arXiv:2603.05838v1 [math.CV] 6 Mar 2026

复索博列夫空间中容量的 Alexander-Taylor 不等式

NGOC CUONG NGUYEN 和 DO DUC THAI

Abstract. 我们证明了紧致 K¨ahler 流形上的复索博列夫空间中，Alexander-Taylor 容量与泛函容量之间的一个尖锐不等式。后者的空间和容量由 Dinh、Sibony 和 Vigny 引入。

1. Introduction

20 世纪 80 年代，Alexander 和 Taylor [AT84] 证明了 Bedford 和 Taylor 的相对容量 [BT82] 与 Alexander 的射影容量 [A79]之间一个尖锐的定量比较。如今，这一结果在文献中称为 Alexander-Taylor 不等式，并已成为一项非常有用的工具。例如，El Mir [E79],在 [AT84] 中利用它简化了 Josefson 定理一个有效版本的证明，该版本涉及局部多极集与整体多极集等价这一结论 $\mathbb{C}^n$。随后，通过容量方法 [K98, K05]，该不等式为证明区域 $\mathbb{C}^n$ 和紧致 K¨ahler 流形上复 Monge-Amp`ère 方程的近乎尖锐的一致估计提供了关键联系。该不等式推广到紧致 K¨ahler 流形上具有半正背景形式的方程，同样发挥了重要作用 [GZ05, GZ17] 和 [EGZ09]。

设 (X, α) 是一个维数为 n 的紧 K¨ahler 流形。设 $\omega \geq 0$ 是一个半正闭 (1,1)-形式，满足 $\int_X \omega^n > 0$。为简单起见，将其归一化为 $\int_X \omega^n = 1$。记 $PSH(X, \omega)$ 为 X 上的 ω-拟调和函数（ω-psh 函数）族。Guedj 和 Zeriahi [GZ05] 引入并研究的全局 Alexander-Taylor 容量 $T_\omega(\cdot)$（另见 [DS06b] 和 [GZ17]）如下。对于一个紧子集 $K \subset X$,

$$T_\omega(K) = \exp\left(-\sup_X V_K^*\right),$$

其中 $V_K(z) = \sup\{v(z) : v \in PSH(X, \omega)\ v \leq 0 \text{ 在 } K\}$ 上， V_K^* 是其上半连续正则化。后一个函数通常称为与 K 相关联的 Siciak-Zaharjuta 极值函数。

我们关注由 Dinh 和 Sibony [DS06a] 引入的子空间 $W^*(X) \subset W^{1,2}(X, \mathbb{R})$（见第 2 节），该空间称为复索博列夫空间。对于$f \in W^*(X)$，令 Γ_f表示满足以下条件的所有正闭 $(1, 1)$-流构成的非空集合T

$$df \wedge d^c f \leq T \quad \text{weakly in } X.$$

那么， f 的 W^*-范数为

$$\|f\|_*^2 = \|f\|_{L^2(X)}^2 + \inf\{\|T\| : T \in \Gamma_f\},$$

Date: 2026年3月9日。

其中 $\|T\| = \int_X T \wedge \alpha^{n-1}$. 不久之后，Vigny [Vig07] 证明，$(X)$ W^*是一个配备 W^*-范数的巴拿赫空间。这个新空间的一个独特之处在于，它考虑了底层流形的复结构。因此，它为研究全纯/亚纯映射和拟多重次调和函数等复对象提供了合适的框架。此后，该空间在高维复动力系统及一些相关领域中得到了广泛应用 [BiD23], [DKW21], [DoNV25], [Vig17], [Vu20] and [WZ24]。

由于 $W^*(X)$ 是巴拿赫空间，因此由其范数自然定义了一个泛函容量 $\mathsf{c}(\cdot)$，该容量由 [Vig07] 引入。对于一个博雷尔子集 $E \subset X$,

$$\mathsf{c}(E) = \inf\left\{\|v\|_*^2 \mid v \in \mathscr{K}(E)\right\},$$

其中

$$\mathscr{K}(E) = \{v \in W^*(X) \mid \{v \le -1\}^o \supset E \text{ and } v \le 0\}.$$

包含关系 $\{v \le -1\}^o \supset E$ 表示在 E 的某个邻域内几乎处处成立。事实上，这是 Choquet 意义下的容量 [Vig07，定理 30]。需要指出的是，相对于索博列夫范数定义的泛函容量不足以研究 $W^*(X)$ 中函数的性质。原因在于，存在属于 $W^*(X)$ 的有界和无界 ω-拟亚纯次调和函数，而索博列夫容量既不能用于刻画此类函数的拟连续性，也不能用于刻画多极集。

本文的主要结果是以下关于全局 Alexander-Taylor 容量与上述 $W^*(X)$ 的泛函容量之间的比较。

定理 1.1. 存在一个常数 $A > 0$，使得对于每个紧子集 $K \subset X$,

$$\exp\left(-A/\mathsf{c}(K)\right) \le T_\omega(K) \le \exp\left(-1/(4n)^{\frac{1}{n}}[\mathsf{c}(K)]^{\frac{1}{n}}\right).$$

由于 $\mathsf{c}(\cdot)$ 和 $T_\omega(\cdot)$ 都是 Choquet 容量，因此这些不等式对所有博雷尔集都成立。特别是，它们延续了 [GZ17, 引理 12.2、12.3] 中的思想，其中将 $T_\omega(K)$ 与全局 Bedford-Taylor 容量 $cap_\omega(K)$ 进行了比较。也就是说，在第一个不等式中，常数 A 与 [GZ17, 引理 12.3], 中的常数仅相差一个数值常数。在第二个不等式中，右侧的常数纯粹是一个维数常数，这一点很重要；它与局部情形 [AT84] 和全局情形 [GZ17, 引理 12.1] 中的常数类似。关于不等式中的指数，注 3.5 表明它们是最佳的。

我们期望这一不等式将成为一座桥梁，从而使复 Sobolev 空间中的工具能够用于研究多重势理论以及复 Monge-Amp`ere 方程中的公开问题。最近在 [DoN 25], [DKN22], [VV24] 与 [Vu24、Vu26] 中已经出现了一些证据。我们在此再给出一个关于带有背景形式 ω 的方程的应用，该背景形式是半正且大的。该结果已隐含地包含在 [DKN22 的定理 3.6] 中。

推论 1.2. 设 μ 是 X 上的概率测度。假设 μ 关于 $p > n+1$ 是 $(W^*(X), \log^p)$-连续的，即存在常数 $c > 0$，使得

$$\left|\int_X f d\mu\right| \le c\left[1 + |\log\|f\|_{L^1(X)}|\right]^{-p}$$

对每个 $f \in W^*(X) \cap C^0(X)$ 以及 $\|f\|_* \le 1$。那么，存在一个有界的 ω-拟调和函数解 u，满足 $(\omega + dd^c u)^n = \mu$.

