arXiv:2603.05794v1 [stat.ME] 6 Mar 2026

# 利用投影弗罗贝尼乌斯中位数在矩阵流形上进行稳健位置估计

Houren Hong*、Kassel Liam Hingee*、Janice L. Scealy*和Andrew T.A. Wood*金融、精算研究与统计研究院，澳大利亚国立大学

2026年3月9日

**摘要**

我们提出一种基于投影弗罗贝尼乌斯中位数的稳健方法，用于在各种矩阵流形上进行位置估计；该方法与空间中位数密切相关。此方法适用于多种矩阵流形，包括斯蒂费尔流形、格拉斯曼流形、肯德尔形状空间，以及作为斯蒂费尔流形商空间的一种类型的射影斯蒂费尔流形。我们的方法先在环境欧几里得空间中计算弗罗贝尼乌斯中位数，再将其投影到相应的矩阵流形上。该估计方法计算效率高；只要样本数据在环境欧几里得空间中不共线，解便是唯一的；此外，该方法具有良好的稳健性，并在自然变换群作用下具备适当的等变性。我们在温和条件下证明了渐近正态性，并推导出相关矩阵流形上的影响函数。对秩一复格拉斯曼流形和射影斯蒂费尔流形进行的模拟研究进一步展示了该方法的适用性和稳健性。我们还将该方法应用于一个真实世界的地震矩张量数据集。

关键词：外在距离；弗罗贝尼乌斯范数；影响函数；空间中位数；非欧几里得空间

*作者谨此感谢澳大利亚研究理事会 DP220102232 号资助对本研究的支持。通讯作者邮箱：houren.hong@anu.edu.au

# 1 引言

## 1.1 背景

稳健位置估计量在统计学中既重要又有价值，用途广泛，不仅适用于传统的单变量和多变量数据，也适用于结构更为复杂的数据，例如流形数据。我们在此关注的是矩阵值数据，具体而言是位于曲矩阵流形上的矩阵数据。当前在这一设定下的稳健位置估计量存在非唯一性、过早收敛（围绕局部极小值）以及对调优参数敏感的问题（Pennec 2006，Fletcher等人2008，Lin等人2024）。在此，我们提出一种新型位置估计量——投影弗罗贝尼乌斯中位数（PFM），它能够在多种矩阵流形上可靠地产生稳健的位置估计值。PFM具有若干优良性质，包括：唯一性；高度稳健；在适当实现时具有理想的等变性；并且可利用成熟的空间中位数软件简便计算。我们的数值结果表明，PFM将在许多情境中非常有用，例如对于 $k$样本位置问题（在存在离群值的情况下），前提是相关协方差的估计量是稳健的。

矩阵流形上的数据自然出现在各种各样的应用中。例如，Turaga 等人 (2008) 和 Lui (2012) 的研究综述了斯蒂费尔流形和格拉斯曼流形在计算机视觉中的应用；与此同时，秩为1 的复格拉斯曼流形在统计形状分析中发挥着重要作用（Kent 1994，Goodall & Mardia 1999，Dryden & Mardia 2016）。固定秩实对称半正定矩阵与协方差矩阵的估计密切相关，应用范围涵盖弥散张量成像（Dryden et al. 2009，2010）、通过图拉普拉斯矩阵分析网络数据（Severn et al. 2022，Zhou & Müller 2022）以及低秩矩阵补全（Candes

& Plan 2010，Chen 等，2020，Wang 与 Fan，2025）等。另一个值得关注的重要矩阵空间是射影斯蒂费尔流形，它是斯蒂费尔流形的一个商空间，其中相互正交的列向量是无向单位向量。这类空间在统计学的诸多应用中均有出现，包括方向与取向统计、统计形状分析和计算机视觉（Arnold 与 Jupp，2013，Arnold 等，2018）。尽管射影斯蒂费尔流形具有广泛的适用性，但统计学文献对其关注相对较少。

一种自然且广泛使用的内蕴稳健估计量是 Fréchet 中位数，也称为几何中位数，例如 Pennec(2006) 和 Fletcher等人(2008) 曾研究过这一估计量。然而，尽管这一方法在概念上颇具吸引力，使用内在距离通常比本文提出的方法在计算上更具挑战性，这在很大程度上是由于估计量不具有唯一性。基于 Fréchet 中位数的思路，Lin等人(2024) 将均值中位数策略（MoM）推广到流形值数据，其动机是：一组集中程度较弱的估计量的几何中位数能够在希尔伯特空间中提供更优的偏差界（Minsker 2015）。然而，这些方法通常需要迭代计算（Fletcher等人 2008），因为它们需要最小化内在距离之和；而且在某些矩阵流形上（例如斯蒂费尔流形），内在距离甚至没有闭式表达式。MoM 方法在存在离群值时的唯一性和稳健性仍缺乏充分研究。此外，MoM 方法的表现很大程度上取决于子集的数量及其划分方式。

## 1.2 投影 Frobenius 中位数

在方向统计学中，Ducharme & Milasevic （1987年）提出了一种稳健估计量， $\hat{\mu}_{\mathrm{DM}}$ 例如，可基于单位向量样本 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{S}^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$来估计球面上的位置。该估计量也由 Chan & He （1993）以及 Ko 与 Chang

（1993）给出了该估计量的定义：首先，在环境空间 $\hat{\mu}_{\mathrm{SM}}$ 中计算 $x_i$ 的空间中位数 $\mathbb{R}^p$（空间中位数的定义见（7））；然后将 $\hat{\mu}_{\mathrm{SM}}$ 归一化，得到$\hat{\mu}_{\mathrm{DM}} = \hat{\mu}_{\mathrm{SM}}/||\hat{\mu}_{\mathrm{SM}}||_E$，其中 $||\cdot||_E$ 表示欧几里得范数。该估计量具有一些优良性质：只要 $x_i$ 并非全都共线，它就是唯一的；利用公开可用的空间中位数软件即可轻松计算；而且稳健性很强。事实证明，基本相同的思路可应用于广泛的矩阵流形：我们首先在包含目标矩阵流形的适当环境线性矩阵空间中求出弗罗贝尼乌斯中位数（参见空间中位数，但采用（5）中定义的弗罗贝尼乌斯范数）；然后将弗罗贝尼乌斯中位数投影到该矩阵流形上，得到 PFM。然而，矩阵流形的实际处理细节远比球面的情况复杂。其中一个复杂之处（前文已提及）是，需要从相关的环境线性矩阵空间投影到目标矩阵流形上（在球面上，投影等同于归一化，因此球面上的情况比矩阵流形简单得多）。另一个挑战是，确定 PFM 在各种矩阵空间中的影响函数和中心极限定理。本文系统而全面地探讨了这些问题及其他问题。我们证明，由此得到的估计量易于使用，并具有优良的理论和实际性质。

使用外在距离（具体而言，即弗罗贝尼乌斯范数），并在环境空间中进行大部分计算，与任何最小化内在距离之和的计算方法相比，计算过程都要简单得多。此外，正如我们将看到的，弗罗贝尼乌斯中位数本质上是一个（欧氏）空间中位数，但我们使用“弗罗贝尼乌斯中位数”这一名称，以强调矩阵结构。关键在于，空间中位数及其投影版本的优良性质，也为弗罗贝尼乌斯中位数及其投影版本所继承。

本文聚焦于四种矩阵空间：(i) 实斯蒂费尔流形；(ii) 实格拉斯曼流形；(iii) 复射影空间，为方便起见，将其表示为秩为1 的复格拉斯曼流形；在统计学中，它作为二维物体的带标签地标数据的肯德尔形状空间具有重要意义（Dryden & Mardia2016）；以及 (iv) 下文定义的射影斯蒂费尔流形。此外，还有许多其他类型的矩阵流形也适合应用 PFM，并可据此发展相关理论；第2.5节简要列出了这类矩阵流形。

为什么稳健性可能是球面或本文所考虑的矩阵流形中的一个重要问题？毕竟，这些空间都是紧空间。答案是，即使在紧空间中，如果数据至少具有中等程度的集中性，稳健性仍可能成为一个严重问题，尤其是在数据高度集中的情况下。在矩阵流形中，存在离群值时，对高度集中的数据进行 $k$-样本位置相等性检验，就是一个可能涉及稳健性问题的实际情形。

## 1.3 论文概要

在第2节中，我们明确了本文关注的矩阵流形；在第2.5节中，我们列出了许多其他可应用本文思想和方法的矩阵流形。在第3节中，我们给出了投影弗罗贝尼乌斯中位数的精确定义，并明确了本文所研究的矩阵流形所需的投影。我们在第4节中介绍主要的理论结果；具体而言，我们给出了斯蒂费尔流形、格拉斯曼流形和复射影空间的影响函数形式及中心极限定理。在第5节中，我们介绍模拟研究的结果，并分析了一个真实的地震矩张量数据集。此外，补充材料的S1节中给出了本文所有结果的证明，以及一些进一步结果的陈述和证明；其中还介绍了若干算法

第 S2 节；更多数值结果见 S3 节。

# 2 感兴趣的矩阵流形

## 2.1 斯蒂费尔流形

设 $X \in \mathbb{R}^{k\times r}$，即 $X$ 是一个实 $k \times r$ 矩阵，其中 $\mathbb{R}$ 是实数集。不失一般性，假设 $1 \le r \le k$。实斯蒂费尔流形记为$\mathcal{V}_{k,\ r}$，定义为

$$\mathcal{V}_{k,r} = \left\{X \in \mathbb{R}^{k\times r} : X^\top X = I_r\right\}, \tag{1}$$

其中 $I_r$ 是 $r \times r$ 单位矩阵。注意，当 $r = 1$, $X$ 是一个 $k \times 1$ 单位向量，且$\mathcal{V}_{k,1} = \mathcal{S}^{k-1}$，其中 $\mathcal{S}^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k : x^\top x = 1\}$ 是 $p$维单位球面。还要注意，当 $r = k$时，相应的斯蒂费尔流形就是 $k \times k$ 正交矩阵空间。研究物体的方向时会用到斯蒂费尔流形；参见Mardia和Jupp (2000)。

## 2.2 格拉斯曼流形

实格拉斯曼流形直观上是 $\mathbb{R}^k$ 中维数为 $r$ 的子空间所构成的空间，记作 $\mathcal{G}_{k,r}$，其定义可以写为

$$\mathcal{G}_{k,r} = \left\{Y \in \mathbb{R}^{k\times k} : Y^\top = Y = Y^2, \mathrm{tr}(Y) = r\right\}, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示迹，$Y^\top$ 是 $Y$的转置。注意，换言之，$\mathcal{G}_{k,\ r}$ 由 $k\times k$投影矩阵构成。当 $r = 1$，$\mathcal{G}_{k时,\ 1}$ 是 $k-1$维实射影空间，记作 $\mathcal{RP}^{k-1}$，对应于无向方向。参见Mardia和Jupp (2000)。格拉斯曼流形例如在计算机视觉中有所应用。

## 2.3 复射影空间

复射影空间是微分几何中的经典概念。在统计学中，它最广为人知的用途是作为形状空间；D. Kendall 将其定义为由带标签的地标描述的二维对象的形状空间；参见 Kendall 等人 (1999)以及Dryden & Mardia (2016)。复射影空间记作 $\mathcal{CP}^{k-1}$，可通过所谓的 Veronese-Whitney 嵌入方便地定义，例如见Dryden& Mardia (2016，第112页）：

$$\mathcal{CP}^{k-1} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^{k\times k} : Z^* = Z = Z^2, \operatorname{tr}(Z) = 1 \right\}, \tag{3}$$

