arXiv:2603.05875v1 [math.NT] 6 Mar 2026

通过容许集的壳性证明局部模型的 Cohen–Macaulay性

何旭华、Felix Schremmer 和 Qingchao Yu

Abstract. 我们证明，对于任意支配余特征 μ 和任意抛物层级 K，$\frown\!\!\!\!\frown$Iwahori–Weyl群中的增广容许集 $\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 是对偶 EL 可壳的。这解决了 G¨ortz [20] 的一个猜想，并为具有抛物层级结构的局部模型特殊纤维的 Cohen–Macaulay性质提供了新的证明。特别是，该结果解决了剩余特征2和非约化根系这两种此前悬而未决的情形。

这种方法不依赖特征，且内在于容许集的结构。此外，我们的构造给出了一个显式的壳层序，由此得到一种归纳式、逐个分支构建特殊纤维的方法，并在每一步都保持 Cohen–Macaulay性。

因此，我们得到文献中研究的许多志村簇局部模型具有科恩–麦考利性质，尤其是满足 He–Pappas–Rapoport[33] 描述的局部模型，以及由 Scholze–Weinstein [53] 刻画并由 Ansch¨utz–Gleason–Louren̦co–Richarz [1]构造的局部模型。通过通常的局部模型图表，这些结果表明，只要相应的志村簇整模型存在，它们就具有 Cohen–Macaulay性质。这为 Kisin–Pappas–Zhou [40] 构造的整模型具有 Cohen–Macaulay性质提供了一个新的证明。

Introduction

0.1. 局部模型及其奇点。志村簇作为自守表示及其相应伽罗瓦表示的几何体现，在朗兰兹纲领中占据核心地位。对于大多数算术应用，我们都不得不研究志村簇的整模型，并理解其在坏约化素数处的几何性质。这些整模型的局部结构，尤其是其奇点的性质，由某些称为局部模型的线性代数模问题所控制。在 Harris-Taylor 对朗兰兹纲领的开创性解决方案中， [28], 主要研究对象是某些“简单的”志村簇。这些特殊志村簇的一个关键特征是，其整模型是光滑的。这使得人们开始关注这样一个问题：一般整模型，或等价地说局部模型，可能具有的最严重奇点究竟是什么。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11G25, 20G25.
Key words and phrases. 局部模型，壳性，可容许集。1

局部模型是定义在离散赋值环上的射影概形，编码了志村簇 ´在étale局部意义下的结构，以及具有抛物层级结构的shtuka模叠 [38] [2]。Deligne–Pappas [12], 、Chai–Norman [10, 11], 和 de Jong [36]的早期工作将志村簇奇点与这些模型联系起来，随后由Rapoport–Zink[51]加以形式化并推广。对于温和分歧群，更一般（尽管有时不够明确）的构造归功于 Zhu [56] 和 Pappas–Zhu [48] ，其后 Levin [45], 、Lourenço [46],、Fakhruddin-Haines-Lourenço-Richarz [15]以及 Richarz [52]又进行了扩展。

Pappas-Rapoport-Smithling [49, §2.1] 曾指出：“局部模型的科恩–麦考利性和正规性问题是该领域一个重大的悬而未决的问题”。de Jong [36] 开创了对局部模型奇点的研究，随后 Faltings [16],G¨ortz [20], Pappas-Rapoport-Smithling [49] 和 Kisin [39]进一步拓展了这项研究。对于较大的剩余特征，Pappas-Zhu [48] 证明了平坦性和特殊纤维的约化，并表明特殊纤维的每个不可约分支都是正规且科恩–麦考利的。特别是，他们由此推出了局部模型的正规性。对于较小的剩余特征，Haines-Lourenco-Richarz [26]发现仿射Schubert簇可能并不正规，因此后续构造中采用了半正规化。

要证明其具有 Cohen–Macaulay性更具挑战性。当特殊纤维不可约时，平坦性可确保该模型是科恩–麦考利的。这适用于特殊抛物层级，以及 [35] 中归类的少数其他情形。一般而言，特殊纤维是部分仿射旗簇中多个舒伯特簇的并集，这些簇由仿射Weyl群中的容许集标记。G¨ortz [20] 提出通过一个组合问题来解决 Cohen-Macaulay性问题：更确切地说，就是这些容许集的对偶 EL-可壳性。他使用计算机辅助计算验证了 GL_n with $n \leq 6$满足这一条件。

