arXiv:2603.05782v1 [math.RT] 6 Mar 2026

海森堡–外尔李代数的酉表示与非酉表示

ANDREW DOUGLAS[1,2,3], HUBERT DE GUISE[4], 和 JOE REPKA[3]

Dedicated to the memory of our friend and collaborator Joe Repka.

Abstract. 我们考察海森堡–外尔李代数 $\mathfrak{hw}_n$ 的酉表示与非酉表示，特别关注酉表示的张量积以及不可分解非酉表示。在酉情形下，具有非平凡中心特征的不可约表示是施罗丁格表示，斯通-冯·诺依曼定理对其进行了分类。尽管文献中已有对这些表示张量积的讨论，我们仍给出详细的李代数分析，并构造显式的酉交织算子，包括中心特征之和为零的情形。在非酉情形下，我们考虑将 $\mathfrak{hw}_n$ 自然实现为实辛李代数 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$ 的子代数，并证明 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$ 的每个有限维复不可约表示限制到 $\mathfrak{hw}_n$ 后仍为不可分解表示。由此得到 $\mathfrak{hw}_n$ 的一大类自然的有限维非酉不可分解表示。

1. Introduction

位置 Q 与动量 P 算子之间的对易关系（在一维情况下），最初由海森堡在通过无限矩阵构建量子力学理论之初推导得出

$$PQ - QP := [P, Q] = -i\hbar\mathbf{1}\,, \tag{1}$$

其中 $\hbar = h/2\pi$ 为约化普朗克常数。这一关系是量子力学的核心，概括了该理论的一些出人意料的特征，例如波粒二象性。引用马克斯·玻恩 [4]的话：

“我永远不会忘记，当我成功地将海森堡关于量子条件的思想浓缩为神秘方程 $PQ - QP = \frac{h}{2\pi i}$时，内心所感受到的激动。这个方程是新力学的核心，后来人们发现它蕴含着不确定性关系。”

由于 Q 和 P 是无界算子，Weyl [29]为海森堡–外尔（或 HW）群的酉表示 $\pi_\lambda(x, y, t)$ 提出的指数形式，利用 $\mathbb{R}$的不可约表示 ρ 和 σ 定义（采用经 Folland [9]修改的记号），可表示为

$$\begin{aligned}\pi_\lambda(x, y, z) &= e^{i(xQ+yP+tZ)} = e^{ixQ}e^{iyP}e^{i(t+\frac{1}{2}xy)Z} = e^{iyP}e^{ixQ}e^{i(t-\frac{1}{2}xy)Z}\,,\\ &= e^{i\lambda t+i\frac{\lambda}{2}xy}\sigma(x)\rho(y) = e^{i\lambda t-i\frac{\lambda}{2}xy}\rho(y)\sigma(x)\,,\\ \rho(y) &= e^{iyP}\,, \qquad \sigma(x) = e^{ixQ}\end{aligned} \tag{2}$$

Date: 2026年3月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 17B10, 17B20, 17B30, 22E25, 22E27。*Key words and phrases.* 海森堡–外尔李代数、薛定谔表示、酉表示与非酉表示、张量积、交织算子、不可分解表示、辛李代数。

从而避开与无界算子 Q 和P相关的定义域细节。

现在我们定义一个更适用于我们目的的式 (1) 的李代数版本：

$$[Q,P]=Z\,,\quad [Q,Z]=0\,,\quad [P,Z]=0\,. \tag{3}$$

人们很容易以为中心元 Z 与单位矩阵成正比，但对式 (1) 取迹即可立即表明，对于有限维表示，这种情况不可能成立。

对于有限多个自由度 n，满足正则交换关系的 n 对 P_k，Q_k

$$\begin{aligned}&[P_k,Q_\ell]=\delta_{k\ell}Z,\\&[P_k,P_\ell]=[Q_k,Q_\ell]=[Z,P_k]=[Z,Q_k]=0,\end{aligned}\qquad 1\le k,\,\ell\le n. \tag{4}$$

它们定义了海森伯-外尔代数 $\mathfrak{hw}_n$。

请注意，这里以及式 (3) 中，非零交换子的定义都没有包含物理学中常见的因子 i 。

在这项工作中，通过对稠密不变的施瓦茨子空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 HW_n 的酉表示求导，得到了 $\mathfrak{hw}_n$ 的一些表示；另一些则是由 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$ 的有限维不可约表示限制而来。关于无限维表示中的无界算子及其定义域的微妙问题，例如在 [7, 13] 中有所讨论。

式 (1) 的原始关系引起了广泛共鸣，其影响至今仍远超最初的适用范围。如今，海森堡–外尔群 HW_n 在物理学和数学中无处不在（近期涵盖众多领域的例子可参见： [12][6][2]）。它在经典不变量理论、幂零李群的表示论、约化代数群以及阿贝尔调和分析中都发挥着重要作用，这里仅举数例 [18, 19]。在物理学中，海森堡–外尔代数 $\mathfrak{hw}_n$ 是相干态和相空间方法（针对有限n）的基础 [14, 25, 22, 23]

这些联系反映在 HW_n 和 $\mathfrak{hw}_n$丰富的表示论中；需要注意的是，在数学文献中，该群通常简称为海森伯群。

本文考察海森堡–外尔李群 HW_n 和李代数 $\mathfrak{hw}_n$的酉表示与非酉表示，重点分别放在酉情形下的张量积和非酉情形下的不可分解表示上。首先，我们描述 HW_n 和 $\mathfrak{hw}_n$的不可约酉表示；根据斯通-冯·诺依曼定理，这些表示由薛¨定谔表示给出。海森堡–外尔群的酉表示论是经典理论，在物理学文献中得到广泛应用；例如参见 [1, 15, 24, 26]。

随后，我们考察这些无限维 $\mathfrak{hw}_n$-表示的张量积，并明确表述其等价关系。在经典结果的基础上（参见 [5, 9, 15, 16, 18, 20, 27, 28]），我们对这些等价关系作出李代数方法的处理，并给出相应交织算子的明确构造。尽管文献中讨论了与海森堡–外尔李代数相关的张量积表示（例如 [3]），但关于薛¨定谔表示张量积的详细李代数分析，包括明确的酉交织算子，似乎尚未见诸文献。特别是，对于中心特征之和为零的情形，系统的表示论处理显然仍为空白。

接下来，我们通过辛嵌入构造一大类有限维、非酉、不可分解的 $\mathfrak{hw}_n$ 表示。具体而言，我们考虑一个自然的子代数

$\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$，它与 $\mathfrak{hw}_n$ 同构，并证明每个有限维复不可约 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$ 表示在限制到 $\mathfrak{hw}_n$ 时仍保持不可分解。这便得到了一大类有限维不可分解的 $\mathfrak{hw}_n$ 表示。

本文结构如下。第 2 节详细介绍海森堡–外尔群 HW_n 及其李代数 $\mathfrak{hw}_n$。第 3 节中，我们定义 HW_n 和 $\mathfrak{hw}_n$的薛定谔表示，然后考察 $\mathfrak{hw}_n$的薛定谔表示的张量积，并通过显式构造交织算子来确立它们之间的等价关系。第 4 节中，我们通过辛嵌入构造一大类有限维、不可分解的非酉表示 $\mathfrak{hw}_n$。

最后，我们在附录A中简要评论并显式构造张量积中由 λ 和 μ标记的不可约表示分解里，每个具有中心特征 $\lambda+\mu$、 $\lambda,\ \mu>0$的不可约表示的最低权态。

2. 海森堡–外尔群与李代数

海森堡–外尔群 HW_n 是一个连通、单连通、非紧致的幂零李群。HW_n 可在矩阵乘法下实现为一个矩阵群：

$$HW_n=\left\{\begin{pmatrix}1 & x & t+\frac{1}{2}x\cdot y\\ 0 & I_n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\;\middle|\; x\in\mathbb{R}^{1\times n},\ y\in\mathbb{R}^{n\times 1},\ t\in\mathbb{R}\right\}. \tag{5}$$

HW_n 的中心是如下的一维子群

$$\mathcal{Z}(HW_n)=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & I_n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}\cong\mathbb{R}. \tag{6}$$

