arXiv:2603.05808v1 [math.AG] 6 Mar 2026

对称矩阵空间与各向同性格拉斯曼流形的带标记点的 Kontsevich 空间的紧化

HANLONG FANG、ALEX MASSARENTI 和 XIAN WU

摘要。我们研究由亏格 0 稳定映射到拉格朗日格拉斯曼流形 LG$(n, 2n)$ 所产生的两个密切相关的簇族。首先，我们构造对称矩阵空间的 Kausz 型紧化 $\mathcal{TL}_n$，并明确描述其双有理几何。其次，我们将 $\mathcal{TL}_n$ 实现为某个 Kontsevich 空间中的一般求值纤维，继而利用这一模空间诠释，推导出关于带标记点的圆锥曲线空间 $M_{0,1}$(LG$(n, 2n)$,2) 的双有理几何的结论。此外，我们还介绍了与正交格拉斯曼流形相关的类似紧化。

目录

引言 1
1. 预备知识 4 2. 对称矩阵空间的 Kausz 型紧化 6 3. $\mathcal{TL}_n$ 作为球面簇的几何 14 4. 拉格朗日格拉斯曼流形中的稳定映射 23 5. LG$(n, 2n)$ 中带标记点圆锥曲线模空间的双有理几何 26 6. 与正交格拉斯曼流形相关的 Kausz 型紧化 33 参考文献 35

引言

到齐性簇的稳定映射 Kontsevich 模空间是现代代数几何中的基本对象：它们编码格罗莫夫–维滕理论，同时也为极小模型纲领和高维簇的双有理分类提供了丰富的检验平台。近年来，人们对以齐性簇为目标空间的有理曲线 Kontsevich 空间的上同调性质产生了浓厚兴趣。Pandharipande [Pan97] 计算了模空间 $M_{0,m}(\mathbb{P}^n, d)$ 的典范类。该模空间参数化带有 m 个标记点的属零、次数为 d 的稳定映射，并确定了其皮卡群[Pan99]。Getzler 和 Pandharipande [GP06] 建立了一种算法，用于计算其 Betti数。此外，Oprea [Opr06]证明，对于任意 A 型旗簇，$M_{0,m}(X, \beta)$ 的有理上同调群均由重言类生成。Mustaţă–Mustaţă [MM07, MM08, MM10] 描述了 $M_{0,m}(\mathbb{P}^n, d)$ 的有理 Chow 环。

Coskun 和 Starr [CS06] 对格拉斯曼流形中有理曲线的无标记 Kontsevich 模空间上的除子类开展了系统研究。Coskun、Harris 和 Starr [CHS08, CHS09] 通过显式收缩与翻转，描述了若干低次数 Kontsevich 空间的除子锥。Chen [Che08] 对M_0,0$(\mathbb{P}^3, 3)$ 进行了森理论分析。Chen 和 Coskun [CC10] 完整描述了格拉斯曼流形中圆锥曲线与三次曲线空间的双有理几何。他们的描述被 Chung 和 Moon [CM17], 采纳并进一步发展，并由 Lozano Huerta [Loz15]与完全二次曲面理论联系起来。在此处相关的各向同性情形中，LG$(n, 2n)$ 中的无标记圆锥曲线及其除子理论在[CM22]中得到了分析。

尽管标记点在格罗莫夫–维滕理论中发挥着核心作用，但提供带标记点的 Kontsevich 空间的显式且统一的双有理描述、从而能够系统推导其代数几何与复几何不变量（如法诺阈值、法诺指标）的研究却相对较少，

日期：2026年3月9日。2020 数学主题分类。 主要 14M27, 14E30；次要 14J45, 14N05, 14E07, 14M27。关键词和短语。 奇妙紧化；Mori 梦空间；Cox 环；球面簇；稳定映射。

以及自同构群。与无标记点情形的一个显著区别在于，无标记点的 Kontsevich 空间通常允许显式双有理变换到各种其他紧化，包括由几何不变量理论商、希尔伯特概形、肖氏簇或特定球面簇（如 De Concini–Procesi 奇妙紧化） [KM10、CC10、CC11、Loz15、CM17、CM22、CCM23]。这些紧化是研究除子理论的有力工具。相比之下，带标记点情形则不那么明朗；例如，$M_{0,\ 1}$(LG(2, 4), 2) 在自然群作用下并非球面簇。

奇妙紧化理论是研究齐性簇的基石，并在代数几何、表示论和代数统计学中有着各种应用 [Fal97，Spr02，Lus04，DKKS21，MMM$^+$24]。然而，对于自同构群具有非平凡中心的齐性空间，这一框架并不适用。发展一个更一般的框架仍是一个引人关注的开放问题，而 Kausz 已迈出了重要一步 [Kau00]，，他为一般线性群构造了一种新颖的紧化。最近， [FW25] 将 Kausz 紧化实现为格拉斯曼流形的爆破G（$n, 2n$），并将其诠释为格拉斯曼流形 $\mathbb{C}^*$ 希尔伯特商的通用族。Thaddeus[Tha99]证明了，格拉斯曼流形、拉格朗日格拉斯曼流形和正交格拉斯曼流形的 $\mathbb{C}^*$ 希尔伯特商分别同构于完全共线空间、完全二次曲面空间和完全反对称形式空间。这表明各向同性情形下或许也存在 Kausz型紧化；这项工作已在 [FW25]中针对格拉斯曼流形全面完成。

本文研究以拉格朗日格拉斯曼流形 $\mathrm{LG}(n, 2n)$为目标空间的带标记点的 Kontsevich 空间的代数几何性质和复几何性质。我们在辛几何情形下构造一种类似 Kausz 型紧化，记作 $\mathcal{TL}_n$，并将其实现为 $\mathrm{LG}(n, 2n)$的爆破。随后，我们在一个适当的带标记点的 Kontsevich 空间 $\mathcal{TL}_n$ 中，将 $M_{0\text{诠释为一般求值纤维}k}(\mathrm{LG}(n, 2n), d)$。其关键结构特征是， $\mathcal{TL}_n$ 在 Sp_{2n}的作用下是一个环面型球面簇，因此属于一个成熟的理论框架，在该框架中，许多双有理不变量都可用组合方式描述 Bri98、Bri06、Bri07]。在我们的情形中，这一结构可以完全显式地呈现。最后，我们将其具体应用于 $\mathrm{LG}(n, 2n)$中带标记点圆锥曲线的除子理论。

更确切地说，全文中我们都在复数域上工作。下述定理给出了 $\mathcal{TL}_n$ 的双有理几何的一种统一且可计算的描述，它综合了定理 2.13、3.6、3.18、3.23、3.31、命题 2.24、3.14、3.34，以及推论 3.5：

定理 A. 固定 $n \geq 2$。令 $\mathcal{TL}_n$ 为 $\mathrm{LG}(n, 2n)$ 的迭代爆破，它由一个拉格朗日子空间横截对 $p^{\pm} \in \mathrm{LG}(n, 2n)$ 开始，按指定顺序爆破 p^+ 和 p^-处密切轨迹的严格变换而构造。令 R_n: $\mathcal{TL}_n \longrightarrow \mathrm{LG}(n, 2n)$ 为爆破态射，并令 $D_i^{\pm}$ $(0 \leq i \leq n-2)$表示在 $p^{\pm}$上方连续爆破所产生的例外除子。记 $H := (\mathrm{R}_n)^* \mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}(1)$。则有如下结论。

(1) $\mathcal{TL}_n$ 是一个簇，在辛群 Sp_{2n} 中，关于 (p^+, p^-) 的稳定子的自然作用下，它是光滑射影扇型球面簇。特别地， $\mathcal{TL}_n$ 是一个莫里梦空间。*(2)* 存在一个到完全二次曲面空间 CQ_n 的等变平坦态射：

$$\mathrm{P}_n \colon \mathcal{TL}_n \longrightarrow \mathsf{CQ}_n. \tag{0.1}$$

此外，P_n 实现了 $\mathrm{LG}(n, 2n)$ 的希尔伯特商上的万有族，该族关于标准的$\mathbb{C}^*$–作用按 [BBS83，Kap93]的意义定义。

(3) $\mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_n)$ 是自由的，其标准 $\mathbb{Z}$–基为

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_n) \ \cong \ \mathbb{Z}\cdot H \ \oplus \ \bigoplus_{i=0}^{n-2} \mathbb{Z}\cdot D_i^+ \ \oplus \ \bigoplus_{i=0}^{n-2} \mathbb{Z}\cdot D_i^-.$$

(4) 有效锥是有理多面锥

$$\mathrm{Eff}(\mathcal{TL}_n) = \big\langle D_0^+, \ldots, D_{n-2}^+, D_{n-1}^+, D_0^-, \ldots, D_{n-2}^-, D_{n-1}^- \big\rangle,$$

其中 $D_{n-1}^{\pm}$ 是除例外除子 $D_i^{\pm}$ $(0 \leq i \leq n-2)$以外的另外两个边界除子，其数值类为

$$D_{n-1}^+ \ \equiv \ H - \sum_{i=0}^{n-2} (n-i)\, D_i^+, \qquad D_{n-1}^- \ \equiv \ H - \sum_{i=0}^{n-2} (n-i)\, D_i^-.$$

(5) 对于满足 $0 \le p, q \le n-1$ 和 $p+q \le n$的整数 p, q，令

$$N_{p,q} := H - \sum_{i=0}^{p-1} (p-i)\, D_i^+ - \sum_{i=0}^{q-1} (q-i)\, D_i^- \in \mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_n), \tag{0.2}$$

其中，空和约定为0。于是，$\mathrm{Nef}(\mathcal{TL}_n)$ 是一个有理多面锥，其极端射线为$\mathbb{R}_{\ge 0} N_{p,\,q}$:

$$\mathrm{Nef}(\mathcal{TL}_n) = \left\langle N_{p,q} \,\middle|\, 0 \le p, q \le n-1,\ p+q \le n \right\rangle.$$

Cox$\mathrm{Cox}(\mathcal{TL}_n)$ 由边界除子 $D_i^{\pm}$ *(*$0 \le i \le n-1$*)*的典范截面以及对应于颜色的Sp_{2n}–截面模生成。

(6) 对任意 $n \ge 2$，簇 $\mathcal{TL}_n$ 都是弱 *Fano*；当且仅当 $n = 2$时，它是 *Fano*。此外，对任意$n \ge 2$，切丛的高阶上同调群均消失:

$$H^k\left(\mathcal{TL}_n, T_{\mathcal{TL}_n}\right) = 0, \ \ \forall\, k > 0.$$

特别地， $\mathcal{TL}_n$ 是局部刚性的，即它不存在非平凡的局部变形 .

(7) 伪自同构群由下式给出

$$\mathrm{PsAut}(\mathcal{TL}_n) = \mathrm{Aut}(\mathcal{TL}_n) \cong \ (\mathrm{GL}_n / \{\pm I\}) \rtimes S_2,$$

其中 S_2 是作用在2 个元素上的对称群。

此外，在命题 3.9 和 3.11 中，我们确定了莫里锥 NE($\mathcal{TL}_n$) 和移动曲线锥 $\mathrm{Mov}_1(\mathcal{TL}_n)$ 的显式生成元。此外，在命题 3.36 中，我们给出了一种算法，用于计算可移动除子锥 $\mathrm{Mov}(\mathcal{TL}_n)$ 的极端生成元。我们将这些构造实现为一组 Maple 脚本：输入 n 后，代码会返回 Eff($\mathcal{TL}_n$)、Nef($\mathcal{TL}_n$)、Mov($\mathcal{TL}_n$)、NE($\mathcal{TL}_n$) 和 Mov_1($\mathcal{TL}_n$) 的生成元。实现细节见注记 3.41。关于$n = 2$ 和 $n = 3$ 的例子汇集于例 3.37 和 3.38。

我们对带标记点的 Kontsevich 空间的研究，首先将 $\mathcal{TL}_n$ 识别为 Kontsevich 空间中的一般求值纤维。回顾一下，Michałek、Monin 和 Wiśniewski [MMW21, 推论 3.11] 将完全二次曲面空间实现为 Kontsevich 空间 M_0,0(LG($n, 2n$), n) 的 $\mathbb{C}^*$–不动点轨迹的连通分支；这与 Thaddeus [Tha99] 的构造相呼应。利用定理 A(2) 以及引理 2.23 中确立的其纤维的几何性质，我们将 M_0,0(LG($n, 2n$), n) 中的这类子簇提升至 $M_{0,k}$(LG($n, 2n$), n)，并满足$k \le 3$。定理 4.7、4.12、命题 4.14 和注记 4.16 对这一识别作了如下总结:

定理 B。 考虑前两个标记点处的求值态射

$$\widetilde{\mathrm{ev}} := \ \mathrm{ev}_1 \times \mathrm{ev}_2 \colon \overline{M}_{0,3}(\mathrm{LG}(n, 2n), n) \longrightarrow \mathrm{LG}(n, 2n) \times \mathrm{LG}(n, 2n).$$

对于一般的一对(p, q) *2* $\mathrm{LG}(n, 2n) \times \mathrm{LG}(n, 2n)$， $\widetilde{\ }$ev 在(p, q) 上的纤维同构于 $\mathcal{TL}_n$。此外，$\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n, 2n), n)$ 包含一个开稠密子集，该子集由同构于 $\mathcal{TL}_n$ 的子簇覆盖。

定理B 提示我们可以利用 $\mathcal{TL}_d$ 的特征来探究$\overline{M}_{0,1}$(LG($d, 2d$), d)的双有理几何。这种方法通过拉格朗日格拉斯曼流形的嵌入，也适用于$\overline{M}_{0,1}$(LG($n, 2n$), d)，其中$n \ge d$。为阐明这一原理，我们研究$\overline{M}_{0,1}$(LG($n, 2n$), 2)的双有理几何；它是LG($n, 2n$)中带标记点的圆锥曲线的模空间。

我们用 $H_1 := \mathrm{ev}_1^* H$ 表示标记点处求值态射对 Plücker 超平面类的拉回，并用 $\Delta_{1|1}$ 表示参数化可约圆锥曲线的边界除子。不平衡除子 D_{unb} 定义为以下轨迹的闭包：当 $n = 2$ 时，圆锥曲线是直线的双覆盖；对于 $n \ge 3$，它是关联的平凡秩 $(n-2)$ 子丛与一个固定的 $(n+1)$ 维子空间相交的圆锥曲线轨迹的闭包。在无标记点空间 $\overline{M}_{0,\ 0}$(LG($n, 2n$), 2) 上，有两个自然的几何除子类起着核心作用：类 H_{σ_2} 由与一般余维 2 舒伯特循环相交的条件定义，而类 T 由如下相切条件定义：像圆锥曲线与一般 Plücker 超平面截面相切。我们通过遗忘态射的拉回，将 H_{σ_2} 和 T 视为$\overline{M}_{0,\ 1}$(LG($n, 2n$), 2) 上的类。

利用 $\mathcal{TL}_2$ 的几何性质，结合无标记点空间的计算，我们得到了 $\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n, 2n), 2)$上除子锥的完整描述。以下结果汇总了定理 5.12、5.13、命题 5.14以及推论 5.15、5.16。

定理 C。设 $n \geq 2$。$M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 的有效锥和数值有效锥由下式给出

$$\text{有效锥}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)) = \langle H_1,\, \Delta_{1|1},\, D_{\mathrm{unb}} \rangle \quad \text{and} \quad \mathrm{Nef}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)) = \langle H_1,\, H_{\sigma_2},\, T \rangle.$$

$M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 的反典范除子由下式给出

$$-K_{\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)} = \begin{cases} H_1 + \frac{5}{2}H_{\sigma_2} + \frac{3}{4}\Delta_{1|1} & \equiv \quad H_1 + H_{\sigma_2} + \frac{3}{2}T & \text{if } n = 2 \\ H_1 + \frac{n+2}{2}H_{\sigma_2} + \frac{6-n}{4}\Delta_{1|1} & \equiv \quad H_1 + (n-2)H_{\sigma_2} + \frac{6-n}{2}T & \text{if } n \geq 3 \end{cases}.$$

此外，$M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 对所有 $n \geq 2$ 都是莫里梦空间。$M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 是 *Fano* 簇当且仅当 $2 \leq n \leq 5$，此时法诺指标为 1；它是弱 *Fano* 当且仅当 $2 \leq n \leq 6$。自同构群为

$$\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)) \cong \mathrm{PSp}_{2n},\ \forall\, n \geq 2.$$

定理 C，据我们所知，给出了以较高秩齐性簇为目标空间的一族带标记点的 Kontsevich 空间之双有理锥的少数统一描述之一。我们认为，更广的带标记点的 Kontsevich 空间类，或许可以借助其他类型中作为一般求值纤维出现的类似紧化来加以研究。作为朝这一方向迈出的一步，我们在最后一节将 Kausz 型紧化构造推广到正交格拉斯曼流形。特别地，我们得到如下结果（定理 6.7、6.8、6.9、6.10）：

推论 D. 中的三个希尔伯特商 [Tha99] 均具有光滑的通用族。这些通用族是弱 *Fano* 簇，且其切丛的高阶上同调消失。特别地，它们都具有局部刚性。

本文结构。 在第 1 节中，我们固定记号并回顾基本结果。在第 2 节和第 3 节中，我们研究 Kausz 型紧化 $\mathcal{TL}_n$ 的几何性质，并证明定理 A。第 4 节通过求值纤维阐释 $\mathcal{TL}_n$ 的模空间诠释，并证明定理 B。第 5 节将这一观点应用于$M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$的除子理论，最终得到定理 C。在第 6 节中，我们引入与正交格拉斯曼流形相关的紧化 $\mathcal{TO}_n$，并证明推论 D。

致谢。 HANLONG FANG 和 XIAN WU 获得国家重点研发计划（编号：2022YFA1006700）的资助。ALEX MASSARENTI 获得 PRIN 2022 资助（项目编号 20223B5S8L）模空间与特殊簇的双有理几何的支持，是 GNSAGA（INdAM）的成员，并感谢北京大学在其访问期间给予的热情接待；正是在此期间，促成本文的合作由此开始。

记号与约定。 我们在 $\mathbb{C}$ 上工作。令 $V := W \oplus W^\vee$ 配备标准辛形式 ω，并记拉格朗日格拉斯曼流形为 $\mathrm{LG}(n,2n) := \mathrm{LG}(V,\omega)$。

• 特征点 $p_\pm \in \mathrm{LG}(n,2n)$ 如 (2.7) 所示。• CQ_n 表示完全二次曲面空间，$\mathcal{TL}_n$ 是本文所讨论的 Kausz 型紧化。• R_n：$\mathcal{TL}_n \to \mathrm{LG}(n,2n)$ 和 P_n：$\mathcal{TL}_n \to \mathrm{CQ}_n$ 是自然的 $\mathscr{G}$–等变态射（(2.5) 和 (0.1)）。• $Z_k^\pm \subset \mathrm{LG}(n,2n)$ 是由 $p_\pm$ 定义的密切轨迹，而 $D_k^\pm \subset \mathcal{TL}_n$ 是迭代爆破后的相应例外除子（第 2 节）。• $H \in \mathrm{Pic}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 是 Plücker 超平面类；对于带标记模空间，我们还使用 $H_1 := \mathrm{ev}_1^* H$。• $\mathscr{G} \subset \mathrm{Aut}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 是有序对 (p_+,p_-) 的稳定子。• $\mathcal{S}$ 表示 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 上的典范秩 n 子丛；我们将使用齐性空间同构$T_{\mathrm{LG}(n,2n)} \simeq \mathrm{Sym}^2(\mathcal{S}^\vee)$。

1. 预备知识

我们固定关于除子锥和莫里梦空间的基本记号；标准参考文献包括 [HK00、ADHL15、Bri07、Per14]。对于正规射影簇 X，我们将 $N^1(X)_\mathbb{R}$ 记作 Néron–Severi 空间，并将 $N^1(X)_\mathbb{R}$中的有效锥、可移动锥和数值有效锥分别记为 $\mathrm{Eff}(X)$、$\mathrm{Mov}(X)$ 和 $\mathrm{Nef}(X)$。若 $f\colon X \dashrightarrow X'$ 是一个小的 $\mathbb{Q}$–阶化修改（SQM），则诱导映射 $f^*\colon N^1(X')_\mathbb{R} \to N^1(X)_\mathbb{R}$是同构，并将 Eff 与 Mov 对应起来。将 $N_1(X)_\mathbb{R}$ 记作 X 上的 1-循环模数值等价所成的实向量空间。

假设除子类群 Cl(X) 是自由且有限生成的，并选取子群 $G \subset \mathrm{Div}(X)$，使其映射到 Cl($X$) 后为同构。 X 的*Cox* 环为

$$\mathrm{Cox}(X) := \bigoplus_{[D]\in \mathrm{Cl}(X)} H^0\big(X, \mathcal{O}_X(D)\big),$$

其乘法由有理截面的乘法诱导。

定义 1.1. 正规射影 $\mathbb{Q}$–阶乘簇 X 是莫里梦空间（MDS），如果：

(i) 皮卡群(X)是有限生成的；(ii) Nef(X)是由有限多个半丰沛类生成的有理多面锥；

(iii) 存在有限多个小 Q-因子阶化变换 $f_i\colon\ X \dashrightarrow X_i$，使得每个 X_i 满足 (ii)，并且

$$\mathrm{Mov}(X) = \bigcup_i f_i^*\big(\mathrm{Nef}(X_i)\big).$$

等价地，这些小 Q-因子阶化变换的nef 锥粘合为一个支撑在可动锥(X)上的扇，该扇典范地延拓为有效锥(X)上的一个扇。

定义 1.2. 设 X 为莫里梦空间。有效锥(X) 的*Mori*室分解 是极大锥为如下形式的扇

$$\mathcal{C}_i := \big\langle g_i^*\big(\mathrm{Nef}(Y_i)\big),\ \mathrm{Exc}(g_i)\big\rangle \subset N^1(X)_{\mathbb{R}},$$

其中 $g_i\colon\ X \dashrightarrow Y_i$ 遍历到 Mori 梦空间的有限多个双有理收缩，且 Exc(g_i) 表示 X 上 g_i–例外素除子的集合。

注记 1.3. 由 [HK00，命题 2.9], 对于正规 $\mathbb{Q}$–阶乘射影簇 X Cox 环有限生成当且仅当 X 是莫里梦空间。另见 [ADHL15，第 1 节.3]。

定义 1.4. $\mathbb{Q}$–阶乘射影簇 X 上的不可约曲线 C 是可移动的，如果存在不可约底空间上的曲线的平坦族 $\pi\colon\ \mathscr{C} \to T$ 以及态射 ev$\colon\ \mathscr{C} \to X$，使得：

- 对于一般的 $t \in T$，纤维 $\mathscr{C}_t$ 是一条不可约曲线，且 ev($\mathscr{C}_t$) 与 C数值等价；
- 求值映射 ev 是支配的。

移动曲线锥是闭凸锥

$$\mathrm{Mov}_1(X) \ := \ \overline{\big\langle [C] \ \big|\ C \subset X \text{ movable}\big\rangle} \ \subset \ N_1(X)_{\mathbb{R}}.$$

注 1.5。 若 X 是光滑射影的，则 [BDPP13，定理 2。2] 将可动锥$_1(X)$ 与伪有效除子锥的对偶锥相对应：

$$\mathrm{Mov}_1(X) \ = \ \overline{\mathrm{Eff}}(X)^\vee \ := \ \big\{\alpha \in N_1(X)_{\mathbb{R}} \ \big|\ \alpha \cdot E \geq 0 \text{ for every } E \in \mathrm{Eff}(X)\big\}.$$

定义 1.6。 设 X 是一个正规射影簇。

(i) 若 X 的 $-K_X$ 是丰沛的，则称 X 为*Fano* 。（ii）若 X 的 $-K_X$ 是数值有效且大的，则称 X 为弱 *Fano* 。（iii）对数法诺对 是指一对 (X, Δ)，其中 X 是正规射影簇， Δ 是一个有效 $\mathbb{Q}$–除子，(X, Δ) 具有 klt 奇点，且 $-(K_X + \Delta)$ 是丰沛的。

注 1.7。 根据 [BCHM10，推论 1.3。2], 每个对数法诺对都是莫里梦空间。特别地，添加一个适当的有效边界后，Fano 簇或弱 Fano 簇都是莫里梦空间。

对于一个 $\mathbb{Q}$–Gorenstein Fano簇 X，Fano 指数定义为

$$\iota(X) := \max\big\{m \in \mathbb{Q}_{>0} \ \big|\ -K_X = mH \text{ for some ample Cartier divisor } H \in \mathrm{Pic}(X)\big\},$$

等价地，这是 Pic(X) 中能整除 $-K_X$ 的最大正整数。

我们用 PsAut($\mathcal{TL}_n$) 表示 $\mathcal{TL}_n$ 的伪自同构群，即在余维 1 上为同构的双有理自映射群。

设 $\mathscr{G}$ 是一个连通约化代数群， $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ 是一个博雷尔子群。

定义 1.8。 一个正规不可约的 $\mathscr{G}$–簇 X 是球形的，如果它包含一个开稠密的 $\mathscr{B}$–轨道。

定义 1.9。 一个光滑射影球形 $\mathscr{G}$–簇 X 若具有唯一的闭 $\mathscr{G}$–轨道，且边界 $X \setminus \mathscr{G} \cdot x$ 是一个正规交叉除子，其分层恰好是 $\mathscr{G}$–轨道闭包，则称其为奇妙的。

定义 1.10。 设 X 是一个带有固定博雷尔子群 $\mathscr{B}$的球形 $\mathscr{G}$–簇。 X的边界除子是其 $\mathscr{G}$–稳定的素除子。 X 的颜色是其 $\mathscr{B}$–稳定但不 $\mathscr{G}$–稳定的素除子。

备注 1.11. 球面簇是莫里梦空间；Mori 室分解可以从着色扇的组合结构中读出。关于此内容的概述及更多参考文献，请参阅 [Per14，第 4] 节。

定义 1.12. 若正规球形 $\mathscr{G}$–簇 X 中没有任何颜色包含一个 $\mathscr{G}$–轨道闭包，则称其为环面型。

设 $\mathscr{G}$ 是一个伴随型半单群。记 $\mathscr{G}$ 为它的 De Concini–Procesi 奇妙紧化。那么，从上述角度来看， $\mathscr{G}$ 是一个光滑射影球形 $\mathscr{G}\times\mathscr{G}$–簇，其边界除子来自 $\mathscr{G}\times\mathscr{G}$–稳定和 $\mathscr{B}\times\mathscr{B}$–稳定的退化条件，因此 $\mathscr{G}$ 是一个莫里梦空间，其 Cox 环和 Mori 室分解由边界除子和颜色决定。

当 $\mathscr{G}$ 是约化的但不是伴随型时，奇妙紧化并不存在。虽然缺少像 De Concini-Procesi 构造那样简单的一般框架，Kausz 还是为一般线性群构造了一种精妙的紧化。我们将 Kausz 紧化的一些重要性质概述如下。

定理 1.13 ([Kau00] 和 [FW25])。 固定 $\mathscr{G}:=\mathrm{GL}_n$。 $\mathscr{G}$是一个光滑射影的 $\mathscr{G}\times\mathscr{G}$–球面簇。其开 $\mathscr{G}\times\mathscr{G}$–轨道在 $\mathscr{G}$中的补集由 $2n$ 光滑素除子构成，且具有简单正规交叉$D_1^+,\cdots,D_n^+,D_1^-,\ \cdots,D_n^-$并满足以下性质。

(A) $D_1^+\cong D_1^-\cong$完全共线$_n$，其中 完全共线$_n$ 是完全共线空间。(B) 存在一个 $\mathscr{G}\times\mathscr{G}$–等变平坦收缩

$$\mathrm{P}_n:\overline{\mathscr{G}}\longrightarrow D_1^-\cong\mathsf{CC}_n$$

使得限制$\mathrm{P}_n|_{D_1^+}$： $D_1^+\to D_1^-$是一个同构，并且对于 $2\le i\le r$,

$$\mathrm{P}_n(D_i^-)=\mathrm{P}_n(D_{n+2-i}^+)=:\check{D}_i \tag{1.14}$$

(C) $\mathscr{G}$中 $\mathscr{G}\times\mathscr{G}$–轨道的闭包由以下一一给出

$$\bigcap\nolimits_{i\in I^+}D_i^+\bigcap\bigcap\nolimits_{i\in I^-}D_i^- \tag{1.15}$$

对于满足$\min(I^+)+\min(I^-)\ge n+2$的子集 $I^+,I^-\subset\{1,2,\cdots,n\}$，并约定*tha* t $\min(\emptyset)=+\infty$。