此后取得的进展依赖于几何方法。在 [29], ，第一作者将与非分歧群和极小余权相关联的局部模型，与约化群的 De Concini–Procesi紧化联系起来，并由群紧化的 Cohen–Macaulay性推导出这些情形下的 Cohen–Macaulay性。

一项重大突破归功于 Haines-Richarz [27]。对于 Pappas–Zhu [48] 意义下的抛物型局部模型（以及 Levin 的推广 [45]），他们证明，在最小假设下，整个局部模型都是正规的，且具有约化特殊纤维；并且当 $p > 2$ 时，它还是科恩–麦考利的。这一结果在 Kisin–Pappas–(Zhou) 整模型 [40] 所涵盖的几乎所有温和分歧情形中，确立了科恩–麦考利性质。等特征情形通过在整个局部模型上运用强有力的弗罗贝尼乌斯分裂方法得到处理；而混合特征情形则借助 X. Zhu [56] 证明的相干性猜想，从等特征情形推导而来。

超越温和分歧之后，Fakhruddin-Haines-Lourenco-Richarz [15] 为许多野分歧群构造了局部模型，并在广泛的一般情形下证明了其特殊纤维约化以及 Cohen–Macaulay 性——同时指出，剩余特征 2 下的奇数阶酉群存在一个明确的例外。在方法上，他们针对野分歧群发展了仿抛物群概形

在二维基上，并利用完美几何工具分析正特征下与之关联的舒伯特簇的奇点。

Ansch¨utz-Gleason-Louren̆co-Richarz [1]构造出唯一的射影平坦弱正规概形，从而为 Scholze-Weinstein[53]的一项重要猜想给出了构造性解答。除小特征下的某些根系外，他们通过将特殊纤维与等特征下舒伯特簇的半正规化进行比较，证明了其 Cohen–Macaulay性。Gleason-Louren̆co [19] 和 Cass-Louren̆co [8]的研究进一步完善了对特殊纤维的分析，并在更多情形下证明了 Cohen–Macaulay性（同时也证明了特殊纤维的约化性，以及其在所有情形下的正规性）。

尽管取得了这些重大进展，先前的文献仍未解决剩余特征为2且根系非约化时的 Cohen–Macaulay性问题。此外，几何方法依赖繁复的分类讨论来处理小特征情形。在这种情况下，G¨ortz 最初提出的组合猜想 [20] 便成为一个颇具吸引力的替代方案：若能证明容许集是对偶 EL 可壳的，那么便可通过组合论证得出 Cohen–Macaulay性。我们指出，Gleason-Louren̆co [19, Section 3]通过将特殊纤维与容许集的一种组合性质联系起来，证明了特殊纤维满足 Serre 性质（S_2）。众所周知，Cohen–Macaulay性蕴含（S_2）；同样，他们论文中研究的组合性质也会是对偶 EL-可壳性的直接推论。

0.2. **容许集的对偶 EL-可壳性**。本文解决了 G¨ortz 猜想，证明容许集具有对偶 EL-可壳性，并由此推出所有约化群的抛物层级结构局部模型的特殊纤维都具有 Cohen–Macaulay性。这种简化的方法避开了几何障碍，并以统一方式处理所有剩余特征和所有抛物层级结构，包括此前棘手的 $p = 2$ 情形及非约化根系。由平坦性还可推出，整个局部模型都具有 Cohen–Macaulay性。

具有抛物层级 K 的局部模型的特殊纤维，是部分仿射旗簇中仿射Schubert簇的并，其指标由 μ-容许集 Adm(μ)^K 给出。Kottwitz-Rapoport [42] 引入了这一集合，用以描述志村簇的某些分层；此后 Haines-Ngˆo [24], 等人也对其进行了研究。

局部模型特殊纤维中仿射Schubert簇的闭包关系，由 Adm(μ)^K 上一个称为布鲁哈特序的偏序决定。该序˜可以从群论角度，利用 Iwahori-Weyl群 W 作为拟 Coxeter 群的结构来描述。由于仿射Schubert簇是 Cohen–Macaulay 的（必要时先进行半正规化），因此理解偏序集 Adm(μ)^K 的结构，对于确立特殊纤维的 Cohen–Macaulay性至关重要。

壳性是组合几何和偏序集拓扑中的一个基础概念，起源于对多面体复形的研究。如果一个单纯复形的极大面可以按某种方式排序，使得每个面都以纯且余维一的方式与前面各面的并集相交，则称该单纯复形是可壳的