海森堡–外尔李代数 $\mathfrak{hw}_n$ 是一个 $(2n+1)$ 维实李代数

$$\mathfrak{hw}_n=\left\{\begin{pmatrix}0 & x & t\\ 0 & 0 & y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\;\middle|\; x\in\mathbb{R}^{1\times n},\ y\in\mathbb{R}^{n\times 1},\ t\in\mathbb{R}\right\}, \tag{7}$$

其李括号由交换子给出。若 $e_1,\dots,e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$的标准基，则 $\mathfrak{hw}_n$ 的一组基为

$$P_k=\begin{pmatrix}0 & e_k^{\top} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad Q_k=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e_k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad Z=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad 1\le k\le n, \tag{8}$$

with 对易关系见式 (4)。元素 Z 张成 $\mathfrak{hw}_n$的中心，

$$[\mathfrak{hw}_n,\mathfrak{hw}_n]=\mathbb{R}Z. \tag{9}$$

由于海森堡–外尔群是连通、单连通且幂零的，从 $\mathfrak{hw}_n$ 到 HW_n 的指数映射是一个微分同胚（参见 [11, 命题 1.62]），因此它是双射。具体而言，式 (7) 中 $\mathfrak{hw}_n$ 的代表元经指数运算后，得到式 (5) 中 HW_n 的代表元：

$$\exp\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0 & x & t\\ 0 & 0 & y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{\in\mathfrak{hw}_n}\right)=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & x & t+\frac{1}{2}x\cdot y\\ 0 & I_n & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\in HW_n}. \tag{10}$$

（请注意：代数元进行指数运算时，指数中没有 i 的前因子，这与物理学中的惯用做法不同。我们遵循数学中的惯例；在本文同时讨论酉表示和非酉表示时，这一惯例尤其有用。）

3. Unitary Representations: Schrödinger Representations

HW_n 的 Schr¨odinger 表示定义在希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上，该空间由满足以下条件的可测函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 的等价类构成

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^2 \, du < \infty, \tag{11}$$

其中，几乎处处相等的函数视为相同。所有积分均相对于勒贝格测度计算。内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \, \overline{g(u)} \, du. \tag{12}$$

当 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 时，*Schr¨odinger* 表示

$$\pi_\lambda \colon HW_n \longrightarrow U\big(L^2(\mathbb{R}^n)\big) \tag{13}$$

定义为

$$\left(\pi_\lambda \begin{pmatrix} 1 & x & t + \frac{1}{2} x \cdot y \\ 0 & I_n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f \right)(u) = e^{i\left(\lambda t + y \cdot u + \frac{1}{2}\lambda x \cdot y\right)} \, f(u + \lambda x), \tag{14}$$

对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $u \in \mathbb{R}^n$ （参见 [9]）。特别地，中心的作用为

$$\pi_\lambda \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = e^{i\,\lambda t} \, I. \tag{15}$$

众所周知，对于 $\lambda \neq 0$，表示 π_λ 是不可约的，而当 $\lambda \neq \mu$ 时， π_λ 与 π_μ 不等价（参见 [9]）。此外，以下著名定理表明，这些薛定谔表示穷尽了 HW_n 的所有无限维酉表示。请注意，为符合物理学中的标准惯例，我们省略了 [9], 中给出的薛定谔表示通常定义中的因子 2π 。

定理 3.1（斯通–冯·诺依曼，群版本）。对于每个 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，海森堡–外尔群 HW_n 都存在唯一的不可约酉表示（在酉等价意义下），其中心特征为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto e^{i\,\lambda t}. \tag{16}$$

该表示与薛 ¨定表示 π_λ 上的 $L^2(\mathbb{R}^n)$。注 3.2（消失的中心特征标）。 若 $\lambda = 0$，则 HW_n 的中心作用平凡，而任何具有此性质的 HW_n 的酉表示都可通过该阿贝尔商群分解因子

$$HW_n / \mathcal{Z}(HW_n) \cong \mathbb{R}^{2n}. \tag{17}$$

因此，每个这样的表示都是阿贝尔群的酉表示，并可分解为一维特征的直积分 [10, 定理 7.28]。特别是，所有具有平凡中心作用的不可约酉表示都是一维特征。

3.1. 导出表示 $\mathfrak{hw}_n$。 令 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示施瓦茨空间，它由所有光滑函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 组成，并且对每个多重指标 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^n} \left| u^\alpha\, \partial^\beta f(u) \right| < \infty. \tag{18}$$

空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中一个稠密的、在 $\mathfrak{hw}_n$ 作用下保持不变的子空间，导出的薛定谔表示 $d\pi_\lambda$ 在该子空间上定义良好。对薛定谔表示 π_λ 求微分，得到导出表示

$$d\pi_\lambda\colon \mathfrak{hw}_n \longrightarrow \mathrm{End}\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\big), \qquad d\pi_\lambda(X)f = \frac{d}{ds}\pi_\lambda(\exp(sX))f\Big|_{s=0} \tag{19}$$

对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，它可明确写为

$$\begin{aligned} (d\pi_\lambda(Q_k)f)(u) &= i\,u_k\,f(u),\\ (d\pi_\lambda(P_k)f)(u) &= \lambda\,\frac{\partial f}{\partial u_k}(u),\\ (d\pi_\lambda(Z)f)(u) &= i\,\lambda\,f(u), \end{aligned} \tag{20}$$

对于 $1 \le k \le n$. （注意上式中各因子 i 的位置。关于物理学中更常见的选取，参见例如 [30]。）这些算子满足式 **(4)** 的海森堡 – 外尔对易关系

$$\begin{aligned} [d\pi_\lambda(P_k), d\pi_\lambda(Q_\ell)] &= \delta_{k\ell}\, d\pi_\lambda(Z),\\ [d\pi_\lambda(P_k), d\pi_\lambda(P_\ell)] &= [d\pi_\lambda(Q_k), d\pi_\lambda(Q_\ell)] = 0,\\ [d\pi_\lambda(Z), d\pi_\lambda(P_k)] &= [d\pi_\lambda(Z), d\pi_\lambda(Q_k)] = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

对于 $1 \le k,\, \ell \le n$。令 $\mathfrak{hw}_n = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q} \oplus \mathbb{R}Z$，视为向量空间，其中

$$\mathfrak{q} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{Q_1, \dots, Q_n\} \cong \mathbb{R}^n, \qquad \mathfrak{p} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{P_1, \dots, P_n\} \cong \mathbb{R}^n. \tag{22}$$

于是，我们也可以用向量形式等价地描述 $\mathfrak{hw}_n$ 的作用：

$$\begin{aligned} (d\pi_\lambda(Q)f)(u) &= i\,(Q\cdot u)\,f(u),\\ (d\pi_\lambda(P)f)(u) &= \lambda\,(P\cdot\nabla)f(u),\\ (d\pi_\lambda(Z)f)(u) &= i\,\lambda\,f(u), \end{aligned} \tag{23}$$

对于 $Q \in \mathfrak{q}$ 和 $P \in \mathfrak{p}$。

定理 3.3 (斯通–冯·诺依曼，李代数版本**)。** 设 $\mathfrak{hw}_n$ 为海森堡–外尔李代数。每个具有中心特征的不可约酉表示 $\mathfrak{hw}_n$ ，若它是 HW_n的酉表示的导出表示，则

$$d\pi(Z) = i\,\lambda\,I, \qquad \lambda \neq 0, \tag{24}$$

与施雷丁格表示 $d\pi_\lambda$幺正等价；该表示作用于施瓦茨空间$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ，它是 $L^2(\mathbb{R}^n)$的稠密不变子空间。

3.2. 施雷丁格表示的张量积¨。 在本小节中，设 $d\pi_\lambda$表示定义在施瓦茨空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上的海森堡–外尔李代数 $\mathfrak{hw}_n$ 的导出施雷丁格表示，其中 $\lambda \neq 0$。在接下来的两个定理中，我们分别讨论两种情形 $\lambda + \mu \neq 0$ 和 $\lambda + \mu = 0$下的张量积 $d\pi_\lambda \otimes d\pi_\mu$。

定理 3.4。设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 满足 $\lambda+\mu \neq 0$。那么，作为海森堡–外尔李代数 $\mathfrak{hw}_n$ 的表示，我们有酉等价关系

$$d\pi_\lambda \otimes d\pi_\mu \;\cong\; d\pi_{\lambda+\mu} \otimes \mathbb{1}, \tag{25}$$

