arXiv:2603.05823v1 [math.AG] 6 Mar 2026

Mukai-Umemura簇上的 DT-GV 对应

KIRYONG CHUNG 和 JOONYEONG WON

摘要。我们通过若干局部化公式，计算了Mukai–Umemura簇上局部 Calabi–Yau四维簇的 Donaldson–Thomas（DT）不变量及其后裔不变量。假设一亏格 Gopakumar–Vafa（GV）型不变量消失，我们的计算验证了 Cao、Maulik 和 Toda 的预测。

1. 引言

1.1. 动机与结果。 令 Y为一个 Calabi–Yau四维簇， $\beta \in H_2(Y,\mathbb{Z})$ 为一个曲线类。令 $\mathbf{M}_\beta(Y)(=\mathbf{M})$ 表示满足 $[F]=\beta$和 $\chi(F)=1$的 F在 Y 上的一维稳定层的模空间。给定一个类 $\gamma \in \mathrm{H}^{4-2i}(Y,\mathbb{Z})$，插入 定义为

$$\tau_i(\gamma) = \pi_{\mathbf{M}*}(\pi_Y^*\gamma \cup \mathrm{ch}_{i+3}(\mathcal{F}))\,,$$

其中， $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(\mathbf{M}_\beta(Y) \times Y)$ 是具有平凡行列式（即 $\det(R\pi_{\mathbf{M}*}\mathcal{F}) = \mathcal{O}_{\mathbf{M}}$）的泛层。主不变量（对于 $i=0$）或后裔不变量（对于 $i \geq 1$）定义为将插入在虚拟类 $[\mathbf{M}_\beta(Y)]^{\mathrm{vir}}$ 上积分：

$$\langle \tau_i(\gamma)\rangle_\beta := \int_{[\mathbf{M}_\beta(Y)]^{\mathrm{vir}}} \tau_i(\gamma). \tag{1}$$

积分 $\langle \tau_0(\gamma)\rangle_\beta$ 称为 DT 不变量（或主不变量）。当 $i \geq 1$时，我们将 $\tau_i(\gamma)$ 称为后裔插入，而其在虚拟类上的积分称为后裔不变量。

Calabi–Yau四维簇的 DT 理论近年来在枚举几何中受到广泛关注，这源于其丰富的几何结构以及与其他曲线计数理论之间的深刻联系。特别是，Cao、Maulik 和 Toda 提出了一系列猜想，预言 Calabi–Yau四维簇的 DT 不变量与 Klemm 和 Pandharipande 引入的 Gopakumar–Vafa（GV）型不变量之间存在精确对应关系（[CMT18、CT21、KP08]）。更准确地说，该猜想表述为

猜想 *1.1*（[*CMT18*，猜想 *0.*2] 和 [*CT21*，猜想 *0.*2]）。令 $n_{0,\beta}(-)$（分别地，$n_{1,\beta}$）表示 *genus 0*（分别为 *1*）的 *GV* 型不变量，并令 m_{β_1,β_2} 表示 [*KP*08] 中定义的相交不变量。在模空间 $M_\beta(Y)$ 上取适当的定向后，有

(a) $n_{0,\beta}(\gamma_0) = \langle \tau_0(\gamma_0)\rangle_\beta$ 对于 $\gamma_0 \in \mathrm{H}^4(Y,\mathbb{Z})$。***(b)*** 此外，我们有一个线性恒等式：

$$\langle \tau_1(\gamma_1)\rangle_\beta = \frac{n_{0,\beta}(\gamma_1^2)}{2(\gamma_1\cdot\beta)} - \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \frac{(\gamma_1\cdot\beta_1)(\gamma_1\cdot\beta_2)}{4(\gamma_1\cdot\beta)}\, m_{\beta_1,\beta_2} - \sum_{k\geq 1,\, k|\beta} \frac{\gamma_1\cdot\beta}{k}\, n_{1,\beta/k} \tag{2}$$

关于 $\gamma_1 \in \mathrm{H}^2(Y,\mathbb{Z})$。

本文研究 $Y = \mathrm{Tot}(K_X)$ 是*Mukai-Umemura*簇 X 的典范丛的全空间这一情形（即唯一一个允许非平凡

2 020 数学主题分类。14N35, 14C15, 14C35, 14J45。关键词和短语。Mukai-Umemura簇，Donaldson-Thomas不变量，Gopakumar-Vafa不变量 s.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$作用的光滑素 Fano 三维簇）。关于我们局部 Fano 4维簇 的相交不变量 $m_{\beta_1,\ \beta_2}$ 的定义关系，见第3.4节第一段。

此前已知，猜想1.1 对以下曲线类 $\beta = d$[直线]，$1 \leq d \leq 3$ 以及 $Y = \mathrm{Tot}(K_X)$ ([CLW24，定理 4。2]) 成立。对于 $d \leq 3$，在模空间上得到的泛层的显式描述（见 [AF06，引理 3。1], [Fae14，引理 4。1],以及 [KS04，定理 2。4]）足以证明该猜想。然而，$d = 4$ 这一情形需要更细致地分析稳定层的结构及其对虚循环的贡献。本文将结果推广到次数至 $d = 4$。

定理 1.2(=定理3.16)。对于 $Y = \mathrm{Tot}(K_X)$ 及 *Mukai-Umemura* 簇 X，猜想 *1.1* 中的等式(2) 在以下条件成立时，对 $\beta = 4$[直线] 成立：$n_{1,\ d} = 0$ 对于 $1 \leq d \leq 4$。

定理 1.2 的证明基于对模空间中的环面不变稳定层进行详细分析（命题 3.4 和命题 3.9）。随后，我们应用了多种（虚拟）局部化公式，这些公式在 [AB84、BV82、GP99、Tho92、Tho93]中有所研究。通过局部化组织这些贡献，我们明确计算了主不变量和后代不变量（命题 3.13）。这就证明了猜想 1.1 中的等式 (2)（第 3.4 节）。在这些计算中，一个关键特点是，除重数为 4 的直线外，对任意固定曲线，障碍空间中总存在一个权重零分量（引理 3.2、命题 3.9 和命题 3.11），因此它不会对局部化公式作出贡献。此外，对于 $d \leq 3$ 也会出现同样的现象，因此我们可以轻松地重现先前的结果（[CLW24，命题 3.17]）。

致谢。作者谨此感谢 Sanghyeon Lee 在论文撰写过程中提出的诸多宝贵建议和意见。第一作者获得了韩国国家研究基金会 NRF2021R1I1A3045360 的资助。第二作者获得了韩国国家研究基金会 RS-2025-00513064 的资助。

2. 预备知识

本节将介绍若干局部化公式，并回顾 [CKK25] 中的结果，供后文使用。

2.1. 具有孤立不动点的簇的局部化公式。

设 $T(\cong \mathbb{C}^*)$ 为一个代数环面，M 为一个 T-空间，其不动点轨迹 M^T 是有限的。我们在等变上同调 $H_T^*(-)$ 和同调 $\mathrm{H}_*^T(-)$ 中进行讨论。记 $e^T(-)$ 为等变欧拉类。

定理 2.1 (虚拟局部化 [GP99])。假设 M 带有一个 T-等变完美障碍理论，其虚基本类为 $[M]^{\mathrm{vir}} \in H_*^T(M)$。那么对任意 $u \in H_T^*(M)$,

$$\int_{[M]^{\mathrm{vir}}} u = \sum_{x \in M^T} \frac{u|_x}{e^T\big(T_x^{\mathrm{vir}} M\big)}. \tag{3}$$

注2.2 (光滑情形 [AB84, BV82])。若 M光滑，则对于任意 $u \in H_T^*(M)$，有

$$\int_{[M]} u = \sum_{x \in M^T} \frac{u|_x}{e^T(T_x M)}. \tag{4}$$

2.2. 等变K理论中的一些事实。

在 [Tho92中，Tho93], 证明了环面作用下代数K理论中的等变自交公式和Lefschetz型局部化公式。为供后续使用，我们汇集一些结果。记

$$\lambda_{-1}(E|_p) = \sum_{i=0}^{\mathrm{rank}\, E} (-1)^i \, [\wedge^i E|_p]$$