其中，$\mathbb{C}$ 表示复数集，$Z^*$ 是复矩阵 $Z$的共轭转置，而 $Z \in \mathcal{CP}^{k-1}$ 是一个厄米矩阵（即 $Z^* = Z$），其唯一的非零特征值等于 $+1$。

## 2.4 射影Stiefel流形

定义 $\mathcal{E}_r = \{\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r) : \epsilon_j = \pm 1,\ j = 1, \dots, r\}$。注意，当我们对 $\epsilon$、$\eta \in \mathcal{E}_r$ 定义群运算 $*$ 时，$\mathcal{E}_r$具有群结构:

$$\epsilon * \eta = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r) * (\eta_1, \dots, \eta_r) = (\epsilon_1\eta_1, \dots, \epsilon_r\eta_r) \in \mathcal{E}_r.$$

对于$X = [x_1, \dots, x_r] \in \mathcal{V}_{k,\ r}$，定义 $\mathcal{E}_r$在$\mathcal{V}_{k,\ r}$上的群作用为

$$(\epsilon, X) \mapsto X_\epsilon = [\epsilon_1 x_1, \dots, \epsilon_r x_r]. \tag{4}$$

请注意，对于所有 $\epsilon \in \mathcal{E}_r$，当 $X$ 的列乘以 $\pm 1$ 时仍保持正交归一，因此 $X_\epsilon \in \mathcal{V}_{k,\ r}$。形式上，射影 Stiefel 流形记作 $\mathcal{PV}_{k,r}$，是商空间 $\mathcal{PV}_{k,r} = \mathcal{V}_{k,r}/\mathcal{E}_r$。直观地说，这意味着我们将 $\mathcal{V}_{k,r}$ 中形如 $X = [\pm x_1, \dots, \pm x_r]$ 的所有 $2^r$ 元素视为 $\mathcal{PV}_{k,r}$ 中的同一个元素。请注意，$\mathcal{PV}_{k,1} = \mathcal{G}_{k,1}$。数学文献中曾讨论过相关但不同的商 Stiefel 流形，参见例如 Gitler 与 Handel（1968）、Gitler（1968）、Basu 与 Subhash

(2017）。据我们所知，在统计学文献中，首次对射影斯蒂费尔流形进行实质性讨论的是 Arnold & Jupp (2013)；另请参见 Kume 等人 (2013)，其中涉及相关的计算工作。

## 2.5 其他具有潜在意义的矩阵流形

我们在此不作详述，仅提及若干其他具有潜在或实际应用价值的流形；针对这些流形，可以发展与本文后文所提出方法类似的方法。它们包括：(a) 实对称 $k \times k$ 矩阵的稳健秩 $r$ 位置估计量；(b) 实对称非负定 $k \times k$ 矩阵的稳健秩 $r$ 非负定位置估计量；(c) 情形 (a) 与 (b)，并附加特征值约束，例如针对 $t \geq 1$ 的 $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 0$ 和/或 $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j^t = 1$，尤其是 $t = 1$、2；(d) 实 $k \times s$ 矩阵的稳健秩 $r$ 位置估计量，其中 $1 \leq r \leq s$；(e) 格拉斯曼流形的复数厄米版本以及上述情形 (a)–(c) 的稳健秩 $r$ 位置矩阵；以及 (f) 斯蒂费尔流形、射影斯蒂费尔流形及上述情形 (d) 的复数版本。

类型 (b) 和 (c) 情形下的稳健位置估计见 Dryden 等人 (2008)；其中，$(b)$ 分别对应于该论文中提出的大小与形状概念和形状概念。情形 (e) 出现在复格拉斯曼流形的秩为1 的情形中，对应于复射影空间。我们不了解类型 (a)、(d) 或 (f) 的具体应用，但我们认为，特别是 (a) 和 (d) 很可能在某些情境下派得上用场。

关键在于，投影弗罗贝尼乌斯中位数可以在所有这些空间中定义和计算。对于上述空间中的弗罗贝尼乌斯中位数，其结果细节总体上与本文详细讨论的那些空间中的结果相似。

# 3 矩阵流形上的Frobenius中位数

## 3.1 主要思想

令 $\mathcal{M}$ 表示以下实矩阵流形之一$\mathcal{V}_{k,\ r}$ 或$\mathcal{G}_{k,\ r}$，或复矩阵流形$\mathcal{CP}^{k-1}$；分别参见（1）、（2）和（3）。在所有情况下，假设我们观测到来自 $X_1$的随机样本 ...， $X_n$，并希望确定 $\mathcal{M}$ 中的稳健位置估计量 $\mathcal{M}$。回顾一下，实矩阵空间 $\mathbb{R}^{k\times t}$ 上的弗罗贝尼乌斯范数定义为

$$||X||_F = \left\{\mathrm{tr}\left(X^\top X\right)\right\}^{1/2}; \tag{5}$$

如果我们将实矩阵空间替换为复矩阵空间 $\mathbb{C}^{k\times t}$，那么弗罗贝尼乌斯范数与（5）类似，但将（5）中的转置替换为共轭转置。总体弗罗贝尼乌斯中位数和样本弗罗贝尼乌斯中位数在 $\mathbb{R}^{k\times r}$ 中分别定义为

$$A_0 = \underset{A\in\mathbb{R}^{k\times r}}{\mathrm{argmin}} = \mathbb{E}_{X\sim F_0}\left[||X-A||_F\right], \qquad \hat{A} = \underset{A\in\mathbb{R}^{k\times r}}{\mathrm{argmin}} \sum_{i=1}^{n} ||X_i - A||_F. \tag{6}$$

下文中，当 $\mathcal{M}$ 分别等于$\mathcal{V}_{k、r}$、 $\mathcal{G}_{k、r}$ 和 $\mathcal{CP}^{k-1}$时，我们分别将 $\mathcal{M}$ 的环境空间（记作 $\mathcal{A}$）称为 $\mathbb{R}^{k\times r}$、 $\mathbb{R}^{k\times k}$和 $\mathbb{C}^{k\times k}$。第2节所讨论的任意矩阵空间 $\mathcal{M}$ 中的位置稳健估计量基于以下两步程序。

**(i)** 计算 $\hat{}$弗罗贝尼乌斯中位数 $A \in \mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$的环境空间。

$\hat{}$ **(ii)** 将 $A$ 投影到 $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ 上，得到投影弗罗贝尼乌斯中位数 $M \in \mathcal{M}$。

Ducharme & Milasevic 此前曾采用类似的两步程序（1987年）在球面上构造位置稳健估计量。据我们所知，这种简单、方便且实用的方法此前尚未被系统地用于在一类矩阵流形上获得稳健的位置估计量。由此得到的稳健估计量$\hat{}$有一个吸引人的特点： $M \in \mathcal{M}$ 除非常特殊的情况外，该估计量是唯一的，而且计算简便。

## 3.2 弗罗贝尼乌斯中位数的计算

从实际角度来看，用欧几里得范数表示弗罗贝尼乌斯范数很方便，因为已有高效可靠的程序可用于计算欧几里得空间中位数。若 $y_1$、 ...、 $y_n$ 是 $\mathbb{R}^p$中的一个向量样本，则样本空间中位数定义为

$$\hat{m} = \underset{m \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} ||y_i - m||_E, \tag{7}$$

其中 $||y||_E = (y^\top y)^{1/2}$ 是标准欧几里得范数。

在情形 $\mathcal{M} = \mathcal{V}_{k,\ r}$下，我们使用标准向量化算子 $\mathrm{vec}(\cdot)$；参见例如 Mardia 等人 （1979）。于是容易看出

$$||X||_F = ||\mathrm{vec}(X)||_E. \tag{8}$$

在情形 $\mathcal{M} = \mathcal{G}_{k,\ r}$ 下，情况略有不同，因为这里我们处理的是对称矩阵。在这种情况下，我们使用一种向量化算子，下文记为 $\mathrm{vech}_{\sqrt{2}}(\cdot)$，它与 $\mathrm{vec}(\cdot)$ 在两方面有所不同：首先，它只对矩阵的下三角部分（包括对角线）进行向量化；其次，所有非对角元素都乘以 $\sqrt{2}$。对于对称矩阵 $A = (a_{ij})_{i,\ j=1}^{3}$,

–

$$\mathrm{vech}_{\sqrt{2}}(A) = \left(a_{11}, \sqrt{2}a_{21}, \sqrt{2}a_{31}, a_{22}, \sqrt{2}a_{32}, a_{33}\right)^\top. \tag{9}$$

于是，对于任意对称矩阵 $A$，容易验证

$$||A||_F = ||\mathrm{vech}_{\sqrt{2}}(A)||_E. \tag{10}$$

最后，在 $\mathcal{CP}^{k-1}$ 的情况下，我们使用适用于厄米矩阵的向量化算子。设 $A = U + iV$，其中 $i = \sqrt{-1}$ 表示一个 $k \times k$ 厄米矩阵。那么$A^* = U^\top - iV^\top = U + iV = A$，其中 $^*$ 表示共轭转置。可以看出， $A$ 的实部 $U = \mathcal{R}e(A)$是对称的（即 $U^\top = U$），而 $A$ 的虚部,

$V = \mathcal{I}m(A)$是斜对称的（即 $V^\top = -V$）。令 $\mathrm{vecl}(V)$ 表示 $V$去除对角线后的下三角部分；在示例（9）中，$\mathrm{vecl}(V) = (a_{21}, a_{31}, a_{32})^\top$。那么，适用于厄米矩阵的向量化算子 $\mathrm{vec}_{\mathcal{H}}(A)$，其中 $\mathcal{H}$ 可写为

$$\mathrm{vec}_{\mathcal{H}}(A) = \left(\mathrm{vech}_{\sqrt{2}}(\mathcal{R}e(A))^\top, \sqrt{2}\mathrm{vecl}(\mathcal{I}m(A))^\top\right)^\top, \tag{11}$$

其中 $\mathrm{vech}_{\sqrt{2}}(\cdot)$ 和 $\mathrm{vecl}(\cdot)$ 分别定义于（9）和（11）上方；然后

$$||A||_F = \sqrt{\mathrm{tr}\,(A^*A)} = ||\mathrm{vec}_{\mathcal{H}}(A)||_E. \tag{12}$$

Pr断言（8）、（10）和（12）的证明见补充材料 .