结构安排。第 2 节回顾多重势理论和复 Sobolev 空间的基本事实。特别地，我们为 $W^*(X)$ 中的有界函数给出了其拟连续代表元存在性的另一种证明。第 3 节致力于证明主定理和推论。

致谢。本文的部分内容是在第一作者于2025年12月访问河内工程与技术大学（UET）期间完成的。他谨向 Pham Hoang Hiep 致以谢意，感谢其热情邀请。本文是在第一作者访问复几何中心（大田）期间撰写的。他谨向 Jun-Muk Hwang 和 Yongnam Lee 致以谢意，感谢他们的支持与热情款待。他也衷心感谢该机构提供了优越的工作条件。第二作者的研究得到部级项目 B2025-SPH-02 的资助。

2. A functional capacity in complex Sobolev spaces

本节回顾复索博列夫空间和多重势理论的一些基本事实。设 (X, α) 是一个维数为 n 的紧致 K¨ahler 流形。设 $\omega \geq 0$ 是一个半正闭 $(1,1)$- 形式，其体积归一化为

$$\int_X \omega^n = 1. \tag{2.1}$$

显然，我们可以假设

$$\omega \leq \alpha. \tag{2.2}$$

令 $W^{1,2}(X, \mathbb{R})$ 表示由 $L^2(X, \mathbb{R})$ 中一阶（弱）导数属于 L^2 可积函数构成的索博列夫空间。对于 $f \in W^{1,2}(X, \mathbb{R})$, 令 Γ_f 表示满足下列条件的所有正闭 (1,1)-流 T 的集合:

$$df \wedge d^c f \leq T \quad \text{weakly in } X. \tag{2.3}$$

这里采用归一化

$$d^c = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\overline{\partial} - \partial), \quad dd^c = \frac{\sqrt{-1}}{\pi}\partial\overline{\partial}.$$

定义 2.1 ([DS06a]). 若与 f 相关联的集合 Γ_f 非空，则函数 $f \in W^{1,2}(X, \mathbb{R})$ 属于复索博列夫空间 $W^*(X)$。

闭正 (1,1)-流 T 在 X 上的总质量为

$$\|T\| = \int_X T \wedge \alpha^{n-1}.$$

由 X 的紧致性和 T 的闭性可知， $\|T\|$ 总是有限的。Vigny [Vig07] 研究了 $W^*(X)$ 的基本泛函性质。特别是，他证明这是一个带有 W^*-范数 $\|\cdot\|_*$ 的巴拿赫空间，该范数定义为

$$\|f\|_*^2 = \|f\|_{L^2(X)}^2 + \min\{\|T\| : T \in \Gamma_f\}, \tag{2.4}$$

其中，由于闭正 $(1, 1)$-流的紧性，最小值可以取到。不过，极小化子可能不止一个。

该空间中函数的基本例子是 Lipschitz 函数。但其中还有许多其他函数。很容易验证，该空间包含所有有界拟拟次调和函数（quasi-psh 函数）。因此，对于 $u, v \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$,

$$u \pm v \in W^*(X).$$

更多属于 $W^*(X)$ 的函数例子，请参阅 [Vig07] ；该空间还包含无界拟亚纯次调和函数。

尽管相对于 W^*-范数 [Vig07, 命题 7], 的强拓扑而言，连续函数在 $W^*(X)$ 中并不稠密，但以下关于 W^*-范数的紧性结论 [Vig07, 命题 4] 足以应对许多应用。

引理 2.2. 设 $\{f_j\}_{j\geq 1} \subset W^*(X)$ 满足：对每个 $j \geq 1$，都有 $\|f_j\|_* \leq A$ 。则存在子列 $\{f_{j_k}\}_{j_k\geq 1}$，使其在 $W^{1,2}(X,\mathbb{R})$ 中弱收敛至 $f \in W^*(X)$，并且$\|f\|_* \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|_*$。

接下来，我们回顾一个有用的事实，其证明可由 [KLV21, 定理 2.35] 轻易推出。

命题 2.3。 设 $1 < p < \infty$ 和 $E \subset \Omega$ 为一个博雷尔集。设 $\{f_j\} \subset L^p(\Omega\ \mathbb{R})$和 $\{g_j\} \subset L^p(\Omega\ \mathbb{R})$ 满足 $f_j \to f \in L^p(\Omega\ \mathbb{R})$ 弱收敛且 $g_j \to g \in L^p(\Omega\ \mathbb{R})$弱收敛。若对几乎处处的 $x \in E$, 有 $|f_j(x)| \leq g_j(x)$ ，则 $|f(x)| \leq g(x)$ 对几乎处处的 $x \in E$成立。

对于博雷尔子集 $E \subset X$,

$$\mathscr{K}(E) = \{v \in W^*(X) : \{v \leq -1\}^o \supset E, v \leq 0 \text{ on } X\}.$$

显然，若 $E = G$ 是一个开子集，则

$$\mathscr{K}(G) = \{v \in W^*(X) : v \leq -1 \quad \text{a.e. on } G,\ v \leq 0 \text{ on } X\}.$$

按照 Vigny [Vig07], ，我们定义（全局）泛函容量

$$\mathsf{c}(E) = \inf\{\|v\|_*^2 :\ v \in \mathscr{K}(E)\}. \tag{2.5}$$

注意，若 $v \in \mathscr{K}(E)$，则 $\max\{v,-1\} \in \mathscr{K}(E)$。通过初等计算可得 $\|\max\{v,-1\}\|_* \leq \|v\|_*$（例如参见 [Vig07] 或 [DMV23]）。因此，在 c(·) 的定义中，只需令 v 取自一个更小的族 $\mathscr{K}'(E)$，该族定义如下:

$$\mathscr{K}'(E) = \{v \in \mathscr{K}(E) : -1 \leq v \leq 0\}.$$

换言之,

$$\mathsf{c}(E) = \inf\{\|v\|_*^2 :\ v \in \mathscr{K}'(E)\}, \tag{2.6}$$

容量的下列基本性质已在 [Vig07的命题 27], 中得到，其证明由经典论证得出（参见例如 [AH96]）。

命题 2.4. 博雷尔集上的集函数 $E \mapsto \mathsf{c}(E)$ 满足:

(a) 对于博雷尔集 $E \subset F \subset X$，$\mathsf{c}(E) \leq \mathsf{c}(F)$。*(b)* 对于 X中的一列博雷尔集 $\{E_i\}_{i\geq 1}$，$\mathsf{c}(\cup_{i\geq 1}E_i) \leq \sum_{i\geq 1}\mathsf{c}(E_i)$。*(c)* 对于 $E \subset X$，$\mathsf{c}(E) \leq \int_X \omega^n = 1$.