其中 $d\pi_{\lambda+\mu}$ 作用于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，而 $\mathbb{1}$ 表示 $\mathfrak{hw}_n$ 在辅助副本 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的平凡表示（即 $\mathfrak{hw}_n$ 在该因子上作用为 0）。特别地，$d\pi_\lambda \otimes d\pi_\mu$ 与具有无限重数的 $d\pi_{\lambda+\mu}$ 等价。

证明。如上所述，

$$\begin{aligned}(d\pi_\lambda(Q)f)(u) &= i\,(Q\cdot u)\,f(u),\\ (d\pi_\lambda(P)f)(u) &= \lambda\,(P\cdot\nabla)f(u),\\ (d\pi_\lambda(Z)f)(u) &= i\,\lambda\,f(u).\end{aligned} \tag{26}$$

那么，作用在.....上的张量积表示

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;\cong\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}), \tag{27}$$

其中 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $(u,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 满足

$$\begin{aligned}\big((d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(Q)(f\otimes g)\big)(u,v) &= i\,(Q\cdot(u+v))\,(f\otimes g)(u,v),\\ \big((d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(P)(f\otimes g)\big)(u,v) &= (\lambda\,P\cdot\nabla_u+\mu\,P\cdot\nabla_v)\,(f\otimes g)(u,v),\end{aligned} \tag{28}$$

and

$$\big((d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(Z)(f\otimes g)\big)(u,v) = i(\lambda+\mu)\,(f\otimes g)(u,v). \tag{29}$$

定义一个酉算子

$$\mathcal{U}_{\lambda,\mu}: L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n) \tag{30}$$

by

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(f\otimes g))(u,v) &= |\lambda+\mu|^{-n/2}\,f\left(\frac{\lambda\,u+v}{\lambda+\mu}\right)\,g\left(\frac{\mu\,u-v}{\lambda+\mu}\right)\\ &= |\lambda+\mu|^{-n/2}\,(f\otimes g)\left(\frac{\lambda\,u+v}{\lambda+\mu}\,,\,\frac{\mu\,u-v}{\lambda+\mu}\right).\end{aligned} \tag{31}$$

由于线性变量替换

$$(u,v)\longmapsto\left(\frac{\lambda u+v}{\lambda+\mu},\frac{\mu u-v}{\lambda+\mu}\right) \tag{32}$$

其雅可比行列式的绝对值为 $|\lambda+\mu|^{-n}$，归一化因子 $|\lambda+\mu|^{-n/2}$确保 $\mathcal{U}_{\lambda,\,\mu}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上是酉的。

由于 $(u,\ v)\ \mapsto(U,\ V)$ 是可逆的线性变量替换，与此映射复合会保持施瓦茨空间不变。乘以常数 $|\lambda+\mu|^{-n/2}$ 显然也如此。因此，$\mathcal{U}_{\lambda,\,\mu}$ 保持 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 不变。此外，它将 $d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu$ 与$d\pi_{\lambda+\mu}\otimes\mathbb{1}$交织。也就是说，

$$\mathcal{U}_{\lambda,\mu}\circ(d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(X) = (d\pi_{\lambda+\mu}\otimes\mathbb{1})(X)\circ\mathcal{U}_{\lambda,\mu}\quad\text{for all}\quad X\in\mathfrak{hw}_n, \tag{33}$$

我们将对 $Q\in\mathfrak{q},\quad P\in\mathfrak{p}$ 和 Z分别验证这一点。首先定义

$$U\coloneqq\frac{\lambda\,u+v}{(\lambda+\mu)}\quad\text{and}\quad V\coloneqq\frac{\mu\,u-v}{(\lambda+\mu)}, \tag{34}$$

于是

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(f\otimes g))(u,v) &= |\lambda+\mu|^{-n/2}\,f(U)\,g(V)\\ &= |\lambda+\mu|^{-n/2}\,(f\otimes g)(U,V).\end{aligned} \tag{35}$$

注意，

$$(d\pi_{\lambda+\mu}\otimes\mathbb{1})(X) = d\pi_{\lambda+\mu}(X)\otimes I,\ \text{for all}\ X\in\mathfrak{hw}_n. \tag{36}$$

现在，令 $Q\in\mathfrak{q}$，则

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}_{\lambda,\mu}((d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(Q)(f\otimes g))(u,v)\\
=&\left|\lambda+\mu\right|^{-n/2}(d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(Q)(f\otimes g)(U,V)\\
=&\,i\left|\lambda+\mu\right|^{-n/2}(Q\cdot(U+V))(f\otimes g)(U,V)\\
=&\,i\left|\lambda+\mu\right|^{-n/2}(Q\cdot u)(f\otimes g)(U,V)\\
=&\,i\,(Q\cdot u)(\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(f\otimes g))(u,v)\\
=&\,(d\pi_{\lambda+\mu}(Q)\otimes I)(\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(f\otimes g))(u,v)\\
=&\,(d\pi_{\lambda+\mu}\otimes\mathbb{1})(Q)(\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(f\otimes g))(u,v)\,,
\end{aligned}\tag{37}$$

其中已使用了 $U+V=u$。接下来，令 $P\in\mathfrak{p}$，则

$$\begin{aligned}
&(d\pi_{\lambda+\mu}\otimes I)(P)\,(\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(f\otimes g))(u,v)\\
=&\,(d\pi_{\lambda+\mu}(P)\otimes I)\,(\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(f\otimes g))(u,v)\\
=&\,(\lambda+\mu)\,(P\cdot\nabla_u)\big(\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(f\otimes g)\big)(u,v)\\
=&\,(\lambda+\mu)\left|\lambda+\mu\right|^{-n/2}(P\cdot\nabla_u)(f\otimes g)(U,V)\\
=&\,(\lambda+\mu)\left|\lambda+\mu\right|^{-n/2}\left(((P\cdot\nabla f)\otimes g)\frac{\partial U}{\partial u}+(f\otimes(P\cdot\nabla g))\frac{\partial V}{\partial u}\right)(U,V)\\
=&\,(\lambda+\mu)\left|\lambda+\mu\right|^{-n/2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}((P\cdot\nabla f)\otimes g)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}(f\otimes(P\cdot\nabla g))\right)(U,V)\\
=&\left|\lambda+\mu\right|^{-n/2}(\lambda((P\cdot\nabla f)\otimes g)+\mu(f\otimes(P\cdot\nabla g)))\,(U,V)\\
=&\left|\lambda+\mu\right|^{-n/2}(d\pi_\lambda(P)\otimes I+I\otimes d\pi_\mu(P))(f\otimes g)(U,V)\\
=&\left|\lambda+\mu\right|^{-n/2}(d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(P)\,(f\otimes g)(U,V)\\
=&\,\mathcal{U}_{\lambda,\mu}\big((d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(P)(f\otimes g)\big)(u,v).
\end{aligned}\tag{38}$$

最后，对于中心元 Z，我们有

$$\begin{aligned}
(d\pi_{\lambda+\mu}\otimes\mathbb{1})(Z)(\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(f\otimes g))(u,v)=&\;i(\lambda+\mu)\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(f\otimes g)(u,v)\\
=&\;\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(i(\lambda+\mu)(f\otimes g))(u,v)\\
=&\;\mathcal{U}_{\lambda,\mu}(d\pi_\lambda(Z)\otimes I+I\otimes d\pi_\mu(Z))(f\otimes g)(u,v)\\
=&\;\mathcal{U}_{\lambda,\mu}((d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(Z)(f\otimes g))(u,v).
\end{aligned}\tag{39}$$

对 $\mathcal{U}_{\lambda,\,\mu}$ 施加共轭作用，得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}_{\lambda,\mu}\,(d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(Q)\mathcal{U}_{\lambda,\mu}^{-1}=(d\pi_{\lambda+\mu}(Q)\otimes I)=(d\pi_{\lambda+\mu}\otimes\mathbb{1})(Q),\qquad Q\in\mathfrak{q},\\
&\mathcal{U}_{\lambda,\mu}\,(d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(P)\mathcal{U}_{\lambda,\mu}^{-1}=(d\pi_{\lambda+\mu}(P)\otimes I)=(d\pi_{\lambda+\mu}\otimes\mathbb{1})(P),\qquad P\in\mathfrak{p},\\
&\mathcal{U}_{\lambda,\mu}\,(d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu)(Z)\mathcal{U}_{\lambda,\mu}^{-1}=(d\pi_{\lambda+\mu}(Z)\otimes I)=(d\pi_{\lambda+\mu}\otimes\mathbb{1})(Z).
\end{aligned}\tag{40}$$