。这一性质对复形的代数性质具有重要影响，尤其是对复形的正则性和 Cohen–Macaulay性。其应用还延伸至全正性的理论，其中，正如 [18, 3] 所示，壳性是全正旗簇正则性的基础。

EL-可剥性通过对边集（即覆盖关系）进行标记，推广了偏序集的壳性概念：如果一个偏序集的边可以被标记，使得每个区间都有唯一一条递增且按字典序最小的链，那么该偏序集就是 EL 可壳的。这为研究偏序集的组合性质和拓扑性质提供了一个更灵活、更强大的框架。EL 壳性（对偶形式）的一个重要应用，是研究舒伯特簇的并，如 [20]中所示。壳性要求偏序集具有唯一的极小元$\widehat{\ }$和唯一的极大元。因此，我们研究增广容许集 Adm(μ)^K，它由子偏序集 Adm(μ)^K （带有布鲁哈特序）以及一个额外添加的形式化顶元 1 组成。

0.3. **主要结果**。在本文中，我们证明 G¨ortz 猜想。我们的主要结果以构造性方式、在完全一般的情形下解决了这一猜想。

定理 A （定理2.5）。 对于任意支配余特征 μ 和任意仿抛物子群层级 K，$\widehat{\ }$增广容许集 $\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 都是对偶 *EL* 可壳的。

通过可壳偏序集的一般理论， [5, 20], 定理 A 直接转化为关于局部模型的统一几何结果——从而涵盖并拓展了已知情形。其中包括 Scholze-Weinstein[53, 猜想 21.4.1] 所猜想存在的局部模型（该猜想给出了唯一刻画），以及由 Ansch¨utz- Gleason-Louren、co-Richarz [1]构造的局部模型。通过通常的局部模型图，这些结果表明，在相应整模型可用时，志村簇的相应整模型具有 Cohen–Macaulay 性质。此类整模型中最重要的一类，是由 Kisin-Pappas-Zhou [40]构造的整模型。

定理 B （定理 5.3、命题 5.4、推论 5.5）。 （*1*）任何满足 *He-Pappas-Rapoport [33,* 猜想 *2.13]*所述刻画的局部模型都是科恩–麦考利的。（*2*）由 *Scholze-Weinstein [53]*刻画并由 *Ansch ¨utz- Gleason-Louren、co-Richarz [1]*构造的局部模型都是科恩–麦考利的。（*3*）由 *Kisin-Pappas-Zhou [40]* 构造的整模型都是科恩–麦考利的。

我们在证明中所需的几何学要素，是单个舒伯特簇的Cohen–Macaulay性。在A型中，可以使用壳性论证来证明这一结果 [41], ，但目前尚不清楚如何将这种方法推广到其他类型。一般而言，可以使用弗罗贝尼乌斯分裂来证明舒伯特簇的Cohen–Macaulay性。

我们方法的一个显著特点是，显式壳层序给出了特殊纤维的显式递归构造：可以按照壳层序所规定的顺序，逐个添加不可约分支，并在每一步都保持Cohen–Macaulay性质。这不仅提供了Cohen–Macaulay性的证明，也为特殊纤维的几何提供了透明的组合蓝图。即使对于分裂群，这项技术也是新的。这一迭代过程的可能顺序详见定理 5.6。

我们强调，对偶 EL-可壳性蕴含科恩–麦考利性，但反过来并不总是成立（见 [5, 第 183] 页）。

0.4. **方法与要素**。我们的定理 A 证明利用了关于容许集和仿射魏尔群结构的最新进展，以及来自 Hecke代数表示论的经典方法。

• **对偶 EL 标记的构造（第 2 节）**。在此，我们需要构造一个合适的序，将以下两种要素结合起来：

(1) **反射序** 由 Dyer [14]基于 Kazhdan-Lusztig 多项式理论引入，在表示论中发挥着无处不在的作用。反射序是科克斯特群根集上的一种全序，非常适合用于研究 Bruhat 覆盖关系的链。本文针对 Iwahori-Weyl 群引入了反射序的分离性和 K-相容性概念，这些概念非常适合研究任意抛物层级下的容许集（引理 2.4）。