(d) 对于递减的紧集序列 $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ 与 $K = \cap_{i\geq 1}K_i$，则$\mathsf{c}(K) = \lim_{i\to\infty} \mathsf{c}(K_i)$。

为了使 c(·) 成为 Choquet 容量（定理 3.3），我们需要它满足紧集递减时的极限性质，以及博雷尔集递增时的极限性质。前者已由 (d) 给出。然而，对于 c(·), 后者的极限性质是最难证明的（参见 [Vig07，定理 30]）。

外正则性相当容易，因此我们将其证明列出。

引理 2.5 (外正则性)。 对于博雷尔子集 $E \subset\Omega$,

$$\mathsf{c}(E) = \inf\{\mathsf{c}(G) : E \subset G,\ G \textit{ is open}\}.$$

证明。 根据命题 2.4-(a) 中的单调性,

$$\mathsf{c}(E) \leq \inf\{\mathsf{c}(G) : E \subset G,\ G \text{ is open}\}.$$

为证明反向不等式，我们可以假设 $\mathscr{K}(E)$ 非空。令 $\varepsilon > 0$。存在 $v \in \mathscr{K}(E)$，使得 $\|v\|_*^2 \leq \mathsf{c}(E)+\varepsilon$，并且存在一个开集 G_ε，满足 $v(x) \leq -1$ 几乎处处成立。于是,

$$\inf\{\mathsf{c}(G) : E \subset G,\ G \text{ is open}\} \leq \mathsf{c}(G_\varepsilon) \leq \|v\|_*^2 \leq \mathsf{c}(E) + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$，即可得出该引理。 □

2.1. 容量的局部与全局定义。全局 Bedford-Taylor 容量由 [K03] 引入，并在 [GZ05, GZ17] 中得到详细研究。对于博雷尔子集 $E \subset X$，定义

$$cap_\omega(E) = \sup\left\{\int_E (\omega + dd^c v)^n : v \in PSH(X,\omega), -1 \leq v \leq 0\right\}. \tag{2.7}$$

于是，我们有公式 [GZ17，定理 9.15]，它通过极值函数实现该容量。确切地说，对于紧子集 $K \subset X$,

$$cap_\omega(K) = \int_K (\omega + dd^c h_K^*)^n = \int_X -h_K^*(\omega + dd^c h_K^*), \tag{2.8}$$

其中 h_K^* 表示.....的上半连续正则化

$$h_K(z) = \sup\{v(z) : v \in PSH(X,\omega), v_{|_K} \leq -1, v \leq 0\}. \tag{2.9}$$

与局部情形 [BT82], 一样，这一全局容量是 Choquet 容量，并且它刻画局部/整体多极集 [GZ17，定理 9.17]。也就是说，博雷尔集$E \subset X$ 是多极的，当且仅当

$$cap_\omega(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad cap_\alpha(E) = 0, \tag{2.10}$$

其中 $cap_\alpha(E)$是相对于 $PSH(X,\alpha)$以及(2.7)中的 α 来考虑的。

我们再考虑另一种容量，它借助局部覆盖以及 Bedford 和 Taylor 的局部相对容量 [BT82] 定义如下。设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ 为开子集。则对于博雷尔集 $E \subset\Omega$,

$$cap(E,\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega (dd^c v)^n : v \in PSH(\Omega), -1 \leq v \leq 0\right\}. \tag{2.11}$$

考虑两个有限覆盖 $\{D_\ell\}_\ell$ 与 $\{\Omega_\ell\}_\ell$，使得对每个 $1 \leq\ell \leq N$ 都有 $D_\ell \subset\subset\Omega_\ell$，且每个全纯坐标图 Ω_ℓ 都是光滑严格伪凸域。量 $cap_{\mathrm{BT}}(E)$由下式给出

$$cap_{\mathrm{BT}}(E) = \sum_{\ell=1}^N cap(E \cap D_\ell, \Omega_\ell).$$

根据 Ko·lodziej [K03 第 670] 页的观察（另见 [GZ17，命题 9.8]），这两个容量 $cap_\alpha(\cdot)$ 与 $cap_{\mathrm{BT}}(\cdot)$ 彼此等价。更精确地说，存在一个仅依赖于覆盖和 α 的常数 A_0，使得

$$\frac{1}{A_0} cap_{\mathrm{BT}}(E) \leq cap_\alpha(E) \leq A_0 cap_{\mathrm{BT}}(E). \tag{2.12}$$

当背景度量为 K¨ahler 时，根据 [Vig07 的定理 28]和 [DKN22 的命题 5.1]，我们可以比较它们的全局对应量（参见 注 3.4）。

引理 2.6. 存在常数 $A>0$，使得对每个博雷尔集 $E\subset X$，

$$\frac{1}{A}cap_\alpha(E)\le \mathsf{c}(E)\le A[cap_\alpha(E)]^{\frac{1}{n}}.$$

因此，如果 $\mathsf{c}(E)=0$，那么 E 是多极的。

2.2. **拟连续代表**。由于 $W^*(X)$ 中的函数仅在一个勒贝格测度为零的集合之外定义，因此我们需要进一步研究它们的细性质，以便应用。为明确起见，我们定义以下术语。

定义 2.7。(a) 若对每个 $\varepsilon>0$，都存在一个开集 $G\subset X$，使得 $\mathsf{c}(G)<\varepsilon$，且限制 $f_{|X\setminus G}$ 连续（相对于 $X\setminus G$ 上的诱导拓扑），则称博雷尔函数 f 在 X 中是拟连续的（q.c）。(b) 若存在一个容量为零的博雷尔集 P，即 $\mathsf{c}(P)=0$，使得该陈述对每个 $x\notin P$ 都成立，则称该陈述准处处（q.e.）成立。

注 2.8。根据引理 2.6，关于 $\mathsf{c}(\cdot)$ 的拟连续性和准处处性质，与多重势理论中的经典性质等价[BT82，BT87] 和 [GZ17]。

下面的概念有助于我们为每个函数等价类找到一个良好的代表元。

定义 2.9。设 f,g 是 X 上的博雷尔可测函数。若 g 是 f 的拟连续修正，即 g 拟连续且 $g=f$ 几乎处处成立，则称 g 为 f 的拟连续修正。此时我们~记 g 为 f。

我们还需要位势理论中的一个经典结果 [FOT94，引理 2.14]（另见 [Vig07，命题 21]）。

命题 2.10。设 $D\subset X$ 是一个开集，且 f 是 D 上的拟连续函数。若在 D 上 $f\ge 0$ 几乎处处成立，则在 D 上 $f\ge 0$ 准处处成立。

根据这一结果，两个拟连续修正几乎处处相等。因此，根据引理 2.6，它们在某个多极集之外相等。关于 Bedford-Taylor 容量的拟连续修正的存在性由 Vigny [Vig07，定理 22]证明。下面陈述有界函数的情形，这已足以满足我们的应用。为方便读者，我们利用 Dinh、Marinescu 和 Vu [DMV23]的局部结果，另外给出一种不同的证明。

若 $f\in W^*(X)$，则对每个全纯坐标图 $\Omega\subset\subset X$, $f\in W^*(\Omega)$，局部复索博列夫空间（参见 [DMV23] 和 [Vig07]）。$W^*(\Omega)$ 的定义非常相似。具体而言，设 $\beta=dd^c|z|^2$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的标准 K¨ahler 度量。对于 $f\in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$，令 $\Gamma_f(\Omega)$ 表示 Ω 中满足下述条件的所有闭正 $(1,1)$-流 T 的集合

$$df\wedge d^cf\le T \quad \text{weakly in } \Omega. \tag{2.13}$$

定义 2.11. 若存在 $T\in\Gamma_f(\Omega)$，使得 $\|T\|_\Omega=\int_\Omega T\wedge\beta<+\infty$，则函数 $f\in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$ 属于 $W^*(\Omega)$。

局部 $W^*(\Omega)$-范数定义为

$$\|f\|^2_{*,\Omega}=\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\min\{\|T\|_\Omega : T\in\Gamma_f(\Omega) \text{ and } \|T\|_\Omega<+\infty\}, \tag{2.14}$$