因此，

$$d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu\;\cong\;d\pi_{\lambda+\mu}\otimes\mathbb{1},\tag{41}$$

也就是说，$d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu$ 与具有无限重数的 $d\pi_{\lambda+\mu}$ 等价。 □

注记 3.5（张量积的非不可约性）。尽管 $d\pi_{\lambda+\mu}$ 是不可约的，但张量积

$$d\pi_\lambda\otimes d\pi_\mu\cong d\pi_{\lambda+\mu}\otimes\mathbb{1}\tag{42}$$

作为 $\mathfrak{hw}_n$的表示并非 不可约，因为$\mathbb{1}$ 是无限维的，且任意子空间$W \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$都会产生一个真 $\mathfrak{hw}_n$ 子模 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \otimes W$。

定理 3.6。 设 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。那么，海森堡–外尔李代数 $\mathfrak{hw}_n$ 的张量积表示 $d\pi_\lambda \otimes d\pi_{-\lambda}$ 具有平凡的中心特征，因此可经由阿贝尔商分解

$$\mathfrak{hw}_n/\mathbb{R}Z \;\cong\; \mathbb{R}^{2n}. \tag{43}$$

更确切地说，存在一个酉交织算子，将 $d\pi_\lambda \otimes d\pi_{-\lambda}$ 与一个张量积表示对应起来

$$d\pi_\lambda \otimes d\pi_{-\lambda} \;\cong\; \sigma_U \otimes \tau_V \quad on \quad L^2(\mathbb{R}^n_U) \otimes L^2(\mathbb{R}^n_V), \tag{44}$$

其中 σ_U 和 τ_V 是阿贝尔李代数$\mathfrak{hw}_n/\mathbb{R}Z \cong \mathbb{R}^{2n}$ 的表示，其像彼此对易；在证明中，它们分别由乘法算子和微分算子实现。

证明。由于

$$\begin{aligned} &((d\pi_\lambda \otimes d\pi_{-\lambda})(Z)(f\otimes g))(u,v) \\ &= ((d\pi_\lambda(Z)\otimes I + I \otimes d\pi_{-\lambda}(Z))(f\otimes g))(u,v) \\ &= (i\,\lambda - i\,\lambda)\, f(u)g(v) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{45}$$

中心 $\mathfrak{z}\left(\mathfrak{hw}_n\right) = \mathbb{R}Z$ 的作用平凡，因此该表示经由阿贝尔商 $\mathfrak{hw}_n/\mathbb{R}Z \cong \mathbb{R}^{2n}$ 分解。

定义一个酉算子

$$\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \tag{46}$$

by

$$(\mathcal{U}(f\otimes g))(u,v) = (f\otimes g)\Big(\tfrac{u+v}{\sqrt{2}},\, \tfrac{u-v}{\sqrt{2}}\Big). \tag{47}$$

变量替换

$$(u,v) \mapsto \left(\tfrac{u+v}{\sqrt{2}}, \tfrac{u-v}{\sqrt{2}}\right) \tag{48}$$

是正交的，因此其雅可比行列式的绝对值为 1，所以 $\mathcal{U}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上是酉的。此外，$\mathcal{U}$保持 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。定义

$$U := \frac{u+v}{\sqrt{2}}, \qquad V := \frac{u-v}{\sqrt{2}}, \tag{49}$$

使得

$$(\mathcal{U}(f\otimes g))(u,v) = (f\otimes g)(U,V). \tag{50}$$

令 $Q \in \mathfrak{q}$，并定义 $(M_Q f)(U) := (Q\cdot U) f(U)$。那么

$$\begin{aligned} (d\pi_\lambda \otimes d\pi_{-\lambda})(Q)(\mathcal{U}(f\otimes g))(u,v) &= i(Q\cdot(u+v))(f\otimes g)(U,V) \\ &= \sqrt{2}\, i(Q\cdot U)(f\otimes g)(U,V) \\ &= \sqrt{2}\, i((Q\cdot U)f(U))g(V) \\ &= \sqrt{2}\, i((M_Q f)(U))g(V) \\ &= \sqrt{2}\, i((M_Q f)\otimes g)(U,V) \\ &= \mathcal{U}\big(\sqrt{2}\, i\,(M_Q f\otimes g)\big)(u,v). \end{aligned} \tag{51}$$

接下来，对于 $P \in \mathfrak{p}$,

$$
\begin{aligned}
(d\pi_\lambda \otimes d\pi_{-\lambda})(P)(\mathcal{U}(f \otimes g))(u,v) &= \big(\lambda\, P \cdot \nabla_u - \lambda\, P \cdot \nabla_v\big)(f \otimes g)(U,V) \\
&= \sqrt{2}\,\lambda\,(P \cdot \nabla_V)\big((f \otimes g)(U,V)\big) \\
&= \sqrt{2}\,\lambda\, f(U)\,(P \cdot \nabla_V g)(V) \\
&= \sqrt{2}\,\lambda\,(f \otimes (P \cdot \nabla g))(U,V) \\
&= \mathcal{U}\big(\sqrt{2}\,\lambda\,(f \otimes (P \cdot \nabla g))\big)(u,v).
\end{aligned} \tag{52}
$$

$\mathcal{U}$ 的共轭作用给出

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}^{-1}\,(d\pi_\lambda \otimes d\pi_{-\lambda})(Q)\,\mathcal{U} &= (\sqrt{2}\,i\,M_Q) \otimes I, \\
\mathcal{U}^{-1}\,(d\pi_\lambda \otimes d\pi_{-\lambda})(P)\,\mathcal{U} &= I \otimes (\sqrt{2}\,\lambda\,P \cdot \nabla),
\end{aligned} \tag{53}
$$

且中心元 Z 作用平凡。因此

$$
d\pi_\lambda \otimes d\pi_{-\lambda} \;\cong\; \sigma_U \otimes \tau_V, \tag{54}
$$

其中 σ_U 和 τ_V 是阿贝尔李代数 $\mathfrak{hw}_n/\mathbb{R}Z$ 的表示，定义如下：

$$
\sigma_U(Q) = \sqrt{2}\,i\,M_Q, \qquad \sigma_U(P) = 0, \qquad \tau_V(Q) = 0, \qquad \tau_V(P) = \sqrt{2}\,\lambda\,P \cdot \nabla, \tag{55}
$$

其中 Z 在两个表示中的作用均为平凡作用。 □

注 3.7（斯通–冯·诺依曼框架范围之外）。 从概念上说，在取阿贝尔商$\mathfrak{hw}_n/\mathbb{R}Z \cong \mathbb{R}^{2n}$之后，张量积呈现出如下分解

$$
d\pi_\lambda \otimes d\pi_{-\lambda} \;\cong\; (\text{multiplication}) \otimes (\text{differentiation}), \tag{56}
$$

这反映出当中心特征为零时，斯通–冯·诺依曼分类不再适用。在群的层面上，相应的酉表示因此经由阿贝尔群 $\mathbb{R}^{2n}$ 因子化，并且根据局部紧阿贝尔群的酉表示的谱定理，它可示意性地分解为

$$
\pi_\lambda \otimes \pi_{-\lambda} \;\cong\; \int^{\oplus} \chi\, d\mu(\chi), \tag{57}
$$

th也就是说，分解为一维酉特征的直积分 [10, 定理 7.28]。

4. Nonunitary Representations via Symplectic Embedding

本节中，我们构造一大类有限维、非酉复不可分解表示 $\mathfrak{hw}_n$。具体而言，我们找出 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$ 的一个自然子代数，它与 $\mathfrak{hw}_n$ 同构，并证明 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$ 的每个有限维复不可约表示限制到 $\mathfrak{hw}_n$ 后仍然不可分解。

我们首先回顾根系闭子集和正则子代数的相关背景。此外，我们考察实辛代数与复辛代数，以及分别与海森堡–外尔李代数及其复化同构的相应自然子代数。

4.1. 根系的闭子集与正则子代数。 本小节主要沿用 [8]中的论述。设 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 为复半单李代数，$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ 为 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$的一个固定卡当子代数。记 Φ 为 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\ \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$对应的根系。正根集记为 Φ^{+}。对于 $\alpha\in\Phi$，我们将根空间记作 $\mathfrak{g}_{\alpha}\ \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}\subset\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$。