为不动点 $p \in X$ 处 X 上的 T-等变局部自由层 E 的 K-理论 λ类。记 T 的表示环为 $R(T)$，它与 $R(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 有典范同构，其中 t 表示 $\mathbb{C}^*$ 的标准一维特征。我们将 $\mathbb{C}^*$- 等变欧拉示性数（或配对）定义为

$$\chi(E,F) := \sum_i (-1)^i [\mathrm{Ext}^i(E,F)] \in R(\mathbb{C}^*)$$

对于 E 与 F 是 X 上的 T-等变凝聚层。

定理 2.3 (定理 3.5 [Tho92]). 设 X 为具有环面作用 T 的光滑射影簇，并设 $F, G \in Coh^T(X)$。假设不动点轨迹 X^T 由孤立点组成。则对于 $i_p\colon \{p\} \hookrightarrow X$，我们有

$$\chi(F,G) = \sum_{p \in X^T} \frac{i_p^*([F])^\vee \cdot i_p^*([G])}{\lambda_{-1}(T_p^* X)}.$$

我们回顾（等变）自交公式在 K-理论中。

定理 2.4 ([Tho93，定理 3.1]). 设 $i\colon C \hookrightarrow X$ 为嵌入映射，使得 C 是局部完全交。设 $p \in C^T$ 是 T-不动点。则对任意 $F \in Coh^T(C)$，

$$i_p^*\big([i_* F]\big) = [F]_p \cdot \lambda_{-1}\big(N_{C/X,p}^*\big) \in K_T(\mathrm{pt}).$$

这里 $[F]_p = [F \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{O}_C} \mathbb{C}_p] \in K_T(\mathrm{pt})$ 表示 F在点 p处的导出纤维。

注记 2.5。 在定理 2.4中，若 F 在 C 闭点 p附近局部自由，则 $[F]_p$ 与通常纤维 $F|_p$上的 T-表示的类一致。

推论 2.6。 设 X 光滑，且不动点轨迹 X^T 是孤立的。那么对于 X上的任意 $\mathbb{C}^*$-等变局部自由层 E，有

$$\chi(E) = \sum_{p \in X^T} \frac{[E]_p}{\lambda_{-1}(T_p^* X)}.$$

证明。 令 $F = \mathcal{O}_X$ 和 $G = E$。由定理 2.3 和定理 2.4，即可得到结论。 □

推论 2.7。 设 X是一个带有 T作用的光滑射影簇，并设 $i\colon C \hookrightarrow X$是一条光滑的 T-不变曲线。则

$$\chi(i_*\mathcal{O}_C, i_*\mathcal{O}_C) = \sum_{i=0}^{\dim X - 1} (-1)^i \chi(C, \wedge^i N_{C/X}), \tag{5}$$

其中 $\wedge^0 N_{C/X} = \mathcal{O}_C$。

证明。 在定理 $F = G = i_*\mathcal{O}_C$ 中应用 2.3，由定理 2.4 和推论2.6直接计算即可得到结论。 □

2.3. **簇的几何数据** X。回顾一下 Mukai-Umemura 簇 X 的定义。令 $\mathcal{S}$为格拉斯曼流形 Gr(3，7) 上的泛丛。那么， X 定义为 $(\wedge^2 \mathcal{S}^*)^{\oplus 3}$ 的一个正则截面的零点轨迹。此外，

- X 在 $\mathbb{Z}$上的上同调环同构于
$$\mathrm{H}^*(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[h_1,h_2,h_3]/\langle h_1^2 - 22h_2, h_1^3 - 22h_3, h_1h_2 - h_3, h_2^2\rangle$$
其中 $\deg(h_i) = 2i$， $1 \le i \le 3$。此外， $h_1 = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ 和 h_i 是维数为 $3-i$ 的线性空间的庞加莱对偶，其中 $i = 2$， 3。
- X 的切丛的陈类为 $c(T_X) = 1 + h_1 + 24h_2 + 4h_3$。
- $\deg(X) = 22$， $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}}(X) \cong \mathbb{Z}\langle H\rangle$，以及 $K_X = -H$ X的超平面除子 H。

2.4. 簇 X 的局部图表及其权。在[CKK25], 第 4 节的开篇部分，研究了在存在 $\mathrm{SL}_2 := \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-作用的情况下，簇 X 的局部图表。现将后文会用到的结果总结如下。由于我们将考虑 SL_2, 中极大环面子群（$\{\mathrm{diag}(t^{-1},t) \mid t \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*$）的作用，记向量空间 $U_6 = \langle e_6, e_4, e_2, e_0, e_{-2}, e_{-4}, e_{-6}\rangle$ 在 $k \in \{\pm 6, \pm 4, \pm 2, 0\}$下的权为 $e_k = -k$。环面权的计算表明， X 有四个不动点：

$$p_{12} := \mathbb{P}(e_6 \wedge e_4 \wedge e_2),\ p_{10} := \mathbb{P}(e_6 \wedge e_4 \wedge e_0),\ p_{-10} := \mathbb{P}(e_0 \wedge e_{-4} \wedge e_{-6}),\ p_{-12} := \mathbb{P}(e_{-2} \wedge e_{-4} \wedge e_{-6})$$

在 Pl¨ucker 嵌入到 $\mathbb{P}(\wedge^3 U_6)$ ([Don08，第 5 节。2]）。下面描述这些不动点附近 $\mathbb{C}^*$-不变的局部坐标图。令 X 表示格拉斯曼流形中的标准舒伯特胞腔$\mathrm{Gr}(3, U_6)$，并设

$$V_m := X \cap V_m^\circ.$$

Gr(3， U_6) 在不动点 p_{12} 附近的标准仿射图 V_{12}° 由以下参数化：

$$P = \mathrm{span}\{e_6 + a_1e_0 + a_2e_{-2} + a_3e_{-4} + a_4e_{-6}, e_4 + a_5e_0 + a_6e_{-2} + a_7e_{-4} + a_8e_{-6},$$
$$e_2 + a_9e_0 + a_{10}e_{-2} + a_{11}e_{-4} + a_{12}e_{-6}\}.$$

簇 X 由二次条件 $\eta(\wedge^2 P) = 0$定义，其中 η 是定义在U_6 ([CKK25，注 3。12]）上的交替形式网。因此，仿射图 V_{12} 由以下九个方程刻画：

$$\begin{aligned}&\langle 5a_2 + 3a_7, a_3 + 9a_8, 2a_2a_5 - 2a_1a_6 + \tfrac{1}{5}a_4, 10a_1 - a_{11}, 5a_2 - 9a_{12},\\ &6a_2a_9 - 6a_1a_{10} - a_3, a_5 + a_{10}, 5a_6 + a_{11}, 2a_6a_9 - 2a_5a_{10} - \tfrac{1}{3}a_7 - \tfrac{1}{5}a_{12}\rangle.\end{aligned} \tag{6}$$

由关系式（6），可选取 a_1， a_5， a_9 作为 V_{12}上的仿射坐标。根据权在符号变换下的对称性，我们也可以取 d_1， d_5， d_9 作为 V_{-12}上的坐标。注意，这两个图 V_{12}和 V_{-12} 均与仿射空间同构 $\mathbb{C}^3$ (参见 [Fur90，第 5]节）。类似地，在不动点 p_{10}附近，格拉斯曼流形$\mathrm{Gr}(3,\ U_6)$ 的仿射图由以下参数化

$$Q = \mathrm{span}\{e_6 + b_1e_2 + b_2e_{-2} + b_3e_{-4} + b_4e_{-6}, e_4 + b_5e_2 + b_6e_{-2} + b_7e_{-4} + b_8e_{-6},$$
$$b_9e_2 + e_0 + b_{10}e_{-2} + b_{11}e_{-4} + b_{12}e_{-6}\}$$

