常规四阶龙格–库塔法，以补足缺失的信息。在接下来的章节中，我们将证明，这一策略仍能产生一致且收敛的行为。

最后，我们指出，第3.2节和第3.3节中介绍的测试是在 `DeepBayou`§ 上执行的。该 GPU集群位于路易斯安那州立大学，共有11个节点，每个节点配备两颗24核 Intel Cascade Lake（Intel® Xeon® Gold 6248R Processor）CPU 和两块 NVIDIA V100S GPU（每块显存为32 GB）。每项测试均充分利用机器的单个节点，并在该节点的 GPU 上运行。

3.1. 收敛性

为展示我们的时间积分器具有四阶收敛性，并验证启动过程的一致性（即在初始化时通过执行一或两步四阶龙格–库塔法来填充缺失的过去时间层），我们对平坦背景下场 ϕ 的标准标量波动方程的一阶形式 [17], 进行演化

§ https://www.hpc.lsu.edu/docs/guides.php?system=DeepBayou

$$\partial_t \phi = \Pi \tag{21}$$
$$\partial_t \Pi = \partial_i (\delta^{ij} d_j) \tag{22}$$
$$\partial_t d_i = \partial_i \Pi \tag{23}$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克δ符号。

我们选择驻波剖面作为初始数据，

$$\phi(t, x, y, z) = A \cos(2\pi\omega t) \cos(2\pi k_x x) \cos(2\pi k_x y) \cos(2\pi k_x z), \tag{24}$$

其中 A 是波幅，$\omega = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$。

我们采用四阶精度的中心有限差分模板和周期性边界条件进行三维演化。我们选择计算域范围 $x,\ y,\ z \in [-0.5, 0.5]$，并为初始数据设置 $A = k_{x,\ y,\ z} = 1$。在这些设定下，驻波每隔 $t = 1/\omega = 1/\sqrt{3}$完成一个振荡周期。对于所有模拟，我们都将 CFL 因子固定为 0.5，并演化系统，直到完成 4 个完整的振荡周期。我们对每个模拟重复进行 3 次，使用三个分辨率等级，网格单元数分别为 $80^3,\ 160^3$ 和 320^3。我们在满足$y = z = 0$条件的一维切片上计算 Π的收敛率，最终迭代次数分别为 368、736 和 1472。见图 2。此外，我们使用最高分辨率等级对该系统进行长期演化，共 100 个振荡周期（36800 次迭代）。我们提取 Π 的数值解与解析解之间的误差的 ℓ_∞ 范数，并在图 2 右图中绘出我们的方法和四阶龙格–库塔法（RK4）的结果。

3.2. 鲁棒稳定性测试

鲁棒稳定性测试（RST）由参考文献 [46, 3, 6, 13, 15] 提出，并已被用作许多数值相对论演化代码的通过/不通过判据。所引用的参考文献在测量方式和通过标准方面存在显著差异。对于本文，我们将主要遵循参考文献 [6]。

该测试同时测量连续问题的适定性，以及用于将其离散化并求解的数值算法的稳定性。给定某个适当的离散范数 $\|v_n\|$ 和时间步 t_n，如果存在 A和 K 的常数值，使得

$$\frac{\|v_n\|}{\|v_0\|} \leq A e^{K t_n} \tag{25}$$

无论选择何种初始数据，对所有可能的空间网格间距h，这一条件均成立。在实践中，不可能检查所有可能空间分辨率下的结果，因此我们会观察数据随分辨率提高而呈现的趋势。如果范数数据的增长率随分辨率提高而上升，则该测试被视为失败；否则则视为通过。在我们的案例中，我们利用 RST 来验证多步方法的实现是否正确，并确定能够实现稳定演化时所能达到的最高 CFL 因子。

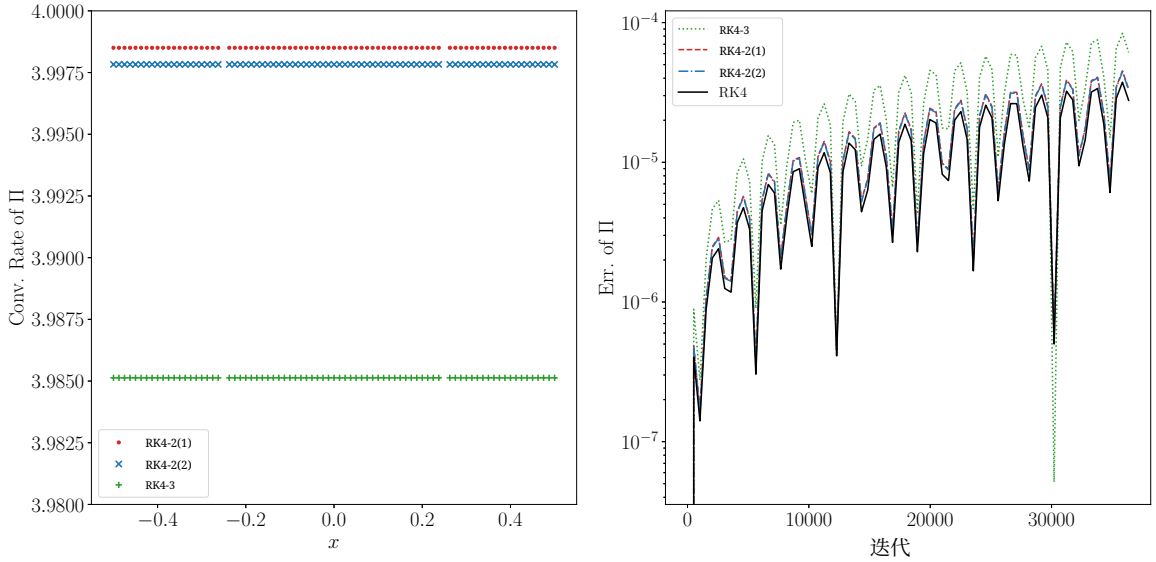


图2：左：使用我们的新方法对标量波动方程进行演化的收敛性测试。右：使用 RK4 和我们的方法计算得到的 ℓ_∞ 误差范数 Π 随所采用时间步数的演化（时间步数为 36800，即 100 次振荡）。波的振幅为 $A = 1$。

我们按照上述 RST 论文中的示例，在“长通道”中进行演化。我们建立一个范围为 x、y、$z \in [-0.5, 0.5]$ 的网格，其中 x 方向上有 $n_x\rho$ 个网格点，剩余方向上有 $\rho = 1$、2、4 和 $n_{yz} = 10$ 个网格点。我们选择这个数值，是因为它略高于四阶演化所需的最少网格点数。

我们所关注的物理系统是采用 BSSN（Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura）形式的广义相对论爱因斯坦场方程（详见参考文献 [44, 9] ）。为演化 BSSN 系统，我们采用 `CanudaX LeanBSSNMoL` [52]，这是 `Canuda`的 `CarpetX` 移植版 `LeanBSSNMoL` [51] 代码。我们以闵可夫斯基平直时空解（即空旷空间）初始化系统，并向初始数据中加入少量伪随机噪声ϵ。噪声幅度选取在以下范围内：

$$\epsilon \in \left[-10^{-10}/\rho^2, 10^{-10}/\rho^2\right], \tag{26}$$

这确保噪声引入的初始误差对于每个分辨率因子 ρ 平均而言都相同。按照参考文献 [6], ，我们将系统演化 1 个穿越时间，在本例中对应于 $t = 1$ （模拟时间），并在每个时间步保存数据。我们使用不同的 CFL因子重复测试，直到获得通过的结果。

下面对伪随机噪声生成方式的选择作几点说明。在所有测试运行中，我们都使用标准 `C++ random` 库中的 `std::mt19937`随机引擎，并将整数种子固定为 100。所有随机值均从一个`std::uniform real distribution` 中获取，其范围由公式 (26) 给出。所有 `random`对象均在程序启动时全局初始化，且只初始化一次。这确保了

测试中使用的所有伪随机数都具有可预测性和可复现性。不过请注意，随着分辨率因子 ρ增大，生成器会产生更多随机数。这意味着两个分辨率不可能始终以完全相同的数值初始化，因此它们的 $\|\mathcal{H}\|_2$初始值也永远不会相同。事实上，固定 ρ 并改变随机种子，可以观察到 $\|\mathcal{H}\|_2$的变化；它会沿着 y 轴按恒定值发生偏移。

为消除这一恒定偏移，我们选择分析 $\|\mathcal{H}\|_{\ell_2}$ 的时间导数。这解决了偏移问题，且不会以任何方式妨碍 RST，因为我们只关心分析范数随时间的增长率，因此也就是其导数。换言之，收敛代码将满足

$$\frac{\mathrm{d}\|\mathcal{H}\|_{\ell_2}}{\mathrm{d}t} \approx 0, \tag{27}$$

而发散代码则会无限增长。此外，我们还研究了“标准”RST 范数的行为，即误差范数 $\|\delta_{ij} - \mathrm{g}_{ij}\|_{\ell_\infty}$ 和 $\|\mathcal{H}\|_{\ell_\infty}$。为便于说明，图 3 展示了 RK4-2(1) 在 CFL 因子为 0.46 时通过 RST 的结果。请注意，在通过 RST 的情况下，哈密顿约束范数的时间导数会随着分辨率提高而收敛至零。我们在表 2 的 RST 栏中汇总了每种受测方法通过测试的 CFL／ECF 数值对。

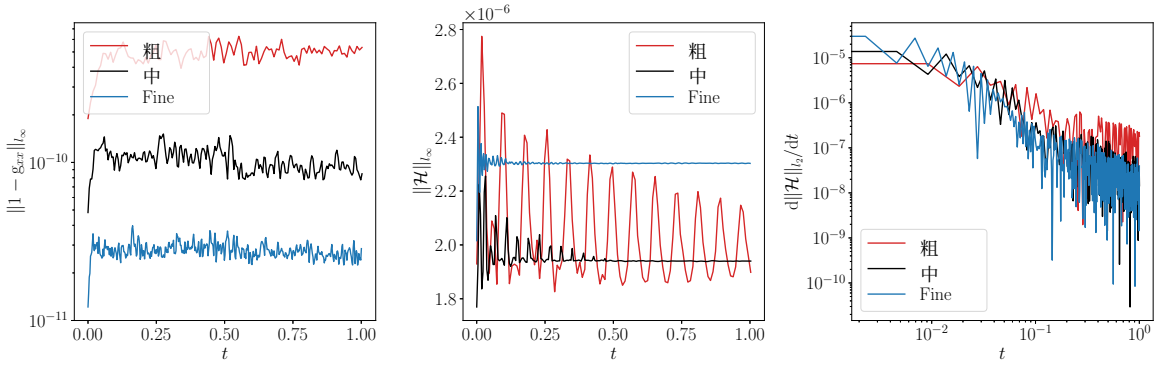


图 3：使用 RK4-2(1) 时，CFL 穿越值为 0.46 的 RST 示例结果。

3.3. 双黑洞

在此测试中，我们使用 RK4-2(1)、RK4-2(2) 和 RK4-3，在完全非线性的数值相对论框架下演化一个双黑洞（BBH）系统，并将多个演化指标与同一系统的参考 RK4 演化结果进行比较。

双黑洞初始数据由 `TwoPuncturesX` 提供，这是 `TwoPunctures` [5] 谱初始数据求解器的 `CarpetX` 移植版本，采用标准 `qc0` 配置，即两个等质量黑洞发生碰撞，质量均为 0.453，动量相等 ± 0.3331917498，位置分别为网格坐标 $(x = \pm 1.168642873,\ y = 0,\ z = 0)$。对于我们的单位系统，

我们使用 $c = G = 1$，质量以太阳质量表示。穿孔点的运动通过 PunctureTracker thorn 进行跟踪。

使我们能够提取该波的具体软件模块是WeylScal4 [10, 7] 和 Multipole [23, 22] thorn。

边界条件由 NewRadX提供，它是 NewRad [4]的一个 CarpetX 移植版本。我们还采用了内置于CanudaX LeanBSSNMoL的五阶Kreiss–Oliger人工耗散。

所有模拟均运行至 $t = 500$ （模拟时间，约2.5毫秒），计算域为立方体网格结构，包含7个以“盒中盒”方式排列的网格加密层级，其中内层盒子分辨率最高，并在整个演化过程中跟随穿孔点运动。最外层（最粗）层级从 -120延伸至120（即跨度约350公里），在全部3个空间方向上各有120个网格单元。

网格结构在整个模拟过程中移动，使较细层级的中心与穿孔点的中心大致重合。在此，我们提醒读者回顾第3节开头的讨论：每当网格结构发生变化时，必须通过若干次常规四阶龙格–库塔法步进来重新填充先前的右端项。