(2) **分支序**。原则上，Adm(μ)^K 的极大元之间没有自然的次序；这些极大元是形如 $t^{a(\mu)}$ 的平移元。我们利用有限魏尔群W_0中元素 a的布鲁哈特序，为这些平移元（即局部模型特殊纤维的不可约分支）引入一种次序。按照此顺序，我们可以逐个分支地组装特殊纤维，并在每一步保持 Cohen–Macaulay性。G¨ortz-He-Rapoport [23] 即将在一篇关于整赫克对应的论文中，也对层变换映射中的不可约分支采用类似的排序。

• **对偶 EL-可壳性的证明（第 4 节）**。为证明该构造满足对偶 EL 标记的定义，我们使用以下两个要素。

(1) **量子 Bruhat 图**由 Brenti-Fomin-Postnikov [7] 作为量子杨–巴克斯特方程的一个特解引入，其动机来自旗簇量子上同调的量子 Monk 公式。它与仿射魏尔群的布鲁哈特序之间的联系最早由 Lam-Shimozono [43], 描述，此后成为研究容许集的关键工具。本文把量子 Bruhat 图的最新进展与其中特定路径的一种新构造（命题 3.3）结合起来。我们的新结果推广了此前由

Mili´cevi´c-Viehmann [47] 在所谓的$cordial$ 仿射Deligne–Lusztig簇的背景下所做的工作。

(2) **锐表示** 是我们在本文中引入的、对 Iwahori-Weyl群元素极其有用且用途广泛的描述。这些表示尤其适用于 Bruhat-Tits大厦中凹室的几何、˜上的长度函数以及其布鲁哈特序。这一概念统一了以往的方法，例如 Haines-Ngô 的锐锥概念，以及第二作者提出的长度正性概念。

由于整个论证都可以用根数据和仿射魏尔群的一般语言来表述，我们的证明在任何时候都无需特别处理特定的根系或基域。因此，我们为所有情形提供了一个统一的 Cohen–Macaulay 性质证明。

这些工具结合起来，给出的证明与先前的几何方法有根本区别。我们的方法不依赖特征，且内在于容许集的结构。由此得到一个统一证明，适用于所有 p、所有抛物霍里克层级和所有根系，包括此前棘手的 $p = 2$ 和非约化类型。

0.5. **后续研究方向**。 我们预期，本文的结果和方法在局部模型之外也有应用。

魏尔群的可壳性在全非负舒伯特簇的拓扑性质中发挥着关键作用（见 [18, 3]）。我们预期，容许集的可壳性可能会对全局舒伯特簇上的全正性研究产生影响 [57, 34]。

我们还提出以下与 Coxeter 型基本轨迹相关的猜想 [21,22]。

在 Adm(μ) 中，有一个有趣的子集 Cox(μ)^K ，由某些考克斯特元素组成。偏序集 Cox(μ)^K 是与 Coxeter 型志村数据相关的志村簇基本轨迹的 EKOR 层的指标集。我们提出以下猜想。

猜想 0.1。 偏序集 $\widehat{\mathrm{Cox}(\mu)^K} = \mathrm{Cox}(\mu)^K \sqcup \{\hat{}1\}$ 是对偶 *EL* 可壳的。

这一猜想的证实，加上单个 EKOR 分层的 Cohen–Macaulay性，将意味着 Coxeter 型基本轨迹的特殊纤维具有 Cohen–Macaulay性，从而使我们的方法能够应用于更精细的分层。

致谢： 我们感谢 Thomas Haines 提出的宝贵建议和意见，并感谢 Dinakar Muthiah 就反射序进行的有益讨论。XH 和 FS 获得了新基石科学基金会通过新基石研究员项目和探索者奖提供的部分资助，以及香港研究资助局授予 XH 的 14300122 号资助。QY 获得了国家自然科学基金委员会 12501018 号项目的部分资助。

1. Preliminary

1.1. 壳性。 设 $(P, \leq)$ 是一个有限偏序集。对于 $w, w' \in P$，记$w' \gtrdot w$，若 w'覆盖 w（即，$w' > w$且不存在满足 $w' > z > w$的 z）。用 $\mathscr{E}(P)$ 表示覆盖关系（边）的集合。

设 $w, w' \in P$。定义 $[w, w'] = \{z \in P \mid w \leq z \leq w'\}$和 $[w, w') = \{z \in P \mid w \leq z < w'\}$。 w' 到 w 的一条向下链是指 P 中由 $w' > w_{r-1} > \ldots > w_1 > w$ 个元素组成的序列 P，其长度为 r 。本文中，所有链都是向下链。若一条链不是任何其他链的子链，则称其为极大链。