因此 V_{10} 被定义为如下九个方程：

$$\begin{aligned}&\langle -b_2 - \frac{3}{5}b_7, b_2b_5 - b_1b_6 - \frac{1}{5}b_3 - \frac{9}{5}b_8, -b_3b_5 + b_1b_7 + \frac{3}{5}b_4, -6b_1 - \frac{3}{5}b_{11}, b_2b_9 - b_1b_{10} - \frac{9}{5}b_{12},\\ &-b_3b_9 + b_1b_{11} + 6b_2, -6b_5 + b_{10}, b_6b_9 - b_5b_{10} + \frac{1}{5}b_{11}, -b_7b_9 + b_5b_{11} + 6b_6 - \frac{3}{5}b_{12}\rangle,\end{aligned} \tag{7}$$

这由二次关系 $\eta(\wedge^2 Q) = 0$ 得出。根据 (7) 中的关系，我们知道，不动点 p_{10} 周围的开图 V_{10} 可以取坐标 b_5、b_8、b_9。由于权在符号变换下具有对称性，我们可以将 V_{-10} 的坐标取为 c_5、c_8、c_9。注意，开图 V_{10} （分别为 V_{-10}）同构于 $V_{10} \cong \mathbb{C}^3_{(b_5,b_8,b_9)} \setminus \{3b_5b_9 - 2 = 0\}$ （分别为 $V_{-10} \cong \mathbb{C}^3_{(c_5,c_8,c_9)} \setminus \{3c_5c_9 - 2 = 0\}$）。总之，坐标 a_i、 b_i、 c_i 和 d_i 的权列于表 1 中。我们用 wt(–) 表示 V_i 的坐标 – 的权。

不动点周围的局部图表 V_i	V_i的坐标	坐标的权
$p_{12} \in V_{12}$	$\{a_1, a_5, a_9\}$	$\mathrm{wt}(a_1) = -6$,$\mathrm{wt}(a_5) = -4$,$\mathrm{wt}(a_9) = -2$
$p_{10} \in V_{10}$	$\{b_5, b_8, b_9\}$	$\mathrm{wt}(b_5) = -2$, $\mathrm{wt}(b_8) = -10$, $\mathrm{wt}(b_9) = 2$
$p_{-10} \in V_{-10}$	$\{c_5, c_8, c_9\}$	$\mathrm{wt}(c_5) = 2$, $\mathrm{wt}(c_8) = 10$, $\mathrm{wt}(c_9) = -2$
$p_{-12} \in V_{-12}$	$\{d_1, d_5, d_9\}$	$\mathrm{wt}(d_1) = 6$, $\mathrm{wt}(d_5) = 4$, $\mathrm{wt}(d_9) = 2$

表 1。 X 的局部坐标及其权

注 2.8. 设 $\mathbf{G} = \mathrm{Gr}(3, U_6)$ 是具有泛子丛 $\mathcal{S}$ 的格拉斯曼流形。由切丛正合列

$$0 \to T_X \to T_{\mathbf{G}}|_X \to N_{X/\mathbf{G}} \cong (\wedge^2 \mathcal{S}^*)^{\oplus 3} \to 0, \tag{8}$$

可以证明，固定点 $p_i, i \in \{\pm 12, \pm 10\}$ 处切空间 $T_{p_i}X$ 的 $\mathbb{C}^*$-权与 X 在原点处的局部图表 V_i 所得的权一致。例如，点 p_{10} 对应于子空间 $U_3 = \langle e_6, e_4, e_0 \rangle \subset U_6$。点 p_{10} 处$\mathbf{G}$ 的切空间可识别为

$$T_{\mathbf{G}, p_{10}} \cong \mathrm{Hom}(U_3, U_6/U_3) \cong U_3^* \otimes (U_6/U_3).$$

此外，点 p_{10} 处$\mathbf{G}$ 中 X 的法空间为

$$N_{X/\mathbf{G}, p_{10}} \cong (\wedge^2 U_3^*) \otimes N,$$

其中，$\mathbb{C}^*$-权 N 为 ± 2 和0 （[CKK25，命题 3.11]）。结合这些描述与正合列（8），我们推得切空间 $T_{X, p_{10}}$ 的 $\mathbb{C}^*$-权为 $\pm 2, 10$。这些结果与在原点处根据 V_{10} 的局部坐标计算出的权一致，即

$$\mathrm{wt}\left(\frac{\partial}{\partial b_5}\right) = 2, \ \mathrm{wt}\left(\frac{\partial}{\partial b_8}\right) = 10, \ \mathrm{wt}\left(\frac{\partial}{\partial b_9}\right) = -2.$$

2.5. **环面不动曲线及其局部方程**。在 [CKK25],中，作者对所有 $\mathbb{C}^*$-不动曲线（低次数）利用 Kuznetsov 的翻转图进行了分类（[Kuz97，定理 1]）。

引理 2.9 （[CKK25，命题 4.9 与注记 4.10]）。 $\mathbb{C}^*$-不动的不可约有理曲线，其次数为$d \leq 4$，位于 X 中，由以下组成

- 不动直线 $L_{\pm 2}$： $\{e_{\pm 6} \wedge e_{\pm 4} \wedge (\alpha e_{\pm 2} + \beta e_0)\}$,
- 光滑圆锥曲线 Q： $\{e_0 \wedge (\alpha e_6 - 9\beta e_{-4}) \wedge (\alpha e_4 + \beta e_{-6})\}$，以及
- 光滑四次曲线 C_4： $\{(4\alpha^2 e_6 + \alpha\beta e_0 - 5\beta^2 e_{-6}) \wedge (2\alpha e_4 - \beta e_{-2}) \wedge (2\alpha e_2 + 5\beta e_{-4})\}$

对于 $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$。此外，这些曲线的局部定义理想列于表 2 .

不动曲线 C	局部图表 V_i 关于 X	C 在 V_i中的定义理想
L_2	V_{12}	$\langle a_1, a_5 \rangle$
	V_{10}	$\langle b_5, b_8 \rangle$
L_{-2}	V_{-12}	$\langle d_1, d_5 \rangle$
	V_{-10}	$\langle c_5, c_8 \rangle$
Q	V_{10}	$\langle b_5, b_9 \rangle$
	V_{-10}	$\langle c_5, c_9 \rangle$
C_4	V_{12}	$\langle a_5, a_9 \rangle$
	V_{-12}	$\langle d_5, d_9 \rangle$

表 2. 固定曲线及其定义方程

从现在起，我们用 $L = L_2$ 表示表格中的第一行 2。

3. DT不变量的计算

本节中，当 Y 是 X 上的局部CY四维簇时，我们将通过局部化公式计算积分。

3.1. **通过局部化公式计算积分**。 设 X 是一个光滑的 Fano3维簇。设 $Y = \mathrm{Tot}(K_X)$ 是典范线丛 K_X 的全空间，其典范投影映射为 $\pi\colon Y \to X$。在这种情况下，由 [CL14定理 65],

$$\mathbf{M}_\beta(X) \cong \mathbf{M}_{\pi^*\beta}(Y), F \mapsto i_*F$$

对于零截面 $i\colon X \hookrightarrow Y = \mathrm{Tot}(K_X)$。此外，由格罗滕迪克－黎曼－罗赫定理，插入项变为

$$\tau_i(\gamma) = \pi_{\mathbf{M}*}\left(\pi_X^*\gamma \cup \{\mathrm{ch}(\mathcal{F}) \cdot \mathrm{td}(K_X)^{-1}\}_{i+2}\right)$$

因此，式（1）中的积分是关于虚拟类 $[\mathbf{M}\beta(X)]^{\mathrm{vir}}$ ([Tho00推论 339]）。在此设定下，我们为带插入项的积分构造一个局部化公式。