(D) $D_1^-\cong\mathsf{CC}_n$ 是奇妙的，其 $\mathscr{G}\times\mathscr{G}$–稳定除子为$\check{}$ D_i， $2\le i\le n$。

注意， $\mathscr{G}$是球形的，但并非 De Concini–Procesi 严格意义下的奇妙型。特别地，它不是单球形簇：事实上，某些边界分支对并不相交；例如$D_0^-\cap D_0^+=\emptyset$。因此，与 [Bri89], 中所处理的单球形簇情形不同，除子理论未必能由着色扇很好地描述。

2. 对称矩阵空间的 Kausz型紧化

设 V 是一个维数为 $2n$ 、配有非退化辛形式 ω的复向量空间。我们将以 LG(V,ω) 表示参数化 V的拉格朗日子空间（即维数为 n的极大各向同性子空间）的拉格朗日格拉斯曼流形。于是，LG$(V,\omega)\cong\mathrm{Sp}(V,\omega)/P$ 是一个 C_n型有理齐性簇，其中 P 表示与 Dynkin 图中的余极小根 α_n 相对应的极大抛物子群

$$\overset{\alpha_1}{\circ}-\overset{\alpha_2}{\circ}-\cdots-\overset{\alpha_{n-1}}{\circ}\Leftarrow\overset{\alpha_n}{\circ}.$$

特别地，LG(V,ω) 是一个维数为 $^{n}{}_{(n+1)}{}_{2}$的光滑射影簇，Pic(LG(V,ω)) $\cong\mathbb{Z}$由一个丰裕线丛 $\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(V,\omega)}(1)$ 生成，且 LG(V,ω) 的法诺指标为 $n+1$，即其反典范类为$-K_{\mathrm{LG}(V,\omega)}=(n+1)\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(V,\omega)}(1)$。此外，LG$(V,\omega)$ 是一个球形 Sp(V,ω)–簇。

现在我们介绍 LG(V,ω) 中开线性轨道的 Kausz 型紧化。设 W 是一个n 维复向量空间，并令 $V:=W\oplus W^\vee$，其上带有典范辛形式

$$\omega((w,\varphi),(w',\varphi')):=\varphi'(w)-\varphi(w'),\qquad w,w'\in W,\ \varphi,\varphi'\in W^\vee.$$

今后，我们从记号中省略 ω，并将拉格朗日格拉斯曼流形记为 LG$(n,2n)$。令

$$\mathscr{G}:=\mathrm{GL}(W^\vee)\times\mathbb{G}_m\subset\mathrm{Sp}(V)$$

为如下定义的子群： $g\in \mathrm{GL}(W^\vee)$ 按给定表示作用于 $W^\vee$，并按逆对偶表示作用于 $W=(W^\vee)^\vee$；而 $\lambda\in\mathbb{G}_m$ 在 W 上以权 $+1$ 作用，在 $W^\vee$上以权 -1 作用。具体而言，

$$(g,\lambda)\cdot(w,\varphi):=\big(\lambda(g^{-1})^\top w,\ \lambda^{-1}g\varphi\big),\qquad w\in W,\ \varphi\in W^\vee, \tag{2.1}$$

其中 $(g^{-1})^\top$： $W\to W$ 是 g 的转置逆。基于由 $\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}$ 诱导的普吕克嵌入 (1)

$$e_{\mathrm{LG}}\colon \mathrm{LG}(n,2n)\hookrightarrow \mathbb{P}\big(\bigwedge^n(W\oplus W^\vee)\big), \tag{2.2}$$

我们定义一个有理的 $\mathscr{G}$–等变映射

$$\mathrm{KL}_n\colon \mathrm{LG}(n,2n)\dashrightarrow \mathbb{P}\big(\bigwedge^n(W\oplus W^\vee)\big)\times\mathbb{P}\big(\mathrm{Sym}^2 W^\vee\big)\times\mathbb{P}\big(\mathrm{Sym}^2\big(\bigwedge^2 W^\vee\big)\big)\times\cdots\times\mathbb{P}\big(\mathrm{Sym}^2\big(\bigwedge^n W^\vee\big)\big), \tag{2.3}$$

将一般的拉格朗日子空间映射到一组相容的对称形式，这些对称形式通过对其普吕克坐标取适当的子式得到。按照 [FW25], 我们给出下一个定义。

定义 2.4。 开 $\mathscr{G}$–轨道在 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 中的*Kausz* 型紧化 $\mathcal{TL}_n$ 定义为 KL_n 的像的闭包：

$$\mathcal{TL}_n:=\overline{\mathrm{KL}_n\big(\mathrm{LG}(n,2n)\big)}\subset \mathbb{P}\big(\bigwedge^n(W\oplus W^\vee)\big)\times\mathbb{P}\big(\mathrm{Sym}^2 W^\vee\big)\times\mathbb{P}\big(\mathrm{Sym}^2\big(\bigwedge^2 W^\vee\big)\big)\times\cdots\times\mathbb{P}\big(\mathrm{Sym}^2\big(\bigwedge^n W^\vee\big)\big).$$

We denote by

$$\mathrm{R}_n\colon \mathcal{TL}_n\longrightarrow \mathrm{LG}(n,2n)\subset\mathbb{P}\big(\bigwedge^n(W\oplus W^\vee)\big) \tag{2.5}$$

到第一个因子的投影。

注 2.6. 由于在上述构造中 $\mathrm{GL}(W^\vee)\times\mathbb{G}_m$–轨道与 $\mathrm{GL}(W^\vee)$–轨道相同，因此我们不区分将 $\mathcal{TL}_n$ 视为球形 $\mathrm{GL}(W^\vee)\times\mathbb{G}_m$–簇还是 $\mathrm{GL}(W^\vee)$–簇。

考虑以下一对互补拉格朗日子空间

$$p_+:=0\oplus W^\vee,\ p_-:=W\oplus 0\ \in\ \mathrm{LG}(n,2n), \tag{2.7}$$

which 将在本文中扮演对称的角色。对于每个满足 $1\le k\le n-1$ 的 k，我们记 b y

$$\mathrm{Osc}^k_{p_\pm}\big(\mathrm{LG}(n,2n)\big)\subset\mathbb{P}\big(\bigwedge^n(W\oplus W^\vee)\big)$$

相对于普吕克嵌入，在 k处的第 $p_\pm$ 密切空间（参见[MR18，第 6] 节，以及 [FMR20，第 3 节。4]分别参见上述文献，了解格拉斯曼流形和拉格朗日格拉斯曼流形在普吕克坐标下密切空间的详细描述）。为后续使用，我们记录以下引理，它汇总了 $\mathrm{LG}(n,2n)$中一点处密切空间的性质、经过该点的低次数有理曲线所覆盖的轨迹，以及这些轨迹的维数。

引理 2.8。 设 $\mathrm{LG}(n,2n)=\mathrm{LG}(V,\omega)\subset\mathbb{P}(\bigwedge^n V)$ 是其普吕克嵌入下的拉格朗日格拉斯曼流形。固定一点 $p\in\mathrm{LG}(n,2n)$，其对应于一个拉格朗日 $\Lambda_0\subset V$。对于满足 $1\le d\le n-1$ 的整数 d，令

$$Z_d(p)\ :=\ \mathrm{LG}(n,2n)\cap\mathrm{Osc}^d_p\big(\mathrm{LG}(n,2n)\big)$$

并令 $R_d(p)\subset\mathrm{LG}(n,2n)$ 为所有满足 $p\in C$ 且度数$H(C)\le d$的不可约有理曲线 $C\subset\mathrm{LG}(n,2n)$ 的并集。则有以下结论：

(i) 作为 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 中的闭子集，有

$$Z_d(p)\ =\ \big\{\Lambda\in\mathrm{LG}(n,2n)\,\big|\,\dim(\Lambda\cap\Lambda_0)\ge n-d\big\}.$$

(ii) 闭集 $Z_d(p)$ 是 $R_d(p)$的扎里斯基闭包；特别地， $Z_d(p)$ 不可约，并且

$$\overline{R_d(p)}\ =\ Z_d(p).$$

(iii) 簇 $Z_d(p)$ 的维数为

$$\dim Z_d(p)\ =\ \frac{d(2n-d+1)}{2}\ =\ dn-\frac{d(d-1)}{2}.$$

有振荡$^d_p\big(\mathrm{LG}(n,2n)\big)=\mathbb{P}(\bigwedge^n V)$，因此 $Z_d(p)=\mathrm{LG}(n,2n)$ 对于 $d\ge n$。

$$\mathrm{LG}(n,2n)=\mathcal{TL}_n^0 \xleftarrow{\mathrm{Bl}_{Z_0^+}} \mathcal{TL}_n^{1,+} \xleftarrow{\mathrm{Bl}_{Z_1^+}} \cdots \xleftarrow{\mathrm{Bl}_{Z_{n-2}^+}} \mathcal{TL}_n^{n-1,+} \xleftarrow{\mathrm{Bl}_{Z_0^-}} \cdots \xleftarrow{\mathrm{Bl}_{Z_{n-2}^-}} \mathcal{TL}_n^{n-1} \cong \mathcal{TL}_n.$$

图 1. 沿密切轨迹 $Z_k^{\pm}$ 进行迭代爆破以生成 $\mathcal{TL}_n$ 的示意顺序。

证明。 由 $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ 齐次性可设 $\Lambda_0 = W \oplus 0 \subset W \oplus W^\vee = V$。$\mathrm{LG}(n,2n)$ 的大胞腔由与 $0 \oplus W^\vee$ 横截的拉格朗日子空间构成，通过对称映射A的图与 $\mathrm{Sym}^2 W^\vee$ 等同： $W \to W^\vee$，而 p 对应于 $A = 0$。在这些坐标下，$\dim(\Lambda \cap \Lambda_0) \geq n-d$ 等价于 $\mathrm{rk}(A) \leq d$，从而得到 (i)。轨迹 $\{\mathrm{rk}(A) \leq d\}$ 不可约，且等于经过 $A=0$ 的次数为 $\leq d$ 的有理曲线之并的闭包，从而得到 (ii)。最后，对称矩阵的标准行列式计算给出 $\dim\{\mathrm{rk}(A) \leq d\} = {}^{d}_{(2n-d+1)\ 2}$，这就是 (iii)。□

我们定义

$$Z_k^{\pm} := \mathrm{LG}(n,2n) \cap \mathrm{Osc}^k_{p_\pm}\big(\mathrm{LG}(n,2n)\big).$$

每个 $Z_k^{\pm}$ 都是 $\mathscr{G}$–稳定的，并且我们有链

$$Z_0^+ := \{p_+\} \subset Z_1^+ \subset \cdots \subset Z_{n-1}^+, \qquad Z_0^- := \{p_-\} \subset Z_1^- \subset \cdots \subset Z_{n-1}^-.$$

命题 2.9. 对于满足 $1 \leq k \leq n-1$ 的每个整数 k，以下结论成立：

$$\dim(Z_k^+) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

并且 Z_k^+ 沿着每个 $0 \leq i < k$ 对应的 Z_i^+ 具有重数为 重数$^{Z_i^+}(Z_k^+) = k-i+1$ 的普通奇点。对于链 $Z_0^- \subset \cdots \subset Z_{n-1}^-$，也有类似结论。

令 $\mathcal{TL}_n^k$ 由$\mathrm{LG}(n,2n)$ 依次爆破 $Z_0^+, Z_1^+, \ldots, Z_{k-1}^+, Z_0^-$、$Z_1^-$、 …、 Z_{k-1}^- 的严格变换（按此顺序）得到。则 $\mathcal{TL}_n^k$ 光滑，且 Z_k^+ 和 Z_k^- 在 $\mathcal{TL}_n^k$ 中的严格变换光滑。特别地， $\mathcal{TL}_n^{n-1}$ 光滑。

证明。 维数公式见引理 2.8(iii)。

固定 k，并在 p_+ 周围的标准大胞腔 U_+ 中工作，该胞腔通过对称映射的图与 $\mathrm{Sym}^2 W$ 等同。在这些坐标下，Z_k^+ 是对称行列式簇

$$Z_k^+ \cap U_+ = \{A \in \mathrm{Sym}^2 W : \mathrm{rk}(A) \leq k\},$$

由 A 的 $(k+1) \times (k+1)$ 子式切出。对于对称矩阵，这是标准的行列式计算：沿着低秩分层 $Z_i^+ \cap U_+ = \{\mathrm{rk}(A) \leq i\}$，奇点是普通的，且消失阶为 $k-i+1$，即 $\mathrm{mult}^{Z_i^+}(Z_k^+) = k-i+1$。关于 $-$ 链的类似结论，可通过在 p_- 周围的对侧大胞腔 U_- 中工作得到。

最后，设 x 是同时位于两条链（的严格变换）上的一点。经过辛基变换后，我们可以假设，在 x 附近的一个仿射图中，一个拉格朗日子空间由如下对称分块矩阵表示

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}, \qquad A \in \mathrm{Sym}^2 U, \quad C \in \mathrm{Sym}^2 U',$$

对应于分解 $W = U \oplus U'$，其中 $\dim U = n-\ell$ 且 $\dim U' = \ell$。在这些坐标下， $+$ 链的定义方程只涉及分块 A 的子式，而 $-$ 链的定义方程只涉及分块 C 的子式； B 的各项则给出横截坐标。特别地，两条链相交得很干净，且在局部由相互独立的坐标定义。因此，沿着 $Z_0^+, Z_1^+, \ldots, Z_{k-1}^+, Z_0^-, \ldots, Z_{k-1}^-$ 的严格变换进行逐次爆破，能够消解普通奇点而不引入新的奇点，并且 $\mathcal{TL}_n^k$ 以及 $Z_k^{\pm}$ 的严格变换都是光滑的。□

现在我们将 $\mathcal{TL}_n^{n-1}$与定义 $\mathcal{TL}_n$ 中给出的紧化2.4进行比较。

命题 2.10. 存在一个自然的 $\mathscr{G}$–等变同构 $\mathcal{TL}_n^{n-1} \cong \mathcal{TL}_n$，使得吹起态射 $\beta\colon \mathcal{TL}_n^{n-1} \to \mathrm{LG}(n,2n)$ 与 (2.5) 中的投影 $\mathrm{R}n\colon \mathcal{TL}_n \to \mathrm{LG}(n,2n)$ 相对应。

证明。 令 $Z_0^+ := \{p_+\}$ 和 $Z_0^- := \{p_-\}$。态射 R_n 是射影的、双有理的，并且在 KL_n 正则的轨迹上是同构。用普吕克坐标可以验证：

(a) KL_n 在 $\bigcup_{k=0}^{n-1}(Z_k^+ \cup Z_k^-)$的补集上正则；

(b) 对于 $0 \le k \le n-2$， $Z_k^{\pm}$ 的一般点是定义KL_n的线性系的一个普通基点，其重数由引理2.8规定；(c) KL_n 在 $Z^{\pm}$ 的一般点处正则 $^{n-1}$.
因此，对命题 2.9 中的中心进行爆破，KL_n 的不定点，并将所得的图紧化与 $\mathcal{TL}_n$同一起来，从而得到所声称的 $\mathscr{G}$–等变同构。□

注 2.11。 如 [FW25，引理 2.2], 所示，可以证明，得到 $\mathcal{TL}_n$的迭代吹起构造与进行爆破的顺序无关。

定义 2.12。 将 $0 \le k \le n-2$ 中 $Z_k^{\pm}$ 上方的例外除子记为 $D_k^{\pm}$，将 $\mathcal{TL}_n^{n-1} \cong \mathcal{TL}_n$ 中 $Z_{n-1}^{\pm}$ 的严格变换记为 $D_{n-1}^{\pm}$。

定理 2.13。 簇 $\mathcal{TL}_n$ 光滑射影。群 $\mathscr{G}$ 作用于 $\mathcal{TL}_n$，其开稠密轨道同构于齐性空间 $\mathscr{G}/\mathscr{H}$，其中 $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ 是 $W^\vee$ 上固定的非退化对称形式的稳定子。该开轨道的补集是一个除子，具有 $2n$ 个光滑不可约分支

$$D_0^-, \dots, D_{n-1}^-,\ D_0^+, \dots, D_{n-1}^+. \tag{2.14}$$

特别地， $\mathcal{TL}_n$ 是一个光滑射影球形 $\mathscr{G}$簇。

证明。 由命题 2.10， $\mathcal{TL}_n$ 可通过对 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 沿光滑中心迭代爆破得到。因此$\mathcal{TL}_n$是光滑射影的。此外，稠密开 $\mathscr{G}$轨道可识别为 $\mathrm{Sym}^2 W^\vee$中由非退化对称形式构成的开子集，而边界除子由（2.14）给出。显然，$\mathscr{B}\cdot[p_-]$ 是 $\mathscr{B}$在 $\mathscr{G}/\mathscr{H}$中的稠密开轨道。证明完毕。 □

令 $\mathrm{Sym}^2(W^\vee)$ 表示对称 $n \times n$矩阵空间，并令 $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 W^\vee) \cong \mathbb{P}^{\binom{n(n+1)}{2}-1}$表示其射影化。$\mathbb{P}^{n-1}$ 中的完全二次曲面空间 可通过依次爆破秩不超过 k的对称矩阵各分层来构造。我们将这个光滑射影簇记作 CQ_n。注意，第一个边界除子 $D_0^- \subset \mathcal{TL}_n$ 同构于 CQ_n， D_0^+也如此。

命题 2.15. 存在 $\mathscr{G}$–等变同构 $D_0^- \cong \mathsf{CQ}_n \cong D_0^+$。

证明。 令 E_0^+为在 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 中吹起 p_+所得的例外除子。则 $E_0^+ \cong \mathbb{P}^{\binom{n(n+1)}{2}-1}$。最后，该结论由命题 2.10 以及在 CQ_n 中 [Vai82]的吹起构造得出。 □

将到 $D_0^{\pm}$ 的投影与和 CQ_n 的识别复合，可得到一个 $\mathscr{G}$–等变平坦态射

$$\mathrm{P}_n \colon \mathcal{TL}_n \longrightarrow \mathsf{CQ}_n \tag{2.16}$$

如 [FW25], 中所述，其对 $D_0^{\pm}$的限制是到CQ_n上的同构。

关于 $\mathcal{TL}_n$ 的 Mille Crêpes 图表。 遵循 [FW25，第 3], 节，我们将利用上述迭代吹起构造，为$\mathcal{TL}_n$定义 Mille Crêpes 坐标。为简洁起见，我们在此以简明的抽象形式介绍这些坐标；完整细节见 [FMW26]。

对于每个 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_n) \in \{(i_1,i_2,\cdots,i_n) \in \mathbb{Z}^n : 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le 2n\} =: \mathbb{I}_n$，普吕克坐标函数 P_I在谱 $\mathbb{Z}[x_{ij}(1 \le i \le n, 1 \le j \le 2n)]$ 上等于由第 i_1、 $\cdots$、 i_n 列组成的矩阵 (x_{ij}) 的行列式。将从主丛出发的自然投影 $\mathrm{Pr}\colon \mathcal{G}(n,2n) \to G(n,2n)$ 记为

$$\mathcal{G}(n,2n) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x_{ij}] : P_I \notin \mathfrak{p} \text{ for a certain } I \in \mathbb{I}_n\}$$

到格拉斯曼流形 $G(n,2n)$。对于每个 $x \in G(n,2n)$，令 $\widetilde{x}$为原像 $(\mathrm{Pr})^{-1}(x)$ 中的一个元素。现在，对于 $0 \le k \le n$，我们定义指标集

$$\mathbb{I}_n^k := \big\{(i_1,\cdots,i_n) \in \mathbb{Z}^n : 1 \le i_1 < \cdots < i_{n-k} \le n\,; n+1 \le i_{n-k+1} < \cdots < i_n \le 2n\big\},$$

以及有理映射

$$f^k \colon \mathrm{LG}(n,2n) \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_n^k},\ x \mapsto [\cdots, P_I(\widetilde{x}), \cdots]_{I \in \mathbb{I}_n^k}. \tag{2.17}$$

那么（2.3）可写成

$$\begin{aligned} \mathrm{KL}_n :=& (e_{\mathrm{LG}}, f^0, \cdots, f^n) \colon \mathrm{LG}(n,2n) \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_n} \times \mathbb{P}^{N_n^0} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_n^n} \\ & x \mapsto \big([\cdots, P_I(\widetilde{x}), \cdots]_{I \in \mathbb{I}_n}, [\cdots, P_I(\widetilde{x}), \cdots]_{I \in \mathbb{I}_n^0}, \cdots, [\cdots, P_I(\widetilde{x}), \cdots]_{I \in \mathbb{I}_n^n}\big). \end{aligned} \tag{2.18}$$

此处 $N_n := \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} - 1$ 以及 $N_n^k := |\mathbb{I}_n^k| - 1$； e_{LG} 是（2.2）中的普吕克嵌入。

在与 W every L 横截的拉格朗日子空间构成的开子集上，每个子空间都是唯一线性映射 A 的图像： $W \to W^\vee$，该映射关于自然配对是对称的。选取 W 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，并令 $W^\vee$ 中与之对应的对偶基为 $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$，于是我们可以将此开子集与对称矩阵的仿射空间 $Y = (y_{ij})_{1\le i,\ j\le n}$ 等同起来。更一般地，对于由 $e_{\ell+1}, \cdots, e_n, e_1^*, \cdots, e_\ell^*$ 生成的每个拉格朗日子空间 $L_{12\cdots\ell}$，其中 $0 \le \ell \le n$，$\mathrm{LG}(W \oplus W^\vee)$ 在 $L_{12\cdots\ell}$ 附近有如下仿射坐标图：

$$U_{12\cdots\ell} := \{ \underbrace{\begin{pmatrix} Z \\ -X^\top \end{pmatrix}}_{\ell \text{ columns}} \Big| \begin{matrix} 0 \\ I_{n-\ell} \end{matrix} \Big\| \begin{matrix} I_\ell \\ 0 \end{matrix} \Big| \underbrace{\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}}_{(n-\ell) \text{ columns}} \} \cong \mathbb{A}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \tag{2.19}$$

带有坐标

$$Z := (\cdots, z_{ij}, \cdots)_{1\le i,j\le \ell},\ X := (\cdots, x_{ij}, \cdots)_{1\le i\le \ell, \ell+1\le j\le n},\ Y := (\cdots, y_{ij}, \cdots)_{\ell+1\le i,j\le n}, \tag{2.20}$$

我们采用如下约定： Y 与 Z 分别关于 $y_{ij} = y_{ji}$ 和 $z_{ij} = z_{ji}$对称。不难验证，所有这些坐标图在 $\{1, 2, \cdots, n\}$的置换意义下覆盖 $\mathrm{LG}(W \oplus W^\vee)$。

现在，容易验证

引理 2.21. 子簇 Z_k^+ （分别. Z_k^- ） 在 $U_{12\cdots\ell}$ 中由矩阵 $Z = (z_{ij})$ （分别 $Y = (y_{ij})$ ）的适当子式的消失局部定义。更精确地说，当 $n - \ell \le k$ （$\ell \le k$）时，Z_k^+ （分别 Z_k^- ）到 $U_{12\cdots\ell}$ 的限制由 Z （分别 Y）的所有秩 $(k + 1 - n + \ell)$ （分别 $(k + 1 - \ell)$ ）子式的消失定义；否则，该限制为空。

千层饼构造如下进行。注意， $\mathcal{TL}_n$ 是按照维数递增的顺序，依次对各个中心进行爆破得到的。在每一步爆破中，选择仿射图，使定义该中心的某个子式等于 1，并将其他子式表示为该子式与新坐标的乘积。反复执行这一过程，可得到一个开覆盖

$$\mathcal{TL}_n = \bigcup_{g\in \mathrm{Aut}(\mathcal{TL}_n)} \bigcup_{\ell=0}^{n} g(A_\ell)$$

由仿射空间的平移构成

$$A_\ell \cong \mathbb{A}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \qquad 0 \le \ell \le n,$$

其带有正则坐标

$$\{a_{\ell,i}^+\}_{n-\ell\le i\le n-1}, \quad \{a_{\ell,i}^-\}_{\ell\le i\le n-1}, \quad \{b_{\ell,1}, \ldots, b_{\ell,\frac{n(n-1)}{2}}\},$$

并满足以下性质：

- 对于每个 $0 \le i \le n-1$，边界除子 D_i^+ 和 D_i^- 都是光滑的。在每个 A_ℓ 上，对于 $n-\ell \le i \le n-1$（分别为 $\ell \le i \le n-1$），交 $D_i^+ \cap A_\ell$（分别为 $D_i^- \cap A_\ell$）由单个坐标 $a_{\ell\, i}^+$（分别为 $a_{\ell\, i}^-$）的消失给出；否则，该交为空。
- 每个 A_ℓ 上的除子 $D := \bigcup_{i=0}^{n-1} (D_i^+ \cup D_i^-)$ 由方程给出

$$\prod_{i=n-\ell}^{n-1} a_{\ell,i}^+ \cdot \prod_{i=\ell}^{n-1} a_{\ell,i}^- = 0.$$

- 剩余坐标 $b_{\ell,1}, \ldots, b_{\ell,\frac{n(n-1)}{2}}$ 是沿着（0.1）中纤维的水平坐标，因为它们沿着 P_n 的一维纤维保持常数。

为了研究 $\mathbb{C}^*$ 在 $\mathcal{TL}_n$ 上的轨道，我们接下来简要介绍拉格朗日格拉斯曼流形上的 Białynicki-Birula 分解。注意，在式（2.1）定义的 $\mathbb{G}_m$-作用下，$\mathrm{LG}(n, 2n)$ 的不动点概形的连通分支为

$$\mathcal{V}_{(n-k,k)} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{LG}(n, 2n) \,\middle|\, \begin{matrix} X \text{ is a } k\times n \text{ matrix of rank } k \\ Y \text{ is an } (n-k)\times n \text{ matrix of rank } (n-k) \end{matrix} \right\}, \quad 0 \le k \le n,$$

稳定子流形和不稳定子流形分别为

$$\mathcal{V}^{+}_{(n-k,k)} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & W \end{pmatrix} \in \mathrm{LG}(n,2n) \,\middle|\, \begin{matrix} X \text{ is a } k\times n \text{ matrix of rank } k \\ Y \text{ is an } (n-k)\times n \text{ matrix of rank } (n-k) \end{matrix} \right\},$$
$$\mathcal{V}^{-}_{(n-k,k)} := \left\{ \begin{pmatrix} Z & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{LG}(n,2n) \,\middle|\, \begin{matrix} X \text{ is a } k\times n \text{ matrix of rank } k \\ Y \text{ is an } (n-k)\times n \text{ matrix of rank } (n-k) \end{matrix} \right\}, \tag{2.22}$$

对于 $0 \le k \le n$。显然 $Z^{+}_{n-k} = \mathcal{V}^{+}_{(n-k,k)}$ 与 $Z^{-}_{k} = \mathcal{V}^{-}_{(n-k,k)}$。

由于 $\mathbb{G}_m = \mathrm{谱}\,\mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$ 在 (2.1) 取形式 $a^{-}_{\ell,\ell} \mapsto \lambda^{-1} a^{-}_{\ell,\ell}$, $a^{+}_{\ell,n-\ell} \mapsto \lambda a^{+}_{\ell,n-\ell}$ 在 Mille Crêpes 坐标图 A_ℓ，该 $\mathcal{TL}_n$ 的不动点概形的连通分支是

$$\mathcal{D}_{(n-k,k)} := (\mathrm{R}_n)^{-1}(\mathcal{V}_{(n-k,k)}),\ 0 \le k \le n,$$

其中稳定和不稳定子概形分别为

$$\mathcal{D}^{\pm}_{(n-k,k)} := (\mathrm{R}_n)^{-1}(\mathcal{V}^{\pm}_{(n-k,k)}).$$

显然，$\mathcal{D}_{(n,0)}$ 和 $\mathcal{D}_{(0,n)}$ 是 $\mathcal{TL}_n$的光滑除子，而 $\mathcal{D}_{(n-k,k)}$ 是 $1 \le k \le n-1$的余维 2 光滑闭子概形；$D^{+}_{n-k} = \mathcal{D}^{+}_{(n-k,\,k)}$ 和$D^{-}_{k} = \mathcal{D}^{-}_{k(,\,n-k)}$。

拉格朗日格拉斯曼流形中的有理正规曲线。 为了将 $\mathcal{TL}_n$ 识别为康采维奇模空间中的一个子簇，我们研究 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 中次数为 n 的有理曲线及其希尔伯特模空间。我们首先利用 Mille Crêpes 坐标证明以下引理。

引理 2.2 **3.** 对于每个闭点 $q \in \mathsf{CQ}_n$，纤维 $Z_q := \mathrm{P}_n^{-1}(q)$ 具有以下性质.