若有限偏序集 P 中的所有极大链长度都相同，则称 P 为纯偏序集。我们将这个共同长度称为 P 的长度。此外，若 P 含有唯一极小元 $\hat{0}$ 和唯一极大元 $\hat{1}$，则称 P 为分次偏序集。

定义 1.1. 设 P 为分次偏序集。 P 的边标记是一个映射 $\eta\colon \mathscr{E}(P) \to (\Lambda, \preceq)$，其中 $(\Lambda, \preceq)$ 是一个全序集。

给定一条极大链 $c\colon \hat{1} = w_r > w_{r-1} > \cdots > w_0 = \hat{0}$，我们得到一个 Λ^r 中的词 $\eta(c) = (\eta(w_r > w_{r-1}), \ldots, \eta(w_1 > w_0))$。若该词弱递增，我们称 c 是 标签递增的。利用 Λ 上的全序按字典序比较两条链。

以下定义出自 Bj¨orner–Wachs。

定义 1.2 ([6, 定义 4.23])。若边标记 $\eta\colon \mathscr{E}(P) \to (\Lambda, \preceq)$ 满足以下条件，则称其为对偶 ***EL*** 标记：对于 P 的任意区间 $[w, w']$，

(1) $[w, w']$ 中存在唯一一条标签递增的极大链；

(2) 这条链按字典序小于 $[w, w']$ 中所有其他极大链。

若 P 具有对偶 EL 标记，我们称 P 是对偶 ***EL*** 可壳的。

如果 P 是对偶 EL 可壳的，那么其对偶偏序集 $P^\vee$ （将顺序反转）称为 EL 可壳的。

1.2. N-科恩–麦考利偏序集。 </style}G¨ortz 引入了以下递归概念，以连接与偏序集相关的组合性质和代数几何性质。

定义 1.3 ([20, 定义 4.23])。 设 Q 是一个具有唯一极小元 $\hat{0}$ 的纯偏序集。对于任意 $z \in Q$， z 的长度定义为 $[\hat{0}, z]$ 中任意极大链的长度。递归地定义 N-科恩–麦考利性：

(1) 如果 Q有唯一极大元 x，则 Q 是 $\ell(x)$-科恩–麦考利的。

(2) 如果 Q 有极大元 x_1，……， $x_k (k \geq 2)$，则当所有 x_i长度相同为 N，且（重新排序后）对每个 $j = 2$，……， k，交集

$$[\hat{0}, x_j] \cap \bigcup_{i<j} [\hat{0}, x_i]$$

是（$N-1$）-Cohen–Macaulay的。

我们利用容许集的（组合） N-Cohen–Macaulay性，来证明局部模型特殊纤维的（几何）Cohen–Macaulay性（见定理 5.3）。然而，由于其定义是递归的，因此难以验证。事实证明，对偶 EL-可壳性的概念更容易处理。现在我们来说明这两个概念之间的联系。

命题 1.4。 设 P 是一个长度为 $N+1$ 的分次偏序集。如果 P 是对偶 *EL* 可壳的，那么 $P-\{\hat{1}\}$ 是 N-科恩–麦考利的。

证明。 我们首先介绍一些其他概念。分次偏序集 R 的一个余原子 是被极大元覆盖的元素。若 R 具有递归余原子序，则称其长度为 R 时该性质显然成立；或者，当 R 的长度大于 1 且存在一个序列 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_t$，由 R 的余原子组成，并满足：

(i) 对任意 $j = 1, 2, \ldots\ldots, t$， $[\hat{0}_R, x_j]$ 都具有一个递归余原子序，其中最先出现的 $[\hat{0}_R, x_j]$ 的余原子，正是那些被某个 $\hat{x}_i$ 覆盖的余原子，其中 $i<j$。这里， 0_R 是 R 的极小元。

(ii) 若 $w < x_i, x_j$ 且 $i<j$，则存在 $k<j$ 以及一个元素 w'，使得 $w \le w'$，并且 w' 被 x_k 覆盖，且 x_j。