命题 3.1。 设不动点轨迹 $\mathbf{M}^T := \mathbf{M}\beta(X)^T$ 是孤立的。则对于 $\gamma \in \mathrm{H}_T^{4-2i}(X, \mathbb{Z})$，插入项的积分为

$$\langle \tau_i(\gamma) \rangle_d = \sum_{[F]\in\mathbf{M}^T} \left(\sum_{p\in \mathrm{supp}(F)^T} \frac{\gamma|_p \cdot \{\mathrm{ch}^T(F|_p) \cdot \mathrm{td}^T(K_X|_p)^{-1}\}_{i+2}}{e^T(T_X|_p)} \right) e^T\left(\chi(F,F) - 1\right). \tag{9}$$

证明。 $[F]$ 处的$\mathbf{M} := \mathbf{M}\beta(X)$ 的等变虚拟切空间为

$$T^{\mathrm{virt}}_{[F]}\mathbf{M} = [\mathrm{Ext}^1(F,F)] - [\mathrm{Ext}^2(F,F)] = -\chi(F,F) + 1$$

由于 $\mathrm{H}^1(\mathcal{O}_X) = \mathrm{Ext}^3(F, F) = 0$，根据稳定层 F([CL14，定理 6。5]和 [Tho00，推论 3。39])。因此，应用虚拟局部化公式（定理 2.1），插入项的积分变为

$$\langle \tau_i(\gamma) \rangle_d = \int_{[\mathbf{M}]^{\mathrm{vir}}} \tau_i(\gamma) = \sum_{[F]\in\mathbf{M}^T} \frac{\tau_i(\gamma)|_{[F]}}{e^T(T^{\mathrm{vir}}_{[F]}\mathbf{M})} = \sum_{[F]\in\mathbf{M}^T} \tau_i(\gamma)|_{[F]} \cdot e^T\left(\chi(F,F) - 1\right). \tag{10}$$

在 X上应用局部化公式（注 2.2），可得

$$\tau_i(\gamma)|_{[F]} = \int_X \gamma \cdot \{\mathrm{ch}(F) \cdot \mathrm{td}(K_X)^{-1}\}_{i+2} = \sum_{p\in\mathrm{supp}(F)^T} \frac{\gamma \cdot \{\mathrm{ch}^T(F) \cdot \mathrm{td}^T(K_X)^{-1}\}_{i+2}|_p}{e^T(T_X|_p)}.$$

将其代入（10），即可得到所求结果。 □

为计算命题 3.1 中（9）的不变量，我们考虑如下情形。记 T-等变第一陈类，即平凡线丛 $\mathbb{C}\otimes t$ 的 $c_1^T(\mathbb{C}\otimes t) = \lambda$。假设超平面丛 $\mathcal{O}_X(1)$在不动点 p处（用 Pl ¨ucker 坐标表示）的纤维为 $\mathcal{O}_X(1)|_p = \mathbb{C}\otimes t^m$，$m \in \mathbb{Z}$。那么，根据第 2.3 节的结果，

$$h_1|_p = m\lambda,\ h_2|_p = \frac{1}{22}(m\lambda)^2, \text{ and } \mathrm{td}^T(K_X|_p)^{-1} = \frac{1 - e^{m\lambda}}{-m\lambda}. \tag{11}$$

另一方面，支撑在光滑曲线上的稳定层的等变陈特征 $F\ i\colon\ C \subset X$ 由下式给出（定理2.4）

$$\mathrm{ch}^T((i_*F)|_p) = \mathrm{ch}^T\left([F]_p \cdot \lambda_{-1}(N^*_{C/X,p})\right). \tag{12}$$

毕竟，为了计算局部形式（9），我们需要知道

- 不动曲线的结构层的自欧拉配对（参见定理 2.3）以及

- 式（12）中的等变陈特征。

另一方面，很容易验证模空间 $\mathbf{M}_4(X)$ 与希尔伯特概形$\mathbf{H}_4(X)$ 同构，其参数化的是曲线 C，其中 $\chi(\mathcal{O}_C(m)) = 4m+1$ 表示 Cohen-Macaulay （ CM ）曲线（ [CKK25，命题 4。13]）。因此， $\mathbb{C}^*$- 不动的稳定层 X 恰好是 $\mathbb{C}^*$-不动 CM 曲线的结构层（[CC11，引理 3。17]）。

3.2. **不动曲线的等变欧拉示性数**。 本小节将计算 X中不动曲线的等变欧拉示性数，这是本文的主要技术要点之一。回顾一下，我们将 a_i， b_i， c_i， d_i (表 1) 的权视为局部图表 V_i 的坐标环的生成元，因此它们是簇的余切（或余法）层的权。我们首先考虑不可约的 $\mathbb{C}^*$-不动曲线，其次数为 ≤ 4。

引理 3.2. 结构层 $\mathcal{O}_C$ 的等变欧拉示性数（固定曲线 $C \in \{L_{\pm 2}, Q, C_4\}$， 见表2 ）列于表3。

有理曲线 C	$\chi(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C)$ 的 $\mathbb{C}^*$-表示
L_2	$1-(t^2+t^4)+t^8$
L_{-2}	$1-(t^{-2}+t^{-4})+t^{-8}$
Q	$1-(t^{-2}+t^2)+t^0$
C_4	$1-(t^{-4}+t^{-2}+t^2+t^4)+(t^{-6}+t^0+t^6)$

表3. 环面不动曲线的等变欧拉配对

表 3 以及下文类似的情形中，括号表示变形部分（分别对应阻碍部分）$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C)$ （分别为 $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C)$）。

证明。 由于不动曲线（表 2）由坐标轴局部定义，计算本质上相同。因此，我们给出第一种情形的详细计算，即 $L := L_2$。由推论2.7、推论 2.6以及 $\chi(\mathcal{O}_L) = 1$，可得

$$\chi(\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L) = 1 - \left(\frac{N_{L/X,p_{12}}}{1-T_{p_{12}}^* L} + \frac{N_{L/X,p_{10}}}{1-T_{p_{10}}^* L}\right) + \left(\frac{\wedge^2 N_{L/X,p_{12}}}{1-T_{p_{12}}^* L} + \frac{\wedge^2 N_{L/X,p_{10}}}{1-T_{p_{10}}^* L}\right).$$

在局部图表 V_{12} （分别为 V_{10}）的坐标 $\{a_1, a_5, a_9\}$ （分别为 $\{b_5, b_8, b_9\}$）（表 1）中，直线 L 由 $a_1 = a_5 = 0$ （分别为 $b_5 = b_8 = 0$）（表 2）定义。通过读取直线 L 在不动点 p_{12} 和 p_{10}处的法向空间与余切空间的权，可以看出

$$\chi(\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L) = 1 - \left(\frac{t^6+t^4}{1-t^{-2}} + \frac{t^2+t^{10}}{1-t^2}\right) + \left(\frac{t^{10}}{1-t^{-2}} + \frac{t^{12}}{1-t^2}\right) = 1 - t^2 - t^4 + t^8.$$

□

注 3.3. 由于模空间 $\mathrm{M}_1(X)$ 的约化概形 $\mathrm{M}_1(X)_{\mathrm{red}}$ 是一条光滑圆锥曲线（$\cong \mathrm{P}^1$），且 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 的作用是传递的（参见 [KPS18, 命题 5.4.4]），所有闭点处的局部变形空间彼此同构。由于不动点 $[L]$ 处 $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L) \geq 2$（引理 3.2），每个点处也都如此，因此空间 $\mathrm{M}_1(X)$ 处处都是非约化的。

由于支撑在不动直线上的高重数曲线未必是局部完全交，因此需要研究它们的 CM 滤过，以进行后续分析。注意，直线上的 $\mathbb{C}^*$-作用

丛 $\mathcal{O}_L(1)$ 是由超平面丛 $\mathcal{O}_X(1)$ 上的 $\mathbb{C}^*$-作用诱导的。在特别是，纤维 $\mathcal{O}_L(-1)|_{p_{12}}$ （分别为 $\mathcal{O}_L(-1)|_{p_{10}}$）上的作用权重为 -12 （分别为 -10）。