采用固定的 CFL 因子 0。45，我们分别对 RK4、RK4-2(1) 和 RK4-2(2) 进行了模拟，以便直接比较这些方法的性能。然而，RK4-3 使用的 CFL 值为 0。3，因为它无法在更大的数值下成功运行。这个数值高于第 3.2 节中通过 RST 确定的最大 CFL 值，这得益于系统中加入的人工耗散。需要注意的是，本文所展示的所有运行均未使用时间子循环。这意味着 CarpetX 会为所有层级选择单个时间步，并满足最细层级上要求的 CFL 条件。

用于评估我们方法质量与正确性的首要标准，是测量采用 RK4 和我们的方法得到的哈密顿约束 $\|\mathcal{H}\|_{\ell^2}$ 的 ℓ^2 范数随时间的演化（从数学上讲，该约束应始终为零）。图 4 左图展示了我们的方法和 RK4 的 $\|\mathcal{H}\|_{\ell^2}$ 随时间的演化，右图则以双对数图展示了我们的方法与 RK4 在这一量上的相对差异。尽管所有方法的结果都与 RK4 得到的结果吻合良好，但在这项测试中，RK4-2(1) 的整体表现优于其他所有方法。

接下来，我们对提取出的韦尔标量 $r = 90, l = 2, m = 2$多极分量进行类似的比较。图 4 左图展示了使用我们的方法和四阶龙格–库塔法提取的模式，右图则以 y 轴的对数刻度显示了使用我们的方法得到的信号相对于使用四阶龙格–库塔法得到的信号的相对差异。再一次，RK4-2(1) 展现出所有方法中最佳的性能。

我们还对使用 RK4 和 RK4-2(1) 的模拟进行了性能测量，以确定使用 MSRK 方法所获得的加速。为此，我们让代码演化了 64 个时间步，并计算代码各个部分的平均累计时间。时间步的数量经过选择，

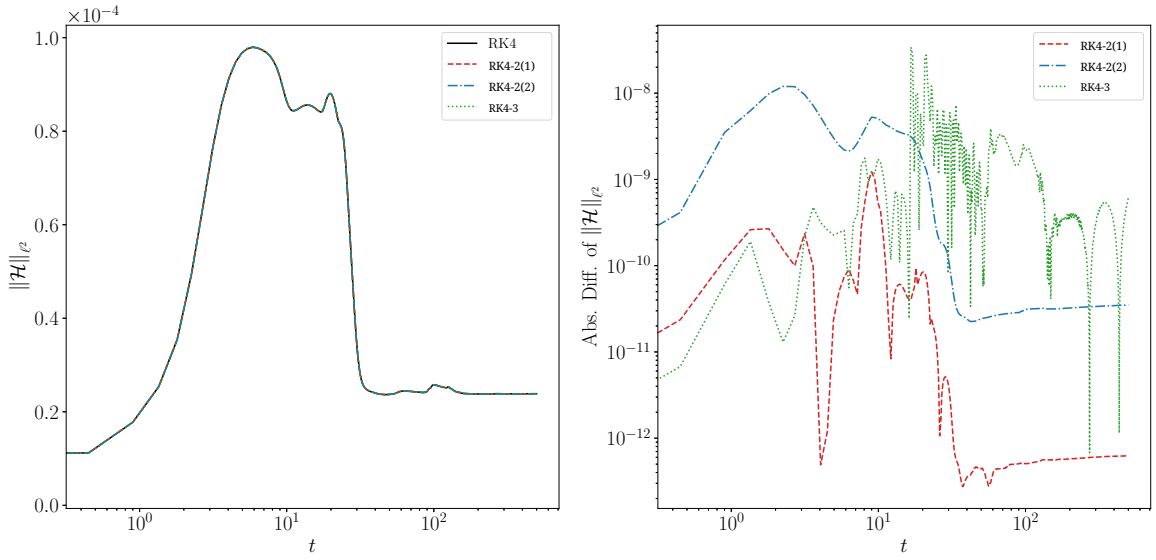


图 4：哈密顿约束 ℓ^2 范数随时间演化的双对数图（左），以及使用我们的方法与 RK4 得到的该量之间相对差异的双对数图（右）

以确保性能测量不受输入输出和重新网格化等因素的影响。每个部分都通过相应的 `Cactus` timer 对象进行测量，该对象是一种具有作用域并与消息传递接口同步的计时器。

比较两种方法的计时结果后，我们发现，与 RK4 相比，使用 RK4-2(1) 可加速 30%。尽管加速幅度很大，但仍比理论上可达到的最高加速幅度 33% 小 3%。具体来说，由于 RK4 需要进行 4 次右端项求值，而 RK4-2 需要进行 3 次，因此人们可能会预期加速 $1/0.75 = 1.33$，即 33%。然而，由于复制、线性组合等操作产生的开销占右端项求值耗时的 8%，因此相对于墙钟时间，我们得到的加速为 $(1 + .08)\ /\ (.75 + .08) = 1.3$，即 30%。

3.4. 广义相对论磁流体力学

在本节中，我们使用自己的方法，在广义相对论磁流体力学（GRMHD）背景下进行了各种测试演化，使用的是 `AsterX` [29]，这是一款适用于 `CarpetX`、由图形处理器加速的新型 GRMHD 代码。

在广义相对论磁流体力学应用中，演化方程的右端项比双黑洞的真空演化更复杂，因为这些方程采用有限体积格式求解，而有限体积格式会随时间演化守恒变量。然而，这些守恒变量与具有物理意义的原始量之间并非简单对应。因此，广义相对论磁流体力学代码必须在每次计算右端项时，将守恒变量转换为原始变量。这需要在每个网格点执行迭代求根步骤。

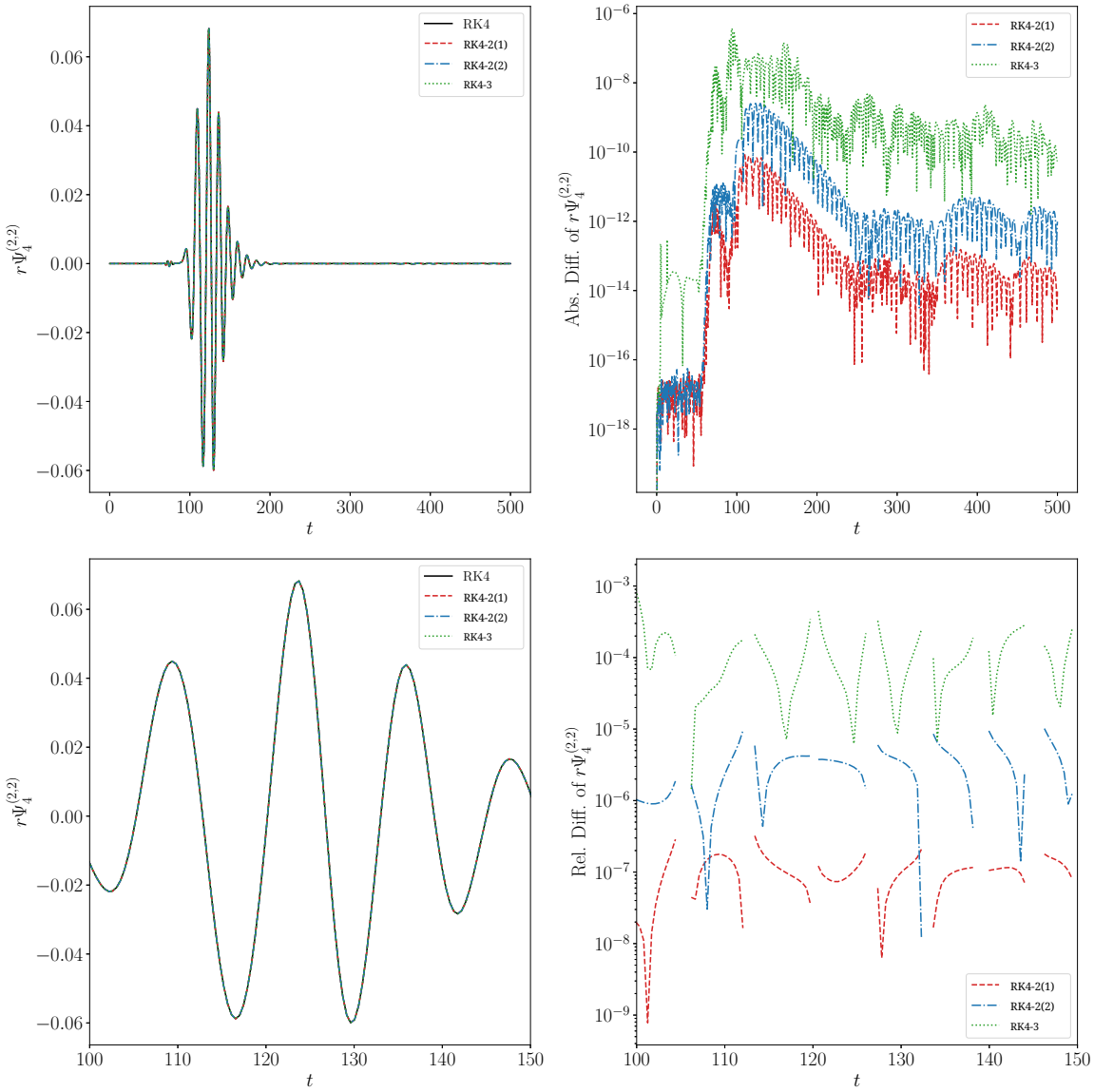


图 5：使用我们的方法和 RK4 获得的 $r\Psi_4(2,2)$ 在 $r = 90$ 处的演化（左），以及使用我们的方法获得的同一信号与使用 R4K 获得的信号之间的相对差异，在 y 轴上以对数刻度表示

我们进行的第一个测试是一维相对论激波管测试。这是参考文献 [8], 中介绍的测试套件所采用的标准正确性测试，该套件称为*Balsara* 测试套件。为便于说明，我们选择只展示该测试中的流体密度 ρ `Balsara 3` 。选择这项测试，是因为初始流体压力骤变，使它成为所有测试中要求最高的一项。

我们在一个边长为 $[-0.5, 0.5]$ 的立方体上进行了测试。网格的 x 方向使用了 400 个网格单元， y 和 z 方向各使用了 2 个网格单元。我们采用理想气体状态方程、 `minmod` 重构，并使用 `HLLE` 近似黎曼问题求解器计算通量。我们将系统演化至 $t = 0.4$ ， CFL 因子为

0。25，并将结果与问题的解析解进行比较；解析解使用文献 [18] 中描述的精确黎曼问题求解器获得。我们在相同设置下，分别使用四阶龙格–库塔法和我们的方法进行了测试。

在图 6 左侧面板中，我们展示了使用我们的方法和 RK4 得到的 `Balsara 3` 测试结果，以及精确解。右侧面板展示了使用所有方法得到的解相对于解析解的相对误差，并在 y 轴上采用对数刻度。图中结果表明，我们的新方法与 RK4 得到的结果吻合良好。特别是，我们发现，在所有方法中，RK4-3 得到的最大相对差异最小。

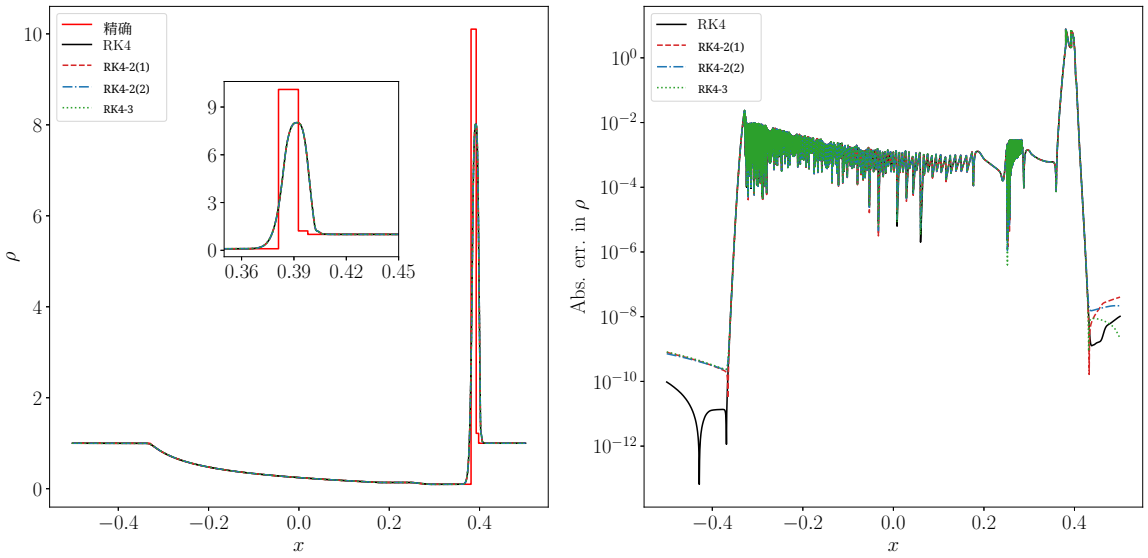


图 6：左：使用 RK4 得到的流体密度 ρ测试结果，并将我们的方法与测试的精确解进行比较。右：使用我们的方法和 RK4 得到的解与精确解之间的相对差异。

除了 `Balsara 3` 测试外，我们还使用所提出的方法进行了开尔文–亥姆霍兹不稳定性（KHI）演化模拟。KHI 是一种发生在两层流体之间（或两种不同流体的界面处）存在速度差时的现象，会导致流体转变为湍流行为。