(a) Z_q 由一条从 p_+ 到 p_-的 $\mathbb{G}_m$-稳定光滑有理曲线链组成。*(b)* 态射 R_n 限制为嵌入 $Z_q \hookrightarrow \mathrm{LG}(n,2n)$。*(c)* 一般而言，$\mathrm{R}_n(Z_q)$ 是一条关于普吕克嵌入次数为 n 的光滑有理曲线。*(d)* 对任意闭点 $q, q' \in \mathsf{CQ}_n$，$\mathrm{R}_n(Z_q) = \mathrm{R}_n(Z_{q'})$ 当且仅当 $q = q'$。

证明。 证明与 [FW25 引理 4.22] 的证明相同。考虑满足 $0 \le \ell \le n$ 的 Mille Crêpes 坐标图 A_ℓ。计算可得，当 $\ell = 0$（分别为 n）时，任意纤维 Z_q 限制在 A_ℓ 上，由固定除 $a^{-}_{0,0}$（分别为 $a^{+}_{n,0}$）之外的所有变量确定；当 $1 \le \ell \le n-1$ 时，$Z_q \cap A_\ell$ 由固定 $a^{+}_{\ell,n-\ell} \cdot a^{-}_{\ell,\ell}$ 以及所有其他变量确定。由此得到性质 (a)。

回顾$\mathrm{R}_n(Z_q \cap A_\ell)$ 是通过投影到 $\mathbb{P}^{N_n}$ 由普吕克坐标函数 P_I 给出的（参见（2.18））。通过计算各坐标图 A_ℓ 中相应的行列式，我们得出性质 (b)。此外，在坐标图 A_0 中，计算可得，对于一般的 Z_q，所有 $P_I(Z_q)$ 都是 $a^{-}_{0,0}$ 中的多项式，其中有一个取值为 1，且 $a^{-}_{0,0}$ 的最高次数为 n。性质 (c) 得证。

设 $\mathrm{R}_n(Z_q) = \mathrm{R}_n(Z_{q'})$。我们可以将 Z_q 写成一条由有理曲线 $\cup_{i=1}^{m}\gamma_i$ 组成的链，其次数为整数$0 < k_1 < \cdots < k_{m-1} < n$，使得

$$\gamma_1 \subset \overline{\mathcal{D}^{-}_{(n-k_1,k_1)}},\ \gamma_i \subset \overline{\mathcal{D}^{-}_{(n-k_i,k_i)}} \cap \overline{\mathcal{D}^{+}_{(n-k_{i-1},k_{i-1})}} \text{ for } 2 \le i \le m-1, \text{ and } \gamma_m \subset \overline{\mathcal{D}^{+}_{(n-k_{m-1},k_{m-1})}}.$$

注意，由（f^k 给出的有理映射2.17）在任意 γ_i 上都有定义，对任意 $1 \le i \le m$ 以及 $k_{i-1} \le k \le k_i$。因此我们可以得出 $q = q'$。性质 (d) 得证。□

回顾一下，对于带有代数群作用 $\mathscr{G}$ 的射影簇 X，存在一个开集 $U \subset X$，使得其中点 U 的轨道闭包构成 X 的一个平坦子概形族。因此，存在一个从 U 到 $\mathrm{Hilb}(X)$ 的态射，其中 $\mathrm{Hilb}(X)$ 是 X 的希尔伯特概形。按照 [BBS83、Kap93]，的做法，称 U 在 $\mathrm{Hilb}(X)$ 中的像的闭包为希尔伯特商，记作 $X/\!/\mathscr{G}$。Thaddeus [Tha99] 证明了希尔伯特商 $\mathrm{LG}(W \oplus W^\vee)/\!/\mathbb{C}^*$ 同构于 CQ_n。我们将证明

命题 2.24. P_n： $\mathcal{TL}_n \to \mathsf{CQ}_n$ 是希尔伯特商 $\mathrm{LG}(W \oplus W^\vee)/\!/\mathbb{C}^* \cong \mathsf{CQ}_n$ 上的万有族。

证明。 设 $X := \mathrm{LG}(n,2n)$，并设 $X/\!/\mathbb{C}^*$ 为其希尔伯特商，即希尔伯特概形中一般轨道闭包的闭包。由引理 2.23(b) 可知，P_n 的纤维同构映射到 $\mathbb{C}^*$–轨道闭包中X，因此 P_n: $\mathcal{TL}_n \to \mathsf{CQ}_n$ 定义了一个由 X 参数化的平坦子概形族，参数空间为 CQ_n。由希尔伯特概形（以及希尔伯特商）的万有性质可得一个态射

$$j \colon \mathsf{CQ}_n \longrightarrow X/\!/\mathbb{C}^*$$

使得 P_n 是沿着 j 对万有族的拉回。

引理 2.23 中的性质 (d) 表明，CQ_n 中的两个点在 X中给出不同的轨道闭包，因此 j 在闭点上是单射；由于 $X//\mathbb{C}^*$ 被定义为这类轨道闭包的闭包， j 在闭点上也是满射。特别地， j 是双射。

希尔伯特商 $X//\mathbb{C}^*$ 按构造是射影的，因此 j 是真。由于 j 是双射，故为拟有限；因此 j 是有限的。最后，根据 Thaddeus 对 $X//\mathbb{C}^*$ 的识别，$X//\mathbb{C}^* \cong \mathsf{CQ}_n$ [Tha99]是光滑的（特别是正规的）。因此，根据扎里斯基主定理， j 是同构，而P_n 是希尔伯特商上的万有族。□

经典结果表明，在 $\mathbb{P}^n$ 中，任何次数为 n 的不可约非退化有理曲线都与 Veronese嵌入射影等价。我们据此为拉格朗日格拉斯曼流形导出类似的标准形式。

引理 2.25。每条不可约光滑的次数为 n 且经过 p_+ 和 p_- 的有理曲线在 $\mathbb{C}^*$作用下不变，该作用由（2.1）定义。

证明。 令 γ 为这样一条曲线。在 p_-附近的标准局部坐标图中，我们可以写成

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ & & \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

其中 $f_{ij} = f_{ji}$ 为有理函数，且 $f_{ij}(0) = 0$。由于 $\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)} \cdot \gamma = n$，对于 $I^* = (n+1, n+2, \ldots, 2n)$，普吕克坐标函数 $P_{I^*}(\gamma(t))$ 仅在 $t = 0$处消失，且重数恰为 n。因此， $\gamma(\mathbb{P}^1 - \{t = 0\})$ 完全包含在 p_+附近的标准局部坐标图 $U_{12\cdots n}$ 中（见 (2.19)）。所以，对 $\gamma(t)$ 作坐标变换后，我们可以假设 (2.26) 中的 f_{ij} 是不含常数项的多项式。交换 p_+ 和 p_- 的角色，作完全相同的论证可知，对于任意满足 $|I| = n$和 $I \neq I^*$的 $I \subset \{1, 2, \cdots, 2n\}$， 多项式 $P_I(\gamma(t))$ 的次数为 $\leq n-1$。

接下来，我们将基于上述普吕克坐标函数 $P_I(\gamma(t))$ 的性质，证明所有 $f_{ij}(t) = a_{ij} \cdot t$ with $a_{ij} \in \mathbb{C}$。

将 $f_{1j}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{1j;k} t^k$ 展开，其中 $1 \leq j \leq n$，且 $a_{1j;k} \in \mathbb{C}$。不失一般性，我们可以假设 $a_{11;1} \neq 0$。注意，对于每个 $1 \leq j \leq n$，删去 (f_{ij}) 的第 1 行和第 j 列所得的子式等于 $b_j t^{n-1}$，并且至少有一个 $b_j \in \mathbb{C}$ 非零。此外，根据拉普拉斯展开，

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{k=2}^{n} a_{1j;k} t^k \right) = 0,$$

因为 $\det(f_{ij}(t))$ 的次数为 n。如果 $b_2 = \cdots = b_n = 0$，显然 $b_1 \neq 0$。由此可知，列向量 $(f_{i1}(t))_{2 \leq i \leq n}$ 为零。这可以通过将其按基 $(f_{i2}(t))_{2 \leq i \leq n}, (f_{i3}(t))_{2 \leq i \leq n}, \cdots, (f_{in}(t))_{2 \leq i \leq n}$ 展开并计算子式看出。然后由归纳法可得引理 2.25。

否则，我们可以假设 $b_n \neq 0$。经过常矩阵 C 的合同变换，即 $(\widetilde{f_{ij}}) := C^{\mathsf{T}} \cdot (f_{ij}) \cdot C$，这类合同变换对应于改变 W 的基（因此对应于对称矩阵图表上的自然 $\mathrm{GL}(W)$ 作用），所以它们保持拉格朗日条件以及与 $p_\pm$ 的~关联。我们可以得到 $f_{1n}(t) = \widetilde{a}_{1n} t$。若 $\widetilde{a}_{1n} = 0$，我们可以反复应用相同的论证来~消去 $f_{1(n-1)}, f_{1(n-2)}, \cdots$ 的高阶项，直到达到一个指数 j，使得 $f_{1j}(t) \not\equiv 0$。若$j = 1$，则属于上述情形。否则，我们只需假设 $f_{1n}(t) = t$。在合同变换意义下，我们进一步假设 $a_{j1;1} = 0, 2 \leq j \leq n-1$。由于 $\det(f_{ij}(t)) = (f_{11}(t) f_{nn}(t) - t^2) \det(f_{ij}(t))_{2 \leq i,\ j \leq n-1}$ 的次数为 n，$f_{11}(t) = a_{11;1} t$。经过合同变换后，我们得出引理 2.25。□

引理 2.27。 设 γ 是 $\mathrm{LG}(n, 2n)$ 上一条不可约光滑的 n 次有理曲线。

(a) 假设 γ 经过 p_+ 和 p_-。那么，对于任意两个不同的点 $p_1, p_2 \in \gamma$，存在 $\mathrm{LG}(n, 2n)$ 的一个自同构 τ，使得 $\tau(p_1) = p_+$ 且 $\tau(p_2) = p_-$。

(b) 假设 γ 经过 p_-。如果存在一点 $p_2 \in \gamma$, $p_2 \neq p_-$，使得 $\mathrm{LG}(n, 2n)$ 不存在满足 $\tau(p_-) = p_-$ 且 $\tau(p_2) = p_+$ 的自同构 τ，那么

$$P_{I^*}(\gamma(t)) \equiv 0 \ \forall t \in \mathbb{C}, \text{ where } I^* = (n+1, n+2, \cdots, 2n). \tag{2.28}$$

特别是 特别地，在 γ 上没有两个点能在 (p_+, p_-) 上通过 $\mathrm{LG}(n, 2n$ 的自同构相互映射).

证明。为验证性质 (a)，只需取 $p_1 = p_+$。引理 2.25 允许我们将 $\gamma(t)$ 按（2.26）写成线性项 $f_{ij}(t) = a_{ij}t$。取 x 使得 $\gamma(x) = p_2$，并定义 $F = (f_{ij}(x))$。矩阵 $\tau = \begin{pmatrix} I & -F \\ 0 & I \end{pmatrix}$ 由此给出所需的自同构。

若 $P_{I^*}(\gamma(x)) \neq 0$，则存在一个自同构 σ 使得 $\sigma(p_-) = p_-$ 且 $\sigma(\gamma(x)) = p_+$。于是由性质 (a)，存在 τ 的一个自同构，使得 $\tau(p_-) = p_-$ 且 $\tau(p_2) = p_+$，这就产生了矛盾。□

令 $\mathrm{Hilb}^{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 为与希尔伯特多项式 $nt+1$ 相关联的希尔伯特概形。由 [Per02] 可知，它不可约且光滑。记 $\mathcal{H}_{p_+,p_-} \subset \mathrm{Hilb}^{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 为参数化经过点 p_+, p_- 的曲线的子概形，并赋予约化概形结构。

命题 2.29。 $\mathcal{H}_{p^+,p_-}$ 是希尔伯特商 $\mathrm{LG}(n,2n)//\mathbb{C}^*$。$\mathcal{H}_{p_+,p_-}$ 包含一个开稠密子集

$$\mathcal{H}^0_{p_+,p_-} := \{\textit{irreducible smooth curves passing through } p_+, p_-\}.$$

证明。显然，希尔伯特商 $\mathrm{LG}(n,2n)//\mathbb{C}^*$ 包含于 $\mathcal{H}_{p_+,p_-}$ 由引理 2.23 以及命题2.24。注意，$\mathrm{LG}(n,2n)//\mathbb{C}^*$ 的一般点上的纤维是一条不可约光滑曲线。然后由引理2.25，$\mathcal{H}_{p_+,p_-}$ 中包含 $\mathrm{LG}(n,2n)//\mathbb{C}^*$ 的唯一不可约分支是 $\mathrm{LG}(n,2n)//\mathbb{C}^*$ 本身。

只需证明 $\mathrm{LG}(n,2n)//\mathbb{C}^*$ 是 $\mathcal{H}_{p_+,p_-}$的唯一不可约分支。令 $\mathrm{Hilb}^0_{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 表示 $\mathrm{Hilb}^{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 中由不可约光滑曲线组成的开稠密子集。定义

$$\mathrm{Hilb}^{00}_{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n)) := \left\{ \begin{array}{l} \text{irreducible smooth rational curves of degree } n \text{ that passes} \\ \text{through } p_+ \text{ and } p_- \text{ up to an automorphism of } \mathrm{LG}(n,2n) \end{array} \right\}.$$

断言 2.30。 $\mathrm{Hilb}^{00}_{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 是 $\mathrm{Hilb}^{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 的开稠密子集。

断言 2.30 的证明。对于每个 $y \in \mathrm{Hilb}^0_{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$，令 γ_y 为 y 上相应的曲线。对于任意 $x \in \mathrm{Hilb}^{00}_{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$，我们可以取一个开欧几里得球 $B_x \ni x$ 以及两个截面 $\iota_1, \iota_2 \colon B_x \to \mathrm{LG}(n,2n)$，使得对于每个 $y \in B_x$，$\iota_1(y)$ 和 $\iota_2(y)$ 是 γ_y 上的不同点。必要时缩小 B_x 后，我们有一个代数族 $\tau(\cdot,\cdot)\colon B_x \times \mathrm{LG}(n,2n) \to \mathrm{LG}(n,2n)$ 的 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 自同构，使得对于每个 $y \in B_x$，$\tau(y, \iota_1(y)) = p_+$。

记 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathrm{Hilb}^{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 为万有族。由（2.28），我们定义一个子簇

$$\mathcal{P}_x := \{(y,z) \in B_x \times \mathrm{LG}(n,2n) \mid P_{I^*}(\tau(y,z)) = 0\},$$

它恰好是乘积 $B_x \times \{z \in \mathrm{LG}(n,2n) \mid P_{I^*}(z) = 0\}$ 在自同构族 τ^{-1} 作用下的像。现在，考虑对 π 的限制：

$$\pi|_{\pi^{-1}(B_x)\cap\mathcal{P}_x} \colon \pi^{-1}(B_x) \cap \mathcal{P}_x \to B_x.$$

轨迹 $\mathcal{S}_x := \{z \in B_x \mid \dim \left(\pi|_{\pi^{-1}(B_x)\cap\mathcal{P}_x}\right)^{-1}(z) \geq 1\}$ 是 B_x 的一个复解析子集。注意，由引理 2.27，在 $B_x \cap \mathrm{Hilb}^0_{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 上，$\mathcal{S}_x$ 是 $\mathrm{Hilb}^{00}_{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 的补集。此外，集合 $\mathcal{S}_x$ 拼合成 $\mathrm{Hilb}^{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 的一个扎里斯基闭子集。证明完毕。□

假设 X 中还存在另一个不可约分支 $\mathcal{H}_{p_+,p_-}$。我们为 $\mathrm{Hilb}^{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 和 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 配备某些黎曼度量。取 $x \in X$，使得 $\mathrm{dist}(x, \mathrm{LG}(n,2n)//\mathbb{C}^*) > 2\epsilon > 0$。根据断言 2.30，存在一列点 $y_1, y_2, \cdots \in \mathrm{Hilb}^{00}_{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$，使得 $\lim_{i=1}^{\infty} y_i = x$。由于 π 是真且开的，我们有

$$\lim_{i\to\infty} \max_{z\in\gamma_x} \{\mathrm{dist}(z, \gamma_{y_i})\} = 0.$$

现在，对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $N > 0$，使得对任意 $i \leq N$，都有 $\max_{z\in\gamma_x}\{\mathrm{dist}(z,\gamma_{y_i})\} < \epsilon$。特别地，对任意 $i \leq N$，我们都可以找到点 $p_1, p_2 \in \gamma_i$，使得 $\mathrm{dist}(p_1, p_+) < \epsilon$ 且 $\mathrm{dist}(p_2, p_-) < \epsilon$。在 p_+ 和 p_- 周围的标准坐标图 (2.20) 中，我们分别可以写成 $p_1 = (E_1\ I_n)$ 和 $p_2 = (I_n\ E_2)$。注意，E_1 和 E_2 是矩阵范数为 $\|E_1\|, \|E_2\| < C \cdot \epsilon$ 的 $n \times n$ 矩阵，其中 C 是一个仅取决于 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 上黎曼度量的常数。定义 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 的一个自同构 τ_1 如下

$$\tau_1 := \begin{pmatrix} I_n & -E_2 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

那么 $\tau_1(p_2) = p_-$ 和 $\tau_1(p_1) = (E_1\ I_n - E_1E_2)$。定义

$$\tau_2 := \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -(I_n - E_1E_2)^{-1}E_1 & I_n \end{pmatrix}.$$

显然， $\tau := \tau_2 \circ \tau_1$ 将 (p_1, p_2) 变换为 (p_+, p_-)，其中 $\|\tau - I_{2n}\| < D \cdot \epsilon$ 为某个普适常数 D。注意，$\mathrm{LG}(n, 2n)$ 的自同构群在 $\mathrm{Hilb}^{nt+1}(\mathrm{LG}(n, 2n))$ 上具有代数作用；特别地，该作用是连续的。因此，当 i 足够大时，存在 $\mathrm{LG}(n, 2n)$ 的一个自同构 τ，它非常接近恒等变换，并使得 $\tau(\gamma_{y_i})$ 经过 p_+, p_-，且 $\tau(y_i) \notin \mathrm{LG}(n, 2n)//\mathbb{C}^*$，这就产生了矛盾。□

3. Geometry of $\mathcal{TL}_n$ as Spherical Varieties

本节研究 $\mathcal{TL}_n$ 作为球面簇的数值几何。

群 $\mathscr{G} = \mathrm{GL}(W^\vee) \times \mathbb{G}_m$ 通过（作用于 2.1），因而作用于 $\mathrm{LG}(n, 2n)$ 以及 $\mathcal{TL}_n$。我们取如下极大环面

$$T := \left\{ \left(\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n), \lambda\right) \;\middle|\; t_1, \dots, t_n, \lambda \in \mathbb{G}_m \right\} \subset \mathscr{G}. \tag{3.1}$$

在 Mille Crêpes 坐标中，变量 $a_\ell^\pm$ 、$_i$ 和 $b_{\ell、\ j}$ 是 T–特征函数，因此 T 在每个图表 A_ℓ 上都对角作用。特别地，每条坐标轴都是一条 T–不变仿射直线，其在 $\mathcal{TL}_n$ 中的闭包是一条T不变的不可约曲线，并与开 $\mathscr{G}$–轨道相交。

我们简要回顾如何由 $\mathrm{LG}(n, 2n)$上的普吕克坐标构造 $\mathcal{TL}_n$ 上的 $\mathscr{B}$–稳定除子。固定 $W^\vee$ 上的一个完全旗，并令 $B \subset \mathrm{GL}(W^\vee)$为相应的上三角矩阵博雷尔子群；记 $\mathscr{B} \subset \mathscr{G} = \mathrm{GL}(W^\vee) \times \mathbb{G}_m \subset \mathrm{Sp}(V)$为该博雷尔子群与 $\mathbb{G}_m$– 因子的乘积。在 $\mathrm{LG}(n, 2n)$ 的普吕克坐标中，有一组特殊的（$n+1$）元 $\mathscr{B}$– 特征向量 $P_{I_0}, P_{I_1}, \dots, P_{I_n}$，它们对应于多重指标

$$I_k = (k+1, k+2, \dots, n+k), \qquad 0 \le k \le n,$$

相对于所选旗标。对于 $0 \le k \le n$，我们设

$$b_k := \{L \in \mathrm{LG}(n, 2n) \mid P_{I_k}(L) = 0\},$$

并将 $B_k \subset \mathcal{TL}_n$ 记为 b_k 在 R_n 下的严格变换。

3.1. 除子锥、反典范丛的正性与自同构。

命题 3.2. $\mathcal{TL}_n$ 的皮卡群由以下元素自由生成

$$H := (\mathrm{R}_n)^* \mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}(1),\ D_0^+, \dots, D_{n-2}^+, D_0^-, \dots, D_{n-2}^-.$$

边界除子为 $D_0^+, \dots, D_{n-1}^+, D_0^-, \dots, D_{n-1}^-$。此外， $\mathcal{TL}_n$ 的颜色为 $B_1, \dots, B_{n-1}$。最后，以下线性等价关系成立：

$$B_0 = D_{n-1}^+ = H - \sum_{i=0}^{n-2} (n-i)\, D_i^+, \qquad B_n = D_{n-1}^- = H - \sum_{i=0}^{n-2} (n-i)\, D_i^-, \tag{3.3}$$

对于 $1 \le k \le n-1$,

$$B_k = H - \sum_{i=0}^{n-k-1} (n-k-i)\, D_i^+ - \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\, D_i^-. \tag{3.4}$$

证明。 由命题 2.10，态射 $\mathrm{R}_n\colon \mathcal{TL}_n \longrightarrow \mathrm{LG}(n, 2n)$ 可通过爆破 $Z_k^\pm$ 的严格变换得到，它们都是光滑的。因此，陈述中列出的除子构成 $\mathbb{Z}$的自由基 $\mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_n)$，而除子 $2n$ $D_i^\pm$、 $0 \le i \le n-1$正是 $\mathscr{G}$的不可约不变边界分支。由此可知， $\mathcal{TL}_n$稳定但不 $\mathscr{B}$稳定的除子恰好是 $\mathscr{G}$。 $B_1, \dots, B_{n-1}$□

推论 3.5. 对于 每个 $n \ge 1$，紧化 $\mathcal{TL}_n$ 是一个光滑射影球面环面簇 .

证明。 球形性由定理 2.13得出。注意到每个 $\mathscr{G}$不变闭子簇都存在一个开子集，包含于某个 Mille Crêpes 坐标图 A_ℓ 中（至多相差 $\mathcal{TL}_n$的自同构），于是我们进行局部论证。另一方面，计算可得 $B_k \cap A_\ell = \emptyset$ 对于 $1 \le k \le n-1$。因此，$\mathcal{TL}_n$ 是环面型的。 □

推论 3.6. 有效锥 有效锥$(\mathcal{TL}_n)$ 由类 $D_0^+, \dots, D_{n-1}^+,\ D_0^-, \dots, D_{n-1}^-$ 生成。

证明。 在光滑完备球面簇上，有效锥由 $\mathscr{B}$-稳定的素除子 [Bri89，第 2 节。6]。

现在我们来明确写出颜色 B_k 作为边界分支 $D_0^+,\dots,D_{n-1}^+,D_0^-,\dots,D_{n-1}^-$的非负线性组合的表达式。已知 $B_0 = D_{n-1}^+, B_n = D_{n-1}^-$，因此 B_0和 B_n已经是边界分支。对于 $1 \le k \le n-1$，我们使用 Pic($\mathcal{TL}_n$) 中的以下两个关系：

$$H = D_{n-1}^+ + \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)\,D_i^+, \quad H = D_{n-1}^- + \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)\,D_i^-,$$

由恒等式 $B_0 = D_{n-1}^+$和 $B_n = D_{n-1}^-$得到。对于固定的 k且满足 $1 \le k \le n-1$，我们将 H写成如下凸组合

$$H = \frac{n-k}{n}\Big(D_{n-1}^+ + \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)\,D_i^+\Big) + \frac{k}{n}\Big(D_{n-1}^- + \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)\,D_i^-\Big),$$

这是成立的，因为两个括号表示同一个类 H。将其代入命题 B_k 中的表达式3.2 ，并合并 $D_i^\pm$ 的系数，我们得到

$$B_k = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{i,k}^+\,D_i^+ + \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{i,k}^-\,D_i^-, \qquad 1 \le k \le n-1,$$

其中，系数 $\alpha_{i,k}^\pm$ 的具体表达式如下：对于 $0 \le i \le n-1$,

$$\alpha_{i,k}^+ = \begin{cases} \dfrac{ik}{n} & \text{if } i \le n-k-1 \\ \dfrac{(n-k)(n-i)}{n} & \text{if } i \ge n-k \end{cases} \quad \text{and} \quad \alpha_{i,k}^- = \begin{cases} \dfrac{i(n-k)}{n} & \text{if } i \le k-1 \\ \dfrac{k(n-i)}{n} & \text{if } i \ge k \end{cases}.$$

于是，颜色属于由边界除子生成的锥。 □

考虑环面 T （见3.1）。在 Mille Crêpes 图表中，任意坐标轴的闭包都是一条 T–不变曲线。现在我们特别指出三族 T–不变曲线，它们的数值类生成莫里锥，并将在全文中使用。

定义 3.7。 对于 $0 \le \ell \le n-1$，令 $\dot\gamma_\ell \subset A_\ell$ 为坐标轴

$$\dot\gamma_\ell(t) := \big(a_{\ell,\ell}^- = t,\ \text{all other coordinates } = 0\big), \qquad t \in \mathbb{C},$$

并将其闭包记作 $\gamma_\ell \subset \mathcal{TL}_n$ 。等价地，通过 $\mathcal{TL}_n$的迭代爆破模型， γ_ℓ 是原始环境射影空间中相应坐标直线的严格变换；特别地，它连接两个相邻的基本点。

对于 $1 \le j \le n-1$，令 $\dot\zeta_j^+ \subset A_n$ 为坐标轴

$$\dot\zeta_j^+(t) := \big(a_{n,j}^+ = t,\ \text{all other coordinates } = 0\big), \qquad t \in \mathbb{C},$$

并令 $\zeta_j^+ \subset \mathcal{TL}_n$ 为其闭包。这里 $a_{n\ ,\ j}^+$ 是沿 D_j^+ 简单消失的 Mille Crêpes 坐标。从几何上看， ζ_j^+ 是收缩的一条纤维中的直线，其例外轨迹包含于 D_{j-1}^+中，因此它被态射 R_n收缩。

对于 $1 \le j \le n-1$，类似地，设 $\dot\zeta_j^- \subset A_0$ 为坐标轴

$$\dot\zeta_j^-(t) := \big(a_{0,j}^- = t,\ \text{all other coordinates } = 0\big), \qquad t \in \mathbb{C},$$

其闭包为 $\zeta_j^- \subset \mathcal{TL}_n$。 ζ_j^- 也被 R_n收缩。

每个 γ_ℓ $,\zeta_j^+,\zeta_j^-$ 是一个一维 T–轨道的闭包。我们将它们的数值类记为 b y

$$C_\ell := [\gamma_\ell], \qquad C_j^+ := [\zeta_j^+], \qquad C_j^- := [\zeta_j^-] \ \in\ N_1(\mathcal{TL}_n)_{\mathbb{R}}.$$

引理 3.8. 在上述记号下，除子 $H, D_i^\pm$ 与曲线 C_ℓ, C_j^+, C_j^- 的交数如下。

$$H \cdot C_\ell = 1, \quad D_i^- \cdot C_\ell = \delta_{i,\ell} - \delta_{i,\ell+1}, \quad D_i^+ \cdot C_\ell = \delta_{i,n-\ell-1} - \delta_{i,n-\ell},$$

对于 $0 \le i \le n-1,\ 0 \le \ell \le n-1$。

$$\begin{aligned} H \cdot C_j^+ &= 0, \quad D_i^+ \cdot C_j^+ = -\delta_{i,j-1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}, \quad D_i^- \cdot C_j^+ = 0, \\ H \cdot C_j^- &= 0, \quad D_i^- \cdot C_j^- = -\delta_{i,j-1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}, \quad D_i^+ \cdot C_j^- = 0, \end{aligned}$$