## 3.3 投影步骤

结果表明，对于许多重要的矩阵流形，投影步骤可以用相关谱分解或奇异值分解中的量来表示。下面的命题1总结了斯蒂费尔流形、格拉斯曼流形和复射影空间的投影结果。对于矩阵流形 $\mathcal{M}$，令 $\pi(A;\mathcal{M})$ 表示$A \in \mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$上的投影，其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$的一个便于使用的环境矩阵空间。

**命题1**。 ***(i)*** 考虑 $\mathcal{M} = \mathcal{V}_{k,\ r}$，即斯蒂费尔流形。假设样本***Frobenius***中位数 $\hat{A}_s$ 的奇异值分解（***SVD***）为 $\hat{A}_s = \sum_{j=1}^{r} \hat{\rho}_j \hat{s}_j \hat{t}_j^\top$，其中 $\hat{\rho}_1 > \cdots > \hat{\rho}_r \geq 0$，$k \times 1$ 个向量 $\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_r$ 是正交归一的，且 $r \times 1$ 个向量 $\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_r$是正交归一的。那么 $\hat{M}_s = \pi(\hat{A}_s; \mathcal{V}_{k,r}) = \sum_{j=1}^{r} \hat{s}_j \hat{t}_j^\top$ 是 $\hat{A}_s$ 到$\mathcal{V}_{k,\ r}$上的唯一投影。

***(ii)*** 考虑$\mathcal{M} = \mathcal{G}_{k,\ r}$，即格拉斯曼流形。假设样本***Frobenius***中位数 $\hat{A}_g \in \mathcal{A}$具有谱分解 $\hat{A}_g = \sum_{j=1}^{k} \hat{\lambda}_j \hat{q}_j \hat{q}_j^\top$，其中 $\hat{\lambda}_1 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_k$，且 $\hat{\lambda}_r > \hat{\lambda}_{r+1}$，以及 $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_k$ 为一组由 $k \times 1$ 个向量组成的正交归一集。则 $M_g = \pi(A_g; \mathcal{G}_{k,r}) = \sum_{j=1}^{r} \hat{q}_j \hat{q}_j^\top$ 是 $\hat{A}_g$ 到$\mathcal{G}_{k,\ r}$上的唯一投影。

*(iii)* 考虑复射影空间 $\mathcal{M} = \mathcal{CP}^{k-1}$。假设样本*Frobenius*中位数 $\hat{A}_c$具有谱分解 $\hat{A}_c = \sum_{j=1}^{k} \hat{\lambda}_j \hat{u}_j \hat{u}_j^*$，其中 $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_k$，且 $\hat{u}_j$ 为复单位向量（即对每个 $j = 1, \ldots, k$有 $\hat{u}_j^* \hat{u}_j = 1$），使得 $\hat{u}_i^* \hat{u}_j = 0$（当$i \neq j$时）。则 $\hat{M}_c = \pi(\hat{A}_c; \mathcal{CP}^{k-1}) = \hat{u}_1 \hat{u}_1^*$ 是 $\hat{A}_c$ 到 $\mathcal{CP}^{k-1}$上的唯一投影。$\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$记号 $A_s$、$A_g$、$A_c$、$M_s$、$M_g$ 和 $M_c$ 为命题1中所用，下文将继续使用。

## 3.4 Equi投影弗罗贝尼乌斯中位数的方差性质

对于矩阵空间 $\mathcal{V}_{k,\ r}$, $\mathcal{G}_{k,\ r}$ 和 $\mathcal{CP}^{k-1}$，投影弗罗贝尼乌斯中位数具有理想且自然的等变性。值得注意的是，对于所关注的矩阵类，这些性质成立时，无需对特征值或奇异值施加任何要求。每种情况下，我们都假设观测到一个矩阵样本 $X_1, \ldots, X_n$。

**命题2.** *(i)* 斯蒂费尔流形 $\mathcal{V}_{k,\ r}$。对于任意 $r \times r$ 正交矩阵 $R$ 以及任意$k \times k$ 正交矩阵 $Q$，定义变换 $X_i \mapsto QX_iR^\top$, $i = 1, \ldots, n$。那么$\hat{M}_s = \pi(\hat{A}_s; \mathcal{V}_{k,r})$ 按照 $\hat{M}_s \mapsto Q\hat{M}_sR^\top$进行变换。

*(ii)* 格拉斯曼流形 $\mathcal{G}_{k,\ r}$。对于任意 $k \times k$ 正交矩阵 $Q$，定义变换 $X_i \mapsto QX_iQ^\top$, $i = 1, \ldots, n$。那么 $\hat{M}_g = \pi(\hat{A}_g; \mathcal{G}_{k,r})$ 按照$\hat{M}_g \mapsto Q\hat{M}_gQ^\top$进行变换。

*(iii)* 复射影空间 $\mathcal{CP}^{k-1}$。对于任意 $k \times k$酉矩阵 $U$，对于由 $X_i \in \mathcal{CP}^{k-1}$（3）给出的 $X_i \mapsto UX_iU^*$, $i = 1, \ldots, n$。则 $\hat{M}_c = \pi(\hat{A}_c; \mathcal{CP}^{k-1})$ 按照 $\hat{}$ $\hat{}$进行变换 $M_c \mapsto UM_cU^*$。

请注意，若不将非对角元素乘以 $\sqrt{2}$，则命题2(ii)和2(iii)中的等变性将不成立，如式（9）和（11）所示。 –

## 3.5 射影Stiefel流形

在射影 Stiefel 流形上进行估计和投影时需要格外谨慎，因为必须同时考虑符号歧义和Stiefel流形约束。我们首先定义两个嵌套环境空间：第一个， $\mathcal{B}_0$，定义为

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ B = (B_1, \ldots, B_r) : B_j^\top = B_j \ \text{ with } \ B_j \ \ k \times k, \ \ j = 1, \ldots, r \right\}; \tag{13}$$

且第二个环境空间为

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ B = (B_1, \ldots, B_r) \in \mathcal{B}_0 : \ \ \operatorname{rank}(B_j) = 1, \ \ j = 1, \ldots, r \right\} \tag{14}$$

若$X = [\pm x_1, \ldots, \pm x_r] \in \mathcal{PV}_{k,r}$具有总体分布 $F_0$，则环境空间 $\mathcal{B}_0$ 中的总体Frobenius中位数定义为

$$B_0 = (B_{01}, \ldots, B_{0r}) = \underset{B=(B_1,\ldots,B_r)\in\mathcal{B}_0}{\operatorname{argmin}} \int \left\{ \sum_{j=1}^{r} ||B_j - x_j x_j^\top||_F^2 \right\}^{1/2} dF_0(X). \tag{15}$$

$\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$(15)的样本对应量，对于样本 $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{PV}_{k,r}$，记为 $B = (B_1, \ldots, B_r)$。现在，我们通过对$B_0 = (B_{01}, \ldots, B_{0r})$施加条件，来规定总体分布 $F_0$ 的两个条件。对于每个 $j = 1, \ldots, r$，假设 $B_{0j}$具有谱分解$B_{0j} = \sum_{a=1}^{k} \lambda_{0ja} q_{0ja} q_{0ja}^\top$，其中 $\lambda_{0j1} \geq \cdots \geq \lambda_{0jk}$ 以及$q_{0j1}, \ldots, q_{0jk}$ 为正交归一向量。

$$\text{For } \ j = 1, \ldots, r, \ \ \lambda_{0j1} > \lambda_{0j2}; \text{ and } \ q_{011}, \ldots, q_{0r1} \ \text{ are linearly independent.} \tag{16}$$

下面的命题定义了将 $B \in \mathcal{B}_0$（定义见（13））投影到 $\mathcal{B}_1$（定义见（14））的映射；此映射记作 $\pi(B; \mathcal{B}_1)$。

**命题 3**。 假设 $B = (B_1, \ldots, B_r) \in \mathcal{B}_0$定义见（*13*），并满足（*16*）中的条件。若 $q_{j1}$ 对于每个 $B_j$都是主特征向量，则从 $B \in \mathcal{B}_0$ 到 $\mathcal{B}_1$ 的投影 $\pi(B; \mathcal{B}_1)$为

$$\pi(B; \mathcal{B}_1) = (q_{11} q_{11}^\top, \ldots, q_{r1} q_{r1}^\top) \in \mathcal{B}_1. \tag{17}$$

令 $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$，其中 $\epsilon_j = \pm 1$，并在 $\epsilon_1 = \cdots = \epsilon_r = 1$时记作 $\epsilon = 1[r]$。现在我们将 $Q_\epsilon = [\epsilon_1 q_{11}, \ldots, \epsilon_r q_{r1}]$ 投影到 $\mathcal{V}_{k,\ r}$ 并利用它构造 $\mathcal{PV}_{k,\ r}$中的一个元素。

**命题 4**。 假设 $Q_{1[r]} = [q_{11}, \ldots, q_{r1}]$ 的奇异值分解为 $Q_{1[r]} = \sum_{j=1}^{r} \rho_j s_j t_j^\top$。那么，将 $Q_\epsilon$ 投影到 $\mathcal{V}_{k,r}$ 上的结果为

$$\pi(Q_\epsilon; \mathcal{V}_{k,r}) = \sum_{j=1}^{r} s_j t_j(\epsilon)^\top, \tag{18}$$

其中 $t_j(\epsilon) = (\epsilon_1 t_{j1}, \ldots, \epsilon_r t_{jr})^\top$ 和 $t_j = (t_{j1}, \ldots, t_{jr})^\top$, $j = 1, ..., r$。

因此，要恢复整个陪集 $\{\pi(Q_\epsilon; \mathcal{V}_{k,r});\ \epsilon \in \mathcal{E}_r\}$，只需确定一个代表元，例如 $\pi(Q_{1[r]}; \mathcal{V}_{k,r})$，它可以确定奇异值分解中的单位向量 $s_j$ 和$t_j$。随后，通过考虑 $\epsilon \in \mathcal{E}_r$，即可利用（18）生成这些陪集，从而确定投影弗罗贝尼乌斯中位数。相应的等变性结果如下。

**命题 5**。 令 $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{PV}_{k,r} \subset \mathcal{V}_{k,r}$ 表示一个样本，令 $Q$ 表示一个$k \times k$ 正交矩阵，并假设 $R = diag(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ 为 $r \times r$。令 $M_{ps}$ 表示样本投影弗罗贝尼乌斯中位数中大小为 $2^r$ 的陪集的任意代表元。若随后$\hat{}$应用映射 $X_i \mapsto UX_iR$, $i = 1, \ldots, n$，则所选的投影弗罗贝尼乌斯中位数 $\hat{M_{ps}}$ $\hat{}$按 $M_{ps} \mapsto QM_{ps}$变换。

请注意：(i) 投影弗罗贝尼乌斯中位数不依赖于符号矩阵 $R$；(ii) 这一等变性结果弱于命题2中的结果，因为在计算 $M_{ps}$ 时涉及两个$\hat{}$不同的投影。

# 4 影响函数与渐近正态性

我们回顾影响函数的定义（例如参见 Hampel 等人 1986 年）。令 $F_0$表示样本空间上的总体分布 $\mathcal{X}$。考虑混合分布

$$F_{z,\epsilon}(x) = (1 - \epsilon)F_0(x) + \epsilon\delta_z(x), \quad z \in \mathcal{X}, \tag{19}$$

其中， $\delta_z(x)$ 是将概率 1 分配给 $x = z$ 的概率分布。令 $T(F)$ 表示定义在 $\mathcal{F}$ 上的泛函，其中 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的一大类概率分布。估计量 $T$ 的影响函数是泛函（Gâteaux）导数

$$IF_{T;F_0}(z) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left( \frac{T(F_{z,\epsilon}) - T(F_0)}{\epsilon} \right), \tag{20}$$

其中 $F_{z,\,\epsilon}$ 定义见（19），而 $F_{z,\,0} = F_0$；例如参见 Hampel 等人 （1986 年）。如第 3.3 节所述， $\pi(\cdot;\cdot)$ 在本节中表示一般的投影映射。

从以上内容可以清楚地看出，对于所考虑的三个空间，即斯蒂费尔流形、格拉斯曼流形和复射影空间，投影弗罗贝尼乌斯中位数的影响函数和中心极限定理具有许多共同结构。第 2.5 节中提到的许多矩阵空间也具有这些共同结构。不过，各种情形的某些细节有所不同，因此我们分别介绍了上述三种情形。补充材料中关于射影 Stiefel 流形的结果总体上也类似，但由于涉及两个投影，公式更加复杂。

以下定理 1–3 均采用相同的格式：在第（i）部分，我们分别推导斯蒂费尔流形、格拉斯曼流形和复射影空间上弗罗贝尼乌斯中位数的影响函数；在第（ii）部分，则建立相应的中心极限定理，并针对每种情形在相关切空间中表述。