若子集 $T\subset\Phi$ 满足：对于任意 $\alpha,\ \beta\in T$，条件 $\alpha+\beta\in\Phi$ 蕴含 $\alpha+\beta\in T$，则称其为闭的。任意闭子集 T 都可分解为互不相交的并

$$T=T^{r}\sqcup T^{u}, \tag{58}$$

其中

$$T^{r}=\{\alpha\in T\mid-\alpha\in T\},\qquad T^{u}=\{\alpha\in T\mid-\alpha\notin T\}, \tag{59}$$

分别称为 T 的对称分量和特殊分量。

复半单李代数的正则子代数是指被某个卡当子代数正规化的子代数。特别地，设 $T\subset\Phi$ 是一个闭子集，且 $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ 是一个包含每个 $\alpha\in T^{r}$ 对应的 $[\mathfrak{g}_{\alpha},\mathfrak{g}_{-\alpha}]$ 的子空间。那么

$$\mathfrak{s}_{T,\mathfrak{t}}=\mathfrak{t}\ \oplus\bigoplus_{\alpha\in T}\mathfrak{g}_{\alpha} \tag{60}$$

是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的正则子代数。为方便起见，若 $\mathfrak{t}=0$，我们用 $\mathfrak{s}_{T}$ 代替 $\mathfrak{s}_{T,\qquad 0}$.

令 $S\subseteq\Phi$。 S的闭包 记作 $[S]$，它是包含S的 Φ 的最小闭子集。以下结果众所周知，验证起来也很直接。

引理 4.1。 设 T 是 Φ 的闭子集。那么 $[T\cup(-T)]$ 是包含 T 的 Φ 的对称闭子集。

本小节最后给出一个定理，说明有限维复不可约表示 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 限制到正则子代数 $\mathfrak{s}_{T,\mathfrak{t}}$ 后仍保持不可分解的充要条件。这是 Douglas 和 Repka 在 [8], 中的结果之一，并推广了 Panyushev [21] 早先的工作。

定理 4.2。 [8, 推论 3。10] 设 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 是一个复半单李代数，其卡当子代数为 $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$，根系为 Φ。设 $T\subset\Phi$ 是一个闭子集，$\mathfrak{t}\subset\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ 是一个子代数，对每个 $\alpha\in T^{r}$ 都包含 $[\mathfrak{g}_{\alpha},\mathfrak{g}_{-\alpha}]$。令

$$\mathfrak{s}_{T,\mathfrak{t}}=\mathfrak{t}\ \oplus\bigoplus_{\alpha\in T}\mathfrak{g}_{\alpha}. \tag{61}$$

那么， $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的每个有限维复不可约表示限制到$\mathfrak{s}_{T、\ \mathfrak{t}}$ 时仍保持不可分解，当且仅当

$$[T\cup(-T)]=\Phi. \tag{62}$$

4.2. **实辛代数与复辛代数**。该复辛代数定义为

$$\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})=\{X\in M_{2n+2}(\mathbb{C})\mid X^{\top}J+JX=0\}, \tag{63}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}. \tag{64}$$

我们可以将这个简单李代数写成如下分块形式：

$$\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^{\top}\end{pmatrix}\ \middle|\ A\in M_{n+1}(\mathbb{C}),\ B^{\top}=B,\ C^{\top}=C\right\}. \tag{65}$$

令 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})$ 为对角卡尔坦子代数

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & -T \end{pmatrix} \,\middle|\, T = \operatorname{diag}(t_1, \dots, t_{n+1}),\ \ t_1, \dots t_{n+1} \in \mathbb{C} \right\}. \tag{66}$$

对于 $1 \le k \le n+1$，定义 $\varepsilon_k \in \mathfrak{h}^*$ 为

$$\varepsilon_k \left(\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & -T \end{pmatrix} \right) = t_k. \tag{67}$$

$\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})$ 的相应根系属于 C_{n+1} 型，因而为

$$\Phi = \{ \pm(\varepsilon_k - \varepsilon_\ell),\ \pm(\varepsilon_k + \varepsilon_\ell) \mid 1 \le k < \ell \le n+1 \} \ \cup\ \{ \pm 2\varepsilon_k \mid 1 \le k \le n+1 \}. \tag{68}$$

单根的一种标准选取为

$$\alpha_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} \quad (1 \le k \le n), \qquad \alpha_{n+1} = 2\varepsilon_{n+1}. \tag{69}$$

相对于这一选取，相应的正根集为

$$\Phi^+ = \{ \varepsilon_k - \varepsilon_\ell,\ \varepsilon_k + \varepsilon_\ell \mid 1 \le k < \ell \le n+1 \} \ \cup\ \{ 2\varepsilon_k \mid 1 \le k \le n+1 \}. \tag{70}$$

现在我们为每个根描述显式的根向量。令 $E_{k\ell}$ 表示在 (k, ℓ) 项为 1、其余各项为零的（$n+1$）$\times(n+1)$ 矩阵单位。

根 $\varepsilon_k - \varepsilon_\ell\ (k \ne \ell)$：根 $\varepsilon_k - \varepsilon_\ell$ 的根向量为

$$X_{\varepsilon_k - \varepsilon_\ell} \coloneqq \begin{pmatrix} E_{k\ell} & 0 \\ 0 & -E_{\ell k} \end{pmatrix}. \tag{71}$$

因为 $[H, X_{\varepsilon_k - \varepsilon_\ell}] = (\varepsilon_k - \varepsilon_\ell)(H)\, X_{\varepsilon_k - \varepsilon_\ell}$，对于 $H \in \mathfrak{h}$。

根 $\varepsilon_k + \varepsilon_\ell\ (k \ne \ell)$：$\varepsilon_k + \varepsilon_\ell$ 的根向量为

$$X_{\varepsilon_k + \varepsilon_\ell} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & E_{k\ell} + E_{\ell k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{72}$$

因为 $[H, X_{\varepsilon_k + \varepsilon_\ell}] = (\varepsilon_k + \varepsilon_\ell)(H) X_{\varepsilon_k + \varepsilon_\ell}$。相应的负根向量为

$$X_{-(\varepsilon_k + \varepsilon_\ell)} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{k\ell} + E_{\ell k} & 0 \end{pmatrix}. \tag{73}$$

根 $2\varepsilon_k$：$2\varepsilon_k$ 的根向量为

$$X_{2\varepsilon_k} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & E_{kk} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{74}$$

因为 $[H, X_{2\varepsilon_k}] = 2\varepsilon_k(H)\ X_{2\varepsilon_k}$。相应的负根向量为

$$X_{-2\varepsilon_k} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{kk} & 0 \end{pmatrix}. \tag{75}$$

根据上述对卡当子代数和根向量的明确选取，我们得到根空间分解

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C}) &= \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} (\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C}))_\alpha \\ &= \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C} X_\alpha. \end{aligned} \tag{76}$$

实辛代数 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$ 是 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})$ 的分裂实形式，其定义为

$$\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R}) = \{X \in M_{2n+2}(\mathbb{R}) \mid X^\top J + JX = 0\}, \tag{77}$$

其分块形式与式（65）中的 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})$ 相同，但块位于 $M_{n+1}(\mathbb{R})$ 中，而非 $M_{n+1}(\mathbb{C})$ 中。类似于式（76）中针对 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})$ 的分解，我们有如下分解

$$\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R}) = \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R}X_\alpha, \tag{78}$$

其中 $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$。

4.3. $\mathfrak{hw}_n$ 的不可分解表示：考虑 Φ 的闭子集

$$T \coloneqq \{\varepsilon_1 - \varepsilon_k,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_k \mid 2 \le k \le n+1\} \ \cup\ \{2\varepsilon_1\}, \tag{79}$$

并由此定义 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})$ 的相应正则子代数

$$\mathfrak{s}_T \coloneqq \bigoplus_{\alpha\in T} (\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C}))_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in T} \mathbb{C}X_\alpha. \tag{80}$$

根据构造,

$$\mathfrak{s}_T = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{X_{\varepsilon_1-\varepsilon_{k+1}},\ X_{\varepsilon_1+\varepsilon_{k+1}},\ X_{2\varepsilon_1}\}_{k=1}^{n} \subset \mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C}). \tag{81}$$