我们对 N 归纳证明该命题。若 $N=1$，则该陈述显然成立。设 $N>1$。根据 [6, 定理 3.2], ，由于 P 是对偶 EL 可壳的， P 具有一个递归余原子序。令 x_1、x_2、……、x_t 为 P 的余原子序列，如上述定义所示。令 $j>1$。由条件 (i)、(ii)，集合 $[\hat{0}, x_j]$ 具有一个递归余原子序 y_1、y_2、……、y_m、y_{m+1}、……、y_ℓ，使得 $[\hat{0}, x_j] \cap \left(\cup_{i<j}[\hat{0}, x_i]\right)$ 的极大元为 y_1、y_2、……、y_m。 $[\hat{0}, x_j]$ 的递归余原子序限制为 $\{x_j\} \sqcup \left([\hat{0}, x_j] \cap \left(\cup_{i<j}[\hat{0}, x_i]\right)\right)$ 的递归余原子序。根据归纳假设，集合 $[\hat{0}, x_j] \cap \left(\cup_{i<j}[\hat{0}, x_i]\right)$ 是 $(N-1)$-科恩–麦考利的。因此，根据定义 1.3， $P-\{\hat{1}\}$ 是 N-科恩–麦考利的。□

1.3. 仿射魏尔群。 设 $\mathcal{R} = (\Phi, X^*, \Phi^\vee, X_*, \Delta_0)$ 是一个带基根数据，因此 X^* 和 X_* 配有自然配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。令 W_0 为其魏尔群，$\mathbb{S}_0 = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta_0\}$ 为 W_0 的简单反射集合。令

$$\tilde{W} = X_* \rtimes W_0 = \{t^\lambda z \mid \lambda \in X_*, z \in W_0\}$$

为扩张仿射魏尔群。

令 $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ 分别为正根集和负根集。仿射根集定义为 $\Phi_{\mathrm{aff}} = \Phi \times \mathbb{Z}$。正仿射根集定义为$\Phi^+{}_{\text{仿射}} = (\Phi^+ \times \mathbb{Z}_{\ge 0}) \sqcup (\Phi^- \times \mathbb{Z}_{\ge 1})$，其补集为负仿射根。简单仿射根 为

$$\Delta_{\mathrm{aff}} = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \Delta_0\} \bigcup \{(-\theta, 1) \mid \theta \text{ highest root of an irred. component of } \mathcal{R}\}.$$

按照惯例，我们通过嵌入 $\alpha \to (\alpha, 0)$，将 Φ 视为 Φ_{aff} 的子集。特别地， $\Delta_0 \subseteq \Delta_{\mathrm{aff}}$。

对于任意 $w = t^{\lambda} z \in \tilde{W}$，在 Φ_{aff} 上的作用由下式给出

$$\tilde{\alpha} = (\alpha, k) \in \Phi \times \mathbb{Z} \longmapsto w(\alpha, k) = (z(\alpha), k - \langle \lambda, z(\alpha) \rangle).$$

对应于 $\tilde{\alpha} \in \Phi^{+}$ 仿射的仿射反射为 $s_{\tilde{\alpha}} = s_{\alpha} t^{k\alpha^{\vee}} \in \tilde{W}$。因此，简单仿射反射的集合为 $\mathbb{S} = \{s_{\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in \Delta_{\text{aff}}\}$。于是，$(W, \mathbb{S})$ 是一个拟科克斯特群，除可能存在有限多个长度为零的元素外，其表现与科克斯特群相同。我们将 W_0 视为 W 的自然子集，并由此得到 $\mathbb{S}_0 \subseteq \mathbb{S}$。

1.4. 容许集。 设 $\mu \in X_{*}^{+}$ 为一个（不一定是极小的）支配余特征。μ-容许集定义为

$$\mathrm{Adm}(\mu) = \{w \in \tilde{W} \mid w \leq t^{z(\mu)} \text{ for some } z \in W_0\}.$$

对于 Δ_{aff} 的任意子集 K，令 W_K 为由 $\{s_{\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in K\}$ 生成的 W 的子群，令 $\tilde{W}^K$ 为 $\tilde{W}/W_K$ 的最短陪集代表元集合。若 W_K 有限，则称 K 为球形。对于 Δ_{aff} 的球形子集 K，我们定义

$$\mathrm{Adm}(\mu)^K = \mathrm{Adm}(\mu) \cap \tilde{W}^K.$$

根据 [31, 定理 6.1] 和 [25, 命题 5.1], $\mathrm{Adm}(\mu)^K = W_K \mathrm{Adm}(\mu) W_K \cap \tilde{W}^K$。从几何上看，$\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 为局部模型的特殊纤维中出现的舒伯特胞腔编目，该局部模型具有相应的抛物层级结构。