对于 $0 \le i \le n-1,\ 1 \le j \le n-1$，其中 δ_{ab} 表示克罗内克 δ。

证明。该证明与 [Fan26引理 3 的证明类似，13] 并在 Mille-Crêpes 坐标中完成。为简便起见，此处省略。□

命题 n 3.9。有效曲线锥有效曲线锥$(\mathcal{TL}_n) \subset N_1(\mathcal{TL}_n)_{\mathbb{R}}$ 由类生成

$$\{C_\ell\}_{0\le\ell\le n-1} \cup \{C_j^+\}_{1\le j\le n-1} \cup \{C_j^-\}_{1\le j\le n-1}. \tag{3.10}$$

证明。 根据 [Bri97、命题 2.3 和推论 2。4], $\mathrm{NE}(\mathcal{TL}_n)$ 由以下各类生成：闭包的类，其中包括 1 维 $\mathscr{B}$ 轨道（对任意博雷尔子群 $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$）。每个 1 维 $\mathscr{B}$ 轨道都包含唯一的闭T 轨道，因此 $\mathrm{NE}(\mathcal{TL}_n)$ 由以下各类生成：闭包的类，其中包括 1 维 T 轨道，即由 T 不变曲线生成。直接检查可知，这些轴恰好是定义 3.7 中列出的三族。 □

命题 3.11。 $\mathcal{TL}_n$ 上的可动曲线锥为

$$\mathrm{Mov}_1(\mathcal{TL}_n) = \overline{\mathrm{Eff}}(\mathcal{TL}_n)^\vee = \left\{\alpha \in N_1(\mathcal{TL}_n)_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \alpha \cdot D_i^{\pm} \ge 0 \;\forall\, 0 \le i \le n-1\right\}.$$

特别地，$\mathrm{Mov}_1(\mathcal{TL}_n)$ 是一个有理多面锥。

此外，其极端射线由满足 $0 \le p, q \le n-1$ 的(p, q) 的配对标记，并由类$\widetilde{W}_{p,q} \in N_1(\mathcal{TL}_n)_{\mathbb{R}}$ 张成，这些类由以下条件唯一确定：

$$H \cdot \widetilde{W}_{p,q} = 1, \qquad D_i^+ \cdot \widetilde{W}_{p,q} = \frac{\delta_{ip}}{n-p}, \qquad D_i^- \cdot \widetilde{W}_{p,q} = \frac{\delta_{iq}}{n-q} \quad (0 \le i \le n-1).$$

等价地，如果我们 $\widetilde{t}$ $w_i := n-i$ 和 $l_{p,\,q} := \mathrm{lcm}(w_p, w_q)$ 并定义整类 $W_{p,\,q} := l_{p,\,q} W_{p,\,q}$，则 en

$$H \cdot W_{p,q} = l_{p,q}, \qquad D_p^+ \cdot W_{p,q} = \frac{l_{p,q}}{w_p}, \qquad D_q^- \cdot W_{p,q} = \frac{l_{p,q}}{w_q},$$

且与 $D_i^{\pm}$ 的所有其他交均为零。

最后，每个 $W_{p,\,q}$ 都是 *Mori* 生成元的有效组合。一种方便的显式表达式如下：令

$$a_{p,q} := \frac{l_{p,q}}{w_p}, \qquad b_{p,q} := \frac{l_{p,q}}{w_q},$$

通过递推关系定义整数 $\lambda^{p,\,q}_{r}$，其中 $0 \le r \le n-2$

$$\lambda_{-1}^{p,q} := 0, \qquad \lambda_0^{p,q} := a_{p,q} - b_{p,q}\,\delta_{q0}, \qquad \lambda_r^{p,q} := 2\lambda_{r-1}^{p,q} - \lambda_{r-2}^{p,q} - a_{p,q}\,\delta_{r,n-p} - b_{p,q}\,\delta_{rq} \quad (1 \le r \le n-2), \tag{3.12}$$

然后令

$$W_{p,q} := a_{p,q} \sum\nolimits_{\ell=0}^{n-1-p} C_\ell + \sum\nolimits_{j=1}^{n-1} \lambda_{j-1}^{p,q}\, C_j^-. \tag{3.13}$$

此外，还可以用 C_j^+ 代替 C_j^-，得到一个对称公式。

证明。 由注记 1.5，由于 $\mathcal{TL}_n$ 光滑，$\overline{\mathrm{Mov}}_1(\mathcal{TL}_n) = \mathrm{Eff}(\mathcal{TL}_n)^\vee$。由推论 3.6，$\mathrm{Eff}(\mathcal{TL}_n)$ 由边界除子 $D_i^{\pm}$($0 \le i \le n-1$) 生成，因此所示不等式刻画了 $\mathrm{Mov}_1(\mathcal{TL}_n)$。为证明$\widetilde{W}_{p,\,q} = l_{p,\,q} W_{p,\,q}$ 是有效的，且等于显式组合式（3.13），首先注意到，由引理 3.8，部分和 $\sum_{\ell=0}^{n-1-p} C_\ell$ 与 D_i^+ 的交等于 δ_{ip}，与 H 的交等于 $w_p = n-p$。由于$\widetilde{\ }$边界除子张成 $N^1(\mathcal{TL}_n)_{\mathbb{R}}$，$\beta_1$ 和 β_2 都与 $W_{p,\,q}$ 成比例。□

命题 3.14. 对于满足 $0 \le p, q \le n-1$ 和 $p+q \le n$ 的整数 p, q，定义除子类 $N_{p,\,q}$ 如式（*0.2*）所示。则 $N_{p,\,q}$ 是数值有效的。此外，$\mathrm{Nef}(\mathcal{TL}_n) \subset \mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_n)_{\mathbb{R}}$ 是一个有理多面锥，其极端射线恰为

$$\mathbb{R}_{\ge 0}\, N_{p,q} \qquad for \qquad 0 \le p, q \le n-1, \;\; p+q \le n.$$

特别地，$\mathrm{Nef}(\mathcal{TL}_n)$ 有 $\frac{n^2+3n-2}{2}$条极端射线。

证明。 由命题 3.9可知，莫里锥由（3.10）生成。定义

$$\Delta_k^+ := -\sum\nolimits_{i=0}^{k-1} (k-i) D_i^+, \quad \Delta_k^- := -\sum\nolimits_{i=0}^{k-1} (k-i) D_i^-, \; 0 \le k \le n-1. \tag{3.15}$$

根据引理 3.8中计算的交配对，数值有效锥由以下条件定义 $D := hH + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Delta_i^- + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \Delta_j^+$ 满足以下条件

$$\begin{cases} h - \sum_{i=\ell+1}^{n-1} a_i - \sum_{j=n-\ell}^{n-1} b_j \ge 0, \quad 0 \le \ell \le n-1 \\ a_1, \cdots, a_{n-1}, b_1, \cdots, b_{n-1} \ge 0 \end{cases}. \tag{3.16}$$

我们对 n 进行归纳证明。对于 $n=2$，由（3.16）定义的锥由以下向量生成$(h,a_1,b_1)=(1,1,1)$、$(1,1,0)$、$(1,0,1)$和$(1,0,0)$；因此命题 3.14 成立。现在假设该命题对 $n=m-1$ 在 $m-1\geq 2$的条件下成立，接下来证明它对 $n=m$也成立。

取 $\mathrm{Nef}(\mathcal{TL}_m)$ 的一个本原生成元。若 $a_k,b_{m-k}\geq 1$ 对某个 $1\leq k\leq m-1$ 成立，则由（3.4），$D-\min\{a_k,b_{m-k}\}\cdot B_k$ 也满足（3.16），这就产生了矛盾。若 $a_k=b_{m-k}=0$ 对某个 $1\leq k\leq m-1$ 成立，我们可以删去变量 a_k,b_{m-k}，并重新排列其余变量，使（3.16）具有相同形式，只需将 m 替换为 $m-1$ 即可。由归纳假设，证明完成。

现在假设 D 是 $\mathrm{Nef}(\mathcal{TL}_m)$ 的本原生成元，且对每个 $1\leq k\leq m-1$，要么$a_k=0$ 且 $b_{m-k}\geq 1$，要么 $a_k\geq 1$ 且 $b_{m-k}=0$。注意，极端射线是至少 $2m-2$ 个支撑超平面的交。因此，至少有 $m-1$ 个支撑超平面来自（ m ）的前 3.16 个不等式。由于 $m\geq 3$，其中有两个相邻的不等式。将它们相减，应有 $a_k=b_{m-k}=0$ 对某个 $1\leq k\leq m-1$ 成立，这就产生了矛盾。□

利用 $\mathcal{TL}_n$ 的爆破描述以及爆破下典范丛的标准公式，可以用 $\mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_n)$ 的生成元表示典范类：

$$K_{\mathcal{TL}_n}=-(n+1)H+\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{(n+1-i)(n-i)}{2}-1\right)\left(D_i^-+D_i^+\right)=-\sum_{m=1}^{n-1}B_m-\sum_{i=0}^{n-1}\left(D_i^-+D_i^+\right). \tag{3.17}$$

定理 3.18。该簇 形 $\mathcal{TL}_n$ 对每个 $n\geq 1$ 都是弱 *Fano*。此外，$\mathcal{TL}_n$ 是 *Fano* 当且仅当 $n\leq 2$.

证明。由（3.17）和引理 3.8可知，$-K_{\mathcal{TL}_n}$ 与 Mori 生成元 C_ℓ,C_j^+,C_j^- 的交数均非负。因此 $-K_{\mathcal{TL}_n}$ 是数值有效的。根据 [FZ13，定理 1。3]，$-K_{\mathcal{TL}_n}$ 是大且 $\mathcal{TL}_n$ 是弱 Fano。对于 $n=1,2$，可以验证 $-K_{\mathcal{TL}_n}$ 位于 $\mathrm{Nef}(\mathcal{TL}_n)$的内部。□

推论 3.19. 对于每个 $n\geq 1$，簇 $\mathcal{TL}_n$ 都是对数 *Fano*。

证明。根据定理 3.18，除子 $-K_{\mathcal{TL}_n}$ 是 nef 且大。极小模型纲领中的一个标准论证可得到一个有效的 $\mathbb{Q}$–除子 Δ，使得 $-(K_{\mathcal{TL}_n}+\Delta)$ 是丰沛的，且对 $(\mathcal{TL}_n,\Delta)$ 而言是 klt。□

我们以描述 $\mathcal{TL}_n$的局部变形结束本节。首先，我们证明 [BB96，命题 4.2(iii)] 在较弱正性条件下的推广。

命题 3.20。设 X 是一个光滑射影环面型球面簇。假设 X 的反典范丛在每个素边界除子上的限制均为 *nef* 且大。那么，对于所有 $k>0$，$H^k(X,T_X)=0$。

证明。设 $\partial X=\sum_{i=1}^m D_i$ 为边界除子，并设 $S_X\subset T_X$ 为与 ∂X相切的向量场的子层，因此在 $S_X=T_X(-\text{对数 }\partial X)$ 对数语言中。根据 [BB96，命题 2.3，2] 存在一个正合列

$$0\longrightarrow S_X\longrightarrow T_X\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^m\mathcal{O}_X(D_i)|_{D_i}\longrightarrow 0. \tag{3.21}$$

Knop 消失定理 [Kno94, 定理 4.1],，如 [BB96, 第 4], 节中所用，给出 $H^k(X,S_X)=0$ 对所有$k>0$均成立。对于任意边界分支 D_i，根据伴随公式有 $\mathcal{O}_X(D)|_D\cong K_D\otimes(-K_X)|_D$。然后由 Kawamata–Viehweg 消失定理可得 $H^k\left(D,\ \mathcal{O}_X(D)|_D\right)=0$ 对所有 $k>0$均成立。对 (3.21) 取上同调，即完成证明。□

引理 3.22. 对于每个 $n\geq 3$、每个 $0\leq j\leq n-1$ 以及每个符号 $\pm$，限制 $(-K_{\mathcal{TL}_n})|_{D_j^\pm}$ 在边界除子 $D_j^\pm$ 上 *nef* 且大。

证明. 由于 $-K_{\mathcal{TL}_n}$ 在 $\mathcal{TL}_n$ 上是数值有效的（见定理 3.18），它在任意子簇上的限制都是数值有效的。因此，只需证明 $(-K_{\mathcal{TL}_n})|_{D_j^\pm}$ 位于有效锥内部。证明与 [FZ21，定理 12] 的证明类似。不失一般性，我们可以考虑将 (3.17) 限制到 D_j^- 上，其中 $0\leq j\leq n-1$。

记 B_m^{-j}、$0\leq m\leq n$ 为线丛 B_m 到 D_j^- 的限制，并记 $D_{\pm i}^{-j}$、$0\leq i\leq n-1$ 为 $D_i^\pm$ 到 D_j^- 的限制。注意，当 $i\neq j$ 时，D_{-i}^{-j} 由交 $D_j^-\cap D_i^-$ 给出；D_{+i}^{-j} 由 $D_j^-\cap D_i^+$ 给出，而当 $0\leq i\leq n-1-j$ 时它为空。容易验证，D_j^- 是一个边界除子为 $\{D_{-i}^{-j}\}_{0\leq i\leq n-1,\ i\neq j}\cup\{D_{+i}^{-j}\}_{n-j\leq i\leq n-1}$、颜色为 $\{B_m^{-j}\}_{1\leq m\leq n-1}$ 的球面簇。此外，可以证明其有效锥由 $\{D_{-i}^{-j}\}_{0\leq i\leq n-1,\ i\neq j}\cup\{D_{+i}^{-j}\}_{n-j\leq i\leq n-1}\cup\{B_j^{-j}\}$，生成，其中当 $j=0$ 时 $B_0^{-0}=\emptyset$。

当 $2 \leq j \leq n-2$ 时，我们有

$$\sum_{0\leq i\leq j} D_{-i}^{-j} = B_j^{-j} - B_{j+1}^{-j} \quad \text{and} \quad \sum_{0\leq i\leq j-1} D_{-i}^{-j} = B_{j-1}^{-j} - B_j^{-j} + D_{+(n-j)}^{-j}.$$

令 $0 < t < 1$，我们得到

$$\begin{aligned} -K_{\mathcal{TL}_n}|_{D_j^-} = t \cdot \sum_{0\leq i\leq j-1} D_{-i}^{-j} + \sum_{j+1\leq i\leq n-1} D_{-i}^{-j} + \sum_{n-j+1\leq i\leq n-1} D_{+i}^{-j} + (1-t)\cdot D_{+(n-j)}^{-j} \\ + (2+t)\cdot B_j^{-j} + (1-t)\cdot B_{j-1}^{-j} + \sum_{1\leq m\leq n-1,\, m\neq j-1,j,j+1} B_m^{-j}. \end{aligned}$$

同样的论证适用于 $j = 0, 1, n-1$。证明完毕。 □

定理 3.23. 对每一个 $n \geq 1$，我们有

$$H^k\big(\mathcal{TL}_n, T_{\mathcal{TL}_n}\big) = 0 \qquad \textit{for all } k > 0.$$

特别地，$\mathcal{TL}_n$ 是局部刚性的，即它没有非平凡的局部变形。

证明。由于 $\mathcal{TL}_n$ 是环面型的，定理 3.23 在它们为 Fano 时成立（见 [Per14，推论 3.3。11]）。当$n \geq 3$时，由命题 3.20 与引理 3.22 推出。□

注 3.24。傅和李 [FL24] 研究了 wonderful 群紧化在 Fano 变形下的全局刚性。他们的策略所用的工具包括 regular Fano 紧化的 Bien–Brion 型局部刚性。定理 3.23 证明了 $\mathcal{TL}_n$ 即使在 $\mathcal{TL}_n$ 仅为弱 Fano 时，也具有同类消失性质。一个自然的问题是，$\mathcal{TL}_n$ 在弱 Fano 变形下是否表现出全局刚性。

的自同构与伪自同构 $\mathcal{TL}_n$。 我们确定了其双正则自同构群，并证明每个伪自同构实际上都是双正则自同构。

命题 3.25。对于每个 $n \geq 1$，都有

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{LG}(n,2n)) \cong \mathrm{PSp}_{2n}.$$

证明。对于有理齐性空间 G/P，连通分支 $\mathrm{Aut}^0(G/P)$ 与伴随群 G^{ad} 一致，但有一份明确列出的例外对 (G,P) [Dem77，定理 1] 除外。拉格朗日格拉斯曼流形 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 是齐性空间 $\mathrm{Sp}_{2n}/P_{\alpha_n}$，且这对不属于例外情形；此外，$C_n$ 型 Dynkin 图没有非平凡自同构。因此 $\mathrm{Aut}(\mathrm{LG}(n,2n)) = \mathrm{Aut}^0(\mathrm{LG}(n,2n)) \cong \mathrm{PSp}_{2n}$。□

注 3.26. 对于 $n = 2$，有 $\mathrm{LG}(2,4) \cong Q^3 \subset \mathbb{P}^4$。在此情形下，自同构群$(Q^3) \cong \mathrm{PO}_5 \cong \mathrm{PSO}_5$，，且例外同构 $\mathrm{PSp}_4 \cong \mathrm{PSO}_5$ 将该群与命题 3.25 中的群等同。

引理 3.27. 设 $G :=$ 自同构群$(\mathrm{LG}(n,2n)) \cong \mathrm{PSp}_{2n}$，并设 自同构群$(\mathrm{LG}(n,2n))_{p_+,\, p_-} \subset G$ 为同时固定$p_+ := 0 \oplus W^\vee$, $p_- := W \oplus 0 \in \mathrm{LG}(n,2n)$ 的子群。则

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{LG}(n,2n))_{p_+,p_-} \cong \mathrm{GL}_n/\{\pm I\}.$$

证明。Sp_{2n} 中的元素固定 p_+ 与 p_-，当且仅当它保持直和分解 $W \oplus W^\vee$，因而它是分块对角的。辛条件迫使 $h = g^{-\top}$，因此 Sp_{2n} 中的稳定子经由 $g \mapsto \mathrm{diag}(g, g^{-\top})$ 同构于 GL_n。过渡到 $\mathrm{PSp}_2 n = \mathrm{Sp}_2 n/\{\pm I\}$ 得到 $\mathrm{GL}_n/\{\pm I\}$。□

对于 $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{TL}_n)$，拉回 f^* 保持 $\mathrm{Eff}(\mathcal{TL}_n)$，因此会置换其极端射线。由此得到一个群同态

$$\rho\colon \mathrm{Aut}(\mathcal{TL}_n) \longrightarrow \mathfrak{S}_{2n}, \qquad f \longmapsto \text{the induced permutation of } \{[D_i^{\pm}]\}_{0\leq i\leq n-1}.$$

引理 3.28. ρ 的像是由交换生成的子群 $S_2 \subset \mathfrak{S}_{2n}$

$$[D_i^+] \longleftrightarrow [D_i^-] \qquad \textit{for all } 0 \leq i \leq n-1.$$

等价地，任意 $f \in$ 自同构群$(\mathcal{TL}_n)$ 要么分别保持集合 $\{D_i^+\}_{i=0}^{n-1}$ 和 $\{D_i^-\}_{i=0}^{n-1}$，要么同时交换它们。

证明。由引理 3.8 中的交数可知，要么 $D_0^+ \mapsto D_0^+$，这意味着对所有 i， $D_i^+ \mapsto D_i^+$ 和 $D_i^- \mapsto D_i^-$；要么 $D_0^+ \mapsto D_0^-$，这意味着对所有 i， $D_i^+ \mapsto D_i^-$和 $D_i^- \mapsto D_i^+$。现在，令 $\sigma\colon\ V = W \oplus W^\vee \to V$为如下以分块形式给出的线性辛自同构，因此 $\sigma(W) = W^\vee$且 $\sigma(W^\vee) = W$。由密切空间的函子性（因而密切轨迹 $Z_k^\pm$ 也具有函子性），该自同构交换两个膨胀塔 $\{Z_k^+\}$ 和 $\{Z_k^-\}$，因此可提升为迭代膨胀 $\mathcal{TL}_n$ 上的一个对合。于是存在对合 $\iota \in$ 自同构群$(\mathcal{TL}_n)$，它诱导出 $\mathrm{Im}(\rho) \cong S_2$ 的非平凡元素，从而 $\mathrm{Im}(\rho) \cong S_2$。□

定理 3.29. 存在一个分裂正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{LG}(n,2n))_{p_+,p_-} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{TL}_n) \xrightarrow{\rho} S_2 \longrightarrow 1,$$

因此

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{TL}_n) \cong \big(\mathrm{GL}_n/\{\pm I\}\big) \rtimes S_2,$$

其中 S_2 通过 $g \mapsto g^{-\top}$作用于$\mathrm{GL}_n/\{\pm I\}$。

证明。由引理 3.28， ρ 是满射且有一个截面。令 $f \in$Ker(ρ)。于是 f 固定每个边界除子$D_i^\pm$，因而特别地，它固定每个 R_n–例外除子 $D_i^\pm$（对 $0 \le i \le n-2$）。如 Fan26 的引理 4.6] 的证明所示， f 下降为 LG$(n,2n)$ 的一个双正则自同构 f，并固定点 p_+ 和 p_-。半直积作用的描述可由显式的交换矩阵得出。□

推论 3.30。我们有 $h^0\big(\mathcal{TL}_n, T_{\mathcal{TL}_n}\big) =$自同构群$(\mathcal{TL}_n) = n^2$。

证明。Aut$(\mathcal{TL}_n)$ 的恒等分支是 $\mathrm{GL}_n/\{\pm I\}$，因此其李代数的维数为 n^2。 □

定理 3.31。 $\mathcal{TL}_n$ 的每个伪自同构都是双正则的。等价地，

$$\mathrm{PsAut}(\mathcal{TL}_n) = \mathrm{Aut}(\mathcal{TL}_n) \cong \big(\mathrm{GL}_n/\{\pm I\}\big) \rtimes S_2.$$

证明。设 $\varphi\colon\ \mathcal{TL}_n \dashrightarrow \mathcal{TL}_n$ 是一个伪自同构。由于 φ 是余维一同构，它诱导出一个线性自同构 $\varphi^*\colon\ N^1(\mathcal{TL}_n)_{\mathbb{R}} \longrightarrow N^1(\mathcal{TL}_n)_{\mathbb{R}}$，将有效除子映到有效除子，从而保持有效锥 Eff$(\mathcal{TL}_n)$。

特别地， φ 保持 R_n 的整个例外轨迹（ $0 \le i \le n-2$对应的除子 $D_i^\pm$ ）。因此， φ下降为一个双有理自映射 $\bar\varphi\colon$ LG$(n,2n)$ $\dashrightarrow$ LG$(n,2n)$，且不收缩任何除子：事实上，若 LG$(n,2n)$ 上的某个除子被 $\bar\varphi$ 收缩，那么它在 $\mathcal{TL}_n$ 上的严格变换将是一个被 φ收缩的除子，这与 φ 是伪自同构相矛盾。同样的论证表明， φ^{-1} 不收缩任何除子。现在，由于 Pic(LG$(n,2n)) \cong \mathbb{Z}$ [Mas20，命题 7.2] 可推出 $\bar\varphi$ 实际上是 LG$(n,2n)$ 的双正则自同构。

最后，由于 $\bar\varphi$ 是双正则的，它保持内在关联于点 $p_\pm$及普吕克嵌入的密切轨迹 $Z_k^\pm$，因此可逐步提升到迭代爆破 $\mathcal{TL}_n$。由于 φ 已经保持每个例外除子，这个提升在 R_n 为同构的公共开子集上与 φ 一致；因此 φ 是双正则的。□

3.2. **Cox环与 $\mathcal{TL}_n$ 的可动锥**。现在我们来描述 $\mathcal{TL}_n$的 Cox 环。这使我们能够用上文引入的 $\mathscr{B}$稳定除子来表示其可动锥。

引理 3.32。对于每个 $0 \le i \le n-1$ 以及每个符号 $\pm$，我们有

$$h^0\big(\mathcal{TL}_n, \mathcal{O}_{\mathcal{TL}_n}(D_i^\pm)\big) = 1,$$

以及唯一的 （相差一个标量）非零截面是典范截面 $s_{D_i^\pm}$，其零点恰好沿着 $D_i^\pm$。

此外，对于每个 $1 \le k \le n-1$ 集合

$$V_k := H^0\big(\mathcal{TL}_n, \mathcal{O}_{\mathcal{TL}_n}(B_k)\big), \qquad r_k := \dim V_k.$$

那么， V_k 是由 $\mathscr{B}$–特征向量 s_{B_k} 生成的不可约 $\mathscr{G}$–模，并且可以如下识别。设 $f\colon\ \bigwedge^n(W \oplus W^\vee) \longrightarrow \bigwedge^{n-2}(W \oplus W^\vee)$ 是用 $W \oplus W^\vee$ 上的标准辛形式进行的收缩。映射 f 限制为 $\mathrm{GL}(W^\vee)$–等变收缩

$$\mathrm{contr}_k\colon \bigwedge^{n-k} W \otimes \bigwedge^{k} W^\vee \longrightarrow \bigwedge^{n-k+1} W \otimes \bigwedge^{k-1} W^\vee, \qquad 1 \le k \le n.$$

对于 $1 \le k \le n-1$，存在 $\mathscr{G}$–模的同构 $V_k^\vee \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{contr}_k)$，因此 $r_k = \binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}$ 其中 $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$。

证明。固定 $0 \le i \le n-1$。我们知道存在一个 T–不变曲线类 C，它在 D_i^+ 中（分别在 D_i^- 中）可动，且满足 $D_i^{\pm} \cdot C < 0$。于是 $E \cdot C = D_i^{\pm} \cdot C < 0$，从而 $C \subset \mathrm{Supp}(E)$（否则会有 $E \cdot C \ge 0$）。最后，对于 $1 \le k \le n-1$，映射 contr_k 是满射，由此得出 V_k 的维数。□

注记 3.33. 注意， B_k 在 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 上的线性系由包含$\mathrm{LG}(n,2n)$ 在点 $p_{\pm}$ 处若干密切空间张成空间的超平面截得（参见 [Fan26，引理 3.9]），关于格拉斯曼流形的情形）。因此， V_k 的维数也可以由 [FMR20，命题 3.9]推出。

命题 3.34. *Cox* 环 $\mathrm{Cox}(\mathcal{TL}_n)$ 是有限生成的 $\mathbb{C}$–代数，由以下元素生成：

- 边界除子 $D_i^{\pm}$、 $0 \le i \le n-1$ 的典范截面，以及 - 对每个满足 $1 \le k \le n-1$ 的颜色 B_k，向量空间 $V_k = H^0(\mathcal{TL}_n, \mathcal{O}_{\mathcal{TL}_n}(B_k))$ 的一组基，其维数为 $r_k = \binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}$。

具体而言，令

$$s_{D_i^+} \in H^0\big(\mathcal{TL}_n, \mathcal{O}_{\mathcal{TL}_n}(D_i^+)\big), \qquad s_{D_i^-} \in H^0\big(\mathcal{TL}_n, \mathcal{O}_{\mathcal{TL}_n}(D_i^-)\big) \qquad (0 \le i \le n-1)$$

为恰好在 $D_i^{\pm}$ 上消失的典范截面，并对每个 $1 \le k \le n-1$ 选取一组基

$$s_{k,1}, \dots, s_{k,r_k} \in V_k = H^0\big(\mathcal{TL}_n, \mathcal{O}_{\mathcal{TL}_n}(B_k)\big).$$

则 $\mathrm{Cox}(\mathcal{TL}_n)$ 由以下集合生成

$$\{ s_{D_i^+}, s_{D_i^-} \mid 0 \le i \le n-1 \} \cup \{ s_{k,\ell} \mid 1 \le k \le n-1,\ 1 \le \ell \le r_k \},$$

因此生成元总数为 $2n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} \right)$。

相对于由 $H,\ D_0^+, \dots, D_{n-2}^+,\ D_0^-, \dots, D_{n-2}^-$ 给出的 $\mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_n)$ 的基，这些生成元的 $\mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_n)$–分次为

$$\deg(s_{D_i^+}) = [D_i^+],\ \deg(s_{D_i^-}) = [D_i^-] \qquad (0 \le i \le n-2),$$

并利用命题 *3.2*,

$$\deg(s_{D_{n-1}^+}) = [D_{n-1}^+] = H - \sum_{i=0}^{n-2} (n-i)\, D_i^+, \qquad \deg(s_{D_{n-1}^-}) = [D_{n-1}^-] = H - \sum_{i=0}^{n-2} (n-i)\, D_i^-,$$

而对于 $1 \le k \le n-1$ 和 $1 \le \ell \le r_k$，有

$$\deg(s_{k,\ell}) = [B_k] = H - \sum_{i=0}^{n-k-1} (n-k-i)\, D_i^+ - \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\, D_i^-.$$