Vig07 中的命题 1] 证明了 $(W^*(\Omega)\,\|\cdot\|_{*,\Omega})$ 也是一个巴拿赫空间。

定理 2.12. 设 $f \in W^*(X) \cap L^\infty(X)$。则存在一个拟连续~修正 $f \in W^*(X) \cap L^\infty(X)$。此外，若 g 是 f 的另一个拟连续~修正，则 $g = f$ 在一个多极集之外。

证明。由引理 2.6，只需证明关于$cap_\alpha(\cdot)$的拟连续性。设 χ 是 X 上的截断函数。由于 f 有界，故χf 属于 $W^*(X)$。由单位分解以及 $cap_\alpha(\cdot)$ 的次可加性（参见例如 [GZ17]），只需假定 f 在某个全纯坐标球 $\Omega \subset\subset X$ 中具有紧支集。显然， f 在 Ω 上的限制属于局部复 Sobolev 空间 $W^*(\Omega)$。由 [DMV23，定理 2.10]，，存在一个关于 $cap(\cdot,\Omega)$ 的拟连续~修正 $f \in W^*(\Omega)$，其支集在 Ω 中是紧的。等价关系 (2.12) 表明该函数即为所求。

~ ~下面验证第二个陈述。假设 f 拟连续且 $g = f$ 几乎处处成立。~于是，由命题 2.10 可知， $g = f$ 在 $X \setminus F$ 上成立，其中 $F \subset X$是满足 $\mathsf{c}(F) = 0$ 的博雷尔子集。因此，根据引理 2.6， $cap_\alpha(F) = 0$。现在由 (2.12) 和 [BT82]可知， F 是局部多极的。最后，根据 [GZ17, 定理 12.5]的刻画， F是全局多极的，也就是说，存在函数 $u \in PSH(X,\ \omega)$ 使得 $F \subset \{u = -\infty\}$。□

研究容量的一个关键技术工具是其极值函数。文献 [Vig07, 推论 31]中给出了 c(·) 的 (2.8) 的类似恒等式。我们在此还证明了唯一性，从而回答了该文中针对开集提出的问题。

引理 2.13. 假设 $E \subset X$ 是一个开子集。存在唯一的 $\Phi_E \in W^*(X)$，使得$\mathsf{c}(E) = \|\Phi_E\|^2_*$。此外， $-1 \le \Phi_E \le 0$ 几乎处处成立，且 $\Phi_E = -1$ 在 E上几乎处处成立。

证明. 我们首先证明存在性。设 $\{u_j\}_{j\ge1}$ 是 $\mathscr{K}(E)$中的一个序列，使得$\mathsf{c}(E) = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|^2_*$。由引理 2.2可知， u_j 在$W^{1,2}(X)$中弱收敛于 $u \in W^*(X)$，并且 $\|u\|_* \le \liminf_j \|u_j\|_*$。由于 $u_j \to u$在 $L^2(X)$中弱收敛，由命题 2.3可知， $u = -1$ 在 E 中几乎处处成立，且 $u \le 0$ 在 X中成立。注意，该命题的证明仅使用了 $L^2(X)$中函数的勒贝格点的性质。由于 E 是开的， $u \in \mathscr{K}(E)$（这是唯一用到 E的开性的地方）。由$\mathsf{c}(E)$, 的定义，我们得到$\mathsf{c}(E) = \|u\|^2_*$。这里，我们可以选取拟连续的 $\Phi_E = \widetilde{u}$，并且 $\Phi_E = -1$ 在 E上拟处处成立。

接下来，我们证明唯一性。假设 u_1 和 u_2 是这样两个函数。设 T_1 和 T_2 是相应的闭正电流，使得

$$\mathsf{c}(E) = \|u_1\|^2_{L^2} + \|T_1\| = \|u_2\|^2_{L^2} + \|T_2\|.$$

定义 $v = (u_1 + u_2)/2$。那么， $dv \wedge d^c v \le (T_1 + T_2)/2 =: T$. 因此， $v \in \mathscr{K}(E)$ 并且

$$\begin{aligned}\mathsf{c}(E) &\le \|v\|^2_{L^2} + \|T\| \\ &= \frac{1}{4}(\|u_1\|^2_{L^2} + \|u_2\|^2_{L^2}) + \frac{1}{2}\|u_1u_2\|_{L^1} + \frac{1}{2}(\|T_1\| + \|T_2\|).\end{aligned}$$

这意味着

$$2\int_X u_1u_2\alpha^n \ge \int_X u_1^2\,\alpha^n + \int_X u_2^2\,\alpha^n.$$

因此， $u_1 = u_2$ 几乎处处成立。若 u_1，u_2 拟连续，则由命题 2.10 可知 $u_1 = u_2$ 几乎处处成立。□

现在我们有了容量的一个改进定义。

引理 2.14。 设 $E \subset X$ 是一个博雷尔集。那么，

$$\mathsf{c}(E) = \inf\{\|v\|_*^2 : v \in \widetilde{\mathscr{K}}(E)\},$$

其中

$$\widetilde{\mathscr{K}}(E) = \{v \in W^*(X) \mid \widetilde{v} \leq -1 \ q.e. \ on \ E \ and \ \widetilde{v} \leq 0\}.$$

证明。 如果在 E 的某个邻域上 $v \leq -1$ 几乎处处成立，那么根据命题 2.10， $\widetilde{v} \leq -1$ 几乎处处成立。因此， $\mathscr{K}(E) \subset \mathscr{K}(E)$，且 $\mathsf{c}(E)$ 大于右端的下确界。为证明反向不等式，考虑 $h \in \mathscr{K}_E$，并固定 h 的一个拟连续修正 h （定理 2.12）。给定 $\varepsilon > 0$， 我们选取一个开集 $G := G_\varepsilon$，使得 $\mathsf{c}(G) < \varepsilon$，并且 h 限制在 $X\backslash G$ 上是连续的，且在 E∩上 $h \leq -1$ $(X\backslash G)$。记 G 上引理 2.13 中的函数 Φ_G 为 u。集合

$$D_\varepsilon = \{x \in X \setminus G : \widetilde{h} < -1 + \varepsilon\} \cup G$$

是开集且 $E \subset D_\varepsilon$。此外，在 D_ε 上几乎处处有 $h + u \leq -1 + \varepsilon$，并且它在 X中为负。因此，

$$\begin{aligned}\mathsf{c}(E) \leq \mathsf{c}(D_\varepsilon) &\leq \frac{\|h+u\|_*^2}{(1-\varepsilon)^2} \\ &\leq \frac{(\|h\|_* + \|u\|_*)^2}{(1-\varepsilon)^2} \\ &\leq \frac{(\|h\|_* + \sqrt{\varepsilon})^2}{(1-\varepsilon)^2}.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \searrow 0$， 则 $\mathsf{c}(E) \leq \|h\|_*^2$。由于 h 是任意的，证明完成。 □