由于上述每个生成元都属于 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$，我们可以类似地定义 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$ 的子代数：

$$\mathfrak{s} \coloneqq \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{X_{\varepsilon_1-\varepsilon_{k+1}},\ X_{\varepsilon_1+\varepsilon_{k+1}},\ X_{2\varepsilon_1}\}_{k=1}^{n} \subset \mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R}). \tag{82}$$

此外，显然 $\mathfrak{s}_T$ 是 $\mathfrak{s}$ 的复化：

$$\mathfrak{s}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{s} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{s}_T. \tag{83}$$

引理 4.3。 正则子代数 $\mathfrak{s}_T \subset \mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})$ 同构于海森堡–外尔李代数 $\mathfrak{hw}_n^{\mathbb{C}}$ 的复化；而子代数 $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$ 同构于海森堡–外尔李代数 $\mathfrak{hw}_n$。也就是说，

$$\mathfrak{hw}_n^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{s}_T = \mathfrak{s}^{\mathbb{C}} \quad and \quad \mathfrak{hw}_n \cong \mathfrak{s}. \tag{84}$$

证明。 我们先证明 $\mathfrak{hw}_n^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{s}_T$。定义

$$x_k \coloneqq X_{\varepsilon_1-\varepsilon_{k+1}}, \qquad y_k \coloneqq X_{\varepsilon_1+\varepsilon_{k+1}}, \qquad z \coloneqq [x_1, y_1] = 2X_{2\varepsilon_1} \in \mathbb{C}X_{2\varepsilon_1}, \tag{85}$$

对于 $1 \le k \le n$。根据构造,

$$\mathfrak{s}_T = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{x_1, \dots, x_n,\ y_1, \dots, y_n,\ z\}. \tag{86}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} &[x_k, y_\ell] = \delta_{k\ell}\, z, \\ &[x_k, x_\ell] = [y_k, y_\ell] = [z, x_k] = [z, y_k] = 0, \end{aligned} \qquad (1 \le k,\, \ell \le n). \tag{87}$$

定义 $\Psi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{hw}_n^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{s}_T$ 为

$$\Psi_{\mathbb{C}}(P_k) = x_k, \qquad \Psi_{\mathbb{C}}(Q_k) = y_k, \qquad \Psi_{\mathbb{C}}(Z) = z \qquad (1 \le k \le n). \tag{88}$$

因此，由式 (4) 和式 (87) 可知， $\Psi_{\mathbb{C}}$ 保持李括号，故 $\Psi_{\mathbb{C}}$ 是李代数同态。由式 (86) 可知它是满射；再根据维数可知$\Psi_{\mathbb{C}}$ 是双射，因此是李代数同构。

我们还可以定义 $\Psi_{\mathbb{R}}:\mathfrak{hw}_n\to\mathfrak{s}$ 为

$$\Psi_{\mathbb{R}}(P_k)=x_k,\qquad \Psi_{\mathbb{R}}(Q_k)=y_k,\qquad \Psi_{\mathbb{R}}(Z)=z\qquad (1\le k\le n), \tag{89}$$

与上述复数情形类似，这是 $\mathfrak{hw}_n$与 $\mathfrak{s}$之间的李代数同构。□

引理 4.4。设 $\mathfrak{g}$ 为实半单李代数， $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 为其复化。设 $\mathfrak{s}^{\mathbb{C}}\subset\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 为正则子代数，并假设 $\mathfrak{s}^{\mathbb{C}}$ 是实子代数 $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{g}$的复化。那么， $\mathfrak{g}$的每个有限维复不可约 表示在限制到 $\mathfrak{s}$ 时仍保持不可分解，当且仅当 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的每个有限维复不可约 表示在限制到 $\mathfrak{s}^{\mathbb{C}}$时仍保持不可分解。

证明。设 V 为有限维复 $\mathfrak{g}$-模。则根据命题 4.6], V 唯一延拓为复线性 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-模 [17, 。此外，复子空间 V 是 $\mathfrak{g}$–不变的，当且仅当它是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-不变的。特别地， V 是 $\mathfrak{g}$-不可约的，当且仅当它是$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-不可约的。

同样， V是 $\mathfrak{s}$-不变的，当且仅当它相对于其复化$\mathfrak{s}^{\mathbb{C}}$不变。因此， V是不可分解的 $\mathfrak{s}$-模，当且仅当它相对于 $\mathfrak{s}^{\mathbb{C}}$不可分解。所需的等价性由此得出。□

注4.5。将引理 4.4 特化到 $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$和 $\mathfrak{s}_T\subset\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})$，并考虑等式 (83)，以下陈述等价：

- 每个有限维的 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$不可约复表示，限制到$\mathfrak{s}\cong\mathfrak{hw}_n$后都是不可分解表示。
- 每个有限维的 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{C})$不可约复表示，限制到 $\mathfrak{s}_T\cong\mathfrak{hw}_n^{\mathbb{C}}$后都是不可分解表示。

我们的最终定理确立了海森堡–外尔李代数 $\mathfrak{hw}_n$的一大类有限维不可分解复表示。

定理 4.6. 设 $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$ 为式 (82)中定义的海森堡–外尔子代数，且 $\mathfrak{s}\cong\mathfrak{hw}_n$。那么，$\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$的每个有限维复不可约表示，在限制到 $\mathfrak{s}$ 后仍然不可分解。

证明. 根据定理 4.2 和引理 4.4，或者更确切地说，根据注 4.5，只需证明 $\Phi=[T\cup(-T)]$。我们将 Φ 分解如下：

$$\begin{aligned}\Phi=&\left\{\pm(\varepsilon_1-\varepsilon_k)\right\}_{k=2}^{n+1}\\ &\cup\left\{\pm(\varepsilon_1+\varepsilon_k)\right\}_{k=2}^{n+1}\\ &\cup\left\{\pm2\varepsilon_1\right\}\\ &\cup\left\{\pm(\varepsilon_k-\varepsilon_\ell)\right\}_{2\le k<\ell\le n+1}\\ &\cup\left\{\pm(\varepsilon_k+\varepsilon_\ell)\right\}_{2\le k<\ell\le n+1}\\ &\cup\left\{\pm2\varepsilon_k\right\}_{k=2}^{n+1}.\end{aligned} \tag{90}$$

前三族根，即

$$\left\{\pm(\varepsilon_1-\varepsilon_k)\right\}_{k=2}^{n+1},\ \left\{\pm(\varepsilon_1+\varepsilon_k)\right\}_{k=2}^{n+1},\text{ and }\left\{\pm2\varepsilon_1\right\}, \tag{91}$$

由 $\pm T$ 的元素构成，因此也是 $[T\cup(-T)]$的元素。

其余的根可以写成 $T \cup (-T)$ 的元素之和，因此根据闭包性质，它们属于 $[T \cup (-T)]$ 。为了分别说明这些包含关系，对于 $2 \leq k < \ell \leq n+1$,

$$\begin{aligned} \pm(\varepsilon_k - \varepsilon_\ell) &= \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_\ell - (\varepsilon_1 - \varepsilon_k)) \in [T \cup (-T)], \\ \pm(\varepsilon_k + \varepsilon_\ell) &= \pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_\ell - (\varepsilon_1 - \varepsilon_k)) \in [T \cup (-T)], \\ \pm 2\varepsilon_k &= \pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_k - (\varepsilon_1 - \varepsilon_k)) \in [T \cup (-T)]. \end{aligned} \tag{92}$$

因此 $\Phi \subseteq [T \cup (-T)]$。由于反向包含关系显然成立，我们得到 $\Phi = [T \cup (-T)]$，如所需。□

注 4.7（限制下的张量积分解）。 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$的有限维复不可约表示的张量积分解，会诱导出它们在 $\mathfrak{hw}_n$上的限制的相应分解。特别地，如果 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$的复不可约表示的张量积可分解为 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$的不可约表示的直和，那么 $\mathfrak{hw}_n$ 的受限表示可分解为 $\mathfrak{hw}_n$的相应不可分解表示的直和。因此，适用于 $\mathfrak{sp}_{2n+2}(\mathbb{R})$张量积分解的组合学规则和表示论规则，可直接应用于 $\mathfrak{hw}_n$相关表示的分解。