命题 3.4. 存在唯一一条四重曲线 D_4，它位于 X 中，支撑在不动直线 $\mathrm{red}(D_4) = L$和 $p_a(D_4) = 0$上。此外，存在 D_4 的 *CM* 子曲线:

$$L := D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset D_4,\ \mathrm{mult}(D_k) = k \tag{13}$$

使得

$$[\mathcal{O}_{D_{k+1}}] = [\mathcal{O}_{D_k}] + t^{10-2k} \cdot [\mathcal{O}_L(-1)],\ 1 \le k \le 3. \tag{14}$$

证明。 在 [CKK25], 的命题 4.1、4.14 和 4.18 的证明中，作者找到了 D_4 的 CM 子曲线及其 CM 滤过（13）。事实上，令 $\mathcal{I}_{D_k}$ 为曲线 D_k 在标准舒伯特图$V_m^\circ \subset \mathrm{Gr}(3, U_6)$中的理想。那么 D_k 定义为

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{D_1} =& \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_{10}, a_{11}, a_{12}\rangle,\\
\mathcal{I}_{D_2} =& \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, a_7, a_8, a_{11}, a_{12}, 6a_5 + a_{10}, a_{10}^2\rangle,\\
\mathcal{I}_{D_3} =& \langle a_2, a_3, a_4, a_7, a_8, a_{12}, 5a_6 + a_{11}, 6a_5 + a_{10}, 10a_1 - a_{11}, a_{11}^2, a_{10}a_{11}, 5a_{10}^2 - 6a_9a_{11}\rangle, \text{ and}\\
\mathcal{I}_{D_4} =& \langle a_3, a_4, a_8, a_7 + 3a_{12}, 5a_6 + a_{11}, 6a_5 + a_{10}, 5a_2 - 9a_{12}, 10a_1 - a_{11}, a_{10}a_{12}, a_{11}^2,\\
& a_{10}a_{11} - 18a_9a_{12}, 5a_{10}^2 - 6a_9a_{11} + 12a_{12}\rangle.
\end{aligned}$$

令 $\mathcal{K}_{k+1}$ 为典范限制映射的核： $\mathcal{O}_{D_{k+1}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{D_k}$。由于 $\mathcal{K}_{k+1} \cong \mathcal{O}_L(-1)$ 和 $\mathcal{K}_{k+1}(V_{12}) = \mathcal{I}_{D_k}(V_{12})/\mathcal{I}_{D_{k+1}}(V_{12})$ 由其定义可知，取 $\mathcal{K}_{k+1}(V_{12})$ 的一个生成元，作为 $\mathcal{O}_L(U_{12}) = \mathbb{C}[a_9]$- 模块。使用 Macaulay2（[GS]），我们很容易得到

$$\mathcal{K}_2(V_{12}) = \langle \overline{a_5}\rangle,\ \mathcal{K}_3(V_{12}) = \langle \overline{a_1}\rangle, \text{ and } \mathcal{K}_4(V_{12}) = \langle \overline{a_{12}}\rangle.$$

由于生成元的权为 $\mathrm{wt}(a_5) = -4$、$\mathrm{wt}(a_1) = -6$、$\mathrm{wt}(a_{12}) = -8$，我们完成了该断言的证明。□

推论 3.5. 在命题3.4的记号下，我们得到曲线D_k的等变欧拉示性数，如表4所示。

曲线 D_k	T-表示 $\chi(\mathcal{O}_{D_k}, \mathcal{O}_{D_k})$
D_1	$1 - (t^2 + t^4) + t^8$
D_2	$1 - (t^2 + t^4) + t^{14}$
D_3	$1 - (t^2 + t^4 + t^6) + t^{14} + t^{16}$
D_4	$1 - (t^2 + 2t^4 + t^6) + t^{14} + t^{16} + t^{18}$

表 4. 多条曲线的等变欧拉配对

证明。 根据等变欧拉配对的可加性，计算可通过归纳法进行。直线 $D_1 = L$ 的计算已在引理 3.2. 由于其他情形彼此相似，因此我们仅给出曲线 D_4的计算。由等式

$$[\mathcal{O}_{D_4}] = [\mathcal{O}_{D_3}] + t^4 \cdot [\mathcal{O}_L(-1)]$$

在（14）中，我们知道

$$\chi(\mathcal{O}_{D_4}, \mathcal{O}_{D_4}) = \chi(\mathcal{O}_{D_3}, \mathcal{O}_{D_3}) + \chi(\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L) + t^{-4}\chi(\mathcal{O}_L(-1), \mathcal{O}_{D_3}) + t^4\chi(\mathcal{O}_{D_3}, \mathcal{O}_L(-1)). \tag{15}$$

根据定理 2.3、定理 2.4和命题 3.4，右侧 15 式的第三项变为

$$\chi(\mathcal{O}_L(-1),\mathcal{O}_{D_3}) = \frac{i_{p_{12}}^*([\mathcal{O}_L(-1)])^\vee \cdot i_{p_{12}}^*([\mathcal{O}_{D_3}])}{\lambda_{-1}(T_{p_{12}}^*X)} + \frac{i_{p_{10}}^*([\mathcal{O}_L(-1)])^\vee \cdot i_{p_{10}}^*([\mathcal{O}_{D_3}])}{\lambda_{-1}(T_{p_{10}}^*X)}.$$

$$= \frac{i_{p_{12}}^*([\mathcal{O}_L(-1)])^\vee \cdot i_{p_{12}}^*([\mathcal{O}_L]+t^8[\mathcal{O}_L(-1)]+t^6[\mathcal{O}_L(-1)])}{\lambda_{-1}(T_{p_{12}}^*X)} + \frac{i_{p_{10}}^*([\mathcal{O}_L(-1)])^\vee \cdot i_{p_{10}}^*([\mathcal{O}_L]+t^8[\mathcal{O}_L(-1)]+t^6[\mathcal{O}_L(-1)])}{\lambda_{-1}(T_{p_{10}}^*X)}.$$

$$= \frac{t^{12}(1-t^6)(1-t^4)\cdot(1+t^8\cdot t^{-12}+t^6\cdot t^{-12})(1-t^{-6})(1-t^{-4})}{(1-t^{-6})(1-t^{-4})(1-t^{-2})} + \frac{t^{10}(1-t^2)(1-t^{10})\cdot(1+t^8\cdot t^{-10}+t^6\cdot t^{-10})(1-t^{-2})(1-t^{-10})}{(1-t^{-2})(1-t^{-10})(1-t^2)}$$

$$= t^{22}-t^{12}-t^{10}+t^6.$$

类似的计算可得，（15）中的最后一项为

$$\chi(\mathcal{O}_{D_3},\mathcal{O}_L(-1)) = t^2 - t^{-4}.$$

将这些内　　容代入 15 式，并使用表 D_1 和 D_3 中次数较低的情形（4），即可得到结果。□

注 3.6。 在推论 3.5中，支撑于不动直线 L_{-2} 上的重线（记为 D_{-k}）的欧拉示性数可通过反转权的符号得到。

对于可约固定曲线的情形，我们证明以下结果。

引理 3.7. 设 $L = L_2$ 和 Q 分别为不动直线和圆锥曲线，且交点为 $Q \cap L = \{p_{10}\}$。那么

$$\chi(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_L(-1)) = -t^{-12}+t^{-10} \text{ and } \chi(\mathcal{O}_L(-1),\mathcal{O}_Q) = -t^{20}+t^{22}.$$