等价地，分次矩阵是$(2n-1) \times \left(2n + \sum_{k=1}^{n-1} r_k\right)$ 整数矩阵，其列恰好是上文列出的度向量，其中 $[B_k]$ 的度向量重复 r_k 次。

证明。对于球面簇 X，$\mathrm{Cl}(X)$–分次 Cox 环由$\mathscr{G}$–稳定素除子的典范截面，以及对应于颜色 D[的 $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ 的有限个单纯 $\mathscr{G}$– 子模生成（ADHL15，定理 4.5.4.6]）。引理 3.32 表明，每个 $H^0(\mathcal{TL}_n, \mathcal{O}(D_i^{\pm}))$ 都是一维的，因此各贡献一个生成元；而每种颜色 B_k 恰好贡献 $r_k = \dim H^0(\mathcal{TL}_n, \mathcal{O}(B_k))$ 个生成元，即一个基 $s_{k,1}, \dots, s_{k,r_k}$。显式次数由命题 3.2 得出，分次矩阵则通过将这些度向量排列为列得到。□

由于 $\mathcal{TL}_n$ 是一个莫里梦空间，其可动锥是多面锥，并且可以用考克斯环生成元的皮卡群$(\mathcal{TL}_n)$次数来描述。我们使用 [ADHL15，命题 3.3.2。3] 其内容如下：设X 是一个不可约正规完备簇，且其$\mathrm{Cl}(X)$ 群和 Cox 环有限生成。选取一组$f_1, \dots, f_t$两两不关联的$\mathrm{Cl}(X)$-素生成元$\mathrm{Cox}(X)$。则

$$\mathrm{Mov}(X) = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{Cone}\left(\deg(f_j) \mid j \ne i \right) \subset \mathrm{Cl}(X)_{\mathbb{Q}}.$$

注 3.35. 对于 $1 \le k \le n-1$，除子 B_k 至少有两个线性无关截面，因此存在至少两个两两不相关联的 $\mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_n)$–素 Cox 环生成元，且它们的次数均为 $\deg(B_k)$。因此，在利用 Cox 次数计算 $\mathrm{Mov}(\mathcal{TL}_n)$ 时，分次矩阵中必须至少两次插入列 $\deg(B_k)$。相比之下， B_0 和 B_n 是刚性的，且只插入一次。

将 $X = \mathcal{TL}_n$专门化后，我们选取由 $\mathscr{B}$–稳定素除子的典范截面给出的 Cox 生成元，并采用注 3.35中的重数约定。具体而言，定义度向量列表

$$\mathsf{Deg}_n := \big(\deg(B_i), \deg(B_i),\ \deg(D^+_{n-1}), \deg(D^-_{n-1}),\ \deg(D^+_j),\ \deg(D^-_j)\big),$$

对于 $1 \le i \le n-1$, $0 \le j \le n-2$，其中所有次数均以基 $(H; D^+_0, \dots, D^+_{n-2};\ D^-_0, \dots, D^-_{n-2})$ 表示。

命题 3.36。 令$\mathsf{Deg}_n = (v_1, \dots, v_m)$为上述次数列表，其中 $m = 4n-2$，并设

$$\mathrm{Mov}_n := \bigcap\nolimits_{i=1}^{m} \mathrm{Cone}(v_j \mid j \ne i) \subset \mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_n)_{\mathbb{Q}}.$$

则 $\mathrm{Mov}(\mathcal{TL}_n) = \mathrm{Mov}_n$。特别地，$\mathrm{Mov}(\mathcal{TL}_n)$ 的极端射线恰为多面锥Mov_n的射线。

证明。由于 $\mathcal{TL}_n$ 是一个莫里梦空间，其 Cox 环有限生成，且 $\mathsf{Mov}(\mathcal{TL}_n) \subset \mathsf{Pic}(\mathcal{TL}_n)_{\mathbb{Q}}$ 是一个有理多面锥。令 $f_1, \dots, f_t$ 为 $\mathsf{Cox}(\mathcal{TL}_n)$ 的一组两两不关联的 $\mathsf{Pic}(\mathcal{TL}_n)$– 素生成元。根据 [ADHL15，命题 3.3.2。3]，有 $\mathsf{Mov}(\mathcal{TL}_n) = \bigcap_{k=1}^{t} \mathsf{Cone}\big(\deg(f_\ell) \mid \ell \ne k\big)$。因此，上述交可按 Deg_n 的元素进行索引，从而得到 $\mathsf{Mov}(\mathcal{TL}_n) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathsf{Cone}\big(v_j \mid j \ne i\big)$。□

例 3.37 （情形 $n = 2$）。回顾一下，$\mathsf{LG}(2,4) \cong Q^3 \subset \mathbb{P}^4$ 是一个光滑二次三维簇。R_2: $\mathcal{TL}_2 \to Q^3$是将 Q^3 在两个 $\mathscr{B}$–固定点 p_+, p_-处进行的爆破。于是 $\mathsf{Pic}(\mathcal{TL}_2) \cong \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}D^+_0 \oplus \mathbb{Z}D^-_0$, , 其中

$$H = (\mathrm{R}_2)^* \mathcal{O}_{Q^3}(1), \qquad D^+_0 = \mathrm{R}_2^{-1}(p_+) \cong \mathbb{P}^2, \qquad D^-_0 = \mathrm{R}_2^{-1}(p_-) \cong \mathbb{P}^2.$$

其余的 $\mathscr{B}$–稳定边界除子为 $D^\pm_1 = H - 2D^\pm_0$，唯一的非刚性色为 $B_1 = H - D^+_0 - D^-_0$，反典范类由 $-K_{\mathcal{TL}_2} = 3H - 2D^+_0 - 2D^-_0$给出。在 $\mathsf{Pic}(\mathcal{TL}_2)_{\mathbb{Q}}$ 中有

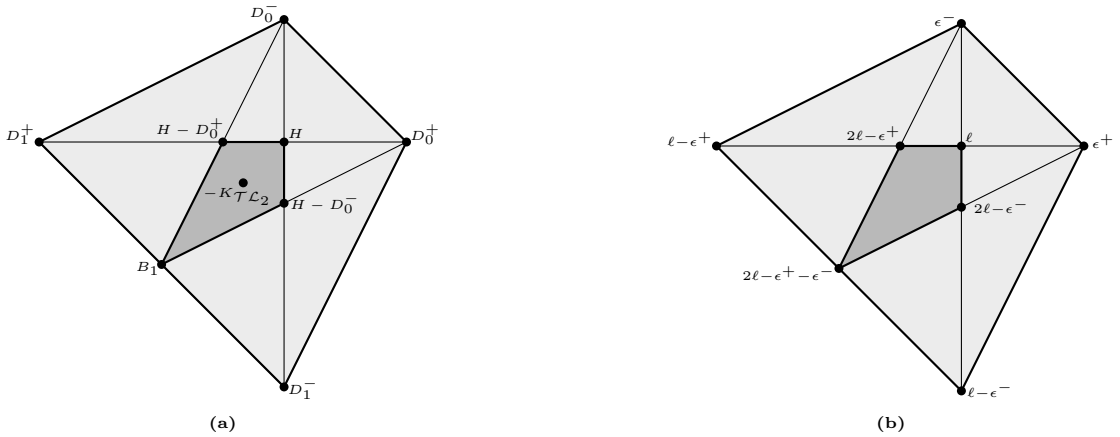
$$\mathsf{Eff}(\mathcal{TL}_2) = \text{有效锥}\ (D^+_0, D^+_1, D^-_0, D^-_1), \qquad \mathrm{Mov}(\mathcal{TL}_2) = \mathrm{Nef}(\mathcal{TL}_2) = \mathrm{Cone}\big(H,\ H - D^+_0,\ H - D^-_0,\ B_1\big).$$

$\mathsf{Mov}(\mathcal{TL}_2)$ 的 Mori室分解由一个室构成，即 $\mathsf{Mov}(\mathcal{TL}_2) = \mathsf{Nef}(\mathcal{TL}_2)$。

$\mathrm{NE}(\mathcal{TL}_2)$ 由以下 T不变曲线类生成 $C_0 = [\gamma_0]$， $C_1 = [\gamma_1]$， $C^\pm_1 = [\zeta^\pm_1]$ 如定义3.7所示。曲线 $C^+_1 \subset D^+_0$ 和 $C^-_1 \subset D^-_0$ 由 π 收缩，并由相应例外平面中的直线表示。设 $\epsilon^+ := C^+_1, \epsilon^- := C^-_1$，并令 ℓ 表示一般直线的严格变换。那么

$$\mathrm{NE}(\mathcal{TL}_2) = \mathrm{Cone}(\epsilon^+, \epsilon^-, \ell - \epsilon^+, \ell - \epsilon^-), \quad \mathrm{Mov}_1(\mathcal{TL}_2) = \mathrm{Cone}\big(\ell,\ 2\ell - \epsilon^+,\ 2\ell - \epsilon^-,\ 2\ell - \epsilon^+ - \epsilon^-\big).$$

从几何上看， $2\ell - \epsilon^+$ （分别为 $2\ell - \epsilon^-$）由 Q^3 的一般平面截面二次曲线的严格变换表示，该曲线经过 p_+（分别为 p_-）且避开另一点。这些圆锥曲线可以移动并覆盖 $\mathcal{TL}_2$。类 $2\ell - \epsilon^+ - \epsilon^-$ 由一条同时经过 p_+ 和 p_- 的一般平面截面二次曲线的严格变换表示；改变平面可得到一个覆盖族，因此该类张成 $\mathsf{Mov}_1(\mathcal{TL}_2)$ 的一个极端射线。



(a) (b)

图2。 (a) $\mathsf{Eff}(\mathcal{TL}_2)$ 的二维截面。浅灰色区域为有效锥的截面；深灰色四边形为可移动锥（也是数值有效锥）。(b) $\mathrm{NE}(\mathcal{TL}_2)$ 的二维截面（浅灰色），以及移动曲线锥 $\mathrm{Mov}_1(\mathcal{TL}_2)$ 的二维截面（深灰色）。

根据命题 3.34 ，我们得到 $\mathrm{Cox}(\mathcal{TL}_2)$ 的生成元。令 X_{tor} 为与以下集合相关联的典范托里克嵌入： $\mathscr{B}$–稳定素除子和颜色（因此，其 Cox 环是一个以$\mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_2)$ 分次、权由以下对象的类给出的 $D^\pm_0, D^\pm_1, B_1$）。 的莫里室分解与相应权配置的 GKZ分解（次级扇）一致。特别地，

GKZ 扇将 Mov(X_{tor})细分为有限个极大室，这些室的数量给出了 $\mathcal{TL}_2$的莫里室数量的上界，因为从 X_{tor} 限制到 $\mathcal{TL}_2$时，墙可能会塌缩。

为说明墙坍缩现象，以 $H-D_0^+$ 与 $H-D_0^-$ 之间的墙为例。令 $X:=\mathrm{Bl}_{\{p_+,p_-\}}\mathbb{P}^4$，爆破映射为 π，例外除子为 $E_+=\pi^{-1}(p_+)$ 和 $E_-=\pi^{-1}(p_-)$。考虑除子 $B_1^{\mathrm{amb}}:=H-E_+-E_-$。完全线性系 $|B_1^{\mathrm{amb}}|$ 是 $\mathbb{P}^4$ 中同时经过 p_+ 和 p_- 的超平面的严格变换。所有这类超平面的交是直线$L:=\langle p_+p_-\rangle\subset\mathbb{P}^4$，因此 $|B_1^{\mathrm{amb}}|$ 的稳定基点集等于 L 的严格变换 $\widetilde{L}\subset X$。所以 B_1^{amb} 在 X 上不是数值有效的。在环境托里克簇 X 的 GKZ/Mori 室分解中，这种非数值有效性会产生一条真正的墙：穿过这条墙会改变稳定基点集（并对应于由曲线 $\widetilde{L}$ 决定的双有理操作）。现在，将其限制到二次三维簇 Q^3 上，限制线性系的基点集为$\bigcap_{H'\supset\langle p_+,\ p_-\rangle}(Q^3\cap H')=Q^3\cap L=\{p_+,p_-\}$。因此，在爆破 $p_\pm$ 之后，基点被消去，除子 $B_1=H-D_0^+-D_0^-$ 在 $\mathcal{TL}_2$ 上变为无基点。特别地，由曲线 L 产生的环境墙$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，对于 $L\not\subset\mathcal{TL}_2$，在限制到 $\mathcal{TL}_2$ 后消失。

例 3.38（情形 $n=3$）。我们有 $\mathrm{Pic}(\mathcal{TL}_3)\cong\mathbb{Z}H\oplus\mathbb{Z}D_0^+\oplus\mathbb{Z}D_1^+\oplus\mathbb{Z}D_0^-\oplus\mathbb{Z}D_1^-$, 以及 $D_2^\pm=H-3D_0^+-2D_1^+$。颜色为 $B_1=H-2D_0^+-D_1^+-D_0^-$和 $B_2=H-D_0^+-2D_0^--D_1^-$。注意到

$$\mathrm{Eff}(\mathcal{TL}_3)=\mathrm{Cone}\big(D_0^+,D_1^+,D_2^+,D_0^-,D_1^-,D_2^-\big).$$

在基（$H,D_0^+,\quad D_1^+,D_0^-,D_1^-$）中，可动锥 Mov($\mathcal{TL}_3$) 有 16 条极端射线，由以下向量给出

$$(1,-1,0,-2,-1),(1,-2,-1,-1,0),(1,0,0,-2,-1),(2,-2,0,-3,-2),(2,0,0,-3,-2),(2,-3,-2,-2,0),(1,-2,-1,0,0),(2,-3,-2,0,0),(1,0,0,0,0),(1,-1,0,0,0),(1,0,0,-1,0),(1,-1,0,-1,0),(3,-4,-2,-4,-2),(3,-4,-2,-3,-2),(3,-3,-2,-4,-2),(3,-3,-2,-3,-2).$$

根据命题 3.14，$\mathrm{Nef}(\mathcal{TL}_3)$ 由该列表中的前 8 条射线生成。直接进行 GKZ/次级扇计算可得 88 个极大室，对应于 X_{tor}。因此，$\mathrm{Mov}(\mathcal{TL}_3)$ 至少有 88 个 Mori室。

根据命题 3.9，莫里锥 $\mathrm{NE}(\mathcal{TL}_3)\subset N_1(\mathcal{TL}_3)_{\mathbb{R}}$ 由以下 T–不变曲线类$C_0=[\gamma_0]$、$C_1=[\gamma_1]$、$C_2=[\gamma_2]$、$C_1^\pm=[\zeta_1^\pm]$, $C_2^\pm=[\zeta_2^\pm]$生成。下面从几何角度构造这些生成元。

固定一个辛向量空间 (V,ω)，其辛基为 $(e_1,e_2,e_3,f_1,f_2,f_3)$，满足 $\omega(e_i,f_j)=\delta_{ij}$且$\omega(e_i,e_j)=\omega(f_i,f_j)=0$。令 $T\subset\mathrm{Sp}(V,\omega)$ 为作用于 $\mathrm{LG}(V,\omega)\cong\mathrm{LG}(3,6)$ 上的对角环面。我们有以下由 T 固定点构成的链

$$p_0:=\langle f_1,f_2,f_3\rangle=p_-,\quad p_1:=\langle e_1,f_2,f_3\rangle,\quad p_2:=\langle e_1,e_2,f_3\rangle,\quad p_3:=\langle e_1,e_2,e_3\rangle=p_+.$$

对于每个 $k=0,1,2$，都有唯一一条 T–不变直线 $L_k\cong\mathbb{P}^1\subset\mathrm{LG}(3,6)$，连接 p_k与 p_{k+1}，它由改变辛 2–平面 $\langle e_{k+1},f_{k+1}\rangle$ 中的第 $(k+1)$ 个方向并保持另外两个基方向不变而得到。γ_1 是 L_1的严格变换。特别地，γ_1 与两个第二层边界除子 D_1^+和 D_1^-均相交（每个边界除子上横截于一点）。

考虑类 $C_0=[\gamma_0]$。直线 L_0 包含在 $-$ 侧的第二中心 Z_1^-中。令 $\pi_1\colon X_1\to\mathrm{LG}(3,6)$ 为沿着 Z_0^+,Z_1^+,Z_0^-的严格变换进行的吹起，使得 $\mathcal{TL}_3\to X_1$ 是 $\widetilde{\ }$迭代吹起构造的最后一步。记 Z_1^-为 Z_1^-在 π_1下的严格变换。显然，

$$D_1^+|_{L_2}\cong\mathbb{P}\big(N_{\widetilde{Z}_1^+/\,X_1}|_{L_2}\big)\longrightarrow L_2 \tag{3.39}$$

是一个 $\mathbb{P}^2$–丛，底空间为 $\mathbb{P}^1$。T–作用将法丛分裂为权–子丛，并且存在一个特异的 T–不变商线丛，其射影化给出一个 T–不变截面，属于（3.39）。该截面即曲线 γ_2。对称地，类 $C_0=[\gamma_0]$ 可在 $-$ 一侧得到。

$C_1^+=[\zeta_1^+]$（相应地，$C_1^-=[\zeta_1^-]$）在随后的胀开之前由射影化切空间 $\mathbb{P}(T_{p_\pm}\mathrm{LG}(3,6))$ 中的一条直线表示，并且我们对其在 $\mathcal{TL}_3$ 中的严格变换沿用同一记号。$C_2^+=[\zeta_2^+]$（相应地，$C_2^-=[\zeta_2^-]$）由例外除子 $D_1^+\to\widetilde{Z}_1^+$（相应地，$D_1^-\to\widetilde{Z}_1^-$）的一条纤维中的直线表示，即第二中心的射影化法空间中的一条直线。所有 ζ–曲线均被 R_3 收缩。

令 $\ell\in N_1(\mathcal{TL}_3)$ 为 $\mathrm{LG}(3,6)$中的一条一般直线的拉回，令 $e_0^\pm:=C_1^\pm,e_1^\pm:=C_2^\pm$，并固定 $(\ell,e_0^+,e_1^+,e_0^-,e_1^-)$ 的基 $N_1(\mathcal{TL}_3)$。根据命题 3.11，可动锥$_1(\mathcal{TL}_3)$ 的极端射线由以下元素生成

$$\begin{aligned}&(1,0,0,0,0),\ (2,0,-1,0,0),\ (2,0,0,0,-1),\ (2,0,-1,0,-1),\ (3,-1,0,0,0),\\&(3,0,0,-1,0),\ (3,-1,0,-1,0),\ (6,0,-3,-2,0),\ (6,-2,0,0,-3).\end{aligned} \tag{3.40}$$

注记 3.41（Maple 实现）。用于对 $\mathcal{TL}_n$进行多面体计算的 Maple 工作表可在以下网址获取

https://github.com/msslxa/Kausz

它们实现了 $\mathcal{TL}_n$ 的 Cox 环的分次矩阵，并计算了锥 Eff($\mathcal{TL}_n$)、Mov($\mathcal{TL}_n$) 和 Nef($\mathcal{TL}_n$)，以及有效曲线锥和活动曲线锥的射线。

4. Stable Maps in Lagrangian Grassmannians

根据 [KM94、FP97、KV07], 我们回顾稳定映射模空间的一些基本记号和性质到拉格朗日格拉斯曼流形。

设 $\beta \in H_2(\mathrm{LG}(n,2n),\mathbb{Z})$ 是一个有效曲线类。设 $M_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n),\beta)$ 为带标记点映射 $(C,p_1,\cdots,p_k,f)$ 的同构类集合，其中 C 是一条光滑有理曲线，标记点 $p_1,\cdots,p_k$ 是 C 中互不相同的点，并且 f 是从 C 到 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 的态射，满足 $f_*([C])=\beta$。设 $M_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n),\beta)$ 表示到 $\mathrm{LG}(n,2n)$、曲线类为 β 的 k 点标记亏格 0 稳定映射的 Kontsevich 模空间。

由于 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 是凸的，即对于每个态射 $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathrm{LG}(n,2n)$,$M_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n),\beta)$ 都是正规、不可约且具有期望维数：

$$\dim \overline{M}_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n),\beta) \;=\; \dim \mathrm{LG}(n,2n) + c_1(T_{\mathrm{LG}(n,2n)})\cdot\beta + k - 3. \tag{4.1}$$

我们关注 $\beta=\beta_n$ 是一般 $\mathbb{C}^*$–轨道闭包的同调类的情形。等价地，β_n 是唯一满足 $c_1(\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}(1))\cdot\beta_n = n$ 的有效类。为简化记号，按照格罗莫夫–维滕理论中的通常约定，我们记作 $M_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n),n) := M_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n),\beta_n)$。

对于每个 $k\geq 1$，都有求值态射

$$\mathrm{ev}_i\colon \overline{M}_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n),n) \longrightarrow \mathrm{LG}(n,2n), \qquad 1\leq i\leq k,$$

由 $\mathrm{ev}_i\big((C,p_1,\ldots,p_k,f)\big) := f(p_i)$ 定义。于是，对于 $k=2$，我们有求值态射

$$\mathrm{ev} = (\mathrm{ev}_1,\mathrm{ev}_2)\colon \overline{M}_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n) \longrightarrow \mathrm{LG}(n,2n)\times\mathrm{LG}(n,2n).$$

定义 4.2. 对于 $p,q\in\mathrm{LG}(n,2n)$，我们将 $F_{p,q}:=\mathrm{ev}^{-1}(p,q)\subset M_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 表示为二点求值映射在 (p,q) 上的纤维，并赋予其约化概形结构。

接下来，我们证明对于一般的一对 (p,q)，纤维 $F_{p,q}$ 同构于 CQ_n。

继续之前，我们更准确地回顾 Kontsevich 空间的模性质。一个 k–点带标记映射 $(C,p_1,\cdots,p_k,f)$ 是一个态射 $f\colon C\to\mathrm{LG}(n,2n)$，其中 C 表示一棵射影直线树，带有 k 个互不相同的标记点，这些标记点都是 C 的光滑点。若存在一个概形同构 $\tau\colon C\to C'$，将 p_i 映到 p_i'，且满足 $f'\circ\tau=f$，则称 $(C,p_1,\cdots,p_k,f)$ 与 $(C',p_1',\cdots,p_k',f')$ 同构。若一个 k-点带标记映射 $f\colon C\to\mathrm{LG}(n,2n)$ 的任一不可约分支若映到一个点时，均作为带标记曲线稳定，则称该映射为 Kontsevich稳定。

基概形 B 上的一族 k 带标记点的映射是一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\;f\;} & \mathrm{LG}(n,2n) \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \\ B & & \end{array} \tag{4.3}$$

以及 k 个互不相交的截面 $\sigma_1,\ldots,\sigma_k\colon B\to\mathfrak{X}$，满足：

- π 是由光滑有理曲线组成的树的平坦族；- 截面 σ_i 不与 π 的纤维的奇点相交。

因此，对每个 $b\in B$，限制 $f_b\colon \mathfrak{X}_b\to\mathrm{LG}(n,2n)$ 是一个 k 点带标记点的映射，其标记点为 $\sigma_1(b),\ldots,\sigma_k(b)$。在 B 上的两个映射族 $(\pi\colon \mathfrak{X}\to B,\{\sigma_i\},f)$、$(\pi'\colon \mathfrak{X}'\to B,\{\sigma_i'\},f')$ 同构，当且仅当存在一个概形同构 $\tau\colon \mathfrak{X}\to\mathfrak{X}'$，满足：$\pi=\pi'\circ\tau$、$\sigma_i'=\tau\circ\sigma_i$、$f=f'\circ\tau$。

令 $\overline{M}^*_{0,n}(\mathrm{LG}(n,2n),n)\subset\overline{M}_{0,n}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 表示没有非平凡自同构的稳定映射所构成的开子集。根据 [FP97 定理 2], $M^*_{0,n}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 是一个光滑的精细模空间（针对无自同构的稳定映射），并配备有一个万有族

$$\Pi\colon \mathcal{U}\to\overline{M}^*_{0,n}(\mathrm{LG}(n,2n),n). \tag{4.4}$$

这意味着，对于任意一族 $\mathcal{X}\to B$ 此类曲线，都存在唯一的态射 $\kappa\colon B\to M$，使得拉回 $\kappa^*\mathcal{U}$ 作为 B上的族与 $\mathcal{X}$ 同构。

应用引理2.23、命题2.24 以及标记点 $p_1 = p_+$, $p_2 = p_-$，我们从态射P_n: $\mathcal{TL}_n \to \mathsf{CQ}_n$ 导出一族2点标记稳定映射，其纤维嵌入于$\mathrm{LG}(n,2n)$，且其中（f的态射4.3）由R_n: $\mathcal{TL}_n \to \mathrm{LG}(n,2n)$给出。于是存在唯一的态射

$$i\colon \mathsf{CQ}_n \to \overline{M}^*_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n) \subset \overline{M}_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n) \tag{4.5}$$

将该族拉回的态射。根据引理 2.23中的性质 (d)，此态射到其像的限制是双射。

引理 4.6。 设 $q \in \mathsf{CQ}_n$ 为一般点，且设 $Z_q \simeq \mathbb{P}^1$ 为 P_n 的相应纤维。则典范子丛 $\mathcal{S}$ 在 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 上的限制满足

$$\mathcal{S}|_{\mathrm{R}_n(Z_q)} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus n}.$$

因此，

$$T_{\mathrm{LG}(n,2n)}|_{\mathrm{R}_n(Z_q)} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)^{\oplus \dim \mathrm{LG}(n,2n)} \quad \text{and} \quad N_{\mathrm{R}_n(Z_q)/\mathrm{LG}(n,2n)} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)^{\oplus(\dim \mathrm{LG}(n,2n)-1)}.$$

证明。由引理 2.23(c)，曲线 $\mathrm{R}_n(Z_q)$ 是一条光滑的次数为 n 的嵌入 $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathrm{LG}(n,2n)$，经过$p_-$ 和 p_+。由引理 2.25，经过对 $\mathbb{P}^1$ 作参数变换后，我们可以将其写成 p_- 周围大胞腔中的矩阵 (2.26) 的行张成，其中 $f_{ij}(t) = a_{ij}\,t$，且 $A = (a_{ij})$ 是一个对称矩阵。由于普吕克坐标 P_{I^*} 在 $t = 0$ 处的消失阶数为 n，故 $\det(A) \neq 0$, 因此 A 可逆，且点 $t = \infty$ 映至 p_+。

写出齐次坐标 $[u : v]$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上（因此 $t = v/u$），沿着曲线的拉格朗日子空间族是秩为 n 的子丛

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2n}, \qquad (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} u\,I_n & v\,A \end{pmatrix},$$

其在 $[u:\ v]$ 上的纤维恰好是 $\mathbb{C}^{2n}$中的对应 n平面。因此 $\mathcal{S}|_{\mathrm{R}_n(Z_q)} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus n}$。

最后，对于拉格朗日格拉斯曼流形，有 $T_{\mathrm{LG}(n,2n)} \simeq \mathrm{Sym}^2(\mathcal{S}^\vee)$，因此 $T_{\mathrm{LG}(n,2n)}|_{\mathrm{R}_n(Z_q)} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)^{\oplus \dim \mathrm{LG}(n,2n)}$，且法丛通过商去掉 $T_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ 得到。□

定理 4.7。 对于一般的 $p,q \in \mathrm{LG}(n,2n)$，$F_{p,\,q} \subset \overline{M}^*_{0,\,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$。此外，*(4.5)* 诱导出从 CQ_n 到 $F_{p,\,q}$ 的同构。

证明。 存在 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 的一个自同构 g，使得 $g \cdot p_+ = p, g \cdot p_- = q$，其中 p_+, p_- 由 (2.7) 定义。于是，在 $\overline{M}_{0,\,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 上的诱导作用限制为 $F_{p_+,\,p_-}$ 与 $F_{p,\,q}$ 之间的同构。因此，在下文中，我们集中讨论 $F_{p_+,\,p_-}$。

显然，$i(\mathsf{CQ}_n) \subset F_{p_+,\,p_-}$。下面证明 $F_{p_+,\,p_-} \subset i(\mathsf{CQ}_n)$。

取一个一般的几何纤维 $Z_q \simeq \mathbb{P}^1$，它属于P_n，并令 $C_q := \mathrm{R}_n(Z_q) \subset \mathrm{LG}(n,2n)$。由 [Per02], $\mathrm{Hilb}^{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$是不可约且光滑的。由引理4.6 可得

$$N_{C_q/\mathrm{LG}(n,2n)} \cong \mathcal{O}(2)^{\oplus\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)}.$$