## 4.1 斯蒂费尔流形

假设 $\mathcal{M} = \mathcal{V}_{k,\,r}$ 是一个斯蒂费尔流形，且满足 $r < k$。令 $A_{0s} = \sum_{j=1}^{r} \rho_{0j} s_{0j} t_{0j}^\top$表示 $A_{0s}$ 的奇异值分解，其中 $\rho_{01} \geq \cdots \geq \rho_{0r} > 0$。投影弗罗贝尼乌斯中位数 $M_{0s} = \pi(A_{0s}; \mathcal{V}_{k,r})$ 由 $M_{0s} = \sum_{j=1}^{r} s_{0j} t_{0j}^\top$给出。定义

$$H_s = \mathbb{E}_{X \sim F_0} \left[ \frac{1}{||\mathrm{vec}(X - A_0)||_E} \left( I_{(kr)\times(kr)} - \frac{\mathrm{vec}(X - A_{0s})\,\mathrm{vec}(X - A_{0s})^\top}{||X - A_{0s}||_F^2} \right) \right] \tag{21}$$

and

$$J_s = \mathbb{E}_{X\sim F_0}\left[\frac{\mathrm{vec}(X-A_{0s})\mathrm{vec}(X-A_{0s})^\top}{||X-A_{0s}||_F^2}\right]. \tag{22}$$

令 $s_{01}$、…、$s_{0k}$表示一组正交归一的 $k$-向量，其中 $s_{01}$、…、$s_{0r}$是如上所述的 $A_{0s}$的奇异向量。若 $\otimes$ 表示克罗内克积，则定义 $\Xi_s = [\Xi_{1,s}, \Xi_{2,s}]$，其中

$$\Xi_{1,s} = \left[\xi_{1,s;ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_{0j}\otimes s_{0a} - t_{0a}\otimes s_{0b}) : 1 \le a < b \le r\right] \tag{23}$$

and

$$\Xi_{2,s} = [\xi_{2,s;ab} = t_{0a}\otimes s_{0b} : 1 \le a \le r < b \le k]. \tag{24}$$

注意，$\Xi_s$ 的各列构成 $\widehat{\mathrm{vec}(\mathcal{V}_{k,r})}$在 $\mathrm{vec}(M_{0s})$处的切空间的标准正交基，其中 $M_{0s} \in \mathcal{V}_{k,r}$。令 $A_s$ 表示环境样本弗罗贝尼乌斯中位数。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**定理 1.** (*i*) 采用 (*19*) 和 (*20*) 中的记号，$M_s = \pi(A_s; \mathcal{V}_{k,r})$ 具有影响函数

$$\begin{aligned} IF_{\hat{M}_s;F_0}(Z) &= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{M_s(Z,\epsilon) - M_{0s}}{\epsilon} \\ &= \sum_{1\le a<b\le r}\frac{1}{\rho_{0a}+\rho_{0b}}\left\{s_{0a}^\top IF_{\hat{A}_s;F_0}(Z)t_{0b} - s_{0b}^\top IF_{\hat{A}_s;F_0}(Z)t_{0a}\right\}\left\{s_{0a}t_{0b}^\top - s_{0b}t_{0a}^\top\right\} \\ &\quad + \sum_{a=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{k}\frac{1}{\rho_{0j}}s_{0j}^\top IF_{\hat{A}_s;F_0}(Z)t_{0a}s_{0j}t_{0a}^\top, \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $Z \in \mathcal{V}_{k,r}$，$I_{k\times k}$ 是 $k\times k$ 单位矩阵，且

$$IF_{\hat{A}_s;F_0}(Z) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{\left(\hat{A}_{Z,\epsilon} - A_{0s}\right)}{\epsilon} = vec_{k\times r}^{-1}\left\{H_s^{-1}\frac{vec(Z-A_{0s})}{||Z-A_{0s}||_F}\right\}, \tag{26}$$

其中 $H_s$ 定义于 (*21*)，且 $vec_{k\times r}^{-1}$ 是 *vec* 算子的逆，该算子将一个$(kr)\times 1$ 向量映射为一个 $k\times r$ 矩阵。

(*ii*) 定义 $y_s = \Xi_s^\top vec(\hat{M}_s - M_0)$。于是，当 $n\to\infty$时，$n^{1/2}y_s$ 依分布收敛于 $\mathcal{N}_p(0_p, C_s)$，其中 $p = kr - r(r+1)/2$，且 $C_s$ 具有典型元素

$$Cov(y_{\alpha,s;ab}, y_{\beta,s;cd}) = \frac{2^{4-\alpha-\beta}}{(\rho_{0a}+\rho_{0b})(\rho_{0c}+\rho_{0d})}\xi_{\alpha,s;ab}^\top V_s \xi_{\beta,s;cd} \tag{27}$$

其中 $V_s = H_s^{-1}J_sH_s^{-1}$且 $H_s$ 以及 $J_s$ 分别定义于 (*21*) 和 (*22*) 中；对于 $\alpha$，$\beta = 1$，2，$y_{\alpha,s;ab} = \xi_{\alpha,s;ab}^\top$向量化$(\hat{M}_s - M_0)$，$\xi_{\alpha,s;ab}$ 定义于 (*23*) ($\alpha = 1$) 或 (*24*) ($\alpha = 2$)；并且

$\rho_{0a}$ 是 $A_{0s}$ 的奇异值，其中 $\rho_{0a}=0$ 适用于 $r+1\le a\le k$。此外，如果 $V_s$ 满秩 $kr$，则 $C_s$ 满秩 $p$。

当 $k=r$时，在定理 1 的第 (i) 部分中，唯一的区别是，(25) 右侧的第二项是相应的零矩阵；在定理 1 的第 (ii) 部分中，唯一的区别是，(24) 中的矩阵是相应的零矩阵，因此 $\alpha=\beta=1$ 在 (27) 中。注意，$p=kr-r(r+1)/2$ 实际上是斯蒂费尔流形 $\mathcal{V}_{k,r}$ 的维数。此外，我们可以将 $y_s$ 解释为切空间中一点的坐标向量，该切空间位于 $\sum_{j=1}^{r}s_{0j}t_{0j}^{\top}\in\mathcal{V}_{k,r}$ 处；这些坐标是相对于由 $\Xi_s$ 的列给出的切空间标准正交基定义的。

## 4.2 格拉斯曼流形

现在我们考虑格拉斯曼流形 $\mathcal{G}_{k,r}$ 上弗罗贝尼乌斯中位数的影响函数和渐近正态性。设 $A_{0g}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_{0j}q_{0j}q_{0j}^{\top}$ 表示环境总体的总体弗罗贝尼乌斯中位数，并假设 $\lambda_{01}\ge\cdots\ge\lambda_{0r}>\lambda_{0,r+1}\ge\cdots\ge\lambda_{0k}$。令 $A_g$ 表示环境样本弗罗贝尼乌斯中位数，并定义

$$H_g=\mathbb{E}_{X\sim F_0}\left[\frac{1}{||X-A_{0g}||_F}\left(I_{k(k+1)/2}-\frac{\mathrm{vech}_{\sqrt{2}}(X-A_{0g})\,\mathrm{vech}_{\sqrt{2}}(X-A_{0g})^{\top}}{||X-A_{0g}||_F^2}\right)\right],\quad(28)$$

$$J_g=\mathbb{E}_{X\sim F_0}\left[\frac{\mathrm{vech}_{\sqrt{2}}(X-A_{0g})\mathrm{vech}_{\sqrt{2}}(X-A_{0g})^{\top}}{||X-A_{0g}||_F^2}\right]\quad(29)$$

以及 $\{k(k+1)/2\}\times\{k(k+1)/2\}$ 矩阵 $G_k=\mathrm{diag}(g_{t,k}:t=1,\dots,k(k+1)/2)$，其中

$$g_{t,k}=\begin{cases}1 & \text{if } t=(j-1)k+1-(k-1)(k-2)/2 \text{ for some } j=1,\dots,k\\ \sqrt{2} & \text{otherwise.}\end{cases}\quad(30)$$

**定理 2.** *(i)* 考虑 $M_g=\pi(A_g;\mathcal{G}_{k,r})$，并假设总体分布在 $\mathcal{G}_{k,r}$ 上为 $F_0$，且满足 $\lambda_{0r}>\lambda_{0,r+1}$。那么，$M_g$ 的影响函数为

$$IF_{\hat{M}_g;F_0}(Z)=\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{(M_g(Z,\epsilon)-M_{0g})}{\epsilon}$$

$$= \sum_{1\le a\le r}\sum_{r<b\le k}\frac{1}{\lambda_{0a}-\lambda_{0b}}\left(q_{0a}^{\top} IF_{\hat{A}_g;F_0}(Z)q_{0b}\right)\left(q_{0a}q_{0b}^{\top}+q_{0b}q_{0a}^{\top}\right),$$

其中 $Z\in\mathcal{G}_{k,r}$ 并且，记 $vech_{\sqrt{2}}(\cdot)^{-1}$ 为 $vech$ 的逆算子 $_{\sqrt{2}}(\cdot)$ 见（9），

$$IF_{\hat{A}_g;F_0}(Z) = vech_{\sqrt{2}}^{-1}\left(H_g^{-1}\frac{vech_{\sqrt{2}}(Z-A_{0g})}{||Z-A_{0g}||_F}\right).$$

（*ii*）定义 $y_g=\Xi_g^{\top}vec(\hat{M}_g-M_0)$，其中 $k^2\times\{r(k-r)\}$ 矩阵 $\Xi_g$ 由下式给出

$$\Xi_g=[\xi_{g;ab}=(q_{0a}\otimes q_{0b}+q_{0b}\otimes q_{0a})/\sqrt{2}:\ 1\le a\le r<b\le k]. \tag{31}$$

于是，当 $n\to\infty$时，$n^{1/2}y_g$依分布收敛于 $\mathcal{N}_\tau(0_\tau,C_g)$ 分布，其中$\tau=r(k-r)$，并且若 $V_g$ 满秩，则 $C_g$ 满秩。$C_g$ 的一个典型元素由下式给出

$$Cov(y_{g;ab},y_{g;cd})=2(\lambda_{0a}-\lambda_{0b})^{-1}(\lambda_{0c}-\lambda_{0d})^{-1}\xi_{g;ab}^{\top}D_kG_k^{-1}V_gG_k^{-1}D_k^{\top}\xi_{g;cd}, \tag{32}$$

其中 $D_k$ 是 $k^2\times k(k+1)/2$ 重复矩阵（*Magnus 1988*，第55页），$G_k$ 定义于（30），$V_g=H_g^{-1}J_gH_g^{-1}$，$y_{g;ab}=\xi_{g;ab}^{\top}vec(\hat{M}_g-M_0)$，且 $\xi_{g;ab}$ 定义于（31）。

注意，$\tau=r(k-r)$ 是格拉斯曼流形$\mathcal{G}_{k,\ r}$的维数。此外，我们可以将$y_g$ 解释为点 $\sum_{j=1}^{r}q_{0j}q_{0j}^{\top}\in\mathcal{G}_{k,\ r}$处切空间中一点的坐标向量，其中坐标是相对于由 $\Xi_g$的列给出的切空间标准正交基定义的。