证明。 由于 $Q \cap L = \{p_{10}\}$，我们只需考虑 X的局部图表 V_{10} 中的局部化。注意到Q 由 $b_5 = b_9 = 0$ 在 V_{10} （表 2）中定义。由定理 2.3、定理 2.4 和命题 3.4，可得

$$\chi(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_L(-1)) = t^{-10}\cdot\frac{\lambda_{-1}(N_{Q/X,p_{10}}^*)^\vee\cdot\lambda_{-1}(N_{L/X,p_{10}}^*)}{\lambda_{-1}(T_{p_{10}}^*X)} = t^{-10}\cdot\frac{(1-t^2)(1-t^{-2})\cdot(1-t^{-2})(1-t^{-10})}{(1-t^{-2})(1-t^{-10})(1-t^2)}$$

$$= t^{-10}-t^{-12} \text{ and}$$

$$\chi(\mathcal{O}_L(-1),\mathcal{O}_Q) = t^{10}\cdot\frac{\lambda_{-1}(N_{L/X,p_{10}}^*)^\vee\cdot\lambda_{-1}(N_{Q/X,p_{10}}^*)}{\lambda_{-1}(T_{p_{10}}^*X)} = t^{10}\cdot\frac{(1-t^2)(1-t^{10})\cdot(1-t^2)(1-t^{-2})}{(1-t^{-2})(1-t^{-10})(1-t^2)}$$

$$= t^{22}-t^{20}.$$

□

注 3.8. 在引理 3.7的陈述中，不动直线 L_{-2} 的欧拉示性数可通过将权的符号反转得到。

命题 3.9. 设 $C = L^2 \cup Q$ 为平面双直线 L^2（$= D_2$）与光滑圆锥曲线 Q 的并，且满足 $Q \cap L = \{p_{10}\}$。那么

$$[\mathcal{O}_C] = [\mathcal{O}_Q] + (t^8+t^{12})[\mathcal{O}_L(-1)]. \tag{16}$$

此外，$\chi(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) = 1 - (t^{-2}+2t^2+t^6) + (t^0+t^{10}+t^{14})$。

证明。注意，由于 L 和 Q 正确相交，$L\cup Q$ 是一个局部完全交（见表 2）。令 $\mathcal{M}$（分别为 $\mathcal{N}$）为限制映射 $\mathcal{O}_C \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{L\cup Q}$（分别为 $\mathcal{O}_{L\cup Q} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_Q$）的核。于是 $[\mathcal{M}] = t^m[\mathcal{O}_L(-1)]$,$[\mathcal{N}] = t^n[\mathcal{O}_L(-1)]$，从而 $[\mathcal{O}_C] = [\mathcal{O}_Q] + [\mathcal{M}] + [\mathcal{N}]$。我们通过局部计算确定权 m 和 n。 $L\cup Q$ 和 C 在 V_{10}° 上的定义理想分别为（[CKK25，命题 4.2 和命题 4.18]）

$$I_Q = \langle b_1,b_2,b_4,b_5,b_6,b_7,b_3+9b_8,b_9,b_{10},b_{11},b_{12}\rangle,$$

$$I_{L\cup Q} = \langle b_1,b_2,b_4,b_5,b_6,b_7,b_{10},b_{11},b_{12},b_3+9b_8,b_8b_9\rangle, \text{ and}$$

$$I_C = \langle b_{12},b_{11},b_7,b_6,6b_5-b_{10},b_4,b_3+9b_8,b_2,b_1,b_{10}^2,b_8b_{10},b_8b_9\rangle.$$

借助 Macaulay2 程序（[GS]）再次，

$$\mathcal{M}(V_{10}) = I_{L\cup Q}/I_C = \langle \bar{b}_5\rangle \text{ and } \mathcal{N}(V_{10}) = I_Q/I_{L\cup Q} = \langle \bar{b}_9\rangle.$$

因此， $m = 8$ 并且 $n = 12$由于权为 $\mathrm{wt}(b_5) = -2$，$\mathrm{wt}(b_9) = 2$，以及 $\mathrm{wt}(\mathcal{O}_L(-1)|_{p_{10}}) = -10$(表 1 和命题 3.4）。毕竟，我们证明了等式（ 16 ）。另一方面，由欧拉示性数的线性性可知

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_C,\mathcal{O}_C) &= \chi(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_Q) + (2+t^4+t^{-4})\chi(\mathcal{O}_L,\mathcal{O}_L)\\ &\quad + (t^{12}+t^8)\chi(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_L(-1)) + (t^{-12}+t^{-8})\chi(\mathcal{O}_L(-1),\mathcal{O}_Q)\\ &= 2 - t^{-2} - 2t^2 - t^6 + t^{10} + t^{14},\end{aligned}$$

其中，第二个等式由表 3 和引理 3.7得出。 □

注 3.10。 由引理 3.2、引理 3.7 以及命题 3.9的证明，可以容易地看出

$$\chi(\mathcal{O}_{L\cup Q},\mathcal{O}_{L\cup Q}) = 1 - (t^{-2}+t^2+t^4) + (t^0+t^{10}).$$

命题 3.11。 设 $C = L_2 \cup L_{-2} \cup Q$ 满足所有子曲线 Q、L_2 和 L_{-2} 都是 $\mathbb{C}^*$-固定的。则

$$[\mathcal{O}_C] = [\mathcal{O}_Q] + t^{12}[\mathcal{O}_{L_2}(-1)] + t^{-12}[\mathcal{O}_{L_{-2}}(-1)]. \tag{17}$$

此外， $\chi(\mathcal{O}_C,\mathcal{O}_C) = 1 - (t^{-4}+t^{-2}+t^2+t^4) + (t^{-10}+t^0+t^{10})$。

证明。 由 C 的对称性以及命题 3.9的证明，等式（17）成立。另一方面，Euler 配对变为

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_C,\mathcal{O}_C) &= \chi(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_Q) + \chi(\mathcal{O}_{L_2},\mathcal{O}_{L_2}) + \chi(\mathcal{O}_{L_{-2}},\mathcal{O}_{L_{-2}})\\ &\quad + t^{12}\left(\chi(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_{L_{-2}}(-1)) + \chi(\mathcal{O}_{L_{-2}}(-1),\mathcal{O}_Q)\right) + t^{-12}\left(\chi(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_{L_2}(-1)) + \chi(\mathcal{O}_{L_2}(-1),\mathcal{O}_Q)\right)\\ &= 2 - t^{-4} - t^{-2} - t^2 - t^4 + t^{10} + t^{-10}\end{aligned}$$

由引理 3.2 和引理 3.7可得。注意， $\chi(\mathcal{O}_{L_1},\mathcal{O}_{L_2}) = 0$，因为 $L_2 \cap L_{-2} = \emptyset$。 □

注 3.12。 在引理3.2、推论3.5、命题 3.9和命题3.11中，由变形部分产生的权与 [CKK25]的第 4.3 节中的权一致。

3.3. **主插入与后代插入的积分**。 利用第 3.1 节中的结果，我们计算将在猜想 1.1的证明中使用的插入的积分。

命题 3.13。 $\langle \tau_0(h_2)\rangle_4 = 168$，$\langle \tau_1(h_1)\rangle_4 = -168$ 和 $\langle \tau_2(h_0 := 1)\rangle_4 = -28$。

证明。 固定点轨迹 由 $\mathbf{M}_4$ 构成，其中包含以下六个 T-固定稳定层（见 [CKK25，第 4 节。3]） ：

$$\mathbf{M}_4^T = \left\{[\mathcal{O}_C] \,\middle|\, C \in \{D_{\pm 4},\, L_{\pm 2}^2 \cup Q,\, L_2 \cup L_{-2} \cup Q,\, C_4\}\right\}.$$