注意，$\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 有一个唯一极小元，记为 τ。根据 [32,命题 2.1], ，$\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 中的极大元为 $t^{\mu'}$，其中 $\mu' \in W_0(\mu)$ 满足 $t^{\mu'} \in \tilde{W}^K$。对于 $\tilde{W}$ 中的任意布鲁哈特区间 $[w, w']$，记作 $[w, w']^K = [w, w'] \cap \tilde{W}^K$。根据 [4,定理 2.5.5], $[w, w']^K$ 是一个分次偏序集。因此，$\mathrm{Adm}(\mu)^K = \bigcup_{\mu'} [\tau, t^{\mu'}]^K$ 是一个分次偏序集。

定义 $\widehat{\mathrm{Adm}}(\mu)^K = \mathrm{Adm}(\mu)^K \sqcup \{\hat{1}\}$，其中 $\hat{1}$ 是添加的唯一极大元。显然，$\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 是一个分次偏序集。

2. Shellings of the admissible set

固定一个球形子集 $K \subseteq \Delta_{\text{aff}}$。为了证明 $\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 的对偶 EL-可壳性，我们构造一个合适的边标记。我们处理以下两类边。

(1) *Adm()* 中元素之间的内部边：我们使用 Dyer 关于仿射根 Φ^{+} aff 上反射序的理论。

(2) 增广边 $\hat{1} \gtrdot t^{a(\mu)}$：我们引入新的标记 η_a，并使用 a 上的布鲁哈特序。

关键在于为 Φ^{+} aff 选择一个合适的全序，使其与层 K 以及元素 $a \in W_0$ 的 Bruhat 序“相容”。

2.1. 反射序。 对于 W 中的任意覆盖关系 $w' \gtrdot w$，存在唯一的正仿射根 $\tilde{\alpha}$ 使得 $w' = w s_{\tilde{\alpha}}$。我们用仿射根 $\tilde{\alpha}$ 标记内部边 $w' \gtrdot w$。

定义 2.1. $\Phi^+{}_{\mathrm{aff}}$ 上的全序 $\preceq$ 称为反射序，如果对任意 $\tilde{\alpha}$，$\tilde{\beta} \in \Phi^+{}_{\mathrm{aff}}$与 a，$b>0$，使得 $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$且 $a\tilde{\alpha}+b\tilde{\beta} \in \Phi^+{}_{\mathrm{aff}}$，我们有

$$\tilde{\alpha} \prec a\tilde{\alpha}+b\tilde{\beta} \prec \tilde{\beta}.$$

为了达到我们的目的，还需要考虑层 $K \subseteq \Delta_{\mathrm{aff}}$。我们引入一些记号。令 Φ_K 为由 K 中的仿射根张成的 Φ_{aff} 的根子系统，并令 $\Phi_K^+ = \Phi_K \cap \Phi^+{}_{\mathrm{aff}}$。

以下结果由 Dyer [14, 基于 Hecke代数的理论以及 Kazhdan-Lusztig [37]的 R-多项式在命题 4.3], 中证明。

命题 2.2。设 $K \subseteq \Delta_{\mathrm{aff}}$。假设 $\preceq$ 是一个反射序，使得 Φ_K^+ 中的每个根都先于 Φ^+仿射 $\setminus \Phi_K^+$ 中的每个根。那么，任意区间 $[w,w']^K \subseteq \tilde{W}^K$ 上诱导的标记都是对偶 *EL* 标记。

因此，对于完全包含在 Adm(μ)^K 中的区间，我们可以使用任意具有此“K-相容性”性质的反射序。为了将此标记扩展到整个增广偏序集$\widetilde{\mathrm{Adm}}(\mu)^K$，我们需要谨慎选择反射序。

2.2. **构造特殊的反射序**。现在我们构造一个针对我们需求的反射序。我们特别关注集合 $K \cap \Delta_0$。

定义 2.3。如果一个正仿射根属于 Φ_K^+，或属于 $(\Phi^- \setminus \Phi^-_{K\cap\Delta_0}) \times \mathbb{Z}_{>0}$，则称其为 *I* 型。如果它不属于 I 型，则称其为 *II* 型。

现在我们建立以下关键引理。它确保我们的反射序同时尊重仿抛物子群结构（通过 K-相容性）以及 I 型根与 II 型根之间的二分性，而后者正是增广边所需要的。

引理 2.4。存在一个关于 $\preceq$ *on* Φ^+ 仿射根的反射序，满足以下两个性质：

（*1*）分离性质：每个 *I* 型根都先于每个 *II* 型根。
（*2*） K-相容性： Φ_K^+ 中的每个根都先于 Φ^+ 仿射 $\setminus \Phi_K^+$ 中的每个根。