KHI 不稳定性测试比 `Balsara 3` 测试更复杂。我们的设置与参考文献 [29] 中的设置基本一致。我们在二维中进行测试，并使用 `CarpetX` 的自适应网格细化功能，在最粗层级上使用 64^2 个网格单元。再次采用 $[-0.5, 0.5]$ 坐标域，覆盖 x 和 y方向，并在 x 方向施加周期性边界条件。我们选择固定的 CFL 因子 0.25，并将系统演化至 $t = 1.5$。我们在 $|y| < 0.25$区域初始化一条中央流体“带”，其密度为 $\rho = 2.0$，并沿 x 方向以 $v_x = 0.5$的速度运动。周围流体的密度初始化为 $\rho = 1.0$，速度初始化为 $v_x = -0.5$。这种设置在中央“带”与周围流体之间形成了一个不连续界面。为了诱发

不稳定性，我们对流体在 y方向上的速度施加了轻微扰动。

值得注意的是，与参考文献 [29], 不同，我们采用了带有 minmod重构的 Lax–Friedrichs通量（LxF）来求解 KHI。这是成功运行低存储方法所必需的。使用 HLLE 配合低存储方法进行模拟时，密度会出现不稳定性，导致代码终止。我们认为，LxF 额外的耗散性有助于这些格式实现稳定性。最后还需指出，我们观察到，无论是我们的方法还是标准四阶龙格–库塔法，使用 HLLE 得到的通量演化该系统都没有困难；对于这个问题，使用 LxF 似乎并未改变我们的方法（或四阶龙格–库塔法）所能达到的最大 CFL 值。

在图7中，我们绘制了演化过程的最后一次迭代，展示了 RK4 和我们的方法所产生的完全发展起来的不稳定性。

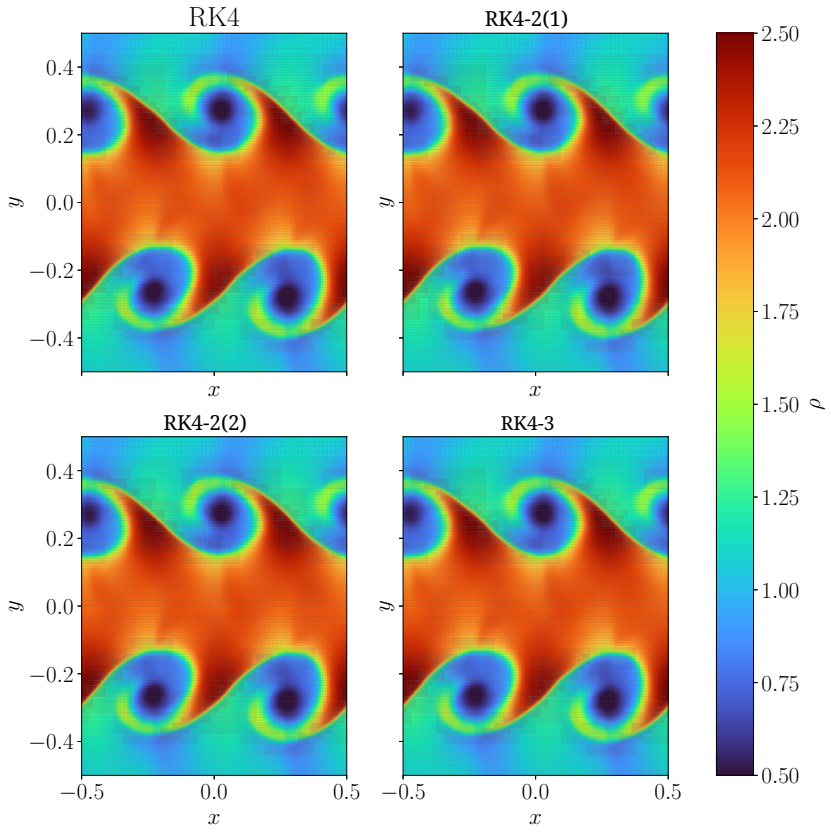


图 7：RK4 和我们提出的新方法下充分发展的 KHI 演化 s.

3.5. 最大*CFL*分析

我们还尝试确定在迄今描述的所有测试中可使用的最大 CFL 值和 ECF 值。这项分析有助于揭示在求解特定问题时哪种方法效率最高。为完整起见，我们将以下方法纳入

这项分析：两种低存储方法：参考文献 [31] 中的 RK4(3)6[2S]，以及参考文献 [37] 中的 RK4(9[3S*]（在该参考文献中，这种方法称为 ERK(9,4)）。选择这两种特定方法，是因为它们的截距值大于四阶龙格–库塔法，因此最有可能拥有能够带来加速的有效计算因子（相对于四阶龙格–库塔法）。

表 2：使用给定方法成功演化一个系统的最大 CF / ECF值。

方法	WEQ	RST	Balsara3	KHI	BBH
RK4-2(1)	1.14 / 0.380	0.46 / 0.153	0。37 / 0。123	0。39 / 0。130	0.47 / 0.157
RK4-2(2)	1.05 / 0.380	0.44 / 0.147	0.45 / 0.153	0.41 / 0.137	0.59 / 0.197
RK4-3	0.57 / 0.285	0.23 / 0.115	0.42 / 0.210	0.45 / 0.225	0.30 / 0.150
RK4	1.22 / 0.305	0.51 / 0.127	0.94 / 0.235	0.86 / 0.215	0.70 / 0.175
四阶龙格–库塔法(3)6[2S]	1.89 / 0.315	0.79 / 0.132	0。60 / 0。100	1.00 / 0.167	1.00 / 0.167
四阶龙格–库塔法 09[3S*]	2。17 / 0。241	0.91 / 0.101	0.85 / 0.094	2.38 / 0.264	1.55 / 0.172

3.5.1. 波动方程（*WEQ*）对于此测试，已知一个解析解。给定方法和 CFL 因子的选择后，我们使用驻波初始数据初始化系统，并按照第 3.1 节所述的相同网格设置演化 3 个穿越时间。演化完成后，我们通过与该测试已知的精确解进行比较，考察解的平均误差。如果该值低于我们的容差阈值（在本例中，我们将其设为 1.0×10^{-2}），则认为测试通过。否则，认为测试失败。我们通过迭代二分搜索来探索 CFL因子的参数空间。我们使用能够保证最大边界值测试失败的值，以及能够保证最小边界值测试成功的值，来确定参数空间的边界。具体而言，我们选择的这两个值分别为 4.0 和 0.1。在搜索算法的每次迭代中，我们使用 CFL 值 min +(max −min)/2 执行测试。如果测试通过，则将最小边界更新为当前通过测试的 CFL 值；否则，将最大边界降低为当前导致测试失败的 CFL 值。该测试执行 20 次迭代；我们发现这足以获得收敛的 CFL 值。

该参数搜索的结果列于表 2 的“WEQ”列中，其中我们列出了 CFL / ECF。

3.5.2. 鲁棒稳定性测试（*RST*） 由于该测试已有明确界定的通过/失败标准（参见参考文献 [6] 的附录 A.1），且是计算成本低廉的一维测试，因此可通过手动以多个不同的 CFL 值运行测试代码并确定最大值，直接获得最大 CFL / ECF 对。

测试结果列于表 2 的“RST”列中，我们再次列出了 CFL / ECF 对。

3.5.3. Balsara 3 对于本测试，由于已知解析解，我们采用了与 WEQ 测试相同的参数搜索过程。不过，在本测试中，我们以不同方式选择了容差阈值。首先，我们在第 3.4 节所述的 “ 标准 ” 条件下使用四阶龙格 – 库塔法演化该系统，并计算出绝对误差范数的平均值约为 0.20。随后，我们以平均误差范数的容差 $1.1 * 0.20$ 执行了二分搜索算法。本测试结果的 CFL / ECF 对列于表 2 的第四列

3.6. 开尔文–亥姆霍兹不稳定性（*KHI*）

由于 KHI 不存在解析解，我们以四阶龙格–库塔法作为时间积分器，并采用固定的 CFL 因子 0.25，建立了该系统的基准演化。据此，我们确定了系统在$t = 1.5$所达到的基准最小和最大密度值。在此基础上，我们探索了不同的 CFL因子，若所得最小和最大密度与基准值的偏差在 1% 以内，则认为结果可接受。我们按照上述标准，在表 2 的第五列中列出了最大通过 CFL 值。为说明该过程仍能得到合理的 KHI 演化，我们在图 8 中展示了采用 RK4-3 以及按表 2 选取的 CFL 所得到的演化图像。表中报告的其他方法与 CFL 所得到的演化与图 8 难以区分，因此为简洁起见，此处不再展示。

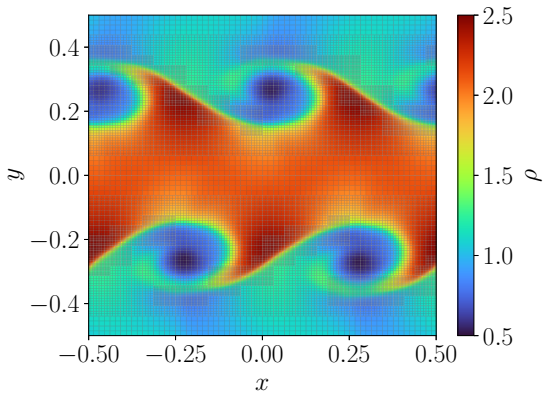


图 8：使用 RK4-3 和表 2 中报告的最大 CFL 值演化 KHI。

3.7. 双黑洞（*BBH*）

这个问题同样不存在解析解，因此我们再次将结果与成熟的标准四阶龙格–库塔法时间积分器结果进行了比较。在这项分析中，我们旨在确定对于给定的时间积分器，可使用的最大 CFL 值是多少，同时仍能产生“合理”的波形。为使这一判据更加明确，我们采用不同的 CFL 值和方法，重复了第 3.3 节中详述的测试。对于每次运行，

我们计算了使用四阶龙格–库塔法和给定方法得到的 Ψ_4 韦尔标量在 $r = 90$ 处提取的 $l = m = 2$模态之差的平方的平均值。如果该范数低于 10^{-15}，则认为测试通过；否则视为未通过。我们发现，对于表 2 中报告的所有数值，所有波形在视觉上都无法区分。

4. 稠密输出系数

CFL 条件对时间步长施加了上限。它取决于所研究的问题、所用的时间积分器以及空间离散格式。因此，使用自适应网格细化时，每个细化层级的网格间距都不同，因而需要满足不同的时间步长限制。解决这一问题有两种方法。最简单但计算效率最低的方法是 `uniform stepping`。采用这种方法时，我们选择一个全局时间步长，使其满足由最细网格所施加的 CFL 条件限制。

第二种方法称为 `subcycling in time`。这种方法允许每个层级设置自己的 Courant 因子，使较粗网格的步数少于细网格。这种方法的一个难点是，必须在细网格的边界处填充数据。

这一问题的一种解决方案称为缓冲区 [42] 或渐缩 [33] ，已在 `Carpet`（ Cactus 的固定网格细化框架）中实现。简而言之，缓冲区会将网格细化区域扩展至其幽灵区宽度的四倍，并在每个 RK4 步进过程中，随着每次计算右端项，逐步丢弃外围网格区域。这种方案会消耗大量内存和计算资源。原则上，在这种情况下使用 RK4-2 或 RK4-3 方法，可以大幅减少此类缓冲区的数量。相反，低存储方法则会增加缓冲区数量。