注记 2.15. Vigny 在 [Vig07, Theoerem 30] 中证明了这个泛函容量是一个 Choquet 容量。因此，$\mathsf{c}(\cdot)$ 也是内正则的，即，

$$\mathsf{c}(E) = \sup\{\mathsf{c}(K) : K \subset E, \ K \text{ is compact}\}.$$

2.3. **Alexander-Taylor 容量**。 设 $K \subset X$ 为一个紧子集。与 K 相关联的全局 Siciak-Zaharjuta 极值函数定义为

$$V_K(z) = \sup\{v(z) : v \in PSH(X,\omega), v \leq 0 \text{ on K}\}. \tag{2.15}$$

用 V_K^* 表示 V_K的上半连续正则化。回顾 Alexander-Taylor 容量定义为

$$T_\omega(K) = \exp\left(-\sup_X V_K^*\right).$$

这也是一个 Choquet 容量，并且 K 是多极的，当且仅当 $T_\omega(K) = 0$。等价地，

$$K \text{ is pluripolar } \Leftrightarrow \sup_X V_K^* = +\infty. \tag{2.16}$$

与局部情形 [AT84], 类似，根据 [GZ17, 引理 12.2, 引理 12.3]可知，全局 Alexander-Taylor 不等式与全局 Bedford-Taylor 容量具有良好的可比性。也就是说，存在一个一致常数 $A_1 > 0$，使得对于任意紧集 $K \subset X$,

$$\exp\left(\frac{-A_1}{cap_\omega(K)}\right) \leq T_\omega(K) \leq \exp\left(\frac{-1}{[cap_\omega(K)]^{\frac{1}{n}}}\right). \tag{2.17}$$

注意，由于 $\int_X \omega^n = 1$，我们总有 $cap_\omega(K) \leq cap_\omega(X) = 1$。

3. Comparison of capacities

本节将泛函容量 c(·) 与多重势理论中的另外两种经典容量——Bedford-Taylor 容量和 Alexander-Taylor 容量——进行比较。我们强调，这些论证具有全局性质。这就是为什么它适用于 ω，其中 ω 仅仅是一个半正且大的形式。

我们从一个技术性结果开始，用于估计函数在$W^*(X)$上的积分相对于有界拟亚纯次调和函数的 Monge-Amp`ère 测度的情形。设 $\phi \in PSH(X, \omega)$ 满足 $-1 \le \phi \le 0$。记

$$\omega_\phi := \omega + dd^c\phi.$$

对于 $f \in W^*(X) \cap L^\infty(X)$，我们定义积分

$$\int_X f\,\omega_\phi^n := \int_X \widetilde{f}\,\omega_\phi^n. \tag{3.1}$$

~该定义是良定义的。事实上，若 $f = g$ 几乎处处成立，则由命题 2.10 可知 $f = \widetilde{g}$ 拟处处成立。由于 Monge-Amp`ère 测度 ω_ϕ^n 不会给多极集赋予正测度，右侧的积分不依赖于我们所选取的拟连续修正。

引理 3.1. 设 $h \in PSH(X,\omega)$ 满足 $-1 \le h \le 0$。设 $v \in W^*(X)$ 满足$-1 \le v \le 0$ 且 $dv \wedge d^c v \le T$，其中 T是闭正$(1,1)$-流。那么，

$$\begin{aligned}\int_X v^2\omega_h^n \le \int_X v^2\omega_h^{n-1}\wedge\omega + 2\int_X T\wedge\omega^{n-1}\\ + \frac{1}{2}\int_X -h\omega_h^n + \frac{1}{2}\int_X h\omega_h^{n-1}\wedge\omega.\end{aligned}$$

证明。 证明可通过分部积分完成。我们先证明 h 和v 光滑时的情形，再通过逼近证明一般情形。微妙之处在于，我们可能无法在 $W^*(X)$ 中找到一个收敛到 v 于 $W^*(X)$ 中的良好光滑序列。幸运的是，我们可以利用v的拟连续性来解决这个问题。由定理 2.12 和引理 2.6 可知， v 存在关于容量 $cap_\alpha(\cdot)$ 的拟连续表示 $\widetilde{v}$ 。根据定义 (3.1)，我们可以假设 v 本身是拟连续的。此外，考虑 $\omega := \omega + \delta\alpha$，再令 $\delta \to 0^+$, 我们可假设 ω 是一个 K¨ahler 形式。

步骤 1a：假设 v 和 h 都是光滑的。计算

$$\int_X v^2\omega_h^n = \int_X v^2\omega_h^{n-1}\wedge\omega + \int_X v^2 dd^c h\wedge\omega_h^{n-1}. \tag{3.2}$$

根据 Stokes 定理和柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}\int_X v^2 dd^c h\wedge\omega_h^{n-1} &= 2\int_X (-v)dv\wedge d^c h\wedge\omega_h^{n-1}\\ &\le 2\left(\int_X dv\wedge d^c v\wedge\omega_h^{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_X v^2 dh\wedge d^c h\wedge\omega_h^{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le 2\int_X dv\wedge d^c v\wedge\omega_h^{n-1} + \frac{1}{2}\int_X dh\wedge d^c h\wedge\omega_h^{n-1},\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了以下事实： $0 \leq v^2 \leq 1$。再次使用 Stokes 定理，

$$\begin{aligned}\int_X dh \wedge d^c h \wedge \omega_h^{n-1} &= \int -hdd^c h \wedge \omega_h^{n-1} \\ &= \int_X -h\omega_h^n + \int_X h\omega_h^{n-1} \wedge \omega.\end{aligned}$$

结合这一点、(3.2) 和 (3.3)，我们得到引理的结论。

步骤 1b：只假设 h 光滑。令 $\{v_j\}_{j\geq 1}$, $0 \leq v_j \leq 1$, 为一个光滑序列，它在通常的 $W^{1,2}(X, \mathbb{R})$ 索博列夫范数下强收敛到 v。由 (3.3) 可得

$$\int_X v_j^2 dd^c h \wedge \omega_h^{n-1} \leq 2\int_X dv_j \wedge d^c v_j \wedge \omega_h^{n-1} + \frac{1}{2}\int_X dh \wedge d^c h \wedge \omega_h^{n-1}.$$

令 $j \to \infty$, 于是我们得出，对于 $v \in W^*(X)$ 且 h 光滑的情形，(3.3) 成立。结合假设 $dv \wedge d^c v \leq T,$ ，可得

$$\int_X v^2 \omega_h^n \leq \int_X v^2 \omega_h^{n-1} \wedge \omega + 2\int T \wedge \omega_h^{n-1} + \frac{1}{2}\int_X dh \wedge d^c h \wedge \omega_h^{n-1}.$$

由分部积分和斯托克斯定理，

$$\begin{aligned}\int_X dh \wedge d^c h \wedge \omega_h^{n-1} &= \int_X -h\omega_h^n + \int_X h\omega_h^{n-1} \wedge \omega, \\ \int_X T \wedge \omega_h^{n-1} &= \int_X T \wedge \omega^{n-1}.\end{aligned}$$

最后，我们得出

$$\begin{aligned}\int_X v^2 \omega_h^n \leq &\int_X v^2 \omega_h^{n-1} \wedge \omega + 2\int_X T \wedge \omega^{n-1} \\ &+ \frac{1}{2}\int_X -h\omega_h^n + \frac{1}{2}\int_X h\omega_h^{n-1} \wedge \omega.\end{aligned} \tag{3.4}$$