$\mathbf{M}_4^T$中的每条曲线，除了重线 $D_{\pm 4}$，其障碍空间中都有一个零权部分，因此其欧拉类为零（引理 3.2、命题 3.9 和命题 3.11）。所以，只需考虑来自 $D_{\pm 4}$ 的贡献。由于 D_4 和 D_{-4} 对称，它们对积分的贡献相同。因此，为了计算命题 3.1 的局部形式 (9)，我们需要以下内容。在不动点 p_{12}（分别为 p_{10}）上，超平面丛的限制为 $\mathcal{O}_X(1)|_{p_{12}} = \mathbb{C}\otimes t^{12}$（分别为 $\mathcal{O}_X(1)|_{p_{10}} = \mathbb{C}\otimes t^{10}$），从而可以得到特征标 $h_i|_{p_j}$ 以及等变 Todd 类 (11) 的逆。此外，由 (14) 和定理 2.4 可知，沿不动点的 $\mathcal{O}_{D_4}$ 的等变陈特征 (12)。最后，每个不动点 p 处切空间 T_X 的权见表 1。总之，我们得到表 5 中的列表。另一方面， $\chi(\mathcal{O}_{D_4},\mathcal{O}_{D_4})$ 的等变欧拉类 -1（表

固定曲线	p_1	$h_1\|_{p_1}$	$h_2\|_{p_1}$	$\mathrm{ch}^T(F\|_{p_1})$	$e^T(T_X\|_{p_1})$
	p_2	$h_1\|_{p_2}$	$h_2\|_{p_2}$	$\mathrm{ch}^T(F\|_{p_2})$	$e^T(T_X\|_{p_2})$
D_4	p_{12}	12λ	$\frac{1}{22}(12\lambda)^2$	$(1+e^{-4\lambda}+e^{-6\lambda}+e^{-8\lambda})$ $\cdot(1-e^{-6\lambda})(1-e^{-4\lambda})$	$(4\lambda)\cdot(6\lambda)\cdot(2\lambda)$
	p_{10}	10λ	$\frac{1}{22}(10\lambda)^2$	$(1+e^{-2\lambda}+e^{-4\lambda}+e^{-6\lambda})$ $\cdot(1-e^{-2\lambda})(1-e^{-10\lambda})$	$(2\lambda)\cdot(10\lambda)\cdot(-2\lambda)$

表 5. 不动曲线 D_4 处的局部化数据。

4）为

$$e^T(\chi(\mathcal{O}_{D_4},\mathcal{O}_{D_4})-1)=\frac{(14\lambda)(16\lambda)(18\lambda)}{(2\lambda)(4\lambda)^2(6\lambda)}.$$

代入 这一项以及表 5 中的数据代入（9）后，最终得到如下不变量。

$$\begin{aligned}\langle\tau_0(h_2)\rangle_4 &= 2\cdot\left(\frac{\frac{1}{22}(12\lambda)^2\cdot\left\{\mathrm{ch}^T(\mathcal{O}_{D_4}|_{p_{12}})\cdot\frac{1-e^{12\lambda}}{-12\lambda}\right\}_2}{(4\lambda)(6\lambda)(2\lambda)}+\frac{\frac{1}{22}(10\lambda)^2\cdot\left\{\mathrm{ch}^T(\mathcal{O}_{D_4}|_{p_{10}})\cdot\frac{1-e^{10\lambda}}{-10\lambda}\right\}_2}{(2\lambda)(10\lambda)(-2\lambda)}\right)\cdot\frac{(14\lambda)(16\lambda)(18\lambda)}{(2\lambda)(4\lambda)^2(6\lambda)}\\ &=168,\\ \langle\tau_1(h_1)\rangle_4 &= 2\cdot\left(\frac{(12\lambda)\cdot\left\{\mathrm{ch}^T(\mathcal{O}_{D_4}|_{p_{12}})\cdot\frac{1-e^{12\lambda}}{-12\lambda}\right\}_3}{(4\lambda)(6\lambda)(2\lambda)}+\frac{(10\lambda)\cdot\left\{\mathrm{ch}^T(\mathcal{O}_{D_4}|_{p_{10}})\cdot\frac{1-e^{10\lambda}}{-10\lambda}\right\}_3}{(2\lambda)(10\lambda)(-2\lambda)}\right)\cdot\frac{(14\lambda)(16\lambda)(18\lambda)}{(2\lambda)(4\lambda)^2(6\lambda)}\\ &=-168,\\ \langle\tau_2(1)\rangle_4 &= 2\cdot\left(\frac{\left\{\mathrm{ch}^T(\mathcal{O}_{D_4}|_{p_{12}})\cdot\frac{1-e^{12\lambda}}{-12\lambda}\right\}_4}{(4\lambda)(6\lambda)(2\lambda)}+\frac{\left\{\mathrm{ch}^T(\mathcal{O}_{D_4}|_{p_{10}})\cdot\frac{1-e^{10\lambda}}{-10\lambda}\right\}_4}{(2\lambda)(10\lambda)(-2\lambda)}\right)\cdot\frac{(14\lambda)(16\lambda)(18\lambda)}{(2\lambda)(4\lambda)^2(6\lambda)}\\ &=-28.\end{aligned}$$

□

对于 $d\le 3$，由引理 3.2 和注 3.10 可知，不动曲线 $D_{\pm k}$、$1\le k\le 3$ 仅对这些插入的积分有贡献。因此，通过适当调整 $\mathbf{M}_d$ 的虚切空间的等变陈特征和欧拉类，可得到以下命题。

命题 3.14（参见 [CLW24，命题 3.17]）。不变量 $\langle\tau_i(h_{2-i})\rangle_d$，$(1\le d\le 4)$ 由下表中的数字给出：

d	$i=0$	$i=1$	$i=2$
1	2	22	$-\frac{1}{3}$
2	7	28	$-\frac{7}{6}$
3	28	28	$-\frac{14}{3}$
4	168	−168	−28

表6. 积分 $\langle\tau_i(h_{2-i})\rangle_d$

注 3.15。命题 6 的表 3.14中，$i=0$ 与 2 对应的不变量之比为常数：$\frac{\langle\tau_2\ h_0\rangle_d}{\langle\tau_0\ h_2\rangle_d}()()=-\frac{1}{6}$ 对所有 ~~$1\le d\le$~~ 4 均成立。这验证了 [CT21第 1 节中的预测。7]。

3.4. **猜想 1.1的证明**。 现在回顾 DT 不变量与 GV 不变量之间的猜想。记$n_{0,\beta}(\gamma)$（分别为 $n_{1,\beta}$）为在 Calabi–Yau 四维簇 Y 上定义的属 0（分别为属 1）Gopakumar-Vafa 不变量，见 [KP08]。数值 m_{β_1,β_2} 是次数为 β_1 的曲线与 Y 中次数为 β_2的曲线相交的虚计数，称为相交不变量 （[KP08，第 0.3] 节）。在我们的设定中，相交不变量$m_{\beta_1,\beta_2}\in\mathbb{Z}$ 由以下归纳规则确定。回顾一下， $h_i\in \mathrm{H}^*(X)$ 的上同调次数为 deg(h_i) $=2i$。

(a) $m_{\beta_1,\beta_2}=m_{\beta_2,\beta_1}$. (b) 此外，如果 deg($\beta_1$) ≤ 0 或 deg(β_2) ≤ 0,then$m_{\beta_1,\beta_2}=0$. (c) 如果 $\beta_1\neq\beta_2$，则 $m_{\beta_1,\beta_2}=-22n_{0,\beta_1}(h_2)n_{0,\beta_2}(h_2)+m_{\beta_1,\beta_2-\beta_1}+m_{\beta_1-\beta_2,\beta_2}$.(d) 如果 $\beta_1=\beta_2=\beta$，则 $m_{\beta,\beta}=2n_{0,\beta}(h_2)-22n_{0,\beta}(h_2)n_{0,\beta}(h_2)-\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}m_{\beta_1,\beta_2}$.