对于 `CarpetX`，我们采用一种称为 Berger-Oliger 无降阶算法（BOR）的方案。该算法最早见于参考文献 [36, 35], ，有关我们实现的详细信息可见参考文献 [28]。它通过构造一个多项式，在一个时间步内对 y_n 的值进行插值。这种技术称为稠密输出，可用于填充细化层级上龙格–库塔方法各阶段所需的细化层间幽灵点。文献中早已介绍了 Runge-Kutta 的稠密输出多项式（用于增强可视化效果，或作为常微分方程求解器的停止条件，详情见参考文献 [43] ），但它们在自适应网格细化中的应用则较为新近。

尽管 `CarpetX`目前尚不具备使用子循环方式采用我们新方法所需的基础设施，但我们仍可给出该方法所需的稠密输出多项式。我们指出，任何需要在一个时间步内对 y_n 解进行插值的代码，都可能用到这个公式。

现在，我们将介绍如何按照参考文献 [24, 43]，为第 2.3 节中开发的方法计算稠密输出系数。

我们旨在找到满足以下条件的函数 d_i

$$\frac{\mathrm{d}y(t+\theta h)}{\mathrm{d}t} \approx \sum_{i=0}^{3} d_i(\theta) k_i \tag{28}$$

对于由两步法的方程（9）–（12）或三步法的方程（14）–（17）给出的 k_i 。

为此，我们首先注意到

$$\frac{\mathrm{d}y(t+\theta h)}{\mathrm{d}t} = f(y(t+\theta h)) \tag{29}$$

并将 $f(y(t+\theta h))$ 和方程（28）的右端项分别在 $h=0$ 处展开至三阶。比较两种展开式的系数，得到含有 4 个未知d_i 值的 4 个方程。将表1中某一种多步方法的一组系数代入所得方程，并求解关于 d_i的方程，其中这些系数依赖于 θ。为求得更新公式，我们将 $d_i(\theta)$ 代入方程（28），并对 θ 积分，得到如下形式的表达式

$$y(t+\theta h) = y(t) + h\sum_{i=0}^{3} e_i(\theta) k_i \tag{30}$$

其中， $e_i(\theta)$ 在 RK4-2(1,2) 的方程（31）–（38）以及 RK4-3 的方程（39）–（42）中有明确给出。

通过应用这一过程，我们得到 RK4- 2(1) 的稠密输出系数 $e_i(\theta)$

$$e_0^{(1)}(\theta) = -643\theta/1536 \tag{31}$$
$$e_1^{(1)}(\theta) = -\theta(837+100\theta(9+25\theta))/1092 \tag{32}$$
$$e_2^{(1)}(\theta) = 5\theta(1929+64\theta(39+50\theta))/10752 \tag{33}$$
$$e_3^{(1)}(\theta) = 5\theta(643+8\theta(-21+50\theta))/2496, \tag{34}$$

RK4-2(2) 的稠密系数 $e_i(\theta)$,

$$e_0^{(2)}(\theta) = \theta^2(-291+100\theta)/882 \tag{35}$$
$$e_1^{(2)}(\theta) = \theta + (4947-16700\theta)\theta^2/59994 \tag{36}$$
$$e_2^{(2)}(\theta) = 38750\theta^2(3+2\theta)/4351347 \tag{37}$$
$$e_3^{(2)}(\theta) = 20000\theta^2(3+2\theta)/271791, \tag{38}$$

以及 RK4-3 的稠密输出系数 e_i（θ），

$$e_0(\theta) = -85\theta/1416 \tag{39}$$
$$e_1(\theta) = \theta(85+2\theta(-27+50\theta))/408 \tag{40}$$
$$e_2(\theta) = \theta(131-8\theta(24+25\theta))/216 \tag{41}$$
$$e_3(\theta) = 625\theta(85+118\theta(3+2\theta))/216648. \tag{42}$$

5. 结论与未来工作

在本研究中，我们回顾了多步龙格–库塔（MSRK）方法这一类方法，并构建了三种具有四阶精度的新方案。具体而言，我们推导出了两种两步法和一种三步法，其完整系数见表1。我们的稳定性分析以及绝对稳定域图表明，所提出的 MSRK 方案具有非常适合于这样一类偏微分方程的稳定性特征：其空间离散所产生的谱集中在虚轴附近。

使用真空BSSN系统进行的全面稳定性测试表明，在数值相对论模拟中通常采用的相同CFL条件下，RK4-2(1)和RK4-2(2)方案可以替代标准四阶龙格–库塔方法，从而实现更快的演化。我们进一步通过使用BSSN形式并采用两种RK4-2变体的全非线性双黑洞旋近模拟验证了这些结果。以哈密顿约束的 ℓ^2 范数和提取的引力波作为基准指标，我们证明了RK4-2所得结果与RK4所得结果高度一致。在这一场景中，用RK4-2替代RK4可将计算成本降低约30%。

我们还使用标准Balsara 3激波管和开尔文–亥姆霍兹不稳定性（KHI）测试，评估了这些方法应用于广义相对论磁流体力学（GRMHD）问题的适用性。在Balsara 3 测试中，我们的方法产生了与RK4高度一致的结果。此外，在存在网格加密的情况下，我们的方法成功演化了KHI不稳定性，证实了其对于更复杂GRMHD构型的稳健性。

表 2 给出了所有测试问题的性能比较总结。这些应用共同展示了多步 Runge–Kutta 方法在生产级物理模拟中的潜力，尤其是在数值相对论领域。总体而言，这些方法为广泛的应用提供了四阶龙格–库塔法的一种实用且高效的替代方案。

本研究是向数值相对论领域引入多步 Runge–Kutta 方法的初步尝试。我们预计这一领域仍有大量值得进一步研究的机会。特别是，参考文献 [37]，提出的先进绝对稳定域优化策略，或许能为数值相对论和广义相对论磁流体力学应用带来更加稳定、高效的方法。未来的研究还可以探索强稳定保持（SSP）格式和嵌入式MSRK变体，以实现自适应步长控制。我们相信，这类方法仍有巨大的潜力，有待进一步发展和深入理解。

致谢

我们感谢 RolandHaas、Helvi Witek、Cheng-Hsin Chen 和 Deborah Ferguson 提供的宝贵讨论、建议和意见。

JVK 衷心感谢 CCRG 通过 NASA（资助编号 80NSSC24K0100）和美国国家科学基金会（资助编号 PHY-2110338、PHY-2409706、AST-2009330、OAC-2031744、OAC- 2004044）提供的资助所给予的经费支持。

本工作由 NSF 资助项目 OCI 2411068、2004157 和 2004044 资助 .

我们谨感谢路易斯安那州立大学高性能计算小组的支持，特别是允许我们使用 Deep Bayou、Supermike 和 Melete05。

附录 A. 两步法解

这里我们 p 给出两步法系数方程的完整解 .

$$b_0^{(1)} = \frac{c_2(4-6c_3)+4c_3-3}{12(c_2+1)(c_3+1)} \tag{A.1}$$

$$b_1^{(1)} = \frac{2c_2(9c_3-5)-10c_3+7}{12c_2c_3} \tag{A.2}$$

$$b_2^{(1)} = \frac{7-10c_3}{12c_2(c_2+1)(c_2-c_3)} \tag{A.3}$$

$$b_3^{(1)} = \frac{10c_2-7}{12c_3(c_3+1)(c_2-c_3)} \tag{A.4}$$

$$a_{20}^{(1)} = -\frac{c_2^2}{2} \tag{A.5}$$

$$a_{21}^{(1)} = \frac{1}{2}c_2(c_2+2) \tag{A.6}$$

$$a_{30}^{(1)} = \frac{c_3(-2(12c_2+7)c_3^2-3c_2(5c_2(2c_2+1)-4)c_3+7c_2(2c_2+3))}{(6(c_2+1)^2(10c_2-7))} \tag{A.7}$$

$$a_{31}^{(1)} = \frac{c_3(30c_2^3(c_3+2)+c_2^2(4-15c_3)+3c_2(c_3(8c_3-7)-21)+7c_3(2c_3+3))}{6c_2(c_2+1)(10c_2-7)} \tag{A.8}$$

$$a_{32}^{(1)} = \frac{c_3(c_2-c_3)(24c_2c_3+14c_2+14c_3+21)}{6c_2(c_2+1)^2(10c_2-7)} \tag{A.9}$$

$$b_0^{(2)} = \frac{c_2(4-6c_3)+4c_3-3}{12(c_2+1)(c_3+1)} \tag{A.10}$$

$$b_1^{(2)} = \frac{2c_2(9c_3-5)-10c_3+7}{12c_2c_3} \tag{A.11}$$

$$b_2^{(2)} = \frac{7-10c_3}{12c_2(c_2+1)(c_2-c_3)} \tag{A.12}$$

$$b_3^{(2)} = \frac{10c_2-7}{12c_3(c_3+1)(c_2-c_3)} \tag{A.13}$$

$$a_{20}^{(2)} = \frac{c_2(2c_2(12c_3+7)+4c_3(15c_3+8)-21)}{12(c_3+1)(10c_3-7)} \tag{A.14}$$

$$a_{21}^{(2)} = \frac{c_2(-2c_2(12c_3+7)+60c_3^2+4c_3-63)}{12(c_3+1)(10c_3-7)} \tag{A.15}$$

$$a_{30}^{(2)} = \frac{c_3\left(12(8-5c_2)c_3^2-2(6c_2(5c_2+1)+5)c_3+7(8c_2-3)+120c_3^3\right)}{12(c_2+1)(10c_2-7)} \tag{A.16}$$

$$a_{31}^{(2)} = \frac{c_3(-120(c_2+1)c_3^3+12(c_2+1)(5c_2-3)c_3^2+2(c_2(6c_2(5c_2+1)+23)+42)c_3+c_2(20c_2(6c_2-1)-147)}{12c_2(c_2+1)(10c_2-7)} \tag{A.17}$$

$$a_{32}^{(2)} = -\frac{c_3(c_3+1)(10c_3-7)(c_2-c_3)}{c_2(c_2+1)(10c_2-7)} \tag{A.18}$$

附录 B. 三步法解

此处给出 三步法系数方程的完整解 .