## 4.3 复射影空间

现在考虑 $\mathcal{M}=\mathcal{CP}^{k-1}$这一情形，即复射影空间。这对应于 $r=1$的复数版本的格拉斯曼流形。令 $A_{0c}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_{0j}u_{0j}u_{0j}^{*}$，其中 $\lambda_{01}>\lambda_{02}\ge\cdots\ge\lambda_{0k}$。回顾式（$_{\mathcal{H}}(\cdot)$ 11）中的vec的定义，定义

$$H_c=\mathbb{E}_{Z\sim F_0}\left[\frac{1}{||Z-A_{0c}||_F}\left(I_{k^2\times k^2}-\frac{\mathrm{vec}_{\mathcal{H}}(Z-A_{0c})\,\mathrm{vec}_{\mathcal{H}}(Z-A_{0c})^{*}}{||Z-A_0||_F^2}\right)\right], \tag{33}$$

$$J_c=\mathbb{E}_{Z\sim F_0}\left[\frac{\mathrm{vec}_{\mathcal{H}}(Z-A_{0c})\,\mathrm{vec}_{\mathcal{H}}(Z-A_{0c})^{*}}{||Z-A_{0c}||_F^2}\right] \tag{34}$$

^并令 $A_c$ 表示环境样本弗罗贝尼乌斯中位数。

**定理 3。** *(i)* 考虑 $\hat{M}_c = \pi(\hat{A}_c; \mathcal{CP}^{k-1})$，令 $F_0$ 表示 $\mathcal{CP}^{k-1}$ 上的总体分布，并假设 $F_0$ 满足 $\lambda_{01} > \lambda_{02}$。$\hat{M}_c$ 的影响函数为

$IF_{\hat{M}_c;F_0}(Z) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{(\hat{M}_c(Z,\epsilon) - M_{0c})}{\epsilon} = \sum_{1<b\leq k} \frac{1}{\lambda_{01} - \lambda_{0b}} \left(u_{01}^* \overline{IF_{\hat{A}_c;F_0}(Z)} u_{0b}\right)(u_{01}u_{0b}^* + u_{0b}u_{01}^*)$，其中 $Z \in \mathcal{CP}^{k-1}$ 且，记 $\boldsymbol{vec}_{\mathcal{H}}(\cdot)^{-1}$ 为 $\boldsymbol{vec}_{\mathcal{H}}(\cdot)$的逆算子，它作用于维数为 $k^2$的实向量，

$$IF_{\hat{A}_c;F_0}(Z) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{(A_c(Z,\epsilon) - A_{0c})}{\epsilon} = vec_{\mathcal{H}}^{-1}\left(H_c^{-1} \frac{vec_{\mathcal{H}}(Z - A_0)}{||Z - A_0||_F}\right).$$

*(ii)* 定义 $y_c = \Xi_c^* \boldsymbol{vec}(\hat{M}_c - M_0)$，其中 $k^2 \times (k-1)$ 矩阵 $\Xi_c$ 定义为

$$\Xi_c = [\xi_{c;b} = (\bar{u}_{01} \otimes u_{0b} + \bar{u}_{0b} \otimes u_{01})/\sqrt{2} : 1 < b \leq k], \tag{35}$$

其中 $\bar{u}_{0b}$ 是 $u_{0b}$的复共轭。于是，当 $n \to \infty$时，$n^{1/2} y_c$ 依分布收敛于一个 $\tau$维复正态分布 $\mathcal{CN}_\tau(0_\tau, C_c)$，其中 $\tau = k-1$ 且，若 $V_c$ 满秩，则 $C_c$ 是一个满秩厄米协方差矩阵，其典型元素为 $\boldsymbol{Cov}(y_{c;b}, \bar{y}_{c;d}) = 2(\lambda_{01}-\lambda_{0b})^{-1}(\lambda_{01}-\lambda_{0d})^{-1}\xi_{c;b}^\top \boldsymbol{diag}\{D_k G_k^{-1}, \tilde{D}_k/\sqrt{2}\} V_c \boldsymbol{diag}\{G_k^{-1}D_k^\top, \tilde{D}_k^\top\}\xi_{c;d}$，~其中 $D_k$ 同定理 *2* 中，$D_k$ 是用于斜对称矩阵的重复矩阵（*Magnus 1988*，第 *94* 页），$V_c = H_c^{-1} J_c H_c^{-1}$，$y_{c;b} = \xi_{c;b}^\top \boldsymbol{vec}(\hat{M} - M_0)$，且 $\xi_{c;b}$ 定义于式 *(35)* 中。注意，$\mathcal{C}^{k-1}$ 的维数为 $k-1$。此外，$y_c$ 是点 $u_{01}u_{01}^* \in \mathcal{CP}^{k-1}$处切空间中一个点的坐标向量，这些坐标是相对于由 $\Xi_c$的列给出的切空间标准正交基定义的。

# 5 数值结果

## 5.1 平面形状空间上的模拟

平面形状分析已在计算机视觉和医学影像中得到广泛研究，其关注的是对平移、缩放和旋转保持不变的物体构型。

平面构型通常由其轮廓上的 $k \geq 3$ 个标志点表示。这些标志点被编码为 $\mathbb{C}^k$中的一个复向量，其中每个分量对应于一个标志点的笛卡尔坐标。在本节中，我们考虑如下三个构型 $c^{(j)} \in \mathbb{C}^k$，分别对应于 $j = 1$、2、3：

$$
\begin{aligned}
c^{(1)} &= (0.29 - 0.29i, 0.29 + 0.57i, -0.01 + 0.01i, -0.57 - 0.29i)^\top; \\
c^{(2)} &= (0.32 + 0.00i, 0.13 + 0.06i, -0.06 + 0.57i, -0.44 + 0.00i, \\
&\qquad -0.06 - 0.57i, 0.13 - 0.06i)^\top; \\
c^{(3)} &= (-0.17 + 0.36i, -0.03 + 0.41i, 0.10 + 0.33i, 0.13 + 0.17i, \\
&\qquad 0.05 + 0.09i, -0.03 + 0.02i, -0.11 - 0.01i, -0.03 - 0.01i, \\
&\qquad 0.05 - 0.09i, 0.13 - 0.17i, 0.10 - 0.33i, -0.03 - 0.40i, -0.17 - 0.36i)^\top.
\end{aligned}
$$

其轮廓绘制于图1的左侧面板中。

为使原始构型对平移和缩放保持不变，需进一步将其转换为预形状，记为 $z^{(j)}$ for $j = 1$, 2, 3；另见 Dryden & Mardia (2016, p.64)。具体而言，对于 $j = 1$, 2, 3，有 $z^{(j)} = Hc^{(j)}/\|Hc^{(j)}\| \in \mathcal{CS}^{k-2}$，其中 $H$是满足 $HH^\top = I_{k-1}$ 的$(k-1)\times k$ 埃尔米特子矩阵（Dryden & Mardia 2016, p.49），而$\mathcal{CS}^{k-2}$ 表示复单位球面。给定一个作为代表形状的预形状 $z^{(j)}$，相应的形状由集合 $[z^{(j)}] = \{z^{(j)}e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$ $\in\mathcal{CP}^{k-2}$唯一确定，其中 $i$ 表示虚数单位，$\theta$ 是绕原点的逆时针旋转角，$\mathcal{CP}^{k-2}$ 表示复射影空间（Dryden & Mardia 2016, p.82）。下文中，我们将每个构型的代表形状记为 $z_0 \in \mathcal{CS}^{k-2}$。此外，如第2.3节所述，通过 Veronese-Whitney 嵌入来表示形状更为方便。因此，我们将每个构型的总体形状记为 $Z_0 = z_0 z_0^* \in \mathcal{CP}^{k-2}$，其中 $*$ 表示共轭转置。形状分析的主要目标是从可能受到污染的样本中恢复 $Z_0$。

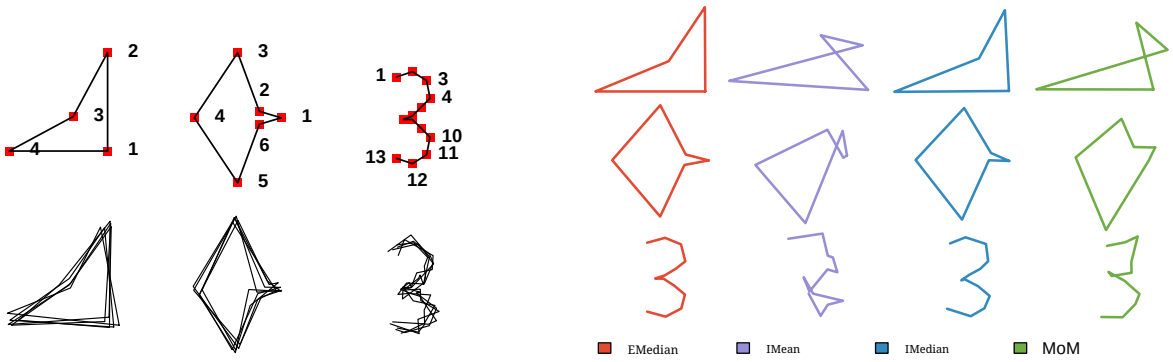



图 1：左：原始构型（上排）以及从复Bingham分布中抽取的五个样本（下排）的示意图。右：存在 90 个离群值时的估计构型，分别由 EMedian（第一列）、IMean（第二列）、IMedian（第三列）和 MoM（最后一列）得到。

对于每个构型，我们生成 $n = 200$ 个独立同分布的数据 $\{x_j\}_{j=1}^{n}$，这些数据来自复Bingham分布，并将这些观测嵌入为矩阵，即对于 $j = 1, \ldots, n$，有$X_j = x_j x_j^*$。$x_j$的概率密度函数正比于 $\exp(x^* \Lambda x)$，且在平面旋转 $e^{i\theta}$下保持不变；另见 Mardia & Jupp (2000, pp.326-334)。这里， $\Lambda$是一个 $(k-1)\times(k-1)$ 厄米矩阵，其特征值控制该分布的集中度。在本研究中，我们将Λ的主特征向量设为 $z_0$，其余特征向量通过格拉姆-施密特正交归一化获得。各情形下 $\Lambda$ 的特征值分别为 $(150, 0, 0)^\top$、$(150, 0, \ldots, 0)^\top$ 和 $(200, 0, \ldots, 0)^\top$，因此样本高度集中于总体形状 $Z_0 = z_0 z_0^*$附近。图1（左下）展示了每种情形下从复Bingham分布中抽取的五个样本构型。

为验证稳健性，我们随机将 $n_1 = 20$、40、90 个观测（污染比例分别为 10%、20% 和 45%）替换为离群值。这些离群值由与 $z_0$ 正交的复单位向量构造，对应于在 $\mathcal{CP}^{k-2}$ 中与 $z_0$ 距离最大的方向。每个离群值按如下方式生成：首先，从以下分布中抽取一个复向量：

标准复正态分布；然后，将其投影到$z_0$处的切空间上，所用投影矩阵为 $I_{k-1} - Z_0$，并将其归一化为单位长度，其中 $Z_0 = z_0 z_0^*$。现在介绍本研究中考察的估计量。首先，我们按照命题1 (iii) 中的介绍，对合成数据应用弗罗贝尼乌斯中位数。具体而言，我们计算样本弗罗贝尼乌斯中位数 $\hat{A}_c = \operatorname{argmin}_{A \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{n} \|X_j - A\|_F$及其在$\mathcal{CP}^{k-2}$上的投影，即 $\hat{M}_c = \pi(\hat{A}_c; \mathcal{CP}^{k-2}) = \hat{u}_1 \hat{u}_1^*$，其中 $\hat{u}_1 \in \mathcal{CS}^{k-2}$ 是一个代表性预形状。为便于说明，我们随后通过旋转 $\hat{u}_1$，使其与总体预形状 $z_0$ (Dryden& Mardia 2016，第175页)的距离最小，从而进行 Procrustes对齐，并得到 $\hat{z}_{\text{EMedian}} = \hat{u}_1 e^{-i \arg(z_0^* \hat{u}_1)}$，其中 arg$(\cdot)$ 是复数的辐角。估计构型（其旋转已与 $z_0$对齐）可由 $H^\top \hat{z}_{\text{EMedian}}$恢复。我们还考虑了内蕴替代方法，包括 Fréchet均值（“IMean”）和 Fréchet 中位数（“IMedian”），其定义分别为

$$\hat{z}_{\text{IMean}} = \operatorname*{argmin}_{z \in \mathcal{CS}^{k-2}} \sum_{j=1}^{n} \arccos^2(|x_j^* z|) \text{ and } \hat{z}_{\text{IMedian}} = \operatorname*{argmin}_{z \in \mathcal{CS}^{k-2}} \sum_{j=1}^{n} \arccos(|x_j^* z|).$$