因此，希尔伯特概形在 $[C_q]$处的切空间，即 $H^0(C_q, N_{C_q/\mathrm{LG}(n,\,2n)})$，其维数为 $\binom{3n}{(n+1)_2} - 3$，这等于 $\dim \mathrm{Hilb}^{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$。

令 $M^0_{0,\,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n) \subset \overline{M}_{0,\,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 表示次数为 n 的 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 嵌入轨迹。注意到 $M_{0,\,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 不可约，且 $\dim \overline{M}_{0,\,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n) = 3\dim \mathrm{LG}(n,2n) + 2 - 3$由式（4.1）可知，我们得出 $M^0_{0,\,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 是 $M_{0,\,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 的开稠密子集。

假设存在一点 $x \in F_{p_+,p_-}$，使得 $x \notin i(\mathsf{CQ}_n)$。那么存在点列 $y_1, y_2, \cdots \in M^0_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$，使得 $\lim_{i=1}^{\infty} y_i = x$。沿用引理 2.29 中的论证，我们可以得出：当 i 足够大时，存在一个 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 的自同构 τ，它非常接近恒等变换，并且 $\tau(\mathfrak{x}_{y_i})$经过 p_+, p_-，且 $\tau(y_i) \notin i(\mathsf{CQ}_n)$。然而，根据引理 2.25，必有 $\tau(y_i) \in i(\mathsf{CQ}_n)$，这就产生了矛盾。

由（2.1）定义的作用在 $\overline{M}^*_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 上诱导出一个 $\mathbb{C}^*$ 作用。从集合论的角度看，$\overline{M}^*_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 中的 $\mathbb{C}^*$ 不动点轨迹恰为 F_{p_+,p_-}。

由于 $\overline{M}^*_{0,\,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 光滑且 $\mathbb{C}^*$ 是线性约化的，其不动点轨迹也是光滑的：在不动点 x 处，不动点轨迹的切空间是不变子空间 $T_x(\overline{M}^*_{0,\,2})^{\mathbb{C}^*}$。因此 $F_{p_+,\,p_-}$ 光滑。

最后，态射 $i\colon \mathsf{CQ}_n \to F_{p_+,\,p_-}$ 根据构造是双射；由于 CQ_n 是射影的，且 $M^*_{0,\,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 是分离的，因此它是真态射。因此 i 是拟有限且真态射，故为有限态射。由于 $F_{p_+,\,p_-}$ 是光滑的（特别是正规的），扎里斯基主定理蕴含 i 是一个同构。

□

遗忘第 k 个 标记点，并在必要时稳定定义域曲线，我们得到遗忘映射

$$\phi_k\colon \overline{M}_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n),d) \longrightarrow \overline{M}_{0,k-1}(\mathrm{LG}(n,2n),d).$$

Michałek–Monin–Wiśniewski [MMW21，推论 3.11] 表明，实 CQ_n 实现为 $\mathbb{C}^*$– 不动点轨迹的连通分支：$M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$。我们通过遗忘标记点来恢复这一构造，具体如下。

定理 4.8。 设 i 由 *(4.5)* 给出。复合映射

$$\phi_1\circ\phi_2\circ i\colon \mathsf{CQ}_n \to \overline{M}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),n) \tag{4.9}$$

是一个闭嵌入。换言之，CQ_n 通过遗忘经过 p_+ 和 p_-的稳定映射的两个标记点，实现为无标记点 *Kontsevich* 模空间的一个闭子簇。因此，对于任意一般点 $p,q\in\mathrm{LG}(n,2n)$，我们有闭嵌入

$$(\phi_1\circ\phi_2)|_{F_{p,q}}\colon F_{p,q}\longrightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),n).$$

证明。 由定理 4.7， $F_{p,q}\subset M^*_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$。由于从集合论的角度看， $\phi_1\circ\phi_2$ 是通过遗忘标记点并稳定化定义域曲线得到的，我们得出 $(\phi_1\circ\phi_2)(F_{p,q})\subset M^*_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$。令 $M^{emb}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 表示 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 中参数化稳定映射 $f\colon C\to\mathrm{LG}(n,2n)$ 且 f 为闭嵌入的开子集。于是，将稳定映射映至其像，我们得到一个自然的遗忘态射

$$\Phi : \overline{M}^{emb}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),n)\longrightarrow \mathrm{Hilb}_{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n)). \tag{4.10}$$

根据命题 2.24，

$$\Phi\circ\phi_1\circ\phi_2\circ i\colon \mathsf{CQ}_n\to\mathrm{Hilb}_{nt+1}(\mathrm{LG}(n,2n))$$

是一个闭嵌入。因此（4.9）是一个闭嵌入。 □

推论 4.11。 令 $U\subset\mathrm{LG}(n,2n)\times\mathrm{LG}(n,2n)$ 为满足定理 *4.7*和*4.8* 的配对 (p,q) 所构成的开子集。改变$(p,q)\in U$ 时，像$(\phi_1\circ\phi_2)(F_{p,q})$ 遍历 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$中的一个开稠密轨迹。

证明。 由于态射（4.10）在 $M^*_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 上诱导一个开嵌入，推论 4.11 可直接由断言 2.30 得出。 □

令 $M_{p,q}:=(\phi_3)^{-1}(F_{p,q})\subset\overline{M}_{0,3}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$，它参数化满足 $f(p_1)=p$且 $f(p_2)=q$ 的三点标记稳定映射 (C,p_1,p_2,p_3,f)。这里 $\phi_3\colon M_{0,3}(\mathrm{LG}(n,2n),n)\to M_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 是遗忘最后一个标记点的态射。

定理 4.12。 对于一般的点对 (p,q)，存在同构 $M_{p,q}\xrightarrow{\sim}\mathcal{TL}_n$，其定义在 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 上。在此同一化下，限制评价态射 $\mathrm{ev}_3|_{M_{p,q}}\colon M_{p,q}\to\mathrm{LG}(n,2n)$ 等于爆破 $\mathrm{R}_n\colon \mathcal{TL}_n\to\mathrm{LG}(n,2n)$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $p=p_+$ 且 $q=p_-$。由于 $F_{p_+,p_-}\subset M^*_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$，根据 [Man99，第五章定理 4.5]，$M_{p_+,p_-}$ 同构于 $F_{p_+,p_-}\cong\mathsf{CQ}_n$ 上的万有族，即 $\mathcal{TL}_n$。逐点考察稳定化过程可知，$ev_3|_{M_{p_+,p_-}}$ 与从万有族 $\mathcal{TL}_n$ 到其在 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 中的像的态射一致，也就是爆破 R_n。 □

注 4.13. 对于每个 $x\in\mathcal{TL}_n$，$M_{0,3}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 中对应的稳定映射由下式表示$[\alpha\colon C\to\mathrm{LG}(n,2n)]$，其中 C是 P_n 在 $\mathrm{P}_n(x)$ 上的纤维，α 是 R_n 在 C上的限制，第一标记点是唯一的交点 $(\mathrm{P}_n)^{-1}(\mathrm{P}_n(x))\cap D_0^+$，第二标记点是 $(\mathrm{P}_n)^{-1}(\mathrm{P}_n(x))\cap D_0^-$，第三标记点则是 x。当 x 是节点或与前两个标记点重合时，需要对定义域曲线进行稳定化。

根据定理 4.12，我们可以将 $\mathcal{TL}_n$与 $M_{p,q}\subset M_{0,3}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 视为相同。记 $\phi\colon M_{0,3}(\mathrm{LG}(n,2n),n)\to M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 为遗忘前两个标记点的态射。接着，将 ϕ限制到 $M_{p,q}$，得到一个态射 $\phi|_{M_{p,q}}\colon\mathcal{TL}_n\cong M_{p,q}\longrightarrow M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$。

推论 4.14。 对于一般的（p,q），$\phi|_{M_{p,q}}$ 是一个闭嵌入。

证明。我们 ay 假设 $p = p_+$ 和 $q = p_-$。那么，我们有以下交换图 :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{TL}_n & \xrightarrow{\sim} & M_{p_+,p_-} \subset \overline{M}_{0,3}(\mathrm{LG}(n,2n),n) & \xrightarrow{\phi} & \overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),n) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} & \mathrm{LG}(n,2n) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{P}_n} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_3} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \\ \mathsf{CQ}_n & \xrightarrow[\sim]{i} & F_{p_+,p_-} \subset \overline{M}_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),n) & \xrightarrow{\phi_1\circ\phi_2} & \overline{M}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),n) & & \end{array} \tag{4.15}$$

由于 $\phi_1 \circ \phi_2 \circ i$ 由定理 4.8是一个闭嵌入，因此推论 4.14 得证。 □

推论 4.16。随着这一对(p,q) 变化，像 $\phi(M_{p,q})$各自同构于 $\mathcal{TL}_n$，并覆盖 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),n)$ 的一个开稠密子集。

证明。由 (4.15)， $\phi(M_{p,q}) = (\phi_1)^{-1}(F_{p,q})$。然后，根据推论 4.11完成证明。 □

5. LG$(n,2n)$ 中带标记点的圆锥曲线模空间的双有理几何

我们首先回顾 Kontsevich 模空间 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上的若干除子类。

对于拉格朗日格拉斯曼流形 $\mathrm{LG}(n,2n) = \mathrm{LG}(V,\omega)$，固定一个由子空间 $\{0\} = F^0 \subset F^1 \subset F^2 \subset \cdots \subset F^n \subset V$ 构成的完全各向同性旗。令 $\mathcal{D}_n$ 为满足 $0 < \lambda_l < \cdots < \lambda_1 \leq n$ 的严格分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ 的集合，并以 $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$ 表示 λ 的权。对于每个 $\lambda \in \mathcal{D}_n$，存在一个余维-$|\lambda|$ 的舒伯特簇 $\Sigma^n_\lambda \subset \mathrm{LG}(n,2n)$，其定义如下

$$\Sigma^n_\lambda := \{W \in \mathrm{LG}(n,2n),\ \dim(W \cap F^{n+1-\lambda_i}) \geq i,\ i = 1,\ldots,l\}.$$

记 $\sigma_2 \in A^2(\mathrm{LG}(n,2n))$ 为有理系数肖群中唯一的余维 2 舒伯特类。定义典范类

$$H_{\sigma_2} := (\phi_2)_*(\mathrm{ev}_2^*\,\sigma_2) \in A^1(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)) \cong \mathrm{Pic}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2) \otimes \mathbb{Q},$$

其中 $\phi_2 \colon \overline{M_{0,2}}(\mathrm{LG}(n,2n),2) \to \overline{M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)}$ 是忘记最后一个标记点的态射，而 $\mathrm{ev}_2 \colon \overline{M_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),2)} \to \overline{\mathrm{LG}(n,2n)}$ 是第二个标记点处的求值态射。

定义求值类

$$H_1 := \mathrm{ev}_1^*\, c_1(\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}(1)) \in \mathrm{Pic}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2) \otimes \mathbb{Q},$$

其中 ev_1 是求值态射， $\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}(1)$ 是 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 上的普吕克线丛 .

$\overline{M_{0,\ k}(\mathrm{LG}(n,2n),d)}$ 的边界由定义在节点（可约）零亏格曲线上的映射构成。根据0，这是一个具有正规交叉的除子（忽略有限群商） [FP97]。具体而言，$M_{0,\ 1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 包含唯一的边界除子 $\Delta_{1|1}$。该除子是稳定映射轨迹的闭包： $[\alpha \colon (C,x) \to \mathrm{LG}(n,2n)]$，其中 $C = C_1 \cup C_2$ 有两个不可约分支，它们在一个节点处相交，且 $\deg(\alpha|_{C_1}) = \deg(\alpha|_{C_2}) = 1$。类似地，无标记模空间 $\overline{M}_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 有唯一的边界除子，记作 Δ^n。

下文将把 D_{unb} on $\overline{M}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上的不平衡除子定义为自然的有效$\mathbb{Q}$–Cartier除子。注意，由于 $\overline{M}_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 仅有商奇点，因此只需将D_{unb} 定义为Weil除子。

引理 5.1. 设 $\alpha \colon \mathbb{P}^1 \to \mathrm{LG}(n,2n) = \mathrm{LG}(V,\omega)$ 是一个*Plücker*次数为2的态射。那么存在一个维数为 $n-2$ 的各向同性子空间 $H_\alpha \subset V$，使得对所有 $t \in \mathbb{P}^1$均有 $H_\alpha \subset \alpha(t)$。等价地， α的像包含于闭子簇

$$\mathrm{LG}(n,2n)_{H_\alpha} := \{\, L \in \mathrm{LG}(n,2n) \mid H_\alpha \subset L \,\} \subset \mathrm{LG}(n,2n),$$

并且存在一个典范同一识别 $\mathrm{LG}(n,2n)_{H_\alpha} \cong \mathrm{LG}(H_\alpha^\perp/H_\alpha) \cong \mathrm{LG}(2,4)$。

证明。记 $\mathcal{S}$ 为 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 的重言丛。重言丛的拉回 $E_\alpha := \alpha^*\mathcal{S}$ 是平凡丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathbb{C}^{2n}$ 的一个秩为 n 的子丛。由于 α 的次数为 2， E_α 分裂为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(n-2)}$ 或 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(n-1)}$。特别地， E_α 包含一个平凡子丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(n-2)}$。于是， E_α 的线性无关常值截面给出所求的 $(n-2)$ 维各向同性子空间 $H_\alpha \subset V$。

现在，对每个 $t \in \mathbb{P}^1$， $\alpha(t)$ 对应一个满足 $H_\alpha \subset \Lambda \subset H_\alpha^\perp$ 的各向同性 n 维 Λ_t。通过辛约化，此类各向同性 n 维子空间的空间同构于 4 维辛商 $H^\perp/H$ 的拉格朗日格拉斯曼流形：

$$\{\Lambda \in \mathrm{LG}(n,2n) \mid H \subset \Lambda\} \cong \mathrm{LG}(H^\perp/H) \cong \mathrm{LG}(2,4). \tag{5.2}$$

我们推导出同构 $\mathrm{LG}(n,2n)_{H_\alpha}\cong\mathrm{LG}(H_\alpha^\perp/H_\alpha)\cong\mathrm{LG}(2,4)$。 □

当 $n=2$ 时，我们将 $D_{\mathrm{unb}}\subset M_{0,0}(\mathrm{LG}(2,4),2)$ 定义为稳定映射 $[\alpha\colon\mathbb{P}^1\to\mathrm{LG}(2,4)]$ 满足 $E_\alpha\ncong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2}$ 的轨迹的闭包。

当 $n\geq 3$ 时，通过将 α 与 $(n-2)$-平面 $H_\alpha\subset V\cong\mathbb{C}^{2n}$ 关联起来，我们得到到 $\mathbb{C}^{2n}$ 中 $(n-2)$-平面所构成的各向同性格拉斯曼流形的有理映射：

$$\begin{aligned}\xi\ :\ \overline{M}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)&\dashrightarrow\mathrm{SG}(n-2,2n)\\ [\alpha\colon\mathbb{P}^1\to\mathrm{LG}(n,2n)]&\mapsto H_\alpha\end{aligned}\quad.\tag{5.3}$$

回顾一下，(5.3) 在 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 中的不定点轨迹恰由分裂型为 $E_\alpha\cong\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}^{\oplus(n-1)}$ 的稳定映射组成。这样的映射 $[\alpha]$ 必然是到一条直线$\ell\subset\mathrm{LG}(n,2n)$ 的双覆盖 $\mathbb{P}^1\to\ell\cong\mathbb{P}^1$。根据 (4.1)，$\mathrm{LG}(n,2n)$ 中直线空间的维数为 $\frac{1}{2}n(n+1)+n-2$。考虑到选择双覆盖 $\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ 的分支点有两个自由度，我们发现此轨迹在 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 中的余维为 $n-1$，当 $n\geq 3$ 时该值至少为 2。

此外，有理映射 (5.3) 在边界除子 Δ^n 的一般点处以下述方式良定义。设 $[\alpha]$ 是一个稳定映射，其定义域由两个不可约分支 C_1,C_2 组成，它们在一个节点处相交，且其像是一对不同的相交直线 $L_1,L_2\subset\mathrm{LG}(n,2n)$。包含于 $L_1\cup L_2$ 中的所有各向同性子空间的交定义了一个唯一的 $(n-2)$维各向同性子空间。

现在，我们将不平衡除子 D_{unb} 定义为舒伯特除子类经由 ξ的拉回，即，$D_{\mathrm{unb}}:=\xi^*\mathcal{O}_{\mathrm{SG}(n-2,2n)}(1)$。更明确地说，取一个一般的 $(n+2)$ 维线性子空间 $V_{n+2}\subset V\cong\mathbb{C}^{2n}$，并令 $\Sigma\subset\mathrm{SG}(n-2,2n)$ 为由关联条件 $\dim(H\cap V_{n+2})\geq 1$定义的舒伯特除子。在余维至少为 2 的闭子集之外，有理映射 ξ 是一个态射；因此，正则轨迹上的原像 $\xi^{-1}(\Sigma)$ 唯一延拓为 $M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上的一个 Weil除子。注意，—D_{unb}的定义与 V_{n+2}的选取无关。

显然，(5.3) 在边界除子 Δ^n 上的限制到 $\mathrm{SG}(n-2,2n)$ 是支配的，因此 $D_{\mathrm{unb}}\cap\Delta^n$ 的余维至少为 2。因此，$D_{\mathrm{unb}}\subset M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 是稳定映射轨迹 $[\alpha$ 的闭包：满足 $\dim(H_\alpha\cap V_{n+2})\geq 1$ 的 $\mathrm{LG}(n,2n)]$。

定义 5.4。 </style}对于，我们将 LG() 上的不平衡除子定义为，$\overline{1}(n,2n),2$ 中不平衡轨迹在 $M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 中的拉回 $\phi_1^*(D_{\mathrm{unb}})$，其中 $\overline{\phi_1}$ 是遗忘态射。稍微滥用一下记号，我们也将此拉回记为 D_{unb}。

命题 5.5. 对于 $n\geq 2$ 和 $k=0,1$，轨迹 $D_{\mathrm{unb}}\subset M_{0,\overline{k}}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 是一个不可约除子 .

证明。 对于 $k=0$，我们基于 [CM22 的第 6] 节给出如下详细证明。

当 $n=2$ 时，除子 $D_{\mathrm{unb}}\subset M_{0,0}(\overline{\mathrm{LG}}(2,4),2)$ 与作为直线 $\ell\subset\mathrm{LG}(2,4)$ 之双覆盖的次数为 2 的稳定映射的轨迹的闭包重合。等价地，这样的映射分解为一个沿 2 个点分支的双覆盖$\mathbb{P}^1\to\ell\simeq\mathbb{P}^1$，随后是包含映射 $\ell\hookrightarrow\mathrm{LG}(2,4)$。$\mathrm{LG}(2,4)$ 中直线的 Fano簇同构于 $\mathbb{P}^3$。对于每条直线 ℓ，双覆盖的空间由 ℓ 上互异分支点的无序对参数化，该空间是不可约簇 $((\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)\backslash\Delta)/\mathbb{Z}_2$。因此， D_{unb} 包含一个开稠密子集，它是 $\mathbb{P}^3$ 上的 $((\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)\backslash\Delta)/\mathbb{Z}_2$–丛。特别地，$D_{\mathrm{unb}}$ 是不可约的。

假设 $n\geq 3$。要证明 D_{unb} 的不可约性，只需证明轨迹 D^0_{unb} 不可约，其中包含稳定映射 $[\alpha\colon\mathbb{P}^1\to\mathrm{LG}(n,2n)]$，其分裂型为 $E_\alpha\cong\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}\oplus\mathcal{O}^{\oplus(n-2)}$,。首先注意，由固定的一般向量空间 V_{n+2} 定义的舒伯特除子 $\Sigma\subset\mathrm{SG}(n-2,2n)$ 是不可约的。

任取一点 $H\in\Sigma$。于是， ξ 在 D^0_{unb}上有良好定义，而纤维 $\xi^{-1}(H)\cap D^0_{\mathrm{unb}}$ 由所有次数为 2 的稳定映射 $[\alpha\colon\mathbb{P}^1\to\mathrm{LG}(n,2n)]$ 组成，这些映射满足： $\alpha(t)$ 对应于一个满足$H\subset\Lambda\subset H^\perp$的各向同性 n–平面 Λ_t，对任意 $t\in\mathbb{P}^1$ 均成立。根据引理 5.1，纤维 $\xi^{-1}(H)\cap D^0_{\mathrm{unb}}$ 同构于$M_{0,}$0(LG(2, 4), 2)的一个开子集。因此我们得出结论： D_{unb} 是不可约的。

现在考虑拉回 $\phi_1^*(D_{\mathrm{unb}})$。注意，边界除子 $\Delta_{1|1}$ 通过遗忘态射 ϕ_1 映射到边界除子 Δ^n 上：$M_{0,\ 1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)\to M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$。由于 Δ^n不包含于 D_{unb}，因此 $\Delta_{1|1}$不包含于 $\phi_1^*(D_{\mathrm{unb}})$。另一方面，在开子集 $M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上，遗忘态射 ϕ_1 的纤维同构于 $\mathbb{P}^1$：在这种情况下，从光滑定义域曲线中遗忘标记点无需进行稳定化。因此， $\phi_1^*(D_{\mathrm{unb}})$ 也是不可约的。□

回顾推论 4.16中的构造。考虑求值态射

$$\widetilde{\mathrm{ev}}:=(\mathrm{ev}_1,\mathrm{ev}_2)\colon\overline{M}_{0,3}(\mathrm{LG}(2,4),2)\to\mathrm{LG}(2,4)\times\mathrm{LG}(2,4).$$

设 $U:=(\mathrm{LG}(2,4)\times\mathrm{LG}(2,4))\setminus\Sigma_1$，其中 $\Sigma_1\subset\mathrm{LG}(2,4)\times\mathrm{LG}(2,4)$ 是共线点对 (p,q) 的轨迹，也就是说，这些点对位于一条直线 $\ell\subset\mathrm{LG}(2,4)\cong Q^3$ 上。对于 $(p,q)\in U$，纤维 $M_{p,q}=f^{-1}(p,q)$ 由定理 4.12 和引理 2.27 中的性质 (b) 可知同构于爆破$\mathcal{TL}_2$。为方便起见，借助例 3.37，我们将 $\mathrm{R}_2\colon \mathcal{TL}_2\to\mathrm{LG}(2,4)$ 记作 $\mathrm{R}_2\colon \mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3)\to Q^3$，并将例外除子记作 E_p,E_q。记 $H:=(\mathrm{R}_2)^*\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(2,4)}(1)$。

由推论4.14，态射 $\phi\colon M_{0,3}(\mathrm{LG}(2,4),2)\to M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,\overline{4}),2)$（忘记前两个标记点）的限制给出一个闭嵌入

$$\iota_{p,q}\colon \mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3)\cong M_{p,q}\hookrightarrow \overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2).$$

此外，族 $\{\iota_{p,q}(\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3))\}_{(p,q)\in U}$ 覆盖了下述空间的一个开稠密子集：$\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)$ 据推论4.16。显然，该子集由像不是直线的稳定映射组成。

Le引理5.6. 对任意$(p,q)\in U$，在皮卡群$(\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3))\otimes\mathbb{Q}$中有如下等式 ：

$$\iota_{p,q}^*(H_1)=H,\ \iota_{p,q}^*(\Delta_{1|1})=2\big(H-E_p-E_q\big),\ \iota_{p,q}^*(D_{\mathrm{unb}})=0. \tag{5.7}$$

证明。根据（4.15），我们有 $\phi^*(H_1)=\mathrm{ev}_3^*\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(2,4)}(1)$在$M_{0,3}(\mathrm{LG}(2,4),\overline{2})$上，其中$\mathrm{ev}_3$是在第三个标记点处的求值。由定理4.12，在纤维$M_{p,q}\cong\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3)$上，映射$\mathrm{ev}_3$ 与胀开R_2重合。因此，$\iota_{p,q}^*(H_1)=\mathrm{ev}_3^*\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(2,4)}(1)|_{M_{p,q}}=(\mathrm{R}_2)^*\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(2,4)}(1)=H$。

根据注 4.13，对于每个点 $x\in\mathcal{TL}_2\cong\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3)$，相应的稳定映射 $\iota_{p,q}(x)$ $\overline{2M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)}$ 可表示为 $[\alpha\colon C\to\mathrm{LG}(2,4)]$，其中 $C=(\mathrm{P}_2)^{-1}(\mathrm{P}_2(x))$，$\alpha=\mathrm{R}_2|_C$，且标记点为 x；当 x 是一个节点时，需要对定义域曲线进行稳定化。由此，我们得出 $\iota_{p,q}^{-1}(\Delta_{1|1})$ 支持在边界除子 D_1^+和 D_1^-（见定义 2.12）的并集上。由于 p 与q之间的对称性，除子类 $\Delta_{1|1}$ 的拉回具有如下形式：$\iota_{p,q}^*(\Delta_{1|1})=m(D_1^++D_1^-)$，其中 m为某个正整数。

我们断言 $m=1$。只需检查在 $\iota_{p,q}(D_1^+)$ 的一般点处，像 $\iota_{p,q}(\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3))$ 与边界除子 $\Delta_{1,1}$ 横截相交。取一个一般点 $x\in D_1^+$。注意，$\Delta_{1|1}$ 在 $\iota_{p,q}(x)$ 处是光滑的，因为相应的稳定映射没有非平凡自同构。于是，只需在 $\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3)$ 中找一条经过 x 的光滑解析曲线，使其在 $\iota_{p,q}$ 下的像与 $\Delta_{1,1}$ 横截相交。取一条光滑解析曲线 $\gamma\colon\mathbb{D}\to\mathcal{TL}_2$，它来自一个单位圆盘，并满足 $\gamma(0)=x$，且 γ 在 x 处与 D_1^+ 横截相交。通过缩小 $\mathbb{D}$，我们还可以假设投影 P_2 在 γ 上的限制是一个嵌入。注意到万有族 $(\mathrm{P}_2)^{-1}(\mathrm{P}_2(\gamma(\mathbb{D})))$ 是光滑的，因此我们得出结论：$\iota_{p,q}(\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3))$ 与边界除子 $\Delta_{1,1}$ 在 x 处横截相交。

因此，由（3.3），可得 $\iota_{p,q}^*(\Delta_{1|1})=D_1^++D_1^-=(H-2E_p)+(H-2E_q)=2(H-E_p-E_q)$.