$$b_0 = \frac{10c_3 - 7}{24(c_3 + 2)} \tag{A.1}$$

$$b_1 = \frac{11 - 16c_3}{12(c_3 + 1)} \tag{A.2}$$

$$b_2 = \frac{46c_3 - 27}{24c_3} \tag{A.3}$$

$$b_3 = \frac{9}{4c_3\left(c_3^2 + 3c_3 + 2\right)} \tag{A.4}$$

$$a_{30} = \frac{1}{12}c_3^2(2c_3 + 3) \tag{A.5}$$

$$a_{31} = \frac{1}{3}\left(-c_3^3 - 3c_3^2\right) \tag{A.6}$$

$$a_{32} = \frac{c_3^3}{6} + \frac{3c_3^2}{4} + c_3 \tag{A.7}$$

参考文献

[1] B. P. Abbott、R. Abbott、T. D. Abbott、M. R. Abernathy、F. Acernese、K. Ackley、C. Adams、T. Adams、P. Addesso、R. X. Adhikari、V. B. Adya、C. Affeldt、M. Agathos、K. Agatsuma、N. Aggar wal、O. D. Aguiar、L. Aiello、A. Ain、P. Ajith、B. Allen、A. Allocca、P. A. Altin、S. B. Anderson、W. G. Anderson、K. Arai、M. A. Arain、M. C. Araya、C. C. Arceneaux、J. S. Areeda、N. Arnaud、K. G. Arun、S. Ascenzi、G. Ashton、M. Ast、S. M. Aston、P. Astone、P. Aufmuth、C. Aulbert、S.Babak、P.Bacon、M. K. M. Bader、P. T. Baker、F. Baldaccini、G. Ballardin、S. W. Ballmer、J. C. Barayoga、S. E. Barclay、B. C. Barish、D. Barker、F. Barone、B. Barr、L. Barsotti、M. Barsuglia、D. Barta、J. Bartlett、M. A. Barton、I. Bartos、R. Bassiri、A. Basti、J. C. Batch、C. Baune、V. Bavigadda、M. Bazzan、B. Behnke、M. Bejger、C. Belczynski、A. S. Bell、C. J. Bell、B. K. Berger、J. Bergman、G. Bergmann、C. P. L. Berry、D. Bersanetti、A. Bertolini、J. Betzwieser、S. Bhagwat、R. Bhandare、I. A. Bilenko、G. Billingsley、J. Birch、R. Birney、O. Birnholtz、S. Biscans、A. Bisht、M. Bitossi、C. Biwer、M. A. Bizouard、J. K. Blackburn、C. D. Blair、D. G. Blair、R. M. Blair、S. Bloemen、O. Bock、T. P. Bodiya、M. Boer、G. Bogaert、C. Bogan、A. Bohe、P. Bojtos、C. Bond、F. Bondu、R. Bonnand、B. A. Boom、R. Bork、V. Boschi、S. Bose、Y. Bouffanais、A. Bozzi、C. Bradaschia、P. R. Brady、V. B. Braginsky、M. Branchesi、J. E. Brau、T. Briant、A. Brillet、M. Brinkmann、V. Brisson、P. Brockill、A. F. Brooks、D. A. Brown、D. D. Brown、N. M. Brown、C. C. Buchanan、A. Buikema、T. Bulik、H. J. Bulten、A. Buonanno、D. Buskulic、C. Buy、R. L. Byer、M. Cabero、L. Cadonati、G. Cagnoli、C. Cahillane、J. Calder´on Bustillo、T. Callister、E. Calloni、J. B. Camp、K. C. Cannon、J. Cao、C. D. Capano、E. Capocasa、F. Carbognani、S. Caride、J. Casanueva Diaz、C. Casentini、S. Caudill、M. Cavagli`a、F. Cavalier、R. Cavalieri、G. Cella、C. B. Cepeda、L. Cerboni Baiardi、G. Cerretani、E. Cesarini、R. Chakraborty、T. Chalermsongsak、S. J. Chamberlin、M. Chan、S. Chao、P. Charlton、E. Chassand e-Mottin、H. Y. Chen、Y. Chen、C. Cheng、A. Chincarini、A. Chiummo、H. S. Cho、M. Cho、J. H. Chow、N. Christensen、Q. Chu、S. Chua、S. Chung、G. Ciani、F. Clara、J. A. Clark、F. Cleva、E. Coccia、P. F. Cohadon、A. Colla、C. G. Collette、L. Cominsky、M. Constancio、A. Conte、L. Conti、D. Cook、T. R. Corbitt、N. Cornish、A. Corsi、S. Cortese、C. A. Costa、M. W. Coughlin、S. B. Coughlin、J. P. Coulon、S. T. Countryman、P. Couvares、E. E. Cowan、D. M. Coward、M. J. Cowart、D. C. Coyne、R. Coyne、K. Craig、

J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, J. Cripe, S. G. Crowder, A. M. Cruise, A. Cumming, L. Cunningham, E. Cuoco, T. Dal Canton, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, N. S. Darman, C. F. Da Silva Costa, V. Dattilo, I. Dave, H. P. Daveloza, M. Davier, G. S. Davies, E. J. Da w, R. Day, S. De, D. DeBra, G. Debreczeni, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Del´eglise, W. Del Pozzo, T. Denker, T. Dent, H. Dereli, V. Dergachev, R. T. DeRosa, R. De Rosa, R. DeSalvo, S. Dhurandhar, M. C. D´ıaz, L. Di Fiore, M. Di Giovanni, A. Di Lieto, S. Di Pace, I. Di Palma, A. Di Virgilio, G. Dojcinoski, V. Dolique, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, R. Douglas, T. P. Downes, M. Drago, R. W. P. Drever, J. C. Driggers, Z. Du, M. Ducrot, S. E. Dwyer, T. B. Edo, M. C. Edwards, A. Effler, H. B. Eggenstein, P. Ehrens, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, W. Engels, R. C. Essick, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, R. Everett, M. Factourovich, V. Fafone, H. Fair, S. Fairhurst, X. Fan, Q. Fang, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, M. Favata, M. Fays, H. Fehrmann, M. M. Fejer, D. Feldbaum, I. Ferrante, E. C. Ferreira, F. Ferrini, F. Fidecaro, L. S. Finn, I. Fiori, D. Fiorucci, R. P. Fisher, R. Flaminio, M. Fletcher, H. Fong, J. D. Fournier, S. Franco, S. Frasca, F. Frasconi, M. Frede, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, V. Frey, T. T. Fricke, P. Fritschel, V. V. Frolov, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. G. Gabbard, J. R. Gair, L. Gammaitoni, S. G. Gaonkar, F. Garufi, A. Gatto, G. Gaur, N. Gehrels, G. Gemme, B. Gendre, E. Genin, A. Gennai, J. George, L. Gergely, V. Germain, Abhirup Ghosh, Archisman Ghosh, S. Ghosh, J. A. Giaime, K. D. Giardina, A.Giazotto, K. Gill, A. Glaefke, J. R. Gleason, E. Goetz, R. Goetz, L. Gondan, G. Gonz´alez, J. M. Gonzalez Castro, A. Gopakumar, N. A. Gordon, M. L. Gorodetsky, S. E. Gossan, M. Gosselin, R. Gouaty, C. Graef, P. B. Graff, M. Granata, A. Grant, S. Gras, C. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. J. S. Greenhalgh, P. Groot, H. Grote, S. Grunewald, G. M. Guidi, X. Guo, A. Gupta, M. K. Gupta, K. E. Gushwa, E. K. Gustafson, R. Gustafson, J. J. Hacker, B. R. Hall, E. D. Hall, G. Hammond, M. Haney, M. M. Hanke, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, J.Hanson, T.Hardwick, J.Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, M. J. Hart, M. T. Hartman, C. J. Haster, K. Haughian, J. Healy, J. Heefner, A. Heidmann, M. C. Heintze, G. Heinzel, H. Heitmann, P. Hello, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, J. Hennig, A. W. Heptonstall, M. Heurs, S. Hild, D. Hoak, K. A. Hodge, D. Hofman, S. E. Hollitt, K. Holt, D. E. Holz, P. Hopkins, D. J. Hosken, J. Hough, E. A. Houston, E. J. Howell, Y. M. Hu, S. Huang, E. A. Huerta, D. Huet, B. Hughey, S. Husa, S. H. Huttner, T. Huynh-Dinh, A. Idrisy, N. Indik, D. R. Ingram, R. Inta, H. N. Isa, J. M. Isac, M. Isi, G. Islas, T. Isogai, B. R. Iyer, K. Izumi, M. B. Jacobson, T. Jacqmin, H. Jang, K. Jani, P. Jaranowski, S. Jawahar, F. Jim´enez-Forteza, W. W. Johnson, N. K. Johnson-McDaniel, D. I. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, K. Haris, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, S. Karki, M. Kasprzack, E. Katsavounidis, W. Katzman, S. Kaufer, T. Kaur, K. Kawabe, F. Kawazoe, F. K´ef´elian, M. S. Kehl, D. Keitel, D. B. Kelley, W. Kells, R. Kennedy, D. G. Keppel, J. S. Key, A. Khalaidovski, F. Y. Khalili, I. Khan, S. Khan, Z. Khan, E. A. Khazanov, N. Kijbunchoo, C. Kim, J. Kim, K. Kim, Nam-Gyu Kim, Namjun Kim, Y. M. Kim, E. J. King, P. J. King, D. L. Kinzel, J. S. Kissel, L. Kleybolte, S. Klimenko, S. M. Koehlenbeck, K. Kokeyama, S. Koley, V. Kondrashov, A. Kontos, S. Koranda, M. Korobko, W. Z. Korth, I. Kowalska, D. B. Kozak, V. Kringel, B. Krishnan, A. Kr´olak, C. Krueger, G. Kuehn, P. Kumar, R. Kumar, L. Kuo, A. Kutynia, P. Kwee, B. D. Lackey, M. Landry, J. Lange, B. Lantz, P. D. Lasky, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, E. O. Lebigot, C. H. Lee, H. K. Lee, H. M. Lee, K. Lee, A. Lenon, M. Leonardi, J. R. Leong, N. Leroy, N. Letendre, Y. Levin, B. M. Levine, T. G. F. Li, A. Libson, T. B. Littenberg, N. A. Lockerbie, J. Logue, A. L. Lombardi, L. T. London, J. E. Lord, M. Lorenzini, V. Loriette, M. Lormand, G. Losurdo, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, H. L¨ uck, A. P. Lundgren, J. Luo, R. Lynch, Y. Ma, T. MacDonald, B. Machenschalk, M. MacInnis, D. M. Macleod, F. Maga˜na-Sandoval, R. M. Magee, M. Mageswaran, E. Majorana, I. Maksimovic, V. Malvezzi, N. Man, I. Mandel, V. Mandic, V. Mangano, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, F. Marchesoni, F. Marion, S. M´arka, Z. M´arka, A. S. Markosyan, E. Maros, F. Martelli, L. Martellini, I. W. Martin, R. M. Martin, D. V. Martynov, J. N. Marx, K. Mason, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-

Reid, F. Matichard, L. Matone, N. Mavalvala, N. Mazumder, G. Mazzolo, R. McCarthy, D. E. McClelland, S. McCormick, S. C. McGuire, G. McIntyre, J. McIver, D. J. McManus, S. T. McWilliams, D. Meacher, G. D. Meadors, J. Meidam, A. Melatos, G. Mendell, D. Mendoza-Gandara, R. A. Mercer, E. Merilh, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, P. M. Meyers, F. Mezzani, H. Miao, C. Michel, H. Middleton, E. E. Mikhailov, L. Milano, J. Miller, M. Millhouse, Y. Minenkov, J. Ming, S. Mirshekari, C. Mishra, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, A. Moggi, M. Mohan, S. R. P. Mohapatra, M. Montani, B. C. Moore, C. J. Moore, D. Moraru, G. Moreno, S. R. Morriss, K. Mossavi, B. Mours, C. M. Mow- Lowry, C. L. Mueller, G. Mueller, A. W. Muir, Arunava Mukherjee, D. Mukherjee, S. Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, D. J. Murphy, P. G. Murray, A. Mytidis, I. Nardecchia, L. Naticchioni, R. K. Nayak, V. Necula, K. Nedkova, G. Nelemans, M. Neri, A. Neunzert, G. Newton, T. T. Nguyen, A. B. Nielsen, S. Nissanke, A. Nitz, F. Nocera, D. Nolting, M. E. N. Normandin, L. K. Nuttall, J. Oberling, E. Ochsner, J. O'Dell, E. Oelker, G. H. Ogin, J. J. Oh, S. H. Oh, F. Ohme, M. Oliver, P. Oppermann, Richard J. Oram, B. O'Reilly, R. O'Shaughnessy, C. D. Ott, D. J. Ottaway, R. S. Ottens, H. Over mier, B. J. Owen, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, A. Pal-Singh, H. Pan, Y. Pan, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. Paoletti, A. Paoli, M. A. Papa, H. R. Paris, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, B. Patricelli, Z. Patrick, B. L. Pearlstone, M. Pedraza, R. Pedurand , L. Pekowsky, A. Pele, S. Penn, A. Perreca, H. P. Pfeiffer, M. Phelps, O. Piccinni, M. Pichot, M. Pickenpack, F. Piergiovanni, V. Pierro, G. Pillant, L. Pinard, I. M. Pinto, M. Pitkin, J. H. Poeld, R. Poggiani, P. Popolizio, A. Post, J. Powell, J. Prasad, V. Predoi, S. S. Premachandra, T. Prestegard, L. R. Price, M. Prijatelj, M. Principe, S. Privitera, R. Prix, G. A. Prodi, L. Prokhorov, O. Puncken, M. Punturo, P. Puppo, M. P¨urrer, H. Qi, J. Qin, V. Quetschke, E. A. Quintero, R. Quitzow-James, F. J. Raab, D. S. Rabeling, H. Radkins, P. Raffai, S. Raja, M. Rakhmanov, C. R. Ramet, P. Rapagnani, V. Raymond, M. Razzano, V. Re, J. Read, C. M. Reed, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, D. H. Reitze, H. Rew, S. D. Reyes, F. Ricci, K. Riles, N. A. Robertson, R.Robie, F.Robinet, A. Rocchi, L. Rolland, J. G. Rollins, V. J. Roma, J. D. Romano, R. Romano, G. Romanov, J. H. Romie, D. Rosi´nska, S. Rowan, A. R¨udiger, P. Ruggi, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, L. Sadeghian, L. Salconi, M. Saleem, F. Salemi, A. Samajdar, L. Sammut, L. M. Sampson, E. J. Sanchez, V. Sandberg, B. Sandeen, G. H. Sand ers, J. R. Sanders, B. Sassolas, B. S. Sathyaprakash, P. R. Saulson, O. Sauter, R. L. Savage, A. Sawadsky, P. Schale, R. Schilling, J. Schmidt, P. Schmidt, R. Schnabel, R. M. S. Schofield, A. Sch¨onbeck, E. Schreiber, D. Schuette, B. F. Schutz, J. Scott, S. M. Scott, D. Sellers, A. S. Sengupta, D. Sentenac, V. Sequino, A. Sergeev, G. Serna, Y. Setyawati, A. Sevigny, D. A. Shaddock, T. Shaffer, S. Shah, M. S. Shahriar, M. Shaltev, Z. Shao, B. Shapiro, P. Shawhan, A. Sheperd, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, K. Siellez, X. Siemens, D. Sigg, A. D. Silva, D. Simakov, A. Singer, L. P. Singer, A. Singh, R. Singh, A. Singhal, A. M. Sintes, B. J. J. Slagmolen, J. R. Smith, M. R. Smith, N. D. Smith, R. J. E. Smith, E. J. Son, B. Sorazu, F. Sorrentino, T. Souradeep, A. K. Srivastava, A. Staley, M. Steinke, J. Steinlechner, S. Steinlechner, D. Steinmeyer, B. C. Stephens, S. P. Stevenson, R. Stone, K. A. Strain, N. Straniero, G. Stratta, N. A. Strauss, S. Strigin, R. Sturani, A. L. Stuver, T. Z. Summerscales, L. Sun, P. J. Sutton, B. L. Swinkels, M. J. Szczepa´nczyk, M. Tacca, D. Talukder, D. B. Tanner, M. T´apai, S. P. Tarabrin, A. Taracchini, R. Taylor, T. Theeg, M. P. Thirugnanasambandam, E. G. Thomas, M. Thomas, P. Thomas, K. A. Thorne, K. S. Thorne, E. Thrane, S. Tiwari, V. Tiwari, K. V. Tokmakov, C. Tomlinson, M. Tonelli, C. V. Torres, C. I. Torrie, D. T¨oyr¨a, F. Travasso, G. Traylor, D. Trifir`o, M. C. Tringali, L. Trozzo, M. Tse, M. Turconi, D. Tuyenbayev, D. Ugolini, C. S. Unnikrishnan, A. L. Urban, S. A. Usman, H. Vahlbruch, G. Vajente, G. Valdes, M. Vallisneri, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vand er-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. van Heijningen, A. A. van Veggel, M. Vardaro, S. Vass, M. Vas´uth, R. Vaulin, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, K. Venkateswara, D. Verkindt, F. Vetrano, A. Vicer´e, S. Vinciguerra, D. J. Vine, J. Y. Vinet, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, C. Vorvick, D. Voss, W. D.