步骤 2： 最后，我们去掉 (3.4) 中对 h 光滑性的假设。这一步需要用到 $v^2 \in W^*(X)$ 的拟连续性。设 h 是一列光滑的 ω-拟亚纯次调和函数，并且单调递减至 h （例如参见 [BK07]）。根据步骤 1b，不等式 (3.4) 对 h_j成立。令 $j \to \infty$ ，并应用弱收敛定理 [BT87 定理 3.2] 或 [GZ17 定理 4.26], ，即可得出 (3.4) 对一般的 h成立。□

引理 3.2。设 $E \subset X$ 为一个紧子集。设 $v \in PSH(X, \omega)$ 满足：$v \leq 0$ 在 E 上成立，且 $M := \sup_X v \geq 1$。定义 $\phi = (v - M - 1)/M$。那么， $\phi \in \mathscr{K}(E)$ 满足

$$\|\phi\|_*^2 \leq \frac{A_0}{M},$$

其中 A_0 是仅依赖于 X、ω 的一致常数。因此，对于紧多极集 E，$\mathsf{c}(E) = 0$。

证明。我们有

$$-1 \leq u := \frac{v - M}{M} \leq 0.$$

因此 $\phi = u - 1/M \in \mathscr{H}(E)$。接下来计算 ϕ 的 W^*-范数。归一化 $\sup_X(v - M) = 0$ 和 $v \in PSH(X, \omega)$ 意味着一个众所周知的事实:

$$\int_X |u|\alpha^n = \int_X \frac{M - v}{M}\alpha^n \leq \frac{A_1}{M}.$$

对某个一致常数 $A_1 > 0$。由于 $|\phi| \leq 2$，我们得到

$$\|\phi\|^2_{L^2(X)} = \int_X (u - 1/M)^2\alpha^n \leq \int_X -2(u - 1/M)\alpha^n \leq \frac{A_2}{M}, \tag{3.5}$$

其中 $A_2 = 2A_1 + 2\int_X \alpha^n$. 此外，由于 $1 + u \in PSH(X, \omega/M)$ 且 $0 \leq 1 + u \leq 1$，我们有

$$T := \frac{\omega}{M} + \frac{1}{2}dd^c u^2 + dd^c u \geq du \wedge d^c u = d\phi \wedge d^c\phi.$$

由 (3.5) 和 Stokes 定理可得

$$\|\phi\|^2_* \leq \|\phi\|^2_{L^2(X)} + \|T\| \leq \frac{A_2}{M} + \frac{1}{M}\int_X \omega \wedge \alpha^{n-1} =: \frac{A_0}{M}.$$

这就完成了第一项结论的证明。

现在假设 E 是一个紧多极集。由 (2.16)，$\sup_X V^*_E = +\infty$，其中V^*_E 是其在 (2.15) 中定义的相应 Siciak-Zaharjuta 极值函数。由 Choquet 引理可知，存在一个序列 $\{v_j\}_{j\geq 1} \subset PSH(X, \omega)$，满足 $v_j \leq 0$ 在 E上，并且

$$M_j := \sup_X v_j \to +\infty$$

当 $j \to \infty$时。对 $\phi_j = (v_j - M_j - 1)/M_j$，应用第一部分，可得 $\|\phi_j\|^2_* \leq A_0/M_j$。由于 $\phi_j \in \mathscr{H}(E)$，因此 $c(E) \leq A_0/M_j$。令 $j \to +\infty$，便得到第二项结论。□

下面的结果是证明定理 1.1 的关键估计。它对 $c(\cdot)$ 与 $cap_\omega(\cdot)$ 之间的关系给出了精确的定量比较。

定理 3.3. 存在常数 $A > 0$，使得对于每个紧子集$E \subset X$，

$$\frac{1}{4n}cap_\omega(E) \leq c(E) \leq A\left[cap_\omega(E)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

证明. 设 $E \subset X$ 为紧集。设 h^*_E 为式 (2.9) 中定义的 E的相对极值函数。于是，$0 \leq h^*_E \leq 1$且 $h^*_E \in PSH(X, \omega)$。接下来，令 V^*_E为式 (2.15) 中 E 的全局极值函数。若 E 是多极集，则由 GZ17 推论 9.9、定理 9.17], 可知 $cap_\alpha(E) = 0$，因此 $cap_\omega(E) = 0$也成立。类似地，由引理 3.2 可知 $c(E) = 0$。因此，两个不等式均成立。故从现在起，我们假设 E是非多极集。由式 (2.16)，有 $0 \leq V^*_E \in PSH(X, \omega)$ 且 $0 \leq M := \sup_X V^*_E < +\infty$.

下面证明定理中的第二个不等式。若 $0 \leq M \leq 1$，则 $h^*_E = V^*_E - 1$。由 (2.8) 易知

$$\int_X \omega^n = \int_K (\omega + dd^c V^*_E)^n \leq cap_\omega(E) \leq \int_X \omega^n.$$

因此，由归一化 (2.1)，$cap_\omega(E) = cap_\omega(X) = 1$。因此，结论可由命题 2.4-(c) 立即得出。

接下来只需考虑 $M \geq 1$。对 $v = V_E^*$ 应用引理 3.2，并且 $\phi = (V_E^* - M - 1)/M$，我们得到

$$\|\phi\|_*^2 \leq \frac{A_0}{M}. \tag{3.6}$$

由于 $\{V_E < V_E^*\}$ 是多极的，$V_E^* \leq 0$ 在 E 上准处处成立，因此 $\phi \in \mathscr{K}(E)$。

全局 Alexander-Taylor 不等式 (2.17) 等价于

$$\frac{cap_\omega(E)}{A_1} \leq \frac{1}{M} \leq [cap_\omega(E)]^{\frac{1}{n}} \tag{3.7}$$

其中一致常数为 $A_1 > 0$。因此，由引理 2.14 可得

$$\mathsf{c}(E) \leq \|\phi\|_*^2 \leq A_0 [cap_\omega(E)]^{\frac{1}{n}}.$$

我们接下来证明定理中的第一个不等式。引理 2.6 已经证明了一个较弱的版本。这里我们采用全局论证，显著改善常数，并去除 ω上的 K¨ahler 条件。回顾一下，$E \subset X$ 是紧的。令 $v \in \mathscr{K}(E)$ 满足 $-1 \leq v \leq 0$。因此，$\widetilde{v} = -1$ 在 E上准处处成立。为简便起见，我们记作 $h := h_E^*$ 与 E 相关的相对极值函数，并在下文中用 v 表示 $\widetilde{v}$。由于 $v = -1$ 在 E上准处处成立，由 (2.8) 可知

$$cap_\omega(E) = \int_E \omega_h^n \leq \int_X v^2 \omega_h^n. \tag{3.8}$$

现在我们将从上估计积分 $\int_X v^2(\omega + dd^c h)^n$。事实上，设 T 是实现 v 的 W^*-范数的正闭 (1,1)-流。特别地，

$$dv \wedge d^c v \leq T.$$

由引理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned} \int_X v^2 \omega_h^n \leq & \int_X v^2 \omega_h^{n-1} \wedge \omega + 2 \int_X T \wedge \omega^{n-1} \\ & + \frac{1}{2} \int_X (-h) \omega_h^n + \frac{1}{2} \int_X h \omega_h^{n-1} \wedge \omega. \end{aligned} \tag{3.9}$$