其中，Fréchet 中位数也称为几何中位数，可提供一种内蕴稳健估计量，并已应用于平面形状分析（Fletcher等人 2008）。作为另一种稳健的内蕴替代方法，我们还考虑了由 Lin等人 （2024提出的均值的中位数（“MoM”）方法。具体而言，我们将数据集随机划分为七个子组，计算每个子组内的Fréchet均值，然后将所得Fréchet均值的Fréchet 中位数作为最终估计值 $\hat{z}_{\text{MoM}}$。

对于所有估计量，我们使用与 $z_0$ 正交的初始值，以考察它们是否收敛到全局最优。整个过程重复进行 500 次蒙特卡洛模拟。对于每次重复，通过角距离 arccos$(|z_0^* \hat{z}|)$测量估计误差。估计误差的汇总统计量见表1 ，估计构型（经过旋转对齐）见图1。

| | 形状 1（$k=4$） | | | 形状 2（$k=6$） | | | 形状 3（$k=13$） | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 离群值数量 | 20 | 40 | 90 | 20 | 40 | 90 | 20 | 40 | 90 |
| EMedian | **0.0084** | **0.0091** | **0.0111** | **0.0122** | **0.0129** | **0.0165** | **0.0181** | **0.0189** | **0.0234** |
| | (0.003) | (0.003) | (0.004) | (0.003) | (0.003) | (0.004) | (0.003) | (0.003) | (0.004) |
| IMean | 0.1286 | 0.2535 | 0.6047 | 0.1058 | 0.2051 | 0.5109 | 0.0846 | 0.1565 | 0.3976 |
| | (0.064) | (0.017) | (0.008) | (0.005) | (0.006) | (0.008) | (0.003) | (0.016) | (0.007) |
| IMedian | 0.0182 | 0.0308 | 0.0911 | 0.0216 | 0.0338 | 0.0894 | 0.0263 | 0.0375 | 0.0862 |
| | (0.109) | (0.070) | (0.041) | (0.116) | (0.057) | (0.004) | (0.051) | (0.003) | (0.005) |
| MoM | 0.0576 | 0.1242 | 0.3699 | 0.0500 | 0.0982 | 0.2693 | 0.0490 | 0.0849 | 0.2074 |
| | (0.022) | (0.037) | (0.097) | (0.014) | (0.024) | (0.061) | (0.008) | (0.013) | (0.044) |

表 1：平面形状数据的估计误差样本中位数（即 $\arccos(|z_0^* \hat{z}|)$），括号内为标准误（500 次重复）。

结果表明，EMedian 的表现始终优于内蕴估计量，随着离群值数量增加，估计误差仅略有上升。尽管内蕴中位数表现出稳健性，但随着受污染样本比例增加，其估计误差显著上升。均值中位数估计量仅在轻度污染下表现良好（例如，20 个离群值），但很快便会退化（例如，40 个离群值），并且在所有污染水平下，其估计误差通常都高于 IMedian。

此外，内蕴中位数的估计误差标准差通常较大。图2 直观地展示了各估计量的估计误差对数的变化情况。显然，IMedian 的若干估计值位于上须之外，这表明它倾向于收敛到局部最小值。

## 5.2 射影Stiefel流形上的模拟

本节针对第2.4节介绍的射影斯蒂费尔流形开展数值研究。令 $X_j = [\pm x_{j1}, \pm x_{j2}, \pm x_{j3}] \in \mathcal{PV}_{3,3}$ 表示 $j = 1, \ldots, n$ 为从标架Watson分布（Arnold 与 Jupp，2013）中生成的独立同分布样本，其总体

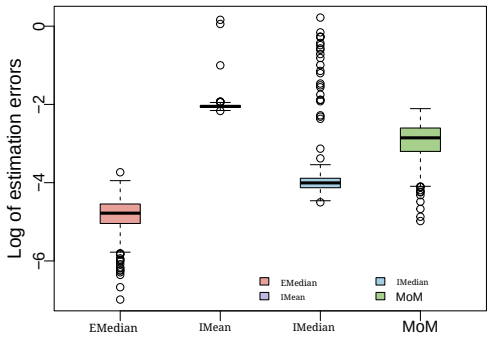



图 2：平面形状数据的估计误差的对数箱线图（形状 1，20 个离群值，500 次重复）。

众数为 $M_0 = [\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3] \in \mathcal{PV}_3$,3。概率密度函数正比于 $\exp\{\sum_{j=1}^{3} \kappa_j (x_j^\top m_j)^2\}$，其中 $\kappa_j$ 表示每个正交轴向标架的集中度。本研究将总体众数设为标准基向量，即 $m_1 = e_1$、$m_2 = e_2$ 和 $m_3 = e_3$。离群值通过沿着从 $m_1$ 到正正交象限的测地线旋转 $M_0$ 生成（另见 Amaral 等（2007）），从而得到离群标架 $\tilde{M} = [\pm\tilde{m}_1, \pm\tilde{m}_2, \pm\tilde{m}_3]$，其中 $\tilde{m}_1 = (1,1,1)^\top/\sqrt{3}$、$\tilde{m}_2 = (-2\sqrt{3}, \sqrt{3}+3, \sqrt{3}-3)^\top/6$ 和 $\tilde{m}_3 = (-2\sqrt{3}, \sqrt{3}-3, \sqrt{3}+3)^\top/6$。为污染样本，我们随机将大小为 $n = 50$ 的样本中的~替换为 $n_1 = 0$ 个观测值（5、15、20），其对应于0%、10%、30%、40% 污染。

此外，我们考虑三种集中度设置。对于 $\kappa = (5,5,5)$，分布是旋转对称的，并适度集中在 $M_0$ 周围；当 $\kappa = (25,5,5)$ 时，它适度集中在 $\pm m_1$ 周围，但在 $\pm m_2$ 和 $\pm m_3$ 周围高度椭圆形／偏心；对于 $\kappa = (50,25,5)$，围绕 $\pm m_1$ 的集中度在三种情形中较高，而其余标架 $\pm m_2$ 和 $\pm m_3$ 则为中度椭圆形／偏心。各标架的概率等高线见补充材料中的图 S1。

现在，我们着手研究存在离群值时对 $M_0$ 的估计。首先，我们考虑

提出的估计量Arnold & Jupp (2013)，其定义为

$$\hat{M}_{\text{mean}} = \underset{[U]\in\mathcal{PV}_{3,3}}{\operatorname{argmax}} \sum_{r=1}^{3} u_r^\top \bar{T}_r u_r \quad \text{and} \quad \bar{T}_r = n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{jr}x_{jr}^\top - I_3/3\right), \tag{36}$$

其中 $[U] = [\pm u_1, \pm u_2, \pm u_3]$。请注意，该估计量对污染不稳健，因此将其作为基准。使用第3.5节中描述的所提方法，可以实现对 $M_0$ 的稳健估计。具体而言，环境空间中的样本估计量定义为

$$\hat{B} = \underset{B=(B_1,B_2,B_3)\in\mathcal{B}_0}{\operatorname{argmin}} n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{3}\|B_r - x_{jr}x_{jr}^\top\|_F^2\right\}^{1/2}.$$

令 $(\hat{q}_{11}, \hat{q}_{21}, \hat{q}_{31})$ 为每个 $B_r$ 对应的主特征向量，并记为 $Q_\epsilon = [\epsilon_1\hat{q}_{11}, \epsilon_2\hat{q}_{21}, \epsilon_3\hat{q}_{31}]$。样本中位数定义为

$$\hat{M}_{\text{median}} = \pi(\hat{Q}_\epsilon; \mathcal{V}_{3,3}) \tag{37}$$

使用投影 $\pi(Q; \mathcal{V}_{3,3})$，其定义见（18）。实现方法见补充材料的 S2 节。

为评估有限样本性能，我们使用角距离来衡量每个轴的估计误差，即 $\arccos(|m_j^\top \hat{m}_j|)$，其中 $m_j$、$\hat{m}_j \in \mathcal{S}^2$ 分别表示 $j = 1,2,3$ 对应的总体标架及其估计值。表 2 汇总了每个轴的平均估计误差（当 $n = 200$ 时的补充结果见补充材料 S3.1 节）。

结果表明，在没有离群值时，两种估计量都能得出准确的估计，其中 $M_{\text{median}}$ 产生的误差略大，但可以忽略不计。此外，分布中的椭圆形结构（情形 2 和情形 3）对估计精度影响很小。如预期，在存在离群值时，$M_{\text{mean}}$ 的估计误差会迅速恶化，而 $M_{\text{median}}$ 的估计误差仍然很小且稳定，即使存在 20 个离群值（40% 的污染）也是如此。这表明我们的方法具有很强的稳健性。

| | 情形1： $\kappa = (5,5,5)$ | | | 情形2： $\kappa = (25,5,5)$ | | | 情形3： $\kappa = (50,25,5)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 估计量 | $\pm m_1$ | $\pm m_2$ | $\pm m_3$ | $\pm m_1$ | $\pm m_2$ | $\pm m_3$ | $\pm m_1$ | $\pm m_2$ | $\pm m_3$ |
| **离群值 $= 0$** | | | | | | | | | |
| $\hat{M}_{\text{mean}}$ | **0.0090** | **0.0090** | **0.0092** | **0.0030** | **0.0065** | **0.0065** | **0.0014** | **0.0022** | **0.0024** |
| | (0.0048) | (0.0046) | (0.0046) | (0.0016) | (0.0040) | (0.0040) | (0.0008) | (0.0013) | (0.0013) |
| $\hat{M}_{\text{中位数}}$ | 0.0097 | 0.0097 | 0.0100 | 0.0034 | 0.0072 | 0.0073 | 0.0016 | 0.0024 | 0.0027 |
| | (0.0052) | (0.0050) | (0.0051) | (0.0018) | (0.0045) | (0.0045) | (0.0009) | (0.0015) | (0.0015) |
| **离群值 $= 5$** | | | | | | | | | |
| $\hat{M}_{\text{mean}}$ | 0.0633 | 0.0451 | 0.0450 | 0.0626 | 0.0448 | 0.0448 | 0.0625 | 0.0443 | 0.0442 |
| | (0.0074) | (0.0073) | (0.0071) | (0.0025) | (0.0025) | (0.0025) | (0.0012) | (0.0010) | (0.0013) |
| $\hat{M}_{\text{中位数}}$ | **0.0119** | **0.0112** | **0.0110** | **0.0046** | **0.0080** | **0.0079** | **0.0020** | **0.0028** | **0.0029** |
| | (0.0061) | (0.0057) | (0.0058) | (0.0023) | (0.0046) | (0.0047) | (0.0010) | (0.0015) | (0.0016) |
| **离群值 $= 15$** | | | | | | | | | |
| $\hat{M}_{\text{mean}}$ | 0.2387 | 0.1684 | 0.1689 | 0.2374 | 0.1677 | 0.1678 | 0.2370 | 0.1674 | 0.1674 |
| | (0.0077) | (0.0072) | (0.0073) | (0.0026) | (0.0024) | (0.0024) | (0.0012) | (0.0010) | (0.0013) |
| $\hat{M}_{\text{中位数}}$ | **0.0314** | **0.0229** | **0.0233** | **0.0145** | **0.0129** | **0.0130** | **0.0059** | **0.0047** | **0.0051** |
| | (0.0096) | (0.0087) | (0.0088) | (0.0033) | (0.0044) | (0.0043) | (0.0015) | (0.0015) | (0.0018) |
| **离群值 $= 20$** | | | | | | | | | |
| $\hat{M}_{\text{mean}}$ | 0.3535 | 0.2494 | 0.2493 | 0.3519 | 0.2483 | 0.2482 | 0.3514 | 0.2479 | 0.2479 |
| | (0.0067) | (0.0063) | (0.0062) | (0.0022) | (0.0021) | (0.0021) | (0.0011) | (0.0008) | (0.0011) |
| $\hat{M}_{\text{中位数}}$ | **0.0575** | **0.0412** | **0.0412** | **0.0287** | **0.0221** | **0.0221** | **0.0110** | **0.0081** | **0.0085** |
| | (0.0108) | (0.0099) | (0.0097) | (0.0042) | (0.0042) | (0.0041) | (0.0017) | (0.0015) | (0.0018) |