Vousden, S. P. Vyatchanin, A. R. Wade, L. E. Wade, M. Wade, S. J. Waldman, M. Walker, L. Wallace, S. Walsh, G. Wang, H. Wang, M. Wang, X. Wang, Y. Wang, H. Ward, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, B. Weaver, L. W. Wei, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, T. Welborn, L. Wen, P. Weßels, T. Westphal, K. Wette, J. T. Whelan, S. E. Whitcomb, D. J. White, B. F. Whiting, K. Wiesner, C. Wilkinson, P. A. Willems, L. Williams, R. D. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, M. H. Wimmer, L. Winkelmann, W. Winkler, C. C. Wipf, A. G. Wiseman, H. Wittel, G. Woan, J. Worden, J. L. Wright, G. Wu, J. Yablon, I. Yakushin, W. Yam, H. Yamamoto, C. C. Yancey, M. J. Yap, H. Yu, M. Yvert, A. ZadroZny, L. Zangrando, M. Zanolin, J. P. Zendri, M. Zevin, F.Zhang, L. Zhang, M. Zhang, Y. Zhang, C. Zhao, M. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, M. E. Zucker, S. E. Zuraw, J. Zweizig, LIGO科学合作组织和Virgo合作组织。《双黑洞并合引力波的观测》。《物理评论快报》，116(6):061102，2016。

[2] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Afrough, B. Agarwal, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O.D. Aguiar, L. Aiello, A.Ain, P. Ajith, B. Allen, G. Allen, A. Allocca, P. A.Altin, A. Amato, A. Ananyeva, S. B. Anderson, W. G. Anderson, S. V. Angelova, S. Antier, S. Appert, K. Arai, M. C. Araya, J. S. Areeda, N. Arnaud, K. G. Arun, S. Ascenzi, G. Ashton, M. Ast, S. M. Aston, P. Astone, D. V. Atallah, P. Aufmuth, C. Aulbert, K. AultONeal, C. Austin, A. Avila- Alvarez, S. Babak, P. Bacon, M. K. M. Bader, S. Bae, M. Bailes, P. T. Baker, F. Baldaccini, G. Ballardin, S. W. Ballmer, S. Banagiri, J. C. Barayoga, S. E. Barclay, B. C. Barish, D. Barker, K. Barkett, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, S. D. Barthelmy, J. Bartlett, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, J. C. Batch, M. Bawaj, J. C. Bayley, M. Bazzan, B. B´ecsy, C. Beer, M. Bejger, I. Belahcene, A. S. Bell, B. K. Berger, G. Bergmann, S. Bernuzzi, J. J. Bero, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, S. Bhagwat, R. Bhandare, I. A. Bilenko, G. Billingsley, C. R. Billman, J. Birch, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, S. Biscoveanu, A. Bisht, M. Bitossi, C. Biwer, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, J. Blackman, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, S. Bloemen, O. Bock, N. Bode, M. Boer, G. Bogaert, A. Bohe, F. Bondu, E. Bonilla, R. Bonnand, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, S. Bose, K. Bossie, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, M. Branchesi, J. E. Brau, T. Briant, A. Brillet, M. Brinkmann, V. Brisson, P. Brockill, J. E. Broida, A. F. Brooks, D. A. Brown, D. D. Brown, S. Brunett, C. C. Buchanan, A. Buikema, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, D. Buskulic, C. Buy, R. L. Byer, M. Cabero, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. Calder´on Bustillo, T. A. Callister, E. Calloni, J. B. Camp, M. Canepa, P. Canizares, K. C. Cannon, H. Cao, J. Cao, C. D. Capano, E. Capocasa, F. Carbognani, S. Caride, M. F. Carney, G. Carullo, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, S. Caudill, M. Cavagli`a, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, C. B. Cepeda, P. Cerd´a-Dur´an, G. Cerretani, E. Cesarini, S. J. Chamberlin, M. Chan, S. Chao, P. Charlton, E. Chase, E. Chassande-Mottin, D. Chatterjee, K. Chatziioannou, B. D. Cheeseboro, H. Y. Chen, X. Chen, Y. Chen, H. P. Cheng, H. Chia, A. Chincarini, A. Chiummo, T. Chmiel, H. S. Cho, M. Cho, J. H. Chow, N. Christensen, Q. Chu, A. J. K. Chua, S. Chua, A. K. W. Chung, S. Chung, G. Ciani, R. Ciolfi, C. E. Cirelli, A. Cirone, F. Clara, J. A. Clark, P. Clearwater, F. Cleva, C. Cocchieri, E. Coccia, P. F. Cohadon, D. Cohen, A. Colla, C. G. Collette, L. R. Cominsky, M. Constancio, L. Conti, S. J. Cooper, P. Corban, T. R. Corbitt, I. Cordero-Carri´on, K. R. Corley, N. Cornish, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, M. W. Coughlin, S. B. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, P. Couvares, P. B. Covas, E. E. Cowan, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, J. Cripe, S. G. Crowder, T. J. Cullen, A. Cumming, L. Cunningham, E. Cuoco, T. Dal Canton, G. D´alya, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, A. Dasgupta, C. F. Da Silva Costa, V. Dattilo, I. Dave, M. Davier, D. Davis, E. J. Daw, B. Day, S. De, D. DeBra, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Del´eglise, W. Del Pozzo, N. Demos, T. Denker, T. Dent, R. De Pietri, V. Dergachev, R. De Rosa, R. T. DeRosa, C. De Rossi, R. DeSalvo, O. de Varona, J. Devenson, S. Dhurandhar, M. C. D´ıaz, T. Dietrich, L. Di Fiore, M. Di Giovanni, T. Di Girolamo, A. Di Lieto, S. Di

Pace、I. Di Palma、F. Di Renzo、Z. Doctor、V. Dolique、F. Donovan、K. L. Dooley、S. Doravari、Í. Dorrington、R. Douglas、M. Dovale Alvarez、T. P. Downes、M. Drago、C. Dreissigacker、J. C. Driggers、Z. Du、M. Ducrot、R. Dudi、P. Dupej、S. E. Dwyer、T. B. Edo、M. C. Edwards、A. Effler、H. B. Eggenstein、P. Ehrens、J. Eichholz、S. S. Eikenberry、R. A. Eisenstein、R. C. Essick、D. Estevez、Z. B. Etienne、T. Etzel、M. Evans、T. M. Evans、M. Factourovich、V. Fafone、H. Fair、S. Fairhurst、X. Fan、S. Farinon、B. Farr、W. M. Farr、E. J. Fauchon-Jones、M. Favata、M. Fays、C. Fee、H. Fehrmann、J. Feicht、M. M. Fejer、A. Fernandez-Galiana、I. Ferrante、E. C. Ferreira、F. Ferrini、F. Fidecaro、D. Finstad、I. Fiori、D. Fiorucci、M. Fishbach、R. P. Fisher、M. Fitz-Axen、R. Flaminio、M. Fletcher、H. Fong、J. A. Font、P. W. F. Forsyth、S. S. Forsyth、J. D. Fournier、S. Frasca、F. Frasconi、Z. Frei、A. Freise、R. Frey、V. Frey、E. M. Fries、P. Fritschel、V. V. Frolov、P. Fulda、M. Fyffe、H. Gabbard、B. U. Gadre、S. M. Gaebel、J. R. Gair、L. Gammaitoni、M. R. Ganija、S. G. Gaonkar、C. Garcia-Quiros、F. Garufi、B. Gateley、S. Gaudio、G. Gaur、V. Gayathri、N. Gehrels、G. Gemme、E. Genin、A. Gennai、D. George、J. George、L. Gergely、V. Germain、S. Ghonge、Abhirup Ghosh、Archisman Ghosh、S. Ghosh、J. A. Giaime、K. D. Giardina、A. Giazotto、K. Gill、L. Glover、E. Goetz、R. Goetz、S. Gomes、B. Goncharov、G. Gonz´alez、J. M. Gonzalez Castro、A. Gopakumar、M. L. Gorodetsky、S. E. Gossan、M. Gosselin、R. Gouaty、A. Grado、C. Graef、M. Granata、A. Grant、S. Gras、C. Gray、G. Greco、A. C. Green、E. M. Gretarsson、P. Groot、H. Grote、S. Grunewald、P. Gruning、G. M. Guidi、X. Guo、A. Gupta、M. K. Gupta、K. E. Gushwa、E. K. Gustafson、R. Gustafson、O. Halim、B. R. Hall、E. D. Hall、E. Z. Hamilton、G. Hammond、M. Haney、M. M. Hanke、J. Hanks、C. Hanna、M. D. Hannam、O. A. Hannuksela、J. Hanson、T. Hardwick、J. Harms、G. M. Harry、I. W. Harry、M. J. Hart、C. J. Haster、K. Haughian、J. Healy、A. Heidmann、M. C. Heintze、H. Heitmann、P. Hello、G. Hemming、M. Hendry、I. S. Heng、J. Hennig、A. W. Heptonstall、M. Heurs、S. Hild、T. Hinderer、W. C. G. Ho、D. Hoak、D. Hofman、K. Holt、D. E. Holz、P. Hopkins、C. Horst、J. Hough、E. A. Houston、E. J. Howell、A. Hreibi、Y. M. Hu、E. A. Huerta、D. Huet、B. Hughey、S. Husa、S. H. Huttner、T. Huynh-Dinh、N. Indik、R. Inta、G. Intini、H. N. Isa、J. M. Isac、M. Isi、B. R. Iyer、K. Izumi、T. Jacqmin、K. Jani、P. Jaranowski、S. Jawahar、F.Jim´enez-Forteza、W. W. Johnson、N. K. Johnson-McDaniel、D.I. Jones、R.Jones、R. J. G. Jonker、L. Ju、J. Junker、C. V. Kalaghatgi、V. Kalogera、B. Kamai、S. Kand hasamy、G. Kang、J. B. Kanner、S. J. Kapadia、S. Karki、K. S. Karvinen、M. Kasprzack、W. Kastaun、M. Katolik、E. Katsavounidis、W. Katzman、S. Kaufer、K. Kawabe、F. K´ef´elian、D. Keitel、A. J. Kemball、R. Kennedy、C. Kent、J. S. Key、F. Y. Khalili、I. Khan、S. Khan、Z. Khan、E. A. Khazanov、N. Kijbunchoo、Chunglee Kim、J. C. Kim、K. Kim、W. Kim、W. S. Kim、Y. M. Kim、S. J. Kimbrell、E. J. King、P. J. King、M. Kinley-Hanlon、R. Kirchhoff、J. S. Kissel、L. Kleybolte、S. Klimenko、T. D. Knowles、P. Koch、S. M. Koehlenbeck、S. Koley、V. Kondrashov、A. Kontos、M. Korobko、W. Z. Korth、I. Kowalska、D. B. Kozak、C. Kr¨amer、V. Kringel、B. Krishnan、A. Kr´olak、G. Kuehn、P. Kumar、R. Kumar、S. Kumar、L. Kuo、A. Kutynia、S. Kwang、B. D. Lackey、K. H. Lai、M. Landry、R. N. Lang、J. Lange、B. Lantz、R. K. Lanza、S. L. Larson、A. Lartaux-Vollard、P. D. Lasky、M. Laxen、A. Lazzarini、C. Lazzaro、P. Leaci、S. Leavey、C. H. Lee、H. K. Lee、H. M. Lee、H. W. Lee、K. Lee、J. Lehmann、A. Lenon、E. Leon、M. Leonardi、N. Leroy、N. Letendre、Y. Levin、T. G. F. Li、S. D. Linker、T. B. Littenberg、J. Liu、X. Liu、R. K. L. Lo、N. A. Lockerbie、L. T. London、J. E. Lord、M. Lorenzini、V. Loriette、M. Lormand、G. Losurdo、J. D. Lough、C. O. Lousto、G. Lovelace、H. L¨uck、D. Lumaca、A. P. Lundgren、R. Lynch、Y. Ma、R. Macas、S. Macfoy、B. Machenschalk、M. MacInnis、D. M. Macleod、I. Maga˜na Hernandez、F. Maga˜na-Sandoval、L. Maga˜na Zertuche、R. M. Magee、E. Majorana、I. Maksimovic、N. Man、V. Mandic、V. Mangano、G. L. Mansell、M. Manske、M. Mantovani、F. Marchesoni、F. Marion、S. M´arka、Z. M´arka、C. Markakis、A. S. Markosyan、A. Markowitz、E. Maros、A. Marquina、P. Marsh、F. Martelli、L. Martellini、I. W. Martin、R. M. Martin、D. V. Martynov、J. N. Marx、K. Mason、E. Massera、A. Masserot、T. J. Massinger、M. Masso- Reid、S. Mastrogiovanni、A. Matas、F. Matichard、L. Matone、N. Mavalvala、N. Mazumder、R. McCarthy、D. E. McClelland、S. McCormick、L. McCuller、S. C. McGuire、G. McIntyre、