注记4.8（有限维表示为何不是酉表示）。有限维酉表示完全可约；特别是，有限维酉表示可分解为不可约酉表示的直和。根据[9, 定理 1，59], 实海森堡–外尔李代数 $\mathfrak{hw}_n$ 的每个有限维不可约酉表示都是一维的。因此，任何有限维 $\mathfrak{hw}_n$–表示都是一维表示的直和。由于本节构造的$\mathfrak{hw}_n$–表示维数大于一且不可分解，因此它们不可能是酉表示。

5. Conclusion

本文介绍了关于海森堡–外尔群及其代数的两个不同结果。我们明确证明，当 $\lambda + \mu \neq 0$ 时，两个中心特征分别为 λ 和 μ 的薛定谔表示的张量积，与中心特征为 $\lambda + \mu$ 且具有无限重数的薛定谔表示幺正等价。

尽管海森堡–外尔代数与量子简谐振子密切相关，但我们观察到（见附录），分解中任意一个中心特征为 $\lambda + \mu$ 的不可约表示副本，其最低权态都不是两个振子之和的基态（唯一例外是由两个振子各自的最低权态之积构成的最低权态）。因此，对最低权态施加升算符，也不会得到简谐振子的特征函数。

接下来，我们通过辛嵌入构造了一族自然的有限维不可分解表示 $\mathfrak{hw}_n$ ，这些表示并非酉表示。具体而言，我们在 $\mathbb{R}$ 的 $\mathfrak{sp}_{2n+2}$ 中找到了一个与 $\mathfrak{hw}_n$ 同构的子代数，并证明每个有限维不可约表示在限制到海森堡–外尔子代数时仍保持不可分解。这为 $\mathfrak{hw}_n$ 提供了一大类非酉不可分解表示。

Acknowledgments

HdG 的工作由加拿大自然科学与工程研究委员会资助。

A. Appendix: Constructing lowest weight states

在本附录中，我们使用厄米多项式构造最低权态；厄米多项式是量子力学中广为人知的基函数。全文中我们假设 $\lambda > 0$ 和 $\mu > 0$。

A.1. 单振子。作用于实变量 u 的（复）函数上，海森堡–外尔李代数 $\mathfrak{hw}_1$ 的导出薛定谔表示为

$$
\begin{aligned}
d\pi_\lambda(Q)\psi^\lambda(u) &= iq\psi^\lambda(u)\,,\\
d\pi_\lambda(P)\psi^\lambda(u) &= \lambda\frac{d}{dq}\psi^\lambda(u)\,,\\
d\pi_\lambda(Z)\psi^\lambda(u) &= i\lambda\psi^\lambda(u)\,,
\end{aligned}
\tag{93}
$$

其中

$$
\int_{-\infty}^{\infty} du|\psi^\lambda(u)|^2 < \infty\,. \tag{94}
$$

因此，中心特征 λ 是中心元 Z 的本征值，并且很容易验证（显然）

$$
[d\pi_\lambda(Q), d\pi_\lambda(P)]\psi^\lambda(u) = i\lambda\psi^\lambda(u) \tag{95}
$$

作为通过对式（93）的作用取指数得到的群表示的承载空间的一组（归一化）基函数 $\{\psi_n^\lambda(u)\ n = 0,\ 1,\ .....,\ \infty\}$，由一个高斯因子和厄米多项式的乘积给出：

$$
\psi_n^\lambda(u) = (2^n n!)^{-1/2}(\pi\lambda)^{-1/4}e^{-u^2/2\lambda}H_n(u/\sqrt{\lambda})\,,\qquad \lambda > 0\,. \tag{96}
$$

特别是，我们有谐振子哈密顿算符

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}\psi_n^\lambda(u) := \frac{1}{2}\left((d\pi_\lambda(P))^2 + (d\pi_\lambda Q)^2\right)\psi_n^\lambda(u) &\mapsto \frac{1}{2}\left(\lambda^2\frac{d^2}{du^2} - u^2\right)\psi_n^\lambda(u)\\
&= -\lambda(n+\tfrac{1}{2})\psi_n^\lambda(u)\,,\quad n\in\mathbf{Z}^+\,.
\end{aligned}
\tag{97}
$$

与“标准”量子力学表达式相比，符号反转是由于我们在表示 $d\pi_\lambda$ 中将因子 i 放置于此。将其与量子力学中标准的谐振子哈密顿量 H 相比较，我们发现 $-H = H$ 且 $\lambda = \hbar$，也就是说中心特征与振子的“普朗克常数”有关。

式（20）可用于定义算符的矩阵元 X_{mn}，定义如下

$$
X_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} du\,(d\pi_\lambda(X)\psi_n^\lambda(u))\overline{\psi_m^\lambda(u)} \tag{98}
$$

并迅速得出

$$
\begin{aligned}
Q_{mn} &= i\int_{-\infty}^{\infty} du\psi_n^\lambda(u)u\psi_m^\lambda(u)\,,\\
P_{mn} &= \lambda\int_{-\infty}^{\infty} du\psi_n^\lambda(u)\left(\frac{d}{du}\right)\psi_m^\lambda(u)
\end{aligned}
\tag{99}
$$

以及（无限维）表示:

$$
\begin{aligned}
Q &\mapsto i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \\
P &\mapsto \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{100}
$$

（再次注意 i 的位置，它们由式 (1) 的定义得出。）一如既往，我们可以构造一个升算子和一个降算子:

$$
\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(-iQ - P\right), \\
\hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(-iQ + P\right)
\end{aligned} \tag{101}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\hat{a}\psi_n^\lambda(u) &= \sqrt{n}\psi_{n-1}^\lambda(u), \\
\hat{a}^\dagger\psi_n^\lambda(u) &= \sqrt{n+1}\psi_{n+1}^\lambda(u).
\end{aligned} \tag{102}
$$

基态，或等价地说，最低权态，就是 $\psi_0^\lambda(u)$。

A.2. 在分解中构造最低权态。 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 的作用不依赖于 λ。本节的任务是找出 $\psi_n^\lambda(u)\psi_m^\mu(v)$ 的线性组合（不一定要关于内积归一化），使它们被 $\hat{A} = \hat{a}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \hat{a}_2$ 湮灭，其中，显然

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}(-iQ_1 + P_1), \\
\hat{a}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\mu}}(-iQ_2 + P_2).
\end{aligned} \tag{103}
$$

$\hat{A}$ 中每个因子的作用都是线性的，因此显然

$$
\hat{A}\psi_0^\lambda(u)\psi_0^\mu(v) = 0 \tag{104}
$$

因此，$\Psi_0(u,\ v) := \psi_0^\lambda(u)\psi_0^\mu(v)$ 是我们的第一个最低权态。接下来我们考虑

$$
\begin{aligned}
\hat{A}\left(\psi_0^\lambda(u)\psi_1^\mu(v) - \psi_1^\lambda(u)\psi_0^\mu(v)\right) &= \hat{a}_1\psi_0^\lambda(u)\psi_1^\mu(v) + \hat{a}_2\psi_0^\lambda(u)\psi_1^\mu(v) \\
&\quad - \hat{a}_1\psi_1^\lambda(u)\psi_0^\mu(v) - \hat{a}_2\psi_1^\lambda(u)\psi_0^\mu(v), \\
&= 0 + \psi_0^\lambda(u)\psi_0(v) - \psi_0^\lambda(u)\psi_0(v) - 0 = 0.
\end{aligned} \tag{105}
$$

因此，$\Psi_1(u,\ v) = \left(\psi_0^\lambda(u)\psi_1^\mu(v) - \psi_1^\lambda(u)\psi_0^\mu(v)\right)$ 是我们的第二个最低权态。

事实上，（例如）$\hat{a}_1\psi_k^\lambda(u)$ 的作用与该作用相同

$$
a_1\psi_k^\lambda(u) \mapsto \frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{\xi_1^k}{\sqrt{k!}} \tag{106}
$$

其中标准多项式内积为 $\langle \xi_1^p, \xi_1^q \rangle = \delta_{pq} q!$ ，并且我们将其视为

$$\frac{\xi_1^p}{\sqrt{p!}} \leftrightarrow \psi_p^\lambda(u)\,. \tag{107}$$

求最低权态的问题，就是求由哑变量 ξ_1, ξ_2 构成且被 $\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2}$ 湮灭的多项式。显然，这些多项式具有如下形式：$(\xi_1 - \xi_2)^k$ 其中

$$\xi_1^p \xi_2^q \mapsto \sqrt{p!q!}\,\psi_p^\lambda(u)\psi_q^\mu(v) \tag{108}$$