注意由 (2.8) 有 $cap_\omega(E) = \int_X -h\omega_h^n$。因此，结合 (3.8) 与 (3.9)，我们得到

$$\frac{1}{2} cap_\omega(E) \leq \int_X v^2 \omega_h^{n-1} \wedge \omega + 2\|T\|_\omega + \frac{1}{2} \int_X h \omega_h^{n-1} \wedge \omega, \tag{3.10}$$

其中我们使用了记号 $\|T\|_\omega = \int_X T \wedge \omega^{n-1}$。接下来，

$$\int_X v^2 \omega_h^{n-1} \wedge \omega = \int_X v^2 \omega_h^{n-2} \wedge \omega^2 + \int_X v^2 dd^c h \wedge \omega_h^{n-2} \wedge \omega.$$

注意到，我们可以将 (3.3) 中的论证应用于 $dd^c h \wedge \omega_h^{n-2} \wedge \omega$ 以代替 $dd^c h \wedge \omega_h^{n-1}$。由此得到

$$\begin{aligned} \int_X v^2 \omega_h^{n-1} \wedge \omega \leq & \int_X v^2 \omega_h^{n-2} \wedge \omega^2 + 2\|T\|_\omega \\ & + \frac{1}{2} \int_X (-h) \omega_h^{n-1} \wedge \omega + \frac{1}{2} \int_X h \omega_h^{n-2} \wedge \omega^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

这里的要点在于，将这一估计代入 (3.10) 时，右端的第三项积分会被消去。因此，我们得到

$$\frac{1}{2}cap(E) \leq \int_X v^2\omega_h^{n-2}\wedge\omega^2 + 4\|T\|_\omega + \frac{1}{2}\int_X h\omega_h^{n-2}\wedge\omega^2.$$

与 (3.10) 相比，在应用引理 3.1 中的分部积分不等式后，我们将 ω_h 的指数降低了 1。再重复这一过程 $(n-2)$ 次，最终得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}cap_\omega(E) &\leq \int_X v^2\omega^n + 2n\|T\|_\omega + \frac{1}{2}\int_X h\omega^n\\ &\leq \|v\|^2_{L^2(X)} + 2n\|T\|\\ &\leq 2n\|v\|^2_*,\end{aligned}$$

因为 h 为负， T 实现了 v 和 $\omega \leq \alpha$ 的 W^*-范数。由于 $v \in \mathscr{K}(E)$, $-1 \leq v \leq 0$ 是任意的，根据引理 2.14，我们得出 $cap_\omega(E) \leq 4n$ c(E)。□

注 3.4. 定理中的第二个不等式见 DKN22 的命题 5，其中 $\omega = \alpha$ 是 K¨ahler 形式，而 c(E) 是用另一个等价的 W^*-范数定义的。更准确地说，对于 $f \in W^*(X)$，定义

$$\|f\|_{*'} = \|f\|_{L^1(X)} + \min\{\|T\|^{\frac{1}{2}} : T \in \Gamma_f\}.$$

显然， $\|f\|^2_{*'} \leq 2\|f\|^2_*$。另一方向由 Poincar´e 不等式得出。然而， [DKN22] 中尚未确定指数的最优性。第二个不等式的一个定性版本也见于 [Vig07，命题 29] ，但未给出具体的指数。

我们现在可以在主定理中建立容量之间的比较。

定理 *1.1* 的证明。 设 $K \subset X$ 为一个紧子集。由 (2.17) 和定理 3.3 可知，不妨设 K 为非多极集。设 V_K^* 为与 K 相关联的 Siciak-Zaharjuta 极值函数，且 $M = \sup_X V_K^*$。根据两个容量的定义，第一个不等式等价于

$$\mathsf{c}(K) \leq A/M$$

其中一致常数为 $A > 0$。若 $0 \leq M < 1$，则显然成立，因为 c$(K) \leq 1$（命题 2.4-(c)）。否则，这是 (3.6) 的直接推论。接下来，由 (3.7) 和定理 3.3 可得

$$1/M \leq [cap_\omega(E)]^{\frac{1}{n}} \leq [4n\mathsf{c}(E)]^{\frac{1}{n}}.$$

这等价于第二个不等式。 □

指数的最优性可由以下具体例子得出。

注记 3.5。 定理 1.1 和定理 3.3 中的不等式就指数而言都是尖锐的。事实上，考虑 $X = \mathbb{P}^n$ 和 ω 为 Fubini-Study度量。定理 3.3 和定理 1.1 中的第一个不等式意味着

$$\exp\left(-A'/cap_\omega(K)\right) \leq T_\omega(K), \tag{3.12}$$

其中 $A' = A/4n$。根据 [GZ17，例 9.22]，全局容量 $T_\omega(\cdot)$ 与其局部版本 $T_{\mathbb{B}}(\cdot)$ 在相差一个一致常数的意义下可比，其中 $\mathbb{B} = B(0, 1) \subset \mathbb{C}^n$ 是单位球。也就是说，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} T_\omega(K) \leq T_{\mathbb{B}}(K) \leq 2T_\omega(K).$$

此外，(2.12) 表明，对于任意博雷尔集 $E \subset D \subset\subset \Omega$，其中 $\Omega \subset\subset X$ 是严格伪凸局部坐标图，$cap_\omega(E)$ 与 $cap(E, \Omega)$ 在相差一个一致常数的意义下彼此等价。设 $K = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1| \leq \delta, |z_j| \leq 1/2, \quad j = 2, ..., n\}$ ($\delta < 1/2$) 是一个多圆盘，它包含于一个局部坐标单位球中。Alexander 和 Taylor [AT84, Remark 2] 证明了，对于这类紧集，(3.12) 中的指数是尖锐的。定理 3.3 中第一个不等式的指数同样尖锐。

接下来，(2.17) 中右侧的不等式写作

$$T_\omega(K) \leq \exp\left(\frac{-1}{[cap_\omega(K)]^{\frac{1}{n}}}\right)$$

其中，基于同样的局部可比性理由，并由上文的 [AT84, Remark 2]可知，这些指数是尖锐的。在此情形下，例子由一个小闭球$K = \{z : |z| \leq \varepsilon\}$给出。结合定理 1.1 和 (3.12)，我们得到

$$\exp\left(-A/\mathsf{c}(K)\right) \leq T_\omega(K) \leq \exp\left(\frac{-1}{[cap_\omega(K)]^{\frac{1}{n}}}\right)$$

且指数是精确的。由此完成了定理 3.3 中第二个不等式里指数的精确性。定理 1.1 中的第二个不等式亦然。

接下来，我们证明 Monge-Amp`ere 方程有界解的存在性。由 [EGZ09 定义 1.3] 可知，测度 μ 属于类 $\mathcal{H}(\tau)$（其中 $\tau > 0$），如果

$$\mu(K) \leq A[cap_\omega(K)]^{1+\tau}$$

对每个博雷尔子集 $K \subset X$。

推论 *1.2* 的证明。由 [EGZ09 定理 2.1], 可知，只需证明对某个 $\tau_1 > 0$ 有 $\mu \in \mathcal{H}(\tau_1)$。[DKN22 引理 3.3] 的证明表明，对 $u, v \in PSH(X, \omega)$ 以及 $v \leq u \leq 0$,

$$\|u - v\|_* \leq \|u - v\|_{L^2(X)} + A\|v\|_{L^\infty} \leq (A + 1)\|v\|_{L^\infty},$$