J. McIver、D. J. McManus、L. McNeill、T. McRae、S. T. McWilliams、D. Meacher、G. D. Meadors、M. Mehmet、J. Meidam、E. Mejuto-Villa、A. Melatos、G. Mendell、R. A. Mercer、E. L. Merilh、M. Merzougui、S. Meshkov、C. Messenger、C. Messick、R. Metzdorff、P. M. Meyers、H. Miao、C. Michel、H. Middleton、E. E. Mikhailov、L. Milano、A. L. Miller、B. B. Miller、J. Miller、M. Millhouse、M. C. Milovich-Goff、O. Minazzoli、Y. Minenkov、J. Ming、C. Mishra、S. Mitra、V. P. Mitrofanov、G. Mitselmakher、R. Mittleman、D. Moffa、A. Moggi、K. Mogushi、M. Mohan、S. R. P. Mohapatra、I. Molina、M. Montani、C. J. Moore、D. Moraru、G. Moreno、S. Morisaki、S. R. Morriss、B. Mours、C. M. Mow-Lowry、G. Mueller、A. W. Muir、Arunava Mukherjee、D. Mukherjee、S. Mukherjee、N. Mukund、A. Mullavey、J. Munch、E. A. Mu¯niz、M. Muratore、P. G. Murray、A. Nagar、K. Napier、I. Nardecchia、L. Naticchioni、R. K. Nayak、J. Neilson、G. Nele mans、T. J. N. Nelson、M. Nery、A. Neunzert、L. Nevin、J. M. Newport、G. Newton、K. K. Y. Ng、P. Nguyen、T. T. Nguyen、D. Nichols、A. B. Nielsen、S. Nissanke、A. Nitz、A. Noack、F. Nocera、D. Nolting、C. North、L. K. Nuttall、J. Oberling、G. D. O'Dea、G. H. Ogin、J. J. Oh、S. H. Oh、F. Ohme、M. A. Okada、M. Oliver、P. Oppermann、Richard J. Oram、B. O'Reilly、R. Ormiston、L. F. Ortega、R. O'Shaughnessy、S. Ossokine、D. J. Ottaway、H. Overmier、B. J. Owen、A. E. Pace、J. Page、M. A. Page、A. Pai、S. A. Pai、J. R. Palamos、O. Palashov、C. Palomba、A. Pal-Singh、Howard Pan、Huang-Wei Pan、B. Pang、P. T. H. Pang、C. Pankow、F. Pannarale、B. C. Pant、F. Paoletti、A. Paoli、M. A. Papa、A. Parida、W. Parker、D. Pascucci、A. Pasqualetti、R. Passaquieti、D. Passuello、M. Patil、B.Patricelli、B.L. Pearlstone、M. Pedraza、R. Pedurand、L. Pekowsky、A. Pele、S. Penn、C. J. Perez、A. Perreca、L. M. Perri、H. P. Pfeiffer、M. Phelps、O. J. Piccinni、M. Pichot、F. Piergiovanni、V. Pierro、G. Pillant、L. Pinard、I. M. Pinto、M. Pirello、M. Pitkin、M. Poe、R. Poggiani、P. Popolizio、E. K. Porter、A. Post、J. Powell、J. Prasad、J. W. W. Pratt、G. Pratten、V. Predoi、T. Prestegard、M. Prijatelj、M. Principe、S. Privitera、R. Prix、G. A. Prodi、L. G. Prokhorov、O. Puncken、M. Punturo、P. Puppo、M. P¨urrer、H. Qi、V. Quetschke、E. A. Quintero、R. Quitzow-James、F. J. Raab、D. S. Rabeling、H. Radkins、P. Raffai、S. Raja、C. Rajan、B. Rajbhandari、M. Rakhmanov、K. E. Ramirez、A. Ramos-Buades、P. Rapagnani、V. Raymond、M. Razzano、J. Read、T. Regimbau、L. Rei、S. Reid、D. H. Reitze、W. Ren、S. D. Reyes、F. Ricci、P. M. Ricker、S. Rieger、K. Riles、M. Rizzo、N. A. Robertson、R. Robie、F. Robinet、A. Rocchi、L. Rolland、J. G. Rollins、V. J. Roma、J. D. Romano、R. Romano、C. L. Romel、J. H. Romie、D. Rosi´nska、M. P. Ross、S. Rowan、A. R¨udiger、P. Ruggi、G. Rutins、K. Ryan、S. Sachdev、T. Sadecki、L. Sadeghian、M. Sakellariadou、L. Salconi、M. Saleem、F. Salemi、A. Samajdar、L. Sammut、L. M. Sampson、E. J. Sanchez、L. E. Sanchez、N. Sanchis-Gual、V. Sand berg、J. R. Sanders、B. Sassolas、B. S. Sathyaprakash、P. R. Saulson、O. Sauter、R. L. Savage、A. Sawadsky、P. Schale、M. Scheel、J. Scheuer、J. Schmidt、P. Schmidt、R. Schnabel、R. M. S. Schofield、A. Sch¨onbeck、E. Schreiber、D. Schuette、B. W. Schulte、B. F. Schutz、S. G. Schwalbe、J. Scott、S. M. Scott、E. Seidel、D. Sellers、A. S. Sengupta、D. Sentenac、V. Sequino、A. Sergeev、D. A. Shaddock、T. J. Shaffer、A. A. Shah、M. S. Shahriar、M. B. Shaner、L. Shao、B. Shapiro、P. Shawhan、A. Sheperd、D. H. Shoemaker、D. M. Shoemaker、K. Siellez、X. Siemens、M. Sieniawska、D. Sigg、A. D. Silva、L. P. Singer、A. Singh、A. Singhal、A. M. Sintes、B. J. J. Slagmolen、B. Smith、J. R. Smith、R. J. E. Smith、S. Somala、E. J. Son、J. A. Sonnenberg、B. Sorazu、F. Sorrentino、T. Souradeep、A. P. Spencer、A. K. Srivastava、K. Staats、A. Staley、M. Steinke、J. Steinlechner、S. Steinlechner、D. Steinmeyer、S. P. Stevenson、R. Stone、D. J. Stops、K. A. Strain、G. Stratta、S. E. Strigin、A. Strunk、R. Sturani、A. L. Stuver、T. Z. Summerscales、L. Sun、S. Sunil、J. Suresh、P. J. Sutton、B. L. Swinkels、M. J. Szczepa´nczyk、M. Tacca、S. C. Tait、C. Talbot、D. Talukder、D. B. Tanner、M. T´apai、A. Taracchini、J. D. Tasson、J. A. Taylor、R. Taylor、S. V. Tewari、T. Theeg、F. Thies、E. G. Thomas、M. Thomas、P. Thomas、K. A. Thorne、K. S. Thorne、E. Thrane、S. Tiwari、V. Tiwari、K. V. Tokmakov、K. Toland、M. Tonelli、Z. Tornasi、A. Torres-Forn´e、C. I. Torrie、D. T¨oyr¨a、F. Travasso、G. Traylor、J. Trinastic、M. C. Tringali、L. Trozzo、K. W. Tsang、M. Tse、R. Tso、L. Tsukada、D. Tsuna、D. Tuyenbayev、K. Ueno、D. Ugolini、C. S. Unnikrishnan、A. L. Urban、S. A. Usman、H. Vahlbruch、G. Vajente、G. Valdes、M. Vallisneri、

N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vand er-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. van Heijningen, A. A. van Veggel, M. Vardaro, V. Varma, S. Vass, M. Vas´uth, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, K. Venkateswara, G. Venugopalan, D. Verkindt, F. Vetrano, A. Vicer´e, A. D. Viets, S. Vinciguerra, D. J. Vine, J. Y. Vinet, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, A. R. Wade, L. E. Wade, M. Wade, R. Walet, M. Walker, L. Wallace, S. Walsh, G. Wang, H. Wang, J. Z. Wang, W. H. Wang, Y. F. Wang, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, J. Watchi, B. Weaver, L. W. Wei, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, L. Wen, E. K. Wessel, P. Weßels, J. Westerweck, T. Westphal, K. Wette, J. T. Whelan, S. E. Whitcomb, B. F. Whiting, C. Whittle, D. Wilken, D. Williams, R. D. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, M. H. Wimmer, W. Winkler, C. C. Wipf, H. Wittel, G. Woan, J. Woehler, J. Wofford, K. W. K. Wong, J. Worden, J. L. Wright, D. S. Wu, D. M. Wysocki, S. Xiao, H. Yamamoto, C. C. Yancey, L. Yang, M. J. Yap, M. Yazback, Hang Yu, Haocun Yu, M. Yvert, A. ZadroZny, M. Zanolin, T. Zelenova, J. P. Zendri, M. Zevin, L. Zhang, M. Zhang, T. Zhang, Y. H. Zhang, C. Zhao, M. Zhou, Z. Zhou, S. J. Zhu, X. J. Zhu, A. B. Zimmerman, M. E. Zucker, J. Zweizig, LIGO科学合作组织，以及Virgo合作组织。GW170817：观测到双中子星旋近产生的引力波。《物理评论快报》，119(16):161101，2017年。[3] Miguel Alcubierre, Gabrielle Allen, Carles Bona, David Fiske, Tom Goodale, F Siddhartha Guzm´an, Ian Hawke, Scott H Hawley, Sascha Husa, Michael Koppitz, Christiane Lechner, Denis Pollney, David Rideout, Marcelo Salgado, Erik Schnetter, Edward Seidel, Hisa aki Shinkai, Deirdre Shoemaker, B´ela Szil´agyi, Ryoji Takahashi, and Jeff Winicour。迈向数值相对论的标准测试基准。《经典与量子引力》，21(2):589，2003年12月。[4]Miguel Alcubierre, Bernd Br¨ugmann, Peter Diener, Michael Koppitz, Denis Pollney, Edward Seidel, and Ryoji Takahashi。无需切除法的长期数值黑洞演化规范条件。《物理评论*D*辑》，67:084023，2003年4月。[5] Marcus Ansorg, Bernd Br¨ugmann, and Wolfgang Tichy。用于黑洞穿刺数据的单域谱方法。《物理评论*D*辑》，70:064011，2004年9月。[6]M C Babiuc, S Husa, D Alic, I Hinder, C Lechner, E Schnetter, B Szil´agyi, Y Zlochower, N Dorband, D Pollney, and J Winicour。数值相对论标准测试基准的实现。《经典与量子引力》，25(12):125012，2008年6月。[7] John Baker, Manuela Campanelli, and Carlos O. Lousto。拉撒路计划：一种双黑洞演化的实用方法。《物理评论*D*辑》，65:044001，2002年1月。[8] Dinshaw Balsara。相对论磁流体力学的全变差递减格式。《天体物理学杂志增刊系列》，132(1):83，2001年1月。[9] Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro。爱因斯坦场方程的数值积分。《物理评论*D*辑》，59:024007，1998年12月。[10]Tanja Bode, Ian Hinder, Roland Haas, and Erik Schnetter。Cactus代码的WeylScal4模块。https://bitbucket.org/einsteintoolkit/einsteinanalysis/src/863e88a55cfb50e00061b6b7768ad28411034d14/WeylScal4/，2002年。[11] J. C. Butcher。一般线性方法。《数值纪事》，15:157–256，2006年。[12]John C Butcher。常微分方程数值方法。Wiley-Blackwell，新泽西州霍博肯，第2版，2008年3月。[13] G. Calabrese, I. Hinder, and S. Husa。爱因斯坦方程有限差分近似的数值稳定性。《计算物理学杂志》，218(2):607–634，2006年。[14] Richard Courant。论数理物理中的偏差分方程。《数学年刊》，100:32–74，1928年。[15] David Daverio, Yves Dirian, and Ermis Mitsou。数值相对论方案的同类比较，2018年。[16] P. Diener and F. S. Guzm´n。中的波动方程，2004年。[17] Peter Diener, Ernst Nils Dorband, Erik Schnetter, and Manuel Tiglio。满足分部求和性质的优化高阶导数算子与耗散算子