前几个例子已在表1中明确列出。这清楚地表明，最低权态有可数无穷多个。它们都是中心元 Z 的本征态，本征值为 $\lambda + \mu$；通过对最低权态反复作用算符 $\hat{A}^\dagger = \hat{a}_1^\dagger \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \hat{a}_2^\dagger$，即可得到张成该不可约表示每个副本的一组完备态。

最低权态的形式也很有趣。前几个函数的显式表达式列于表2，其中 $\sim$ 表示省略了某些常数因子，而 H_n 是第 n 个埃尔米特多项式。

由表1可清楚看出，对于 $\lambda \neq \mu$，最低权态是双粒子振子 $H_1 + H_2$ 的非本征态，其中 H 定义于式（97）中。对于 $\lambda = \mu$，最低权态可以表示为谐振子态 $\psi_0(\frac{u+v}{\sqrt{2\lambda}})\psi_n(\frac{u-v}{\sqrt{2\lambda}})$ 的乘积。此情形称为圆振子，通过使用极坐标可以得到各种基态集合，尽管在物理学中，将这些态解释为 $\hbar\omega$ 的不可约表示中的态并不常见。

k	多项式	函数
0	1	$\psi_0^\lambda(u)\psi_0^\mu(v)$
1	$\xi_1 - \xi_2$	$\psi_1^\lambda(u)\psi_0^\mu(v) \; - \psi_0^\lambda(u)\psi_1^\mu(v)$
2	$\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2$	$\sqrt{2}\,\psi_2^\lambda(u)\psi_0^\mu(v) \; - 2\,\psi_1^\lambda(u)\psi_1^\mu(v) + \sqrt{2}\,\psi_0^\lambda(u)\psi_2^\mu(v)$

TABLE 1. 一些最低权多项式及相应的张量积基函数。

k	显式表达式	简化形式
0	$\dfrac{e^{-\frac{u^2}{2\lambda} - \frac{v^2}{2\mu}}}{\sqrt{\pi}\,\lambda^{1/4}\mu^{1/4}}$	$\sim e^{-\frac{u^2}{2\lambda} - \frac{v^2}{2\mu}}\, H_0\!\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}\,v - \sqrt{\mu}\,u}{\sqrt{2\lambda\mu}}\right)$
1	$\dfrac{e^{-\frac{u^2}{2\lambda} - \frac{v^2}{2\mu}}\left(\sqrt{\lambda}\,v - \sqrt{\mu}\,u\right)}{\sqrt{\pi}\,\lambda^{3/4}\mu^{3/4}}$	$\sim e^{-\frac{u^2}{2\lambda} - \frac{v^2}{2\mu}}\, H_1\!\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}\,v - \sqrt{\mu}\,u}{\sqrt{2\lambda\mu}}\right)$
2	$\dfrac{2\,e^{-\frac{u^2}{2\lambda} - \frac{v^2}{2\mu}}\left(\lambda v^2 - 2\sqrt{\lambda\mu}\,uv + \mu u^2 - \lambda\mu\right)}{\sqrt{\pi}\,\lambda^{5/4}\mu^{5/4}}$	$\sim e^{-\frac{u^2}{2\lambda} - \frac{v^2}{2\mu}}\, H_2\!\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}\,v - \sqrt{\mu}\,u}{\sqrt{2\lambda\mu}}\right)$

TABLE 2. 最低权态的显式函数形式。

References

[1] S. T. Ali 和 M. Engliˇs，《量子化方法：物理学家和分析学家指南》，*Rev. Math. Phys.* ( )，–。**17** 2005 391 490
[2] A. Almheiri、A. Goel 和 X.Y. Hu，《海森堡代数的量子引力》，《高能物理学杂志》，8（2024），第1–40页。
[3] A. Arai，*Inequivalent Representations of Canonical Commutation and Anti-Commutation Relations*，施普林格，新加坡，2020年。
[4] 1960 M.
[5] *Representations of Nilpotent Lie Groups and Their Applications* Born，*Physics in my generation. (A selection of papers)*，培格曼出版社，伦敦，L. J. Corwin 和 F. P. Greenleaf，，《剑桥高等数学研究丛书》，第18卷，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[6] R. Cushman，《海森堡群的动量映射》，《Symmetry》16（2024）1054。[7] G. Dorfmeister 和 J. Dorfmeister，《满足 [P, Q]=-i Id 的某些算子对的分类》，《泛函分析杂志》，57（1983）第3卷，第301–328页。[8] A. Douglas 和 J. Repka，《半单李代数的窄正则子代数与宽正则子代数》，*J. Algebra* ( )，–。**664** 2025 348 361
[9] G. B. Folland，*Harmonic Analysis in Phase Space*，《数学年刊研究丛书》，第122卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，纽约州，1989年。[10] G. B. Folland，*A Course in Abstract Harmonic Analysis*，第2版，《高等数学研究丛书》，CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2016年。[11] G. B. Folland，*The Heisenberg Group: A Survey*，《专题讨论会出版物》，第68卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2025年。[12] J. Frahm、C. Weiske 和 G. Zhang，2023年。《厄米李群的海森堡抛物诱导表示，第一部分：交织算子与韦尔变换》，《数学进展》，422（2023），第109001页。[13] J. C. Garrison 和 J. Wong。《正则共轭对、不确定性关系与相位算子》，《数学物理学杂志》第11卷（1970）第8期，2242–2249。
[14] **131** 1963 2766 R. J.
[15] *Symplectic Geometry and Quantum Mechanics* Glauber，《辐射场的相干态与非相干态》，《物理评论》（ ）M. de Gosson，，《算子理论：进展与应用》，第166卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2006年。[16] B. C. Hall，*Quantum Theory for Mathematicians*，《数学研究生教材》，第267卷，施普林格，纽约，2013年。[17] B. C. Hall，*Lie Groups*，*Lie Algebras*，*and Representations: An Elementary Introduction*，《数学研究生教材》，第222卷，施普林格，纽约，2015年。[18] R. Howe，《海森堡群在调和分析中的作用》，*Bull. Amer. Math. Soc.*（新系列）3（1980），第2期，821–843。[19] A. W. Knapp，*Lie Groups Beyond an Introduction*，第2版，《数学进展丛书》，第140卷，Birkh¨auser，波士顿，2002年。[20] G. W. Mackey，*Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*，W. A. Benjamin公司，纽约–阿姆斯特丹，1968年。[21] D. I. Panyushev，《半单李代数的宽子代数》，*Algebr. Represent. Theory* **17**（2014），第3期，931–944。[22] A. Perelomov，《广义相干态及其某些应用》，《苏联物理学进展》，20（1977）703–720。[23] W. P. Schleich，*Quantum optics in phase space*。约翰·威立父子公司，2015年。[24] M. H. Stone，《希尔伯特空间中的线性变换及其在分析中的应用（第15卷）》，*American Mathematical Soc.*（1932）[25] E. C. G. Sudarshan，《统计光束的半经典描述与量子力学描述的等价性》，《物理评论快报》 **10** 1963 277 ( ) S. J. Summers，《关于Stone–von
[26] Neumann唯一性定理及其推论》，载于 *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics* 2001， 135 152 ，施普林格，第–页。[27] S. Thangavelu，*Harmonic Analysis on the Heisenberg Group*，《数学进展丛书》，第159卷，Birkh¨auser，波士顿，1998年。[28] N. Ja. Vilenkin 和 A. U. Klimyk，*Representation of Lie Groups and Special Functions*，*Volume 2:Class I Representations*，*Special Functions*，*and Integral Transforms*，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，1993年。[29] H. Weyl，《量子力学与群论》，《Zeitschrift f¨ur Physik》46（1927），1–46。

海森堡–外尔李代数的酉表示与非酉表示 19[30] K. B. Wolf,

The Heisenberg-Weyl ring in quantum mechanics, 载于《群论及其应用》第三卷, EM Loebl 编（1986）

[1]Department of Mathematics New York City College of Technology City University of , New York Brooklyn NY 11201 USA.

, , , , , [2]Ph.D. Programs in Mathematics and Physics

Graduate Center City University of New , York New York NY 10016 USA.

, , , , [4]Department of Physics Lakehead University Thunder Bay ON P7B 5E1 Canada

[3]Department of Mathematics University of Toronto Toronto ON M5S 2E4 Canada