这里我们使用 Y上的不变量与 X上的不变量之间的关系，如下所示。设 $Y=\mathbb{P}(K_X\oplus\mathcal{O}_X)$ 是 Y的一个带有零截面 $i:X\hookrightarrow Y$ 的射影紧化。令 $S_1:=i_*h_1$ 和 $S_2:=\pi^*h_2$ 为 $\mathrm{H}^4(Y,\mathbb{Z})$ 的基。于是

$$n_{0,d}(S_1)=-22n_{0,d}(h_2),\ n_{0,d}(S_2)=n_{0,d}(h_2)$$

由自交公式（详细计算见 [CT21，第 2 节。4] 以及 [CLW24，第 4 节。1]）。在此设定下，猜想1.1中的等式（2变为

$$\langle\tau_1(h_1)\rangle_\beta=\frac{11n_{0,\beta}(h_2)}{h_1\cdot\beta}-\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\frac{(h_1\cdot\beta_1)(h_1\cdot\beta_2)}{4(h_1\cdot\beta)}m_{\beta_1,\beta_2}-\sum_{k\geq1,k|\beta}\frac{(h_1\cdot\beta)}{k}n_{1,\beta/k}\tag{18}$$

对于 $\beta=d$[直线]，在对模空间 $\mathbf{M}_d(X)$ 进行适当定向后。预期不变量 $n_{1,d}$ 来自 Y 中次数为 d 的椭圆曲线空间（参见 [KP08，第 3 节和 5]）。根据[CFK24，推论 3.9]，，次数为 $d\leq 6$ 的椭圆曲线空间为空。因此，合理的预期是$n_{1,d}=0$。

定理 3.16。当我们假设 $n_{1,d}=0$ 对于 $1\leq d\leq 4$ 时，猜想 *1.1* 对 $Y=\mathrm{Tot}(K_X)$ 成立。

证明。由于$n_{1,d}=0$ 当 $1\leq d\leq 4$ 时，（18）中的猜想恒等式可写为

$$\langle\tau_1(h_1)\rangle_d=\frac{11n_{0,d}(h_2)}{d}-\sum_{d_1+d_2=d}\frac{d_1d_2}{4d}\,m_{d_1,d_2},\ 1\leq d\leq 4,\tag{19}$$

在对虚拟类作适当的定向选择后 $[M_d]^{\mathrm{vir}}$，按照论文 [CLW24], 中模空间 M_d 的虚循环符号由$(-1)^{d+1}$给出。因此，对于我们的情形，必须证明以下等式:

$$-\langle\tau_1(h_1)\rangle_4=-\frac{11\times\langle\tau_0(h_2)\rangle_4}{4}-\frac{1}{16}\times(6\times m_{1,3}+4\times m_{2,2})\,.\tag{20}$$

首先，注意到

$$m_{1,1}=-84,\ m_{1,2}=224,\ n_{0,1}(h_2)=2,\ n_{0,2}(h_2)=-7,\ n_{0,3}(h_2)=28$$

根据 [CLW24]，或者直接利用表6中的数值计算即可得出。其次，根据相交不变量的递归公式（a）–（d），簇 X 的相交不变量 $m_{1,3}$ 和 $m_{2,2}$ 由下式给出

$$m_{1,3}=-22n_{0,1}(h_2)n_{0,3}(h_2)+m_{1,2}=-22\times2\times28+224=-1008.$$
$$m_{2,2}=2n_{0,2}(h_2)-22n_{0,2}(h_2)^2-m_{1,1}=2\times(-7)-22\times(-7)^2+84=-1008.$$

将这些数值及表6 中的结果代入等式（20）两边，我们便完成了该断言的证明。□

参考文献

[AB84] M. F. Atiyah 和 R. Bott。动量映射与等变上同调。Topology，23(1):1–28，1984。2[AF06] Enrique Arrondo 和 Daniele Faenzi。Fano三维簇上无中间上同调的向量丛，类型为 V_{22}。Pacific Journal of Mathematics，225(2):201–220，2006。2[BV82] Nicole Berline 和 Mich`ele Vergne。等变特征类。等变上同调中的局部化公式。Comptes Rendus de l'Acad´emie des Sciences，295:539–541，1982。2[CC11] Dawei Chen 和 Izzet Coskun。迈向稳定映射模空间的 Mori纲领。Amer. J. Math.，133(5):1389–1419，2011。附录由 Charley Crissman 撰写。7[CFK24] Ciro Ciliberto、Flaminio Flamini 和 Andreas LeopoldKnutsen。素Fano三维簇上的椭圆曲线、ACM丛和 Ulrich丛。Collect. Math.，75(3):795–822，2024。12[CKK25] Kiryong Chung、Jaehyun Kim 和 Jeong-Seop Kim。Mukai-Umemura簇中的有理四次曲线。Journal of Pure and Applied Algebra，229(11):108102，2025。2，4，5，7，8，9，10[CL14] Yalong Cao 和 N. C. Leung。Calabi-Yau四维簇的 Donaldson-Thomas理论。arXiv:1407.7659，2014。6[CLW24] Kiryong Chung、Sanghyeon Lee 和 Joonyeong Won。局部Calabi-Yau四维簇上 Donaldson-Thomas 不变量与 Gopakumar-Vafa 不变量之间的对应关系， V_5 和 V_{22}。J. Geom. Phys.，197:Paper No. 105082，15，2024。2，11，12[CMT18] Yalong Cao、Davesh Maulik 和 Yukinobu Toda。Calabi–Yau四维簇的零亏格 Gopakumar–Vafa 型不变量。Advances in Mathematics，338:41–92，2018。1[CT21] Yalong Cao 和 Yukinobu Toda。通过后代插入定义 Calabi-Yau四维簇上的 Gopakumar-Vafa 型不变量。Comm. Math. Phys.，383(1):281–310，2021。1，11，12[Don08] Simon K. Donaldson。环面流形上的 K¨ahler 几何，以及一些具有较大对称性的其他流形。载于《几何分析手册》第1卷，Adv. Lect. Math. (ALM) 第7卷，第29–75页。Int. Press，美国马萨诸塞州萨默维尔，2008。4[Fae14] Daniele Faenzi。Picard数为一的 Fano三维簇上的偶、奇瞬子丛。Manuscripta Math.，144(1-2):199–239，2014。2[Fur90] Mikio Furushima。$\mathbb{C}^3$的复解析紧化。Compositio Mathematica，76(1-2):163–196，1990。4[GP99] T. Graber 和 R. Pandharipande。虚类的局部化。Invent. Math.，135(2):487–518，1999。2[GS] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay 2：用于代数几何研究的软件系统。可见于 http://www2.macaulay2.com。8，10[KP08] A. Klemm 和 R. Pandharipande。Calabi-Yau四维簇的计数几何。Commun. Math. Phys.，281:621–653，2008。1，12[KPS18] Alexander G. Kuznetsov、Yuri G. Prokhorov 和 Constantin A. Shramov。Fano三维簇的直线与圆锥曲线的 Hilbert概形及自同构群。Japanese Journal of Mathematics，13(1):109–185，2018。7[KS04] J´anos Koll´ar 和 Frank-Olaf Schreyer。 V_{22}类型的实Fano三维簇。载于《Fano会议论文集》，第515–531页。都灵大学，意大利都灵，2004。2[Kuz97] Alexander G. Kuznetsov。Fano三维簇 V_{22}。技术报告 MPIM/97-24，马克斯·普朗克数学研究所，1997。预印本。5[Tho92] R. W. Thomason。等变代数 K 理论中的 Lefschetz 公式。Duke Mathematical Journal，68(3):447–462，1992。2，3[Tho93] R. W. Thomason。爆破概形的 K 群与超额交公式。Inventiones mathematicae，112(1):195–215，1993。2，3[Tho00] R. P. Thomas。Calabi–Yau 三维簇的全纯Casson不变量及 K3纤维化上的丛。Journal of Differential Geometry，54(2):367–438，2000。6

数学教育系 ，庆北大学 ，大邱大学路80号 ，北区 ，大邱 41566 ，韩国

电子邮箱地址： krchung@knu.ac.kr

数学系，梨花女子大学，52，梨花女子大学路，西大门区，首尔，03760，大韩民国

电子邮箱地址： leonwon@ewha.ac.kr