多块演化中的应用。《科学计算杂志》，32(1):109–145，2007年3月。[18] BRUNO GIACOMAZZO 和 LUCIANO REZZOLLA。相对论磁流体力学中黎曼问题的精确解。《流体力学杂志》，562:223–259，2006年。[19] Tom Goodale、Gabrielle Allen、Gerd Lanfermann、Joan Mass´o、Thomas Radke、Edward Seidel 和 John Shalf。Cactus 框架与工具包：设计与应用。载于向量与并行处理 – *VECPAR' 2002*，第五届国际会议，《计算机科学讲义》，柏林，2003年。施普林格。[20] Roland Haas、Maxwell Rizzo、David Boyer、Steven R. Brandt、Peter Diener、Domenica Garzon、Lucas Timotheo Sanches、Bing-Jyun Tsao、Samuel Cupp、Zachariah Etienne、Terrence Pierre Jacques、Liwei Ji、Erik Schnetter、Leonardo Werneck、Miguel Alcubierre、Daniela Alic、Gabrielle Allen、Marcus Ansorg、Federico G. Lopez Armengol、Maria Babiuc-Hamilton、Luca Baiotti、Werner Benger、Eloisa Bentivegna、Sebastiano Bernuzzi、Krishiv Bhatia、Tanja Bode、Gabriele Bozzola、Brockton Brendal、Bernd Bruegmann、Manuela Campanelli、Michail Chabanov、Cheng- Hsin Cheng、Federico Cipolletta、Giovanni Corvino、Roberto De Pietri、Alexandru Dima、Harry Dimmelmeier、Jake Doherty、Rion Dooley、Nils Dorband、Matthew Elley、Yaakoub El Khamra、Lorenzo Ennoggi、Joshua Faber、Giuseppe Ficarra、Toni Font、Joachim Frieben、Bruno Giacomazzo、Tom Goodale、Carsten Gundlach、Ian Hawke、Scott Hawley、I an Hinder、E. A. Huerta、Sascha Husa、Taishi Ikeda、Sai Iyer、Daniel Johnson、Abhishek V. Joshi、Jay Kalinani、Anuj Kankani、Wolfgang Kastaun、Thorsten Kellermann、Andrew Knapp、Michael Koppitz、Pablo Laguna、Gerd Lanferman、Paul Lasky、Frank L¨offler、Hayley Macpherson、Ivan Markin、Joan Masso、Lars Menger、Andre Merzky、Jonah Maxwell Miller、Mark Miller、Philipp Moesta、Pedro Montero、Bruno Mundim、Patrick Nelson、Andrea Nerozzi、Scott C. Noble、Christian Ott、Ludwig Jens Papenfort、Ravi Paruchuri、Michal Pirog、Denis Pollney、Daniel Price、David Radice、Thomas Radke、Christian Reisswig、Luciano Rezzolla、Chloe B. Richards、David Rideout、Matei Ripeanu、Lorenzo Sala、Jascha A Schewtschenko、Bernard Schutz、Ed Seidel、Eric Seidel、John Shalf、Swapnil Shankar、Ken Sible、Ulrich Sperhake、Nikolaos Stergioulas、Wai-Mo Suen、Bela Szilagyi、Ryoji Takahashi、Michael Thomas、Jonathan Thornburg、Chi Tian、Wolfgang Tichy、Malcolm Tobias、Aaryn Tonita、Samuel Tootle、Paul Walker、Mew-Bing Wan、Barry Wardell、Helvi Witek、Miguel Zilh˜ao、Burkhard Zink 和 Yosef Zlochower。《爱因斯坦工具包》，2024年12月。[21] Samir Hamdi、William E Schiesser 和 Graham W Griffiths。直线法。*Scholarpedia*，2(7):2859，2007年。[22]Ian Hinder。多极文档。https://einsteintoolkit.org/thornguide/EinsteinAnalysis/Multipole/documentation.html#XGoldberg:1966uu，2010年。访问日期：2025-04-04。[23]Ian Hinder 和 Andrew Knapp。Cactus 代码 thorn Multipole。https://bitbucket.org/einsteintoolkit/einsteinanalysis/src/863e88a55cfb50e00061b6b7768ad28411034d14/ Multipole/，2007年。[24] Mary Kathleen Horn。用于处理稠密输出的四阶和五阶缩放龙格–库塔算法。《*SIAM* 数值分析杂志》，20(3):558–568，1983年。[25] Z. Jackiewicz、R. Renaut 和 A. Feldstein。两步龙格–库塔方法。《*SIAM* 数值分析杂志》，28(4):1165–1182，1991年。[26] Z. Jackiewicz 和 S. Tracogna。常微分方程的一类两步龙格–库塔方法。《*SIAM* 数值分析杂志》，32(5):1390–1427，1995年。[27] Zdzislaw Jackiewicz。常微分方程的一般线性方法。Wiley-Blackwell，新泽西州霍博肯，2009年6月。[28] Li wei Ji、Roland Haas、Yosef Zlochower、Steven R Brandt、Erik Schnetter 和 Allen Wen。使用爱因斯坦工具包进行 GPU 加速的子循环时间积分，2025年。[29] Jay V Kalinani、Liwei Ji、Lorenzo Ennoggi、Federico G Lopez Armengol、Lucas Timotheo Sanches、Bing-Jyun Tsao、Steven R Brandt、Manuela Campanelli、Riccardo Ciolfi、Bruno Giacomazzo,

Roland Haas、Erik Schnetter 和 Yosef Zlochower。Asterx：一种用于动力时空的新型开源 GPU 加速广义相对论磁流体动力学代码。《经典与量子引力》，42(2):025016，2024年12月。[30] David Ketcheson 和 Aron Ahmadia。用于初值问题数值积分的最优稳定性多项式。《应用数学与计算科学通讯》，7(2):247–271，2012年12月。[31] David I. Ketcheson。采用最小存储实现的 Runge–Kutta 方法。《计算物理学杂志》，229(5):1763–1773，2010年。[32] Lawrence E. Kidder、Scott E. Field、Francois Foucart、Erik Schnetter、Saul A. Teukolsky、Andy Bohn、Nils Deppe、Peter Diener、Fran¸cois H´ebert、Jonas Lippuner、Jonah Miller、Christian D. Ott、Mark A. Scheel 和 Trevor Vincent。Spectre：一种用于相对论天体物理学的基于任务的间断伽辽金代码。《计算物理学杂志》，335:84–114，2017年。[33] Luis Lehner、Steven L Liebling 和 Oscar Reula。自适应网格细化、稳定性与更高精度。《经典与量子引力》，23(16):S421–S445，2006年7月。[34] R.J. LeVeque。《常微分方程与偏微分方程的有限差分方法：稳态与时变问题》。《应用数学其他著作》。工业与应用数学学会，2007年。[35] Peter McCorquodale 和 Phillip Colella。局部加密网格上守恒律的高阶有限体积法。《应用数学与计算科学通讯》，6(1):1–25，2011年。[36] Bishop Mongwane。构建数值相对论中高阶网格细化格式的一致框架。《广义相对论与引力》，47(5)，2015年4月。[37] M. Parsani、David I. Ketcheson 和 W. Deconinck。应用于波传播问题的谱差分法的优化显式龙格–库塔格式。《SIAM科学计算杂志》，35(2):A957–A986，2013年。[38] WE Scheisser。《直线数值方法》，1991年。[39] William E Schiesser 和 Graham W Griffiths。《偏微分方程模型概要：使用 MATLAB 进行直线法分析》。剑桥大学出版社，2009年。[40] Erik Schnetter。BSSN伽马驱动器引入的时间步长限制。《经典与量子引力》，27(16):167001，2010年7月。[41] Erik Schnetter、Steven Brandt、Samuel Cupp、Roland Haas、Philipp M¨ osta 和 Swapnil Shankar。CarpetX。Zenodo，2024年。[42] Erik Schnetter、Scott H. Hawley 和 Ian Hawke。使用固定网格细化进行三维数值相对论演化。《经典与量子引力》，21:1465–1488，2004年。[43]Lawrence F Shampine 和 Laurent O Jay。稠密输出。《应用数学与计算数学百科全书》，第339–345页，2015年。[44]Masaru Shibata 和 Takashi Nakamura。三维引力波的演化：调和切片情形。《物理评论D辑》，52:5428–5444，1995年11月。[45] James M. Stone、Patrick D. Mullen、Drummond Fielding、Philipp Grete、Minghao Guo、Philipp Kempski、Elias R. Most、Christopher J. White 和 George N. Wong。AthenaK：Athena++ AMR 框架的高性能可移植版本，2024年。[46] Bela Szil´agyi、Roberto G´omez、Nigel T. Bishop 和 Jeffrey Winicour。线性化引力理论中的柯西边界。《物理评论D辑》，62:104006，2000年10月。[47] Endre S¨uli 和 David F. Mayers。《数值分析导论》。剑桥大学出版社，2003年。[48] Firdaus E. Udwadia 和 Artin Farahani。加速龙格–库塔方法。《自然与社会中的离散动力学》，2008(1):790619，2008年。[49]V. Vuorinen、J.-P. Keskinen、C. Duwig 和 B.J. Boersma。关于使用 OpenFOAM® 实现时变流动的低耗散龙格–库塔投影方法。《计算机与流体》，93:153–163，2014年。[50] J.H Williamson。低存储龙格–库塔格式。《计算物理学杂志》，35(1):48–56，1980年。

[51] Helvi Witek、Miguel Zilhao、Gabriele Bozzola、Cheng-Hsin Cheng、Alexandru Dima、Matthew Elley、Giuseppe Ficarra、Taishi Ikeda、Raimon Luna、Chloe Richards、Nicolas Sanchis-Gual 和 Hector Silva。Canuda：用于探索基础物理学的公共数值相对论库，2023年5月。[52] Helvi Witek、Miguel Zilh˜ao、Matthew Elley、Giuseppe Ficarra、Alexandru Dima、Ulrich Sperhake 和 Cheng-Hsin Cheng。Canudax lean。https://bitbucket.org/canuda/canudax_lean/，2025年。[53] Weiqun Zhang、Ann Almgren、Vince Beckner、John Bell、Johannes Blaschke、Cy Chan、Marcus Day、Brian Friesen、Kevin Gott、Daniel Graves 等。AMReX：块结构自适应网格细化框架。《开放源代码软件期刊》，4(37):1370，2019年。