表2：每个轴的平均估计误差（1000 次重复，$n = 50$）。括号内为标准差。

为直观展示离群值的影响，我们给出了情形1下 $M_{\text{mean}}$ 和 $M_{\text{median}}$ 的估计值，其中 $\kappa = (5, 5, 5)$ 和 5 个离群值的结果见图 3。此外，还附上了枢轴自助置信区域。有关枢轴自助法和置信椭圆构造的详细信息，请参阅补充材料的 S2 节。

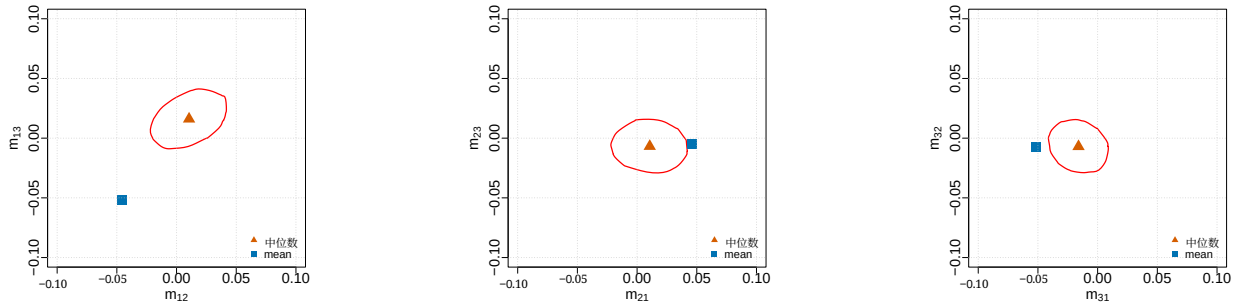



图3：情形1下 $M_{\text{mean}}$ 和 $M_{\text{median}}$ 的估计值，包含 $\kappa = (5, 5, 5)$、$n = 50$ 和 5 个离群值；红色圆圈为 $M_{\text{median}}$ 的 95% 枢轴自助置信椭圆。总体轴向标架位于原点。

图3 显示，在集中度较高时，即使离群值所占比例很小（本例中为 10%）也会明显偏离总体标架 $M_{\text{mean}}$。相比之下，$M_{\text{median}}$ 仍接近原点，其置信椭圆包含总体标架。这一观察突显了我们方法的稳健性。

## 5.3 地震矩张量数据

地震矩张量是用于地震断层事件的 $3 \times 3$ 对称矩阵，通常被约束为零迹。它编码了地震波所携带的地震信息，包括断层面的取向、地震震级和辐射模式。为了帮助描述断层面的取向和滑动方向，地震学家经常考察矩张量的特征向量。按特征值降序排列，相应的特征向量定义了一个正交轴向三元组 $(\pm t, \pm b, \pm p) \in \mathcal{PV}_{3,3}$，其中 $\pm t$ 对应于 T 轴（张应力轴），

$\pm b$ 对应于 B 轴（零轴），以及 $\pm p$ 对应于 P 轴（压缩应力轴）。全面的地球物理引言可见于Stein & Wysession (2009)，而Arnold & Jupp (2013)对这类数据提供了详细的统计分析。

在本节中，我们将所提出的方法应用于估计 2006 至 2016 年巴布亚新几内亚和所罗门群岛地震事件的正交轴向标架。我们分析了Hejrani 等人(2017)表 1 中报告的矩张量，并按照他们的划分方式将研究区域细分为八个区域：区域 2 至 4 覆盖俾斯麦海地震线性带，区域 1 则覆盖新几内亚海沟；区域 5 至 8 覆盖巴布亚新几内亚和所罗门群岛俯冲带。补充材料中的图 S3 展示了这些地震的分布图。

我们重点研究区域 2 的地震事件，图4 展示了矩张量的轴和前两个特征值。为确保散点图中的每条轴只出现一次，我们将这些轴移至同一半球。图中显示，这些轴聚集紧密，其中有四个用红圈标出的疑似离群点。

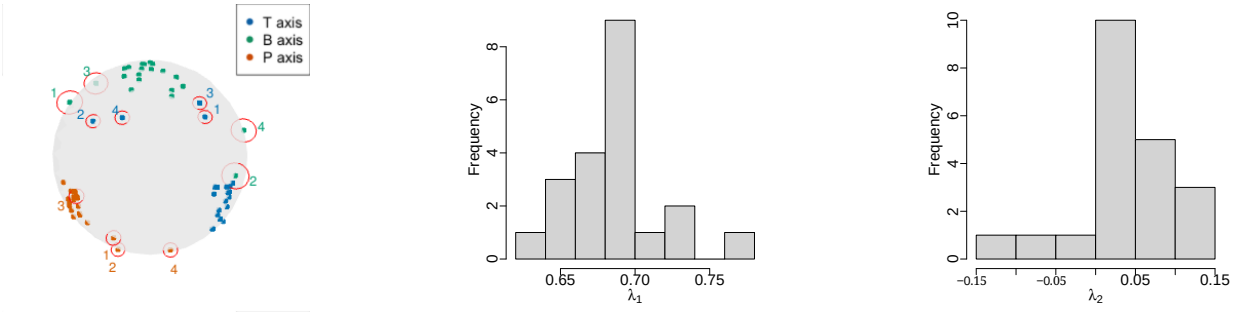



图 4：区域 2 中矩张量的正交轴向标架（21 个事件）。左：矩张量的轴（正负号不计，疑似离群点以红圈标出，并用数字标注）。中：矩张量的最大特征值 $\lambda_1$。右：矩张量的第二大特征值 $\lambda_2$。

$\hat{}$为估计轴向参考系，我们同时使用样本均值 $M_{\text{mean}}$ 和空间中位数$\tilde{}M_{\text{median}}$，分别定义于（36）和（37）中。表3 的第一行和第三行给出了

估计轴，四舍五入至小数点后三位。两种方法对所有轴的估计结果差异都微乎其微，这一点也从图5中得到了直观验证。这可能是由于疑似离群点近似呈旋转对称，且数据集的集中度适中，两者都减弱了离群值的影响。具体而言，我们考察了两个经修改的数据集：一个是移除两个疑似离群点（图5中标记为1和3）后得到的，以打破近似对称性（估计量以后缀“子”标记）；另一个是将标记为2和4的疑似离群点各复制两次，同时移除离群值1和3后得到的，以加剧污染并避免近似对称性（估计量以后缀“污染”标记）。

各估计量的自助标准误计算如下。令 $\hat{m}_j$ 和$\hat{m}_j^{(b)}$ 分别表示第 $j$个轴及其第 $b$个自助估计值。每个轴的估计误差以角距离衡量，即对于$(|\hat{m}_j^\top \hat{m}_j^{(b)}|)$， $b = 1$， …，1000，取这些误差的样本标准差作为相应的标准误。此外，我们按照补充材料 S2 节中的步骤，为空间中位数构建枢轴自助置信区域。支持使用自助置信区域的更多数值结果见 S3.4节。这些椭圆置信区域绘于图5。

当离群值的近似对称性遭到破坏时，与样本中位数相比，样本均值更明显地向标记为 2 和 4 的观测值偏移（见图_中的样本均值_子组和样本中位数子组5）。加入更多离群值（标记为 1 和 3）后，这种偏移进一步加剧，样本均值被拉向离群值，并迅速逼近置信区域边界。相比之下，图5中的空间中位数标架在偏移方面保持稳定，表明其具有抵御离群值的稳健性。

有趣的是，表中样本中位数的自助标准误3 接近

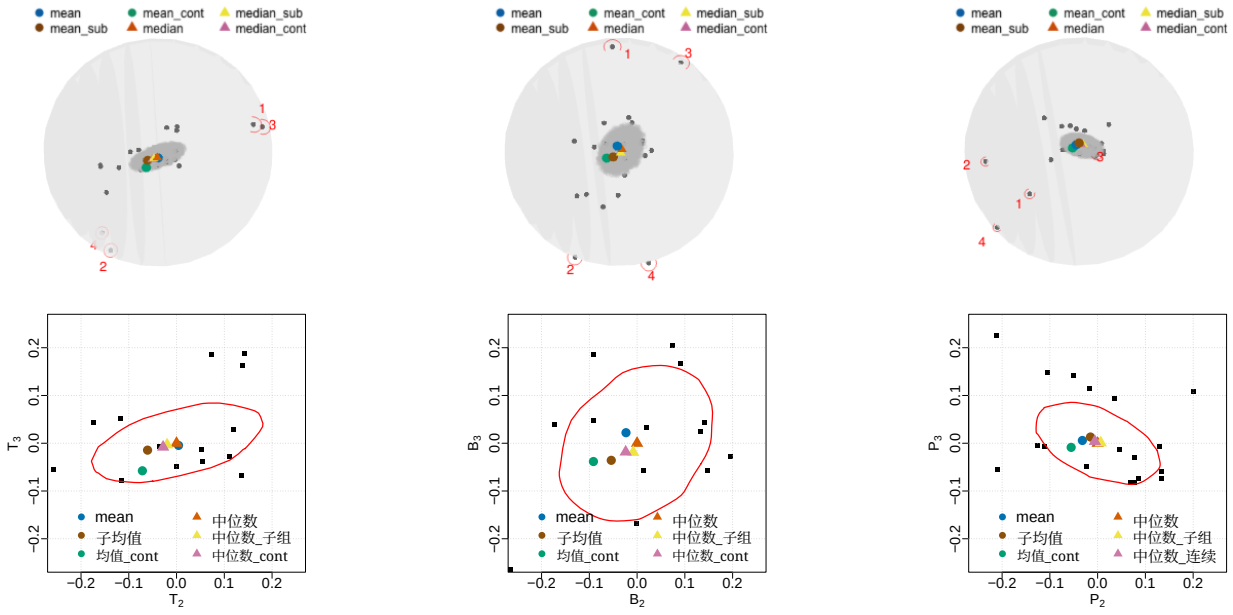
| 估计量 | T 轴 | B 轴 | P 轴 |
|---|---|---|---|
| mean | $(0.382, -0.472, -0.794)^\top$ | $(0.723, 0.688, -0.061)^\top$ | $(0.575, -0.551, 0.604)^\top$ |
| 均值标准误 | 0.0477 | 0.0479 | 0.0236 |
| 中位数 | $(0.384, -0.477, -0.791)^\top$ | $(0.705, 0.704, -0.082)^\top$ | $(0.596, -0.526, 0.607)^\top$ |
| 中位数标准误 | 0.0371 | 0.0380 | 0.0235 |
| 均值 子组_ | $(0.343, -0.523, -0.781)^\top$ | $(0.739, 0.663, -0.120)^\top$ | $(0.580, -0.536, 0.614)^\top$ |
| 均值标准误 _sub | 0.0340 | 0.0341 | 0.0224 |
| 中位数 子组_ | $(0.372, -0.492, -0.787)^\top$ | $(0.709, 0.698, -0.101)^\top$ | $(0.599, -0.520, 0.609)^\top$ |
| 中位数标准误 _sub | 0.0360 | 0.0366 | 0.0235 |
| 均值 cont_ | $(0.303, -0.519, -0.799)^\top$ | $(0.763, 0.635, -0.123)^\top$ | $(0.571, -0.573, 0.588)^\top$ |
| 均值标准误 _cont | 0.1220 | 0.1073 | 0.0564 |
| 中位数污染_ | $(0.364, -0.498, -0.787)^\top$ | $(0.720, 0.686, -0.101)^\top$ | $(0.591, -0.530, 0.609)^\top$ |
| 中位数标准误 _cont | 0.1195 | 0.1019 | 0.0619 |