此外，由于对于（p,q），$\in U$ 任意属于 $M_{p,q}$ 的映射，其像圆锥曲线都不是直线，因此 $M_{p,q}$ 与不平衡轨迹不相交。由此可得 $\iota_{p,q}^*(D_{\mathrm{unb}})=0$。□

命题 5.8. $\{\Delta_{1|1},H_1,H_{\sigma_2}\}$ 是 $\mathbb{Q}$–基$\mathrm{Pic}(\overline{M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)})\otimes\mathbb{Q}$。

证明。根据 [Opr05，命题 1]，，$\mathrm{Pic}(\overline{M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)})\otimes\mathbb{Q}$中的每个类都由边界除子$\Delta_{1|1}$、求值类 H_1和典范类 H_{σ_2}生成。

稍微滥用一下记号，我们分别用 $\Delta_{1|1}$、H_1和 D_{unb} 表示它们在 Néron–Severi 空间$N^1(\overline{M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)})_{\mathbb{R}}$中的像。只需证明它们在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。

假设存在一个线性关系 $aH_1+b\Delta_{1|1}+cD_{\mathrm{unb}}=0$于 $N^1(\overline{M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)})_{\mathbb{R}}$。由引理 5.6，对一般的一对 $(p,q)\in U$，经 $\iota_{p,q}$拉回可得 $aH+2b(H-E_p-E_q)=0$。由于类 H、E_p、E_q在 $\mathrm{Pic}(\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3))\otimes\mathbb{Q}$中线性无关，我们必有 $a=b=0$。另一方面，由于 D_{unb} 是有效且非空的，我们有 $c=0$。证明完成。□

定理 5.9。 $\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)$ 的有效除子类锥为

$$\mathrm{Eff}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2))=\langle H_1,\Delta_{1|1},D_{\mathrm{unb}}\rangle\subset N^1(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2))_{\mathbb{R}}.$$

证明。由于 H_1、$\Delta_{1|1}$和 D_{unb}均为有效的，$\langle H_1,\Delta_{1|1},D_{\mathrm{unb}}\rangle\subset\mathrm{Eff}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2))$。为证明反向包含，我们取任意一个与 $D\subset M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)$ 不同的素有效除子 D_{unb}和 $\Delta_{1|1}$。根据命题 5.11的证明，我们在 Néron–Severi 空间中将 D 表示为如下线性组合$D\equiv\alpha H_1+\beta\Delta_{1|1}+\gamma D_{\mathrm{unb}}$。

固定一条光滑圆锥曲线 C于$\mathrm{LG}(2,4)$中。定义曲线$\Gamma\subset\overline{M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)}$ 为稳定映射的轨迹$[f\colon(\mathbb{P}^1,x)\to\mathrm{LG}(2,4)]$ 满足 f是从 $\mathbb{P}^1$ 到 C的同构。按照定理4.7证明中的方法计算康采维奇空间和希尔伯特概形的维数，由断言2.30 和（4.10）可得

稳定映射的轨迹 $[f\colon(\mathbb{P}^1,x)\to \mathrm{LG}(2,4)]$ 满足 f 是一个嵌入，且 $f(\mathbb{P}^1)$ 经过一对一般点，在 $M_{0,\ 1}(\mathrm{LG}(2,4),2)$ 中是开集。于是，显然 Γ 是一条移动曲线，且 $\Gamma\cdot H=2$和 $\Gamma\cdot\Delta_{1|1}=\Gamma\cdot D_{\mathrm{unb}}=0$。因此 $\alpha\geq 0$。

取一般点对 (p,q)，使得 $\iota_{p,q}(\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3))\not\subset D$。那么拉回 $\iota_{p,q}^*(D)$ 是 $\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3)$ 上的一个有效除子。我们断言 $\beta\geq 0$。否则，取定义 3.7 中的有效曲线 ζ_1^+。根据引理 3.8，我们得到 $\zeta_1^+\cdot H=0,\ \zeta_1^+\cdot(H-E_p-E_q)=1$，从而 $\zeta_1^+\cdot\iota_{p,q}^*(D)=\beta<0$。于是 $\iota_{p,q}(\zeta_1^+)\subset D$。取一个一般点 $[f\colon(\mathbb{P}^1\cup\mathbb{P}^1,x)\to\mathrm{LG}(2,4)]$，它属于 $\Delta_{1|1}$ 但不属于 D；再取一对点 $(f(x),q)$，它们可通过 $\mathrm{LG}(2,4)$ 的一个自同构变换为 (p_+,p_-)。那么 $\iota_{x,q}([\alpha\colon(\mathbb{P}^1,x)\to\mathrm{LG}(2,4)])\in D$，这就产生了矛盾。

最后，我们将通过如下从 Hirzebruch 曲面 F_1 到由 $z_0z_4-z_1z_3+z_2^2=0$ 定义的二次三维簇 $Q\subset\mathbb{P}^4$ 的态射来证明 $\gamma\geq 0$。

设 $\Sigma\subset N_{\mathbb{R}}$ 为 $X_\Sigma\cong F_1$ 的扇，其射线的本原生成元为 $\mathrm{v}_a=(1,1)$、$\mathrm{v}_v=(0,1)$、$\mathrm{v}_b=(-1,0)$ 与 $\mathrm{v}_u=(0,-1)$。格 $N\cong\mathbb{Z}^2$ 是 $N'=N+(\frac{1}{2}\mathbb{Z},0)$ 中指数为 2 的子格。将 Σ' 记为同一扇，但位于 $N'_{\mathbb{R}}$ 中，则与 Σ' 相关联的托里克簇 $X_{\Sigma'}$ 是 $\mathbb{P}(1,1,2)$ 的加权爆破。$(N,\Sigma)\to(N',\Sigma')$ 在 [AP13 定义 3.2]，的意义下是一个双覆盖，因此从几何方面我们得到双覆盖$f\colon\ X_\Sigma\to X_{\Sigma'}$。对于 Σ'，去掉由 v_v 生成的射线，这对应于 $X_{\Sigma'}$ 上 $(-\frac{1}{2})$-截面的收缩，记作 $g\colon\ X_{\Sigma'}\to\mathbb{P}(1,1,2)$。由于 $\mathbb{P}(1,1,2)=\mathbf{V}(z_1z_3-z_2^2)\subset\mathbb{P}^3_{[z_0:z_1:z_2:z_3]}$，$g\circ f$ 将 F_1 映到 $\mathbb{P}(1,1,2)\subset Q\subset\mathbb{P}^4$。这里我们将 $\mathbb{P}(1,1,2)$ 视为直线上的一般圆锥曲线纤维化，而不是圆锥曲线上的纤维化。

等价地，由托里克簇的 Cox 商构造，映射 $F_1\to\mathbb{P}^4$ 也可以通过提升 $\mathbb{A}^4_{a,b,u,v}\to\mathbb{P}^4$ 来解释。具体而言，商映射为 $(\mathbb{A}^4_{a,b,u,v}\setminus\mathbf{V}(B(\Sigma)))/G\to F_1$，其中 $G\cong(\mathbb{C}^*)^2$ 且不稳定轨迹 $\mathbf{V}(B(\Sigma))=\mathbb{A}^2_{a,b}\cup\mathbb{A}^2_{u,v}$。$G$-作用的权为 $\mathrm{wt}(a)=\mathrm{wt}(b)=(1,0)$、$\mathrm{wt}(u)=(0,1)$ 以及 $\mathrm{wt}(v)=(-1,1)$。因此提升态射

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^4_{a,b,u,v}\setminus\mathbf{V}(B(\Sigma))&\to\mathbb{P}^3_z,\\(a,b,u,v)&\mapsto[u^2:0:buv:a^2v^2:b^2v^2]\end{aligned}$$

下降到 $F_1\to Q\subset\mathbb{P}^4$。它是一个双覆盖，且收缩为 $(\mathbb{A}^3_{a,b,u}\setminus\mathbf{V}(B(\Sigma)))/G\mapsto[u^2:0:0:0:\ 0]$。因此，我们可以构造一族稳定映射 $C\colon\mathbb{P}^1\to M_{0,0}(\mathrm{LG}(2,4),2)$，以被收缩的曲线作为标记点。由于一般纤维是一条光滑圆锥曲线，而一条特殊纤维是一条直线的双覆盖，$\gamma\geq 0$。

证明完成。 □

注 5.10. 一般而言，要确定有效锥的一条极端射线，需要一条合适的移动曲线，如[CS06，引理 24]所述。然而，这样的移动曲线未必允许常值标记。因此，在上面的证明中，我们利用 $\mathcal{TL}_2$的几何性质，使用一条非移动测试曲线来证明 $\beta\geq 0$。

以下结果旨在建立 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)$ 与$M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 的除子理论之间的联系，其中 $n\geq 3$。固定一个各向同性的 $(n-2)$–平面 $A_0\subset V$。包含映射 $\iota_{A_0}\colon\mathrm{LG}(n,2n)^{A_0}\hookrightarrow\mathrm{LG}(n,2n)$ 给出一个态射

$$\jmath_{A_0,k}\colon\overline{M}_{0,k}(\mathrm{LG}(2,4),2)\ \cong\ \overline{M}_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n)_{A_0},2)\ \longrightarrow\ \overline{M}_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$$

对每个 $k\geq 0$，其像是像包含在 $\mathrm{LG}(n,2n)^{A_0}$ 中的稳定映射所构成的轨迹。于是，

命题 5.11。 拉回同态

$$\jmath_{A_0,1}^*\colon\ \mathrm{Pic}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2))\otimes\mathbb{Q}\ \longrightarrow\ \mathrm{Pic}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2))\otimes\mathbb{Q}$$

是一个同构，分别将 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上的除子类 H_1、$\Delta_{1|1}$、H_{σ_2} 映到$M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)$上的 H_1、$\Delta_{1|1}$、H_{σ_2}。因此，$\{\Delta_{1|1},H_1,H_{\sigma_2}\}$是$\mathrm{Pic}(M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2))\otimes\mathbb{Q}$的一个 $\mathbb{Q}$–基。数值除子类上的诱导映射

$$\jmath_{A_0,1}^*:N^1(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2))_{\mathbb{R}}\longrightarrow N^1(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2))_{\mathbb{R}}$$

是一个同构，将 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上的除子类 D_{unb} 映到 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)$上的类 D_{unb}。

证明。 证明过程类似于 [CM22 中关于无标记模空间的论证，命题 6.4]。根据 [Opr05，命题 1]，$\mathrm{Pic}\big(M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)\big)\otimes\mathbb{Q}$ 由 $[\Delta_{1|1}]$、H_1 和 H_{σ_2} 生成。

由于 $\imath_{A_0}$ 将 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 唯一的余维 2 舒伯特类拉回为 $\mathrm{LG}(2,4)$ 唯一的余维 2 舒伯特类，$\jmath_{A_0,1}$ 将 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 的典范类 H_{σ_2} 拉回为 $\mathrm{LG}(2,4)$ 的典范类。

显然，边界除子 $\Delta_{1|1}$ 在 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 上的拉回支撑在边界除子$\Delta_{1|1}$ 上，该边界除子属于 $\mathrm{LG}(2,4)$。按照引理 5.6 证明中的相同论证，可以证明其重数为 1。因此，$\jmath_{A_0,\ 1}$ 将 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 的边界类 $[\Delta_{1|1}]$ 拉回为 $\mathrm{LG}(2,4)$ 的边界类。

根据交换图

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n)_{A_0},2) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} & \mathrm{LG}(n,2n)_{A_0} \\ \downarrow{\scriptstyle \jmath_{A_0,1}} & & \downarrow{\scriptstyle \imath_{A_0}} \\ \overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} & \mathrm{LG}(n,2n) \end{array},$$

我们得出，$\jmath_{A_0,\ 1}$ 将 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 的求值类 H_1 拉回为 $\mathrm{LG}(2,4)$ 的求值类。

于是，由命题 5.8，我们得出，$\jmath^*_{A_0,\ 1}$ 和 $\jmath^*_{A_0,\ 1}$ 都是同构。因此，集合$\{\Delta_{1|1}, H_1, H_{\sigma_2}\}$ 构成了 $\mathrm{LG}(n,2n),2$ 的皮卡群 $\mathrm{Pic}\big(M_{0,\ 1}\big)\otimes\mathbb{Q}$ 的一组基。

回顾，$M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上的 D_{unb} 定义为 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上的不平衡除子在遗忘态射下的拉回。固定一个 $(n-2)$ 维各向同性子空间 A_0。由于遗忘态射与 $\jmath_{A_0,k}$ 交换，只需证明 $\jmath^*_{A_0,0}(D_{\mathrm{unb}})$ 等于 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n)_{A_0},2)$ 上的不平衡类 D_{unb}。

选取一个一般的 $(n+2)$ 维向量子空间 $V_{n+2}\subset V\cong\mathbb{C}^{2n}$，使得 $A_0\cap V_{n+2}=\{0\}$。我们将 $D_{\mathrm{unb}}\subset M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 定义为满足 $\dim(H_\alpha\cap V_{n+2})\geq 1$ 的稳定映射 $[\alpha\colon \mathbb{P}^1\to\mathrm{LG}(n,2n)]$ 的轨迹的闭包。设 $[\beta\colon \mathbb{P}^1\to\mathrm{LG}(n,2n)_{A_0}]$ 为 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n)_{A_0},2)$ 上 D_{unb} 的一个一般点。则 $\widehat{\beta}$ 确定一个包含 A_0 的 $(n-1)$ 维各向同性子空间 A_0。再取另一个 $(n-2)$ 维各向同性子空间 $\check{}A_0\subset\widehat{A}_0$，使得 $\dim(\check{}A_0\cap V_{n+2})\geq 1$。则 $[\beta\colon \mathbb{P}^1\to\mathrm{LG}(n,2n)_{A_0}]$ 也包含在 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n)\check{}_{A_0},2)$ 于 $\jmath\check{}_{A_0,0}$ 下的像中。注意，$\jmath\check{}_{A_0,0}(M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n)\check{}_{A_0},2))$ 的一般点包含在满足 $\dim(H_\alpha\cap V_{n+2})\geq 1$ 的稳定映射 $[\alpha\colon \mathbb{P}^1\to\mathrm{LG}(n,2n)]$ 的轨迹中。由此得出，$\jmath\check{}_{A_0,0}(\beta)=\jmath_{A_0,0}(\beta)$ 包含在 $D_{\mathrm{unb}}\subset M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 中。由于对任意 $n\geq 2$，由命题 5.5 可知 $D_{\mathrm{unb}}\subset M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 不可约，故除子类 $\jmath^*_{A_0,0}(D_{\mathrm{unb}})$ 等于 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n)_{A_0},2)$ 上 D_{unb} 的一个倍数。

注意到 $\jmath^*_{A_0,0}$ 将 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 的基元素 $\Delta_{1|1}$ 与 H_{σ_2} 映到 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(2,4),2)$ 上各自的对应元，我们由此断定 $\jmath^*_{A_0,0}(D_{\mathrm{unb}})$ 必定等于 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n)_{A_0},2)$ 上的 D_{unb}。

命题 5.11 的证明已完成。 □

定理 m 5.12. 对每个 $n\geq 2$，$M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上的有效除子锥$\overline{\mathrm{Eff}}$出如下 by

$$\overline{\mathrm{Eff}}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)) \;=\; \big\langle H_1,\Delta_{1|1},D_{\mathrm{unb}}\big\rangle.$$

证明。设 $E_n\subset N^1(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2))_{\mathbb{R}}$ 为由 H_1、$\Delta_{1|1}$ 和 D_{unb} 生成的锥，它们在同构 $\jmath^*_{A_0,1}$ 下的像分别为 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)$ 上的 H_1、$\Delta_{1|1}$、H_{σ_2}。显然 $E_n\subset\overline{\mathrm{Eff}}(M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2))$。

根据引理 5.1 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 被以下子簇覆盖

$$Y_{A_0} \;:=\; \jmath_{A_0,1}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)) \;\subset\; \overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2),$$

其中 A_0 是各向同性的 $(n-2)$ 维平面。对于任意素除子 $[D]\in\mathrm{Eff}(M_{0,k}(\mathrm{LG}(n,2n),2))$，我们可以选取 A_0 使得 $Y_{A_0}\not\subset\mathrm{Supp}(D)$。于是 $\jmath^*_{A_0,1}[D] \;=\; [D\cap Y_{A_0}]\in\mathrm{Eff}(Y_{A_0}) \;\cong\mathrm{Eff}(M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2))$。由定理 5.9，$\mathrm{Eff}(M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2))=\big\langle H_1,\Delta_{1|1},D^{\mathrm{unb}}\big\rangle$；由命题 5.11，拉回 $\jmath^*_{A_0,1}$ 是一个同构，它将 E_n 映到这个锥。因此，$\jmath^*_{A_0,1}[D]\in\jmath^*_{A_0,1}(E_n)$ 蕴含 $[D]\in E_n$。所以 $\mathrm{Eff}(M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2))\subset E_n$。 □

取一般的超平面截面 $H\subset\mathrm{LG}(n,2n)$。令 $T\subset M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 为与 H 相切的圆锥曲线除子。我们也将其在 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上的拉回记为 T。等价地，T 是带点映射$[f\colon (C,x_1)\to\mathrm{LG}(n,2n)]$ 的轨迹，其中像曲线 $f(C)$ 与固定的超平面截面相切。

定理 5.13。 对于每个 $n\geq 2$，$M_{0,\ 1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$的数值有效锥由下式给出

$$\overline{\mathrm{Nef}}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)) = \langle H_1,H_{\sigma_2},T\rangle.$$

证明。类 $H_1 = \mathrm{ev}_1^* \mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}(1)$ 对于 $\mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}(1)$ 是丰沛的。根据 [CM22，命题 6.11] $M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 的数值有效锥由 H_{σ_2} 和 T 生成。因此 $\langle H_1, H_{\sigma_2}, T\rangle \subset \mathrm{Nef}(M_{0,\ 1}(\mathrm{LG}(n,2n),2))$。

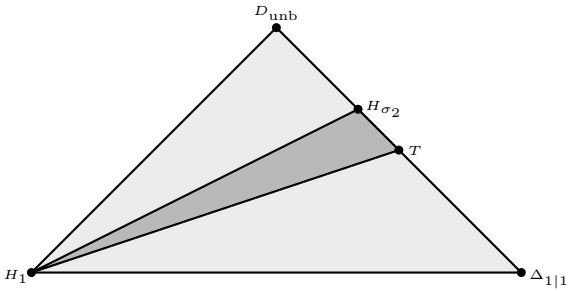
我们首先假设 $n=2$。取任意一个数值有效除子类 $[D] \in$ 皮卡群$(M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2))$。由[CM22]中的（6.12），$H_{\sigma_2} = \frac{1}{2}\Delta_{1|1} + \mathcal{D}_{unb}$ 以及 $T = \Delta_{1|1} + D_{unb}$，因此我们可以写成

$$D \equiv aH_1 + bH_{\sigma_2} + cT.$$

根据定理 5.9，显然 $a \geq 0$。

根据 [CM22，命题 6.11]，除子 H_{σ_2} 诱导一个双有理收缩 $f_{H_{\sigma_2}}: M_{0,0}(\mathrm{LG}(2,4),2) \to Z$，其例外轨迹是除子 $Q^2(1)$，它参数化 $\mathrm{LG}(2,4)$ 中直线的双覆盖。令 $\ell \subset \mathrm{LG}(2,4)$ 为一条一般直线，并令 $\Gamma \subset Q^2(1)$ 为包含在 $f_{H_{\sigma_2}}$ 在 Z 中对应于 ℓ 的点上的纤维中的曲线，因此 Γ 在保持像直线 ℓ 固定的同时改变双覆盖。选取 $\Gamma \subset M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)$ 中 Γ 的一个提升，使得标记点映射到 ℓ 的一个固定点。于是 $H_1 \cdot \Gamma = 0$ 和 $H_{\sigma_2} \cdot \Gamma = 0$，从而 $c \geq 0$。

再次由 [CM22，命题6.11] 可知，除子 T诱导出一个双有理态射 $f_T: M_{0,0}(\mathrm{LG}(2,4),2) \to W$，它将定义域可约的映射轨迹 $[C_1 \cup C_2, \alpha]$ 收缩到 $\alpha(C_1 \cap C_2)$。取一点 $p \in f_T(\Delta_{1|1}) \subset \mathrm{LG}(2,4)$，并令 $\Gamma \subset \Delta_{1|1}$ 为包含在 f_T 在 p上的纤维中的一条曲线。对于曲线族 Γ，取标记点为 $C_1 \cap C_2$，然后将万有曲线稳定化。于是我们得到一个提升$\Gamma \subset M_{0,1}(\mathrm{LG}(2,4),2)$，它是 Γ 的提升，且标记点映到固定点 p。显然，$H_1 \cdot \Gamma = T \cdot \Gamma = 0$，因此 $b \geq 0$。最后，要证明任意 $n \geq 2$ 的情形，只需如定理5.12的证明中那样论证。□



Eff$(M_{0,\ 1}(\mathrm{LG}(n,\ 2n),\ 2))$ 的二维截面（浅灰色）以及 Nef$(M_{0,\ 1}(\mathrm{LG}(n,\ 2n),\ 2))$（深灰色）。

命题 5.14。 $M_{0,\ 1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 的反典范除子由下式给出

$$-K_{\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)} = \begin{cases} H_1 + \frac{5}{2}H_{\sigma_2} + \frac{3}{4}\Delta_{1|1} & \equiv \quad H_1 + H_{\sigma_2} + \frac{3}{2}T & \text{if } n=2 \\ H_1 + \frac{n+2}{2}H_{\sigma_2} + \frac{6-n}{4}\Delta_{1|1} & \equiv \quad H_1 + (n-2)H_{\sigma_2} + \frac{6-n}{2}T & \text{if } n \geq 3 \end{cases}.$$

证明。令 $\mathcal{M}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 为 $\mathrm{LG}(n,2n)$ 中圆锥曲线的光滑 Kontsevich 叠，H_{σ_2}, T, $\overline{\Delta}_{1|1}$, $\overline{D}_{\mathrm{unb}}$ 分别为 $\mathcal{M}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上对应于 H_{σ_2}, T, $\Delta_{1|1}$, D_{unb} 的除子。根据 [CM22，命题 6.15]，

$$\begin{array}{llll} \overline{\Delta}_{1|1} \equiv 2(\overline{T} - \overline{H}_{\sigma_2}), & \overline{D}_{\mathrm{unb}} \equiv \overline{H}_{\sigma_2} - \frac{1}{2}\overline{T}, & -K_{\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)} \equiv 5\overline{H}_{\sigma_2} - 5\overline{D}_{\mathrm{unb}} & \text{if } n=2; \\ \overline{\Delta}_{1|1} \equiv 2(\overline{T} - \overline{H}_{\sigma_2}), & \overline{D}_{\mathrm{unb}} \equiv 2\overline{H}_{\sigma_2} - \overline{T}, & -K_{\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)} \equiv 5\overline{H}_{\sigma_2} + \frac{n-7}{2}\overline{D}_{\mathrm{unb}} & \text{if } n \geq 3. \end{array}$$

令 $\phi_2: \overline{M}_{0,2}(\mathrm{LG}(n,2n),2) \to \overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 为忘记第二标记点的态射，并令 s_1 为对应于第一标记点的截面。余切线类为 $\mathbf{1} := c_1(s_1^*\omega_{\phi_2})$，其中 ω_{ϕ_2} 是 ϕ_2 的相对对偶化层。令 $\pi: \mathcal{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2) \longrightarrow \mathcal{M}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 为忘记标记点的态射。根据 [dJS17，定理 1.1]，，典范丛公式为

$$K_{\overline{\mathcal{M}}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)} \equiv \pi^* K_{\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)} + \psi_1 \qquad \text{in } \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)) \otimes \mathbb{Q}.$$

在一般纤维 $\pi^{-1}([f]) \cong \mathbb{P}^1$（仅移动固定二次映射 f 上的标记点）上，我们有 $\deg(H_1) = 2$且 $\deg(\psi_1) = \deg(\omega_{\mathbb{P}^1}) = -2$，而 T 是从无标记点空间拉回的，因此在该纤维上的次数为 0。因此，对于某个下方的除子 D，有 $\psi_1 \equiv -H_1 + \pi^*(D)$。

为识别 D，我们固定一个由线性形式 ℓ 定义的 Plücker 超平面截面 $H \subset \mathrm{LG}(n,2n)$。在定义域不可约的开子集上，对于一个带标记点的映射 (f,x)，我们可以在源上标记点 x 处选取一个局部坐标 z（因此 $z(x)=0$），并将拉回写为 $(\ell \circ f)(z) = a + bz + cz^2$. 从内禀角度看，$a$ 是在标记点处的求值，因此是 $\mathrm{ev}_1^* \mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}(1)$ 的一个局部平凡化（即 H_1 的局部平凡化）；b 是标记点处的一阶喷射，因此属于 $\mathrm{ev}_1^* \mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}(1) \otimes \psi_1$；$c$ 是二阶喷射，因此属于 $\mathrm{ev}_1^* \mathcal{O}_{\mathrm{LG}(n,2n)}(1) \otimes \psi_1^{\otimes 2}$。等价地，在重新参数化 $z \mapsto \lambda z$（固定标记点的自同构）下，我们有 $b \mapsto \lambda b$, $c \mapsto \lambda^2 c$，而在

将 $\ell \mapsto \kappa\ell$ 缩放后，我们有 $(a,b,c) \mapsto \kappa(a,b,c)$。因此，判别式 $\mathrm{Disc}(\ell\circ f) := b^2-4ac$ 是一个定义良好的整体截面

$$(\mathrm{ev}_1^*\,\mathcal{O}_{LG}(1))^{\otimes 2}\otimes\psi_1^{\otimes 2}\cong\mathcal{O}(2H_1+2\psi_1).$$

根据相切除子 T（即 $\ell\circ f$ 在定义域上不具有两个不同的光滑零点的轨迹）的定义，我们有 $T=\mathrm{div}(\mathrm{Disc}(\ell\circ f))$，因此 $\mathcal{O}(T)\cong\mathcal{O}(2H_1+2\psi_1)$，故 $\psi_1\equiv -H_1+\frac{1}{2}T$。

注意，$\mathcal{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$中具有非平凡稳定子的点的轨迹的余维为 ≥ 1。这些数值等价关系不变地下降到粗模空间 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$，并且将它们用基 $\{H_1,H_{\sigma_2},\Delta_{1|1}\}$ 改写后，即得到所述公式。□

推论5.15。 *Kontsevich*空间 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 是 *Fano* 当且仅当 $2\leq n\leq 5$，并且当 $n=6$时为弱 *Fano*。此外，对于每个 $n\geq 2$，$M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 都是莫里梦空间。

证明。由定理 5.12、5.13 对 $\mathrm{Eff}(M_0,1(\mathrm{LG}(n,2n),2))$ 和 $\mathrm{Nef}(M_0,1(\mathrm{LG}(n,2n),2))$ 的显式确定可知，$\mathrm{Mov}(M_0,1(\mathrm{LG}(n,2n),2))=\mathrm{Nef}(M_0,1(\mathrm{LG}(n,2n),2))$。事实上，若 D 是有效但非数值有效的，则 D 与定理 5.13 中用于截出数值有效锥的某个曲线类的交为负，而这些曲线类在一个除子中移动（即 $\Delta_{1|1}$ 或 D_{unb}）；因此 D 不可移动。此外，$\mathrm{Eff}(M_0,1(\mathrm{LG}(n,2n),2))$ 具有恰好包含三个室的 Mori室分解。因此，对每个 $n\geq 2$，$M_0,1(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 都是莫里梦空间。其余结论由命题 5.14 得出。□

根据推论5.15，我们有：

推论 5.1 6. 对于 $2\leq n\leq 5$，*Kontsevich*空间 $M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 是一个指数为 *Fano*簇 1.