其中 $A = \int_X \omega \wedge \alpha^{n-1}$。现设 $\sup_X v = 0$ 且 $u = v_s := \max\{v, -s + 1\}$，对 $s \geq 1$。由 [DKN22 式 (3.5)],

$$\|v_s - v\|_{L^1(X)} \leq c_2 e^{-\tau_2 s}$$

对于一致常数 $c_2, \tau_2 > 0$。利用 μ,的（$W^*(X), \log^p$）-连续性，我们有

$$\mu(v \leq -s) \leq \int_X (v_s - v) d\mu \leq c_3 \|v\|_{L^\infty}(\tau_2 s + \log \|v\|_{L^\infty} + 1)$$

其中常数 c_3 为一致正数。由此可得 [DKN22，引理 3.7]，其中 ω 是半正且大形式。因此，剩余部分可沿用 [DKN22，定理 3.6]的证明思路。□

References

[AH96] D. R. Adams 和 L. I. Hedberg, *Function spaces and potential theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 314, Springer, 柏林, 1996。[A79] H. J. Alexander, *Projective capacity*, 载于《多复变函数近期进展》（会议录, 普林斯顿大学, 普林斯顿, 新泽西州, 1979）, 第 3–27 页, Ann. of Math. Stud., 第 100 号, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州。[AT84] H. J. Alexander 和 B. A. Taylor, *Comparison of two capacities in* $\mathbb{C}^n$, 《Math. Z.》186（1984）, 第 3 期, 407–417。[BT82] E. Bedford, B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, 《Acta Math.》149（1982）, 1–40。[BT87] E. Bedford 和 B. A. Taylor, *Fine topology, Šilov boundary, and* $(dd^c)^n$. 《J. Funct. Anal.》72（1987）, 第 2 期, 225–251。[BiD23] F. Bianchi 和 T.-C. Dinh, *Equidistribution of endomorphisms of* $\mathbb{P}^k$ *I: existence and properties* 9 **172** 2023 164 201 , 《J. Math. Pures Appl.》（）（）, –。[BK07] Z. B-locki 和 S. Ko-lodziej, *On regularization of plurisubharmonic functions on manifolds*, 《Proc. Amer. Math. Soc.》135（2007）, 第 7 期, 2089–2093。[DKW21] T.-C. Dinh, L. Kaufmann 和 H. Wu, *Products of random matrices: a dynamical point of view* **17** 2021 3, 933 969 , 《纯粹与应用数学季刊》（）, 第 – 期。[DKN22] T.-C. Dinh、S. Ko-lodziej 和 N. C. Nguyen, *The complex Sobolev space and Hölder continuous solutions to Monge-Ampère equations* **54** 2022 , 《Bull. Lond. Math. Soc.》（）, 第 2 期, 772–790。[DMV23] T.-C. Dinh、G. Marinescu 和 D.-V. Vu, *Moser-Trudinger inequalities and complex Monge-Ampère equation* 5 **24** 2023 2, 927 , 《Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.》()（）第 – 期, 954。[DS06a] T.-C. Dinh、N. Sibony, *Decay of correlations and central limit theorem for meromorphic maps* **59** 2006 754 768 , 《Comm. Pure Appl. Math》（）–。[DS06b] T.-C. Dinh 和 N. Sibony, *Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications* **81** 2006 1, 221 258 , 《Comment. Math. Helv.》（）, 第 – 期。[DoN25] T.-D. Do, D.-B. Nguyen, *Higher complex Sobolev spaces on complex manifolds*, arXiv:2405.06385, 即将发表于《印第安纳大学数学杂志》。[DoNV25] T.-D. Do, D.-B. Nguyen, D.-V. Vu, *Box-collapsing volume estimate for local Kähler metrics in big cohomology classes* 2502 16136 , arXiv: . .[E79] H. El Mir。 *Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires*, 《S´eminaire P. Lelong - H. Skoda (Analyse) 1978/79》, Lecture Notes in Math. 第 822 号, Springer-Verlag（1979）, 221–237。[EGZ09] P. Eyssidieux、V. Guedj 和 A. Z´eriahi, *Singular Kähler-Einstein metrics*, 《J. Amer. Math. Soc.》22（2009）, 第 3 期, 607–639。[FOT94] M. Fukushima、Y. Oshima 和 M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes* 19, 1994 , De Gruyter 数学研究丛书, de Gruyter, 柏林, 。[GZ05] V. Guedj 和 A. Z´eriahi, *Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds*, 《几何分析杂志》15（2005）, 第 4 期, 607–639。[GZ17] V. Guedj 和 A. Zeriahi, *Degenerate complex Monge-Ampère equations*, EMS 数学专著丛书, 26, 欧洲数学学会（EMS）, Z¨urich, 2017。[KLV21] J. Kinnunen、J. Lehrb¨ack 和 A. V. Vahakangas, *Maximal function methods for Sobolev spaces* 257, , 《数学调查与专著》, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛, [2021] ©2021。[K98] S. Ko-lodziej, *The complex Monge-Ampère equation*, 《Acta Math.》180（1998）, 第 1 期, 69–117。[K03] S. Ko-lodziej, *The Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds*, 《印第安纳大学数学杂志》52（3）（2003）667–686。[K05] S. Ko-lodziej, *The complex Monge-Ampère equation and pluripotential theory*, 《美国数学会回忆录》178（2005）, 第 64 页。[Vig07] G. Vigny, *Dirichlet-like space and capacity in complex analysis in several variables*, 《J. Funct. Anal.》252（2007）, 第 1 期, 247–277。[Vig17] G. Vigny, *Exponential decay of correlations for generic regular birational maps of* $\mathbb{P}^k$, 《Math. Ann.》362（2015）, 第 3–4 期, 1033–1054。

[VV24] G. Vigny 和 D.-V. Vu, *Lebesgue points of functions in the complex Sobolev space*, 《国际数学杂志》**35**（2024），第 5 期，论文编号 2450014，共 22 页。[Vu20] D.-V. Vu, *Equilibrium measures of meromorphic self-maps on non-Kähler manifolds*, 《美国数学会汇刊》**373**（2020），第 3 期，2229–2250。[Vu24] D.-V. Vu, *Continuity of functions in complex Sobolev spaces*, 《纯粹与应用数学季刊》**20**（2024），第 6 期，2769–2780。[Vu26] D.-V. Vu, *Uniform Diameter and Non-collapsing Estimates for Kähler Metrics*, 《几何分析杂志》36，75（2026）。[WZ24] J. Wang 和 B. Zhou, *Trace inequalities isocapacitary inequalities and regularity of the , , , complex Hessian equations* 《中国科学: 数学》（），第 – 期。 **67** 2024 3, 557 576

Department of Mathematical Sciences, KAIST, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34141, South Korea

Email address: cuongnn@kaist.ac.kr

Department of Mathematics, Hanoi National University of Education, 136 XuanThuy str., Hanoi, Vietnam

Email address: doducthai@hnue.edu.vn