表3：区域 2 中矩张量的估计 T、B 和 P 轴（正负号不定），四舍五入至 3位小数。

样本均值的标准误更大，尤其是污染数据集。可能是由于样本量较小（23次地震），且离群值比例较高（约26%）。因此，在某些自助法重复抽样中，重抽样数据由离群值主导，从而夸大了估计的标准误。（自助法估计示例如图6 所示。）所有估计值均位于空间中位数的置信区域内，这些置信区域似乎较为保守，这可能是样本量较小且存在离群值所致。在S3.4节中，我们展示了在预先指定集中度和污染水平的情况下，样本量如何影响置信区域，这支持了我们的论断。

# 6 结论

我们提出一种稳健且计算便捷的方法——投影弗罗贝尼乌斯中位数（PFM），用于矩阵流形上的位置估计。我们重点研究 4 种矩阵空间：

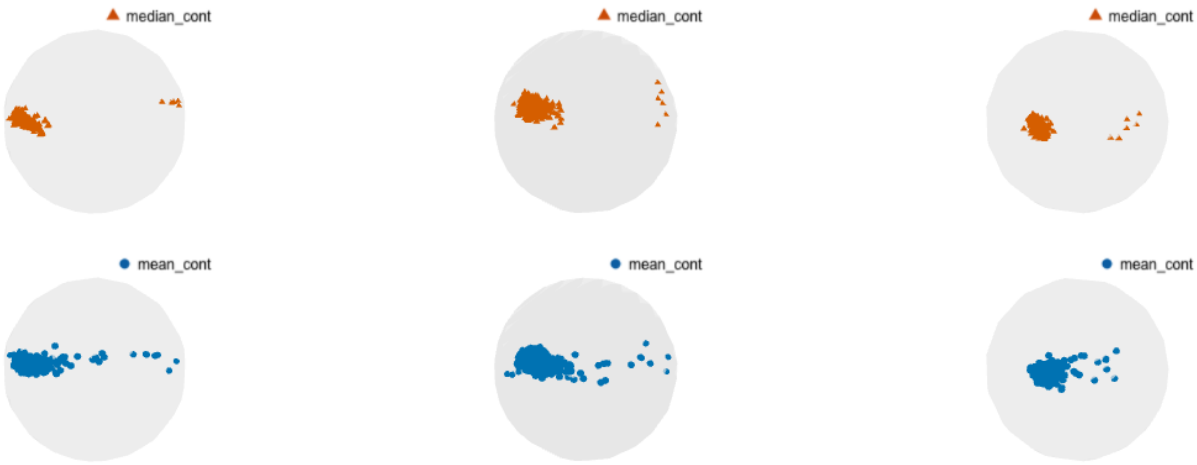



(a) T 轴　　(b) B 轴　　(c) P 轴

图 5：区域 2 中矩张量的 T、B 和 P 轴的散点图（上排）及放大的航拍视图（下排）。区域 2 中的离群值以红色圆圈标出。阴影区域（上排）和红色圆圈（下排）表示空间中位数的 95% 置信区域。

斯蒂费尔流形和格拉斯曼流形、肯德尔形状空间以及射影Stiefel流形。此处不详述其他可使用 PFM 的矩阵空间，仅作提及。

未来研究有几个特别值得探索的方向。首先，在处理紧致参数空间时，估计量关于其离散程度的影响函数通常是衡量稳健性更合适的指标，由此引出*SB* 稳健性 (Ko 和 Guttorp，1988)。要将这一概念妥善地推广到矩阵流形上，还需要仔细研究。其次，我们对地震数据的应用表明，不同区域的正交轴向标架往往聚集在不同的轴附近，这促使我们研究射影斯蒂费尔流形上的 $k$样本假设检验。虽然关于无向方向的相关问题




(a) T 轴　　(b) B 轴　　(c) P 轴

图 6：受污染矩张量的 T、B 和 P 轴的自助法估计。

已由Amaral 等人 (2007研究过，但将其推广到射影 Stiefel 流形，并考虑可能存在离群值的情形，仍鲜有探索。

## D披露和数据可用性声明

作者声明不存在需要披露的利益冲突。去标识化数据已发布在以下网址：https://github.com/HourenH/RLocMM。

## 致谢

作者感谢澳大利亚研究理事会通过资助项目DP220102232支持本研究。

## 参考文献

Amaral, G. J. A.、Dryden, I. L. 和 Wood, A. T. A.（2007），《方向统计学和形状分析中 k 样本问题的枢轴自助法》，《美国……期刊》

统计协会**102**（478），695–707。

Arnold, R. & Jupp, P. (2013), ‘正交轴向标架的统计学’, *Biometrika***100**(3), 571–586.

Arnold, R., Jupp, P. E. & Schaeben, H. (2018), ‘模糊旋转的统计学’, 《多元分析杂志》**165**, 73–85.

Basu, S. & Subhash, B. (2017), ‘斯蒂费尔流形的某些商空间的拓扑’,加拿大数学通报**60**(2),235–245.

Candes, E. J. & Plan, Y. (2010), ‘含噪矩阵补全’, *IEEE* 会议录**98**(6), 925–936.

Chan, Y. &He, X. (1993), ‘von Mises–Fisher 分布的方向中位数型估计量’, *Biometrika* **80**(4), 869–875.

Chen, Y., Chi, Y., Fan, J., Ma, C. & Yan, Y. (2020), ‘含噪矩阵补全：通过非凸优化理解凸松弛的统计保证’, *SIAM* 优化杂志 **30**(4), 3098–3121.

Dryden, I. L., Koloydenko, A. & Zhou, D. (2009),《协方差矩阵的非欧几里得统计及其在弥散张量成像中的应用》，《应用统计年鉴》，第1102–1123页。

Dryden, I. L., Kume, A., Le, H. & Wood, A. T. A. (2008),《一种用于形状分析的多维缩放方法》，*Biometrika* **95**(4), 779–798。

Dryden, I. L. & Mardia, K. V. (2016),《统计形状分析：*R*语言应用》，约翰·威立父子出版公司。

Dryden, I. L., Pennec, X. & Peyrat, J.-M. (2010),《协方差矩阵的幂欧氏度量及其在弥散张量成像中的应用》，*arXiv* 预印本 *arXiv:1009.3045*。

Ducharme, G. R. & Milasevic, P. (1987年), 《空间中位数与方向数据》, *Biometrika*74(1), 212–215。

Fletcher, P. T., Venkatasubramanian, S. & Joshi, S. (2008), 通过几何中位数在黎曼流形上进行稳健统计, 载于'2008 IEEE计算机视觉与模式识别会议', IEEE, 第 1–8 页。

Gitler, S. (1968), '射影 Stiefel 流形 -ii. 应用', *Topology* 7(1), 47–53. Gitler, S. & Handel, D. (1968), '射影Stiefel流形 -i', *Topology* 7(1), 39–46.

Goodall, C. R. & Mardia, K. V. (1999), '射影形状分析', 计算与图形统计学杂志 8(2),143–168.

Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P.J. & Stahel, W. A. (1986 年), 稳健统计: 基于影响函数的方法, 约翰·威立父子出版公司。

Hejrani, B., Tkalčić, H. & Fichtner, A. (2017),《采用三维大陆尺度地球模型的质心矩张量目录：在巴布亚新几内亚和所罗门群岛地震中的应用》, 《地球物理研究杂志：固体地球》122(7), 5517–5543.

Kendall, D.G., Barden, D., Carne, T.K. &Le, H.(1999), 形状与形状理论, 约翰·威立父子出版公司。

Kent, J. T. (1994),《复Bingham分布与形状分析》, 英国皇家统计学会会刊*B*辑：统计方法学56(2), 285–299.

Ko, D. & Chang, T. (1993),《球面上的稳健M估计量》, 《多元分析杂志》45(1), 104–136.

Ko, D. & Guttorp, P. (1988),《方向数据估计量的稳健性》, 《统计年鉴》第609–618页。

Kume, A., Preston, S. P. & Wood, A. T. A. (2013), '关于

球面的乘积和斯蒂费尔流形上 Fisher–Bingham分布的归一化常数的鞍点近似’, *Biometrika* **100(4)**, 971–984。

Lin, L., Lazar, D., Saparbayeva, B. & Dunson, D.（2024），《流形上的稳健优化与推断》，《统计学报》**34**，1299–1323。

Lui, Y. M.（2012），《计算机视觉中的矩阵流形进展》，《图像与视觉计算》**30(6-7)**, 380–388。

Magnus, J. R.（1988），线性结构，Griffin Charles Griffin and CompanyLimited。
Mardia, K. V. & Jupp, P.E.（2000），方向统计学，约翰·威立父子出版公司。
Mardia, K. V., Kent, J. T. & Bibby, J. M.（1979），多元分析，学术出版社。

Minsker, S.（2015），《巴拿赫空间中的几何中位数与稳健估计》，《伯努利》**21(4)**, 2308–2335。

Pennec, X. (2006), ‘黎曼流形上的内蕴统计：几何测量的基本工具’, 《数学成像与视觉期刊》**25**, 127–154.

Severn, K. E., Dryden, I. L. & Preston, S. P. (2022), ‘网络样本的流形值数据分析及其在语料库语言学中的应用’, 《应用统计年鉴》**16(1)**,368–390.

Stein, S. & Wysession,M.(2009), 地震学、地震与地球结构导论，约翰·威立父子出版公司。

Turaga, P., Veeraraghavan, A. & Chellappa, R. (2008), 斯蒂费尔流形和格拉斯曼流形上的统计分析及其在计算机视觉中的应用，载于‘2008 年 IEEE 计算机视觉与模式识别会议’，IEEE，第 1–8 页。

Wang, B. & Fan, J.（2025），‘重尾噪声下的稳健矩阵补全’，《美国统计学会会刊》**120(550)**，922–934。

Zhou, Y. & Müller, H.-G.（2022），‘基于图拉普拉斯矩阵的网络回归’，机器学习研究杂志**23**(320)，1–41。