证明。 设 $X=M_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$，其中 $2\leq n\leq 5$。只需证明 $-K_X$ 不能被 $\mathrm{Pic}(X)$ 中的任何整数$m\geq 2$ 整除。

考虑引理 $\iota_{p,q}:\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3)\to X$ 中的测试子簇 5.6，其中 p,q 是两个一般点。于是，

$$\iota_{p,q}^*(H_1)\equiv H,\qquad \iota_{p,q}^*(H_{\sigma_2})\equiv H-E_p-E_q,\qquad \iota_{p,q}^*(T)\equiv 2(H-E_p-E_q).$$

根据命题 5.14，我们有 $\iota_{p,q}^*(-K_X)=5H-4E_p-4E_q.$。类 $5H-4E_p-4E_q\in\mathrm{Pic}(\mathrm{Bl}_{\{p,q\}}(Q^3))$ 是本原的，因为 $\gcd(5,4,4)=1$。证明完成。□

以下是将 [CM22，推论 6.18]（情形 $n=2$）推广到任意 $n\geq 2$。

命题 5 .17. M_0的自同构由目标空间 $\mathrm{LG}(n,2n$ 的自同构诱导，其中 $M_{0,\ 0}\big(\mathrm{LG}(n,2n),2\big)$):

$$\mathrm{Aut}(M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2))\cong\mathrm{PSp}_{2n},\ \forall\, n\geq 2.$$

证明。 不妨设 $n\geq 3$。根据 [CM22，定理 6，14]，有效锥 $\mathrm{Eff}(M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2))$ 由两条极端射线 $\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\Delta^n\rangle$ 和 $\mathbb{R}_{\geq 0}\langle D^n_{\mathrm{unb}}\rangle$ 生成，而数值有效锥 $\mathrm{Nef}(M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2))$ 由$\mathbb{R}_{\geq 0}\langle H^n_{\sigma_2}\rangle$和 $\mathbb{R}_{\geq 0}\langle T^n\rangle$生成。对于任意 $\varphi\in\mathrm{Aut}(M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2))$，$\varphi^*$ 保持有效锥 $\mathrm{Eff}(M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2))$ 和数值有效锥 $\mathrm{Nef}(M_{0,\ 0}(\mathrm{LG}(n,2n),2))$，因此必定固定每条极端射线。

考虑与$H^n_{\sigma_2}$ 和 D^n_{unb}所界定的 Mori 室相关联的双有理模型 X_n [CM22，定理 6.14]；由室分解在 φ^*下的函子性，自同构 φ 在 X_n 上诱导出一个自同构，其中 X_n 位于以参数化某个 $2n$维辛向量空间中（$n-2$）维各向同性子空间的辛Grassmannian之上，即 $\mathrm{SG}(n-2,2n)$。此外，[CM22，定理 6.14] 将 X_n 识别为相对希尔伯特概形 $X_n:=\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathrm{LG}(2,\mathcal{Q}_n))\to\mathrm{SG}(n-2,2n)$，其中 $\mathcal{Q}_n$ 是 $\mathrm{SG}(n-2,2n)$ 上秩为 4 的泛商丛。由于 $\varphi^*[D^n_{\mathrm{unb}}]=[D^n_{\mathrm{unb}}]$，$\varphi$ 下降为自同构 2 $\mathrm{Aut}(\mathrm{SG}(n-2,2n))$。这定义了一个群同态

$$\rho\colon\ \mathrm{Aut}(M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2))\longrightarrow\mathrm{Aut}(\mathrm{SG}(n-2,2n)).$$

任取一个自同构 $\phi\in$自同构群$(M_{0,}0(\mathrm{LG}(n,2n),2))$，使得 $\rho(\phi)=\mathrm{Id}$。由于 $\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathrm{LG}(2,\mathcal{Q}_n))\to\mathrm{SG}(n-2,2n)$ 的纤维同构于 $G(3,5)$，X_n 上诱导的自同构给出了底层秩为 4 的丛 $\mathcal{Q}_n$ 的一个自同构。由 [Ram66] $\mathcal{Q}_n$ 是一个单齐性向量丛，故自同构群$(\mathcal{Q}_n)=\mathbb{C}^*$。由此我们可以得出 ρ 是单射。

最后，由于类型为 C_n 的 Dynkin 图没有非平凡自同构，根据 [Dem77]，$\mathrm{Aut}(\mathrm{SG}(n-2,2n))=\mathrm{PSp}_{2n}$。另一方面，$\mathrm{PSp}_{2n}=\mathrm{Aut}(\mathrm{LG}(n,2n))$ 自然作用于 $M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$。因此 $\mathrm{Aut}(M_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2))\cong\mathrm{PSp}_{2n}$。□

以下是命题 5.17 的带标点类比。

命题 5.18. $M_{0,\ 1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 的自同构由$\mathrm{LG}(n,2n)$的自同构诱导：

$$\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)) \cong \mathrm{PSp}_{2n},\ \forall n \geq 2.$$

证明。根据定理 5.12、5.13，任意 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\overline{M_{0,}1}(\mathrm{LG}(n,2n),2))$ 都保持这些锥的极端射线。特别地，φ^* 保持射线 $\mathbb{R}_{\geq 0}\langle H_1\rangle$，因此保持 $m \gg 0$对应的完全线性系 $|mH_1|$。由于$H_1 = \mathrm{ev}_1^* H$，由 $|mH_1|$ 定义的态射恰好是 ev_1, ，因此存在唯一的 $\widehat{\varphi} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{LG}(n,2n))$，使得 $\mathrm{ev}_1 \circ \varphi = \widehat{\varphi} \circ \mathrm{ev}_1$。此外，$M_{0,}1(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 上的 H_{σ_2}和 $\mathcal{T}$ 是通过遗忘态射 ϕ_1 从 $M_{0,}0(\mathrm{LG}(n,2n),2)$ 拉回的，因此保持相应的收缩会给出唯一的 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Aut}(M_{0,}0(\mathrm{LG}(n,2n),2))$，使得 $\phi_1 \circ \varphi = \bar{\varphi} \circ \phi_1$。因此，$\varphi$诱导出一个 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Aut}(M_{0,}0(\mathrm{LG}(n,2n),2))$ 的自同构。

将 $\bar{\varphi}$ 与 PSp_{2n} 通过命题 5.17中的一个元素对应，我们得到一个自然同态 m

$$\chi\colon\ \mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2)) \to \mathrm{PSp}_{2n} \qquad \chi(\varphi) := \bar{\varphi}.$$

此外，$\varphi \in \mathrm{Aut}(M_{0,1}\overline{(}\mathrm{LG}(n,2n),2))$ 和 $\bar{\varphi} = \chi(\varphi)$ 可纳入以下交换图中。

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2) & \xrightarrow{\varphi} & \overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2) \\ {\scriptstyle \phi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1} \\ \overline{M}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2) & \xrightarrow[\bar{\varphi}]{} & \overline{M}_{0,0}(\mathrm{LG}(n,2n),2) \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} \overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2) & \xrightarrow{\varphi} & \overline{M}_{0,1}(\mathrm{LG}(n,2n),2) \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_1} \\ \mathrm{LG}(n,2n) & \xrightarrow[\bar{\varphi}]{} & \mathrm{LG}(n,2n). \end{array}$$

这里，ϕ_1 和 ev_1 分别是遗忘态射和求值态射。

现在令 $\varphi \in \ker(\chi)$。那么对每个点$[f,x] \in M_{0,1}(\overline{\mathrm{LG}}(n,2n),2)$，我们有

$$\phi_1(\varphi([f,x])) = \phi_1([f,x]) = [f], \qquad \mathrm{ev}_1(\varphi([f,x])) = \mathrm{ev}_1([f,x]) = f(x).$$

也就是说，$\varphi([f,x])$ 属于交集 $\pi^{-1}([f]) \cap \mathrm{ev}_1^{-1}(f(x))$，该交集仅由点 $[f,x]$组成。因此，对每个 $[f,x]$，$\varphi([f,x])$ $= [f,x]$，从而 χ 是同构。□

6. 与正交格拉斯曼流形相关的Kausz型紧化

基于 [FW25，FMW26]，，可以将该机制推广到正交格拉斯曼流形。设 W 是一个n维复向量空间，并令 V: $= W \oplus W^\vee$，其典范二次型由$Q(w,\alpha) := \alpha(w)$定义。我们用$\mathrm{OG}(V,Q)$ 表示参数化极大各向同性子空间的正交格拉斯曼，并用$\mathrm{OG}^+(V,Q)$ 表示$\mathrm{OG}(V,Q)$ 中包含极大各向同性子空间 $W \oplus \{0\} \subset W \oplus W^\vee$的连通分支。

$\mathrm{OG}^+(V,Q)$的第一个典范嵌入可如下给出（见[Knu91]）。设 $C(W \oplus W^\vee, Q)$为具有线性映射 i: $W \oplus W^\vee \to C(W \oplus W^\vee, Q)$的克利福德代数，使得 $[i(x)]^2 = Q(x)$。由 $\rho(w,\alpha) = l_\alpha + \iota_w$定义的旋量表示 ρ: $C(W \oplus W^\vee, Q) \to \mathrm{End}(\bigwedge W^\vee)$ 分解为半旋量表示 $\bigwedge^{\mathrm{even}} W^\vee$、 $\bigwedge^{\mathrm{odd}} W^\vee$，其中 l_α 是左乘法， i_w 是导子。若旋量$\phi \in \bigwedge^{\mathrm{even}} W^\vee$的湮灭子 L_ϕ:$= \{x \in W \oplus W^\vee\colon\ x \cdot \phi = 0\}$是极大各向同性子空间，则该旋量为纯旋量。每个$L \in \mathrm{OG}^+(V,Q)$对应于唯一的纯旋量线 $[\phi_L]$。我们有旋量嵌入

$$e_{\mathrm{OG}^+}\colon \mathrm{OG}^+(V,Q) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{\mathrm{even}} W^\vee). \tag{6.1}$$

类似地，我们可以定义一个 $\mathscr{G}$:$= \mathrm{GL}(W^\vee) \times \mathbb{G}_m$–等变有理映射

$$\mathrm{KO}_n\colon\ \mathrm{OG}^+(V,Q) \dashrightarrow \mathbb{P}(\bigoplus_{k=0}^{[n/2]} \bigwedge^{2k} W^\vee) \times \prod_{k=0}^{[n/2]} \mathbb{P}(\bigwedge^{2k} W^\vee). \tag{6.2}$$

$\mathrm{OG}^+(n,2n)$ 中开 $\mathscr{G}$–轨道的 Kausz 型紧化 $\mathcal{TO}_n$ 定义为 KO_n 的图的闭包。通过投影到第一个因子，我们定义

$$\mathrm{R}_n\colon \mathcal{TO}_n \longrightarrow \mathrm{OG}^+(n,2n) \subset \mathbb{P}(\bigoplus_{k=0}^{[n/2]} \bigwedge^{2k} W^\vee).$$

完全反对称形式空间是图的闭包

$$\mathbb{P}(\bigwedge^2 W^\vee) \dashrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^2 \bigwedge^1 W^\vee) \times \mathbb{P}(\bigwedge^2 \bigwedge^2 W^\vee) \times \cdots \times \mathbb{P}(\bigwedge^2 \bigwedge^{[n/2]} W^\vee).$$

我们将此光滑射影簇记为 CS_n。注意，第一个边界除子 $D_0^- \subset \mathcal{TO}_n$ 同构于 CS_n， D_0^+亦然。然后通过到 $D_0^{\pm}$的投影，我们可以定义一个 $\mathscr{G}$–等变平坦态射

$$\mathrm{P}_n \colon \mathcal{TO}_n \longrightarrow \mathsf{CS}_n. \tag{6.3}$$

如命题 2.10 所述，R_n： $\mathcal{TO}_n \to \mathrm{OG}^+(n,2n)$ 可以表示为如下的迭代爆破。在类似于（2.1）的自然 $\mathbb{C}^*$–作用下，固定点概形 $\mathrm{OG}^+(n,2n)$ 的连通分支为

$$\underline{\mathcal{V}}_{(n-2k,2k)} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{OG}^+(n,2n) \middle| \begin{array}{c} X \text{ is a } 2k\times n \text{ matrix of rank } 2k \\ Y \text{ is an } (n-2k)\times n \text{ matrix of rank } (n-2k) \end{array} \right\}, \quad 0 \le k \le [n/2],$$

稳定子流形和不稳定子流形分别为

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{V}}^+_{(n-2k,2k)} &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & W \end{pmatrix} \in \mathrm{OG}^+(n,2n) \middle| \begin{array}{c} X \text{ is a } 2k\times n \text{ matrix of rank } 2k \\ Y \text{ is an } (n-2k)\times n \text{ matrix of rank } (n-2k) \end{array} \right\}, \\ \underline{\mathcal{V}}^-_{(n-2k,2k)} &:= \left\{ \begin{pmatrix} Z & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{OG}^+(n,2n) \middle| \begin{array}{c} X \text{ is a } 2k\times n \text{ matrix of rank } 2k \\ Y \text{ is an } (n-2k)\times n \text{ matrix of rank } (n-2k) \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

定义 $Z^+_{n-2k} = \overline{\mathcal{V}^+_{(n-2k,2k)}}$ 以及 $Z^-_{2k} = \overline{\mathcal{V}^-_{(n-2k,2k)}}$。当 n 为偶数时， $\mathcal{TO}_n$ 由 $\mathsf{OG}^+(n,2n)$ 依次爆破 $Z_0^-, Z_2^-, \dots, Z_{n-2}^-, Z_0^+, Z_2^+, \dots, Z_{n-2}^+$的严格变换（按此顺序）得到；当 n 为奇数时， $\mathcal{TO}_n$ 由依次爆破 $Z_0^-, Z_2^-, \dots, Z_{n-3}^-, Z_1^+, Z_3^+, \dots, Z_{n-2}^+$的严格变换得到。 $\mathcal{TO}_n$ 的边界除子为 $\cup_{0\le k\le [\frac{n}{2}]-1} D_k^+ \cup_{0\le k\le [\frac{n}{2}]-1} D_k^-$，其中

$$D_k^- := \overline{(\mathrm{R}_n)^{-1}(\underline{\mathcal{V}}^-_{(n-2k,2k)})} \text{ and } D_k^+ := \overline{(\mathrm{R}_n)^{-1}(\underline{\mathcal{V}}^+_{(n-2[\frac{n}{2}]+2k,2[\frac{n}{2}]-2k)})}.$$

我们按如下方式为 $\mathcal{TO}_n$ 引入 Mille Crêpes 坐标。选取 W的一个基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，并令$\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ 表示其在 $W^\vee$ 中的对偶基。对于满足 $0 \le \ell \le n$的任意偶整数 ℓ，由 $e_{\ell+1}, \cdots, e_n, e_1^*, \cdots, e_\ell^*$生成的极大各向同性子空间 $L_{12\cdots\ell}$ 周围有如下仿射坐标图。

$$U'_{12\cdots l} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c|c} Z & 0 & I_{l\times l} & X \\ -X^\top & I_{(n-l)\times(n-l)} & 0 & Y \end{array} \right) \right\} \cong \mathbb{A}^{\frac{n(n-1)}{2}}, \tag{6.5}$$

其中 Y、 Z 是反对称的。这些坐标图经置换后覆盖 $\mathsf{OG}^+(n,2n)$。我们定义

$$\mathbb{I}_n^k := \{(i_1, \cdots, i_{2k}) \in \mathbb{Z}^{2k} : 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k} \le n\} \text{ for } 0 \le k \le [n/2].$$

记 $\mathcal{S}_k$ 为由$\{(e_{\mathrm{OG}^+})^* z_I$ 生成的 $\mathcal{O}_{\mathrm{OG}^+(n,2n)}$ 的理想层： $I \in \mathbb{I}_n^k\}$。类似地，

引理 6.6. 对于任意满足 $0 \le k \le [n/2]$, $0 \le l \le n$ 的整数 k, l， $\mathcal{S}_k$ 在仿射坐标图 $U'_{12\cdots l}$ 上的限制由以下元素生成

$$\begin{cases} \{\mathrm{Pf}(Z_{i_1\cdots i_{l-2k}})\}_{1\le i_1<\cdots<i_{l-2k}\le l}, & 2k < l \\ \{\mathrm{Pf}(W_{j_1\cdots j_{2k-l}})\}_{l+1\le j_1<\cdots<j_{2k-l}\le n}, & 2k > l \\ 1, & 2k = l \end{cases}.$$

这里，Pf 是一个反对称矩阵的佩尔森式。

于是我们得到开覆盖

$$\mathcal{TO}_n = \bigcup_{g\in \mathrm{Aut}(\mathcal{TO}_n)} \bigcup_{\text{even } \ell=0}^{[n/2]} g(A_\ell),$$

其中 $A_\ell \cong \mathbb{A}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 带有正则坐标

$$\{a^+_{\ell,i}\}_{[\frac{n}{2}]-\frac{\ell}{2}\le i\le [\frac{n}{2}]-1}, \quad \{a^-_{\ell,i}\}_{\frac{\ell}{2}\le i\le [\frac{n}{2}]-1}, \quad \{b_{\ell,1}, \dots, b_{\ell,\frac{n(n-1)}{2}-[\frac{n}{2}]}\},$$

满足以下性质：

- 在每个 A_ℓ 上，对于 $[\frac{n}{2}] - \frac{\ell}{2} \le i \le [\frac{n}{2}] - 1$（分别为 $\frac{\ell}{2} \le i \le [\frac{n}{2}] - 1$），交 $D_i^+ \cap A_\ell$（分别为 $D_i^- \cap A_\ell$）由单个坐标 $a^+_{\ell\ i}$（分别为 $a^-_{\ell\ i}$）的零点给出；否则，交为空。坐标 $b_{\ell,1}, \dots, b_{\ell,\frac{n(n-1)}{2}-[\frac{n}{2}]}$是沿着（6.3）的纤维的水平坐标。

因此，我们得到以下结果。

定理 6.7。 $\mathcal{TO}_n$ 是光滑射影簇。群 $\mathscr{G}$ 作用于 $\mathcal{TO}_n$，其稠密开轨道同构于齐性空间 $\mathscr{G}/\mathscr{H}$，其中 $\mathscr{H}\subset\mathscr{G}$ 是 $W^\vee$ 上一个最大秩固定斜对称形式的稳定子。该开轨道的补集是一个除子，具有 $2\left[\frac{n}{2}\right]$ 个光滑不可约分支

$$D_0^-,\dots,D_{[\frac{n}{2}]-1}^-,\ D_0^+,\dots,D_{[\frac{n}{2}]-1}^+.$$

特别地， $\mathcal{TO}_n$ 是光滑射影球形 $\mathscr{G}$–簇。

定理 6.8。 对于每个 $n\geq 2$，簇 $\mathcal{TO}_n$ 都是弱 *Fano*。此外， $\mathcal{TO}_n$ 是 *Fano* 当且仅当 $2\leq n\leq 5$。

定理 6.9。 对于每个 $n\geq 2$，我们有

$$H^i\big(\mathcal{TO}_n,T_{\mathcal{TO}_n}\big)=0\qquad \textit{for all } i>0.$$

特别地， $\mathcal{TO}_n$ 是局部刚性的，也就是说，它没有局部变形。

定理 6.10。 希尔伯特商的通用族 $\mathbf{OG}^+(V\oplus V^*)/\!/\mathbb{G}_m$ 同构于 P_n： $\mathcal{TO}_n\to\mathsf{CS}_n$。特别地， [定理99] 中的全部三个希尔伯特商都有光滑的通用族。

我们参阅[FMW26]以了解更一般的处理方法。请注意，我们对边界除子的记号相较于 [FMW26]有所平移；具体而言，我们的 $D_i^\pm$ 对应于其中的 $D_{i+1}^\pm$ 。

参考文献

[ADHL15] I. Arzhantsev、U. Derenthal、J. Hausen 与 A. Laface，Cox 环，剑桥高等数学研究丛书，第 144，2015 3307753 卷，剑桥大学出版社，剑桥，。MR AP V. Alexeev 与 R. [13] Pardini，关于分歧阿贝尔覆盖的存在性，都灵理工大学数学研讨会汇刊 71 (2013)，第 3-4 期，307–315（英文）。[BB96] F. Bien 与 M. Brion，正则簇的自同构与局部刚性，《组合数学》104 (1996)，第 1 期，1–26。[BBS83] A. Białynicki-Birula 与 A. Sommese，由 C* 与 SL(2, C) 作用给出的商，《美国数学会汇刊》279 (1983)，第 2, 773 800 709583 期– 。MR BCHM C. Birkar、P. Cascini、C. D. Hacon 与 J. McKernan，对数一般型簇的极小模型的存在性，《美国数学会杂志》[10] **23** 2010 2, 405 468 2601039 ( )，第 – 期。MR BDPP S. [13] Boucksom、J.-P. Demailly、M. Păun 与 T. Peternell，紧 Kähler 流形的伪有效锥与 Kodaira 维数为负的簇，《代数几何杂志》**22** 2013 2, 201 248 3019449 ( )，第 – 期。MR Bri [89] M. Brion，球面簇的 Picard 群与特征数，《杜克数学杂志》58 2, 397 1989 424 1016427 ( )，第 – 期。MR [Bri97] , 球面簇中的曲线与除子，代数群与李群，澳大利亚数学会讲义丛书，第 9 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1997，第 21–34 页。MR 1635672[Bri 98] , 球面簇：导论，代数变换群中的拓扑方法，Birkhäuser，1998。[Bri06] , 球面簇，国际数学家大会论文集 II (2006)，753–772，可参见 arXiv:math/0511284 2275620 。MR Bri 美妙簇的全坐标环，《代数杂志》[07] , **313** 2007 1, 61 99 2320724 ( )，第 – [10] 期。MR CC D. Chen 与 I. Coşkun，Kontsevich 模空间的稳定基点轨迹分解，《密歇根数学杂志》 59 (2010)，第 2 期，435–466。MR 2677631[CC11] , 稳定映射模空间的 Mori 纲领初探，《美国数学杂志》133 (2011)，第 5 期，1389–1419，附 Charley Crissman 的附录。MR 2843103[CCM23] A. Casarotti、E. Corniani 与 A. Massarenti，完全奇异关联与二次曲面，《国际数学研究通知》(2023 18, 15370 15407 4644965)，第 – 期。MR Che D. Chen，Kontsevich 模空间的 Mori 纲领 $m_{0,0}(\mathbb{P}^3,3)$，[08] 《国际数学研究通知》(2008 067 2439572)，文章编号 。MR CHS I. Coşkun、J. Harris 与 J. Starr，Kontsevich 模空间的有效锥，《加拿大数学通报》[08] **51** 2008 4, 519 534 2462457 ( )，第 – 期。MR CHS Kontsevich 模空间的丰沛锥，《加拿大数学杂志》61 (2009)，第 1 期，109–123。MR [09] , 2488451[CM17] K. Chung 与 H. B. Moon，Grassmannian 中圆锥曲线模空间的 Mori 纲领，《台湾数学杂志》**21** 2017 3, 621 652 3661384 ( )，第 – 期。MR CM E. Corniani 与 A. Massarenti，完全辛二次曲面与拉格朗日格拉斯曼流形中圆锥曲线的 Kontsevich 空间，《数学进展》[22] **397** 2022 108205, 50 4366856 ( )，论文编号 。MR CS I. Coşkun 与 J. Starr，映至 Grassmannian 的映射空间上的除子，《国际数学研究通知》[06] **2006** 2006 1 25 2264713 ( )，– 。MR Dem M. Demazure，Borel 簇的自同构与变形，《数学发明》39 (1977)，179–186。[dJS17] A. J. de Jong 与 J. Starr，属零映射的除子类与虚规范丛，非闭域上的几何，西蒙斯研讨会丛书，Springer，Cham，2017，第 97–126 页。[77]

[DKKS21] P. Delorme、F. Knop、B. Krötz 与 H. Schlichtkrull，实球面空间的 Plancherel理论：Bernstein态射的构造，J. Amer. Math. Soc. **34** 2021 3, 815 908 4334192 ( )，第 – 期。MR Fal
[97] G. Faltings，模空间局部奇点的显式解消，J. Reine Angew. Math. 483 (1997)，183–196。MR 1431845[Fan26] H. Fang，广义Kausz紧化与完全共线空间的自同构群，《国际数学研究通知》(2026)，第 3 期，论文编号 rnag008，29。[FL24] B. Fu 与 Q. Li，wonderful群紧化在 Fano变形下的刚性，《微分几何杂志》128 (2024)，第 3 期，1085–1147。[FMR20] A. B. Freire、A. Massarenti 与 R. Rischter，拉格朗日格拉斯曼流形与旋量簇几何的射影方面，Bull. Sci. Math. **159** 2020 102829, 26 4041206 ( )，。MR FMW H. Fang、A. Massarenti 与
[26] X. Wu，拉格朗日格拉斯曼流形与正交格拉斯曼流形的典范爆破，arXiv: 2603.00386 (2026)。[FP97] W. Fulton 与 R. Pandharipande，关于稳定映射与量子上同调的注记，代数几何——Santa Cruz 1995，Proceedings of Symposia in Pure Mathematics，第 62 卷，美国数学学会，Providence, RI，1997，第 45–96 页。MR 1492534[FW25] H. Fang 与 X. Wu，格拉斯曼流形的典范爆破 I：Kausz 紧化有多典范？，《国际数学研究通知》(2025 11, 138, 25 4914936)，第 论文编号
[13] rnaf 期。MR FZ B. Fu 与 D. Zhang，经由自同构群刻画紧复环面，Math. Ann. 357 (2013)，第 3 期，961–968。MR 3118620[FZ21] H. Fang 与 S. Zhu，格拉斯曼流形典范爆破的一个消失定理，Complex Manifolds 8 (2021)，第 1 期，415–439。MR 4356517[GP06] E. Getzler 与 R. Pandharipande，$\mathscr{M}_{0,n}(r,d)$ 的 Betti数，《代数几何杂志》15 (2006)，第 4 期，709–732。MR 2237267[HK00] Y. Hu 与 S. Keel，Mori 梦空间与 GIT，《密歇根数学杂志》48 (2000)，第 1 期，331–348。MR 1786494[Kap93] M. Kapranov，格拉斯曼流形的 Chow 商。I，Adv. Soviet Math.，第 16 卷，美国数学学会，Providence, RI，1993，第 29–110 页。MR 1237834
[00] **5** 2000 553 594 1796449 Kau I.
[94] Kausz，一般线性群的模紧化，Doc. Math. ( )，– 。MR KM M. Kontsevich 与 Y. Manin，Gromov–Witten类、量子上同调与枚举几何，Communications in Mathematical Physics **164** 1994 3, 525 562 1291244 ( )，
[10] 第 – 期。MR KM Y. Kiem 与 H. Moon，经由 GIT 得到的映至射影空间的稳定映射模空间，Internat. J. Math. 21 5, 639 2010 664 2650852 ( )，第 – 期。MR [Kno94] F. Knop，约化群作用的 Harish-Chandra同态，Annals of Mathematics 140 2, 253 1994 288 ( )，第 – 期。[Knu91] M. Knus，环上的二次型与 Hermitian型，Grundlehren der mathematischen Wissenschaften，第 294 卷，Springer-Verlag，柏林，1991。MR 1096299[KV07] J. Kock 与 I. Vainsencher，量子上同调导引，Progress in Mathematics，第 249 卷，Birkhäuser Boston, Inc.，Boston, MA，
2007, 2262630 有理平面曲线的
[15] Kontsevich 公式。MR Loz C. Lozano Huerta，完全二次曲面空间的双有理几何，《国际数学研究通知》(2015 23, 12563 12589 3431630)，第 – 期。MR
[04] **4** 2004 1, 153 179, 311 2074987 Lus G.
[99] Lusztig，抛物特征层。I，Mosc. Math. J. ( )，第 – 期。MR Man Y. Manin，Frobenius流形、量子上同调与模空间，Colloq. Publ.，Am. Math. Soc.，第 47 卷，Providence, RI：美国数学学会，1999（英文）。[Mas20] A. Massarenti，完全形式空间的双有理几何 I：共线变换与二次曲面，Proc. Lond. Math. Soc. (3 **121** 2020 6, 1579 1618 4144371) ( )，第 – 期。
[07] MR MM A. M. Mustaţă 与 M. Mustaţă，稳定映射的中间模空间，Invent. Math. 167 (2007)，第 1 期，47–90。MR 2264804[MM08] A. M. Mustaţˇa 与 M. Mustaţˇa，$M_{0,m}(\mathbb{P}^n,d)$ 的 Chow环，J. Reine Angew. Math. 615 (2008)，93–119。MR 2384333[MM10] A. M. Mustaţă 与 M. Mustaţă，属零稳定映射空间上的泛关系，《美国数学会汇刊》362 (
2010 4, 1699 1720 2574874)，第 – 期。MR MMM L. Manivel、M. Michałek、L. Monin、T. Seynnaeve 与
[+24] M. Vodička，完全二次曲面：高斯模型与半定规划的 Schubert演算，J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **26** 2024 8, 3091 3135 4756951 ( )，第 –
[21] $\mathbb{C}^*$ 期。MR MMW M. Michałek 、 L. Monin 与 J. A. Wiśniewski，最大似然次数、完全二次曲面与 - 作用，SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry 5 (2021)，第 1 期，60–85。[MR18] A. Massarenti 与 R. Rischter，格拉斯曼流形的球面爆破与 Mori 梦空间，《代数杂志》494 (2018)，188–219。MR 3723177[Opr05] D. Oprea，映至旗簇的稳定映射模空间上的除子与重构，J. Reine Angew. Math. **586** 2005 169 205 2180604 ( )，– 。MR Opr D. Oprea，映至旗簇的稳定映射模空间的典范环，《代数几何
[06] 杂志》15 (2006)，第 4 期，623–655。MR 2237264[Pan97] R. Pandharipande，$M_{0,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 的典范类与枚举几何，Internat. Math. Res. Notices (1997)，第 4 期，173–186。MR 1436774[Pan99] ，Kontsevich模空间 $M_{0,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 上 Q-除子的交与枚举几何，《美国数学会汇刊》351 (1999)，第 4 期，1481–1505。MR 1407707

[Per02] N. Perrin, 《齐性簇上的有理曲线》, 傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）**52** (2002), 第 1 期, 105–132. MR 1881572
[14] **19** 2014 1, 171 223 3155755 Per N. Perrin, 《球面簇的
[66] **5** 1966 159 177
几何》, Transformation Groups ( ), 第 – 期. MR Ram S. Ramanan, 《齐性空间上的全纯向量丛》, Topology ( ), – . [Spr02] T. Springer, 《的交叉上同调
$B \times B$ **258** 2002 1, 群紧化中的轨道闭包》, J. Algebra ( ),
71 111 1958898
第 – 期 . MR [99] **315** 1999 3, 469 495 1725990 Tha M. Thaddeus, 《完全
[82]
共线的再探》, Math. Ann. ( ), 第 – 期. MR Vai I. Vainsencher, 《完全二次曲面的 Schubert 演算》, 枚举几何与经典代数几何, 第 24 卷, 199 1982 685770 –
235, Birkhäuser, 波士顿, 马萨诸塞州, . MR

HANLONG FANG, 北京大学数学科学学院, 中国北京 100871电子邮箱: hlfang@pku.edu.cn

ALEX MASSARENTI, 费拉拉大学数学与计算机科学系, 马基雅维利街30号, 费拉拉 44121, 意大利电子邮箱: msslxa@unife.it

XIAN WU, 北京大学数学科学学院, 中国北京 100871电子邮箱: xianwu.ag@gmail.com