证明。我们首先构造一个满足条件 (1) 的反射序。

令 w 为由 $K \cap \Delta_0$ 生成的子群的最长元。令 λ 为一个支配余特征 λ，其在 Δ_0 中的稳定子等于 $K \cap \Delta_0$。那么 $w(\lambda) = \lambda$。对于任意 $n \geq 0$ 和 $\tilde{\alpha} = (\alpha, k) \in \Phi^+$ 仿射，我们有

$$(wt^{n\lambda})^{-1}(\tilde{\alpha}) = (w^{-1}(\alpha), k + \langle nw(\lambda), \alpha\rangle) = (w^{-1}(\alpha), k + \langle n\lambda, \alpha\rangle).$$

因此，$(wt^{n\lambda})^{-1}(\tilde{\alpha}) \in \Phi^-{}_{\mathrm{aff}}$ 当且仅当 $(\alpha, k) \in \Phi^+_{K\cap\Delta_0}$ 或 $\alpha \in (\Phi^- \setminus \Phi^-_{K\cap\Delta_0})$ 且 $k + n\langle \lambda, \alpha\rangle \leq 0$。因此，$\bigcup_{n\geq 0}\{\tilde{\alpha} \in \Phi^+{}_{\mathrm{aff}} \mid (wt^{n\lambda})^{-1}(\tilde{\alpha}) \in \Phi^-{}_{\mathrm{aff}}\}$ 恰好是所有 I 型正仿射根的集合。根据 [9, 命题 3.4], ，存在一个满足 (1) 的反射序 $\preceq$。

假设反射序 $\preceq$不满足 (2)。令

$$D(\preceq) := \{\tilde{\alpha} \in \Phi_K^+ \mid \text{ there exists } \tilde{\beta} \in \Phi_{\text{aff}}^+ \setminus \Phi_K^+ \text{ with } \tilde{\beta} \prec \tilde{\alpha}\}.$$

根据反射序的定义， $D(\preceq)$ 必须至少包含一个简单仿射根$\tilde{\alpha} \in K$。记 $\tilde{s} = s_{\tilde{\alpha}}$。根据 [14, 命题 2.5], ，我们定义反射序 $\preceq_{\tilde{s}}$ 如下:

$$\tilde{\beta} \preceq_{\tilde{s}} \tilde{\gamma} \iff \begin{cases} \tilde{\beta} = \tilde{\alpha}, & \text{or} \\ \tilde{\beta} \neq \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \preceq \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha} \prec \tilde{\gamma}, & \text{or} \\ \tilde{\beta} \neq \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma} \prec \tilde{\alpha}, \tilde{s}(\beta) \prec \tilde{s}(\gamma). \end{cases}$$

容易验证， $\preceq_{\tilde{s}}$ 也满足 (1)，并且 $\sharp D(\preceq_{\tilde{s}}) < \sharp D(\preceq)$。

现在我们用 $\preceq_{\tilde{s}}$ 替换 $\preceq$。由于 K 是球形的，这一过程经过有限步后便会停止，最终得到一个同时满足 (1) 和 (2) 的反射序。□

2.3. 增广边上的标记。 设 $J = \{i \in \Delta_0 \mid \langle \mu, \alpha_i \rangle = 0\}$。设 W^J为 W_0/W_J中的极小代表元集合。设 $W^{J,K} = \{a \in W^J \mid t^{a(\mu)} \in \tilde{W}^K\}$。根据[32, 命题 2.1], ，映射 $a \mapsto t^{a(\mu)}$ 给出了 $W^{J,K}$ 与 $\mathsf{Adm}(\mu)^K$中的极大元之间的双射。

对每个 $a \in W^{J,K}$，我们关联一个符号 η_a。令 $\Lambda = \Phi^+{}_{\text{aff}} \sqcup \{\eta_a \mid a \in W^{J,K}\}$。我们在 $\{\eta_a\}$ 上选取一个全序，使其细化元素 $a \in W^{J,K}$ 上的（诱导）布鲁哈特序。我们将引理 2.4 中的反射序 $\preceq$ 延拓为 Λ 上的全序，规定如下:

$$\tilde{\alpha} \prec \eta_a \prec \tilde{\beta} \quad \text{for all } a \in W^{J,K}, \text{ type I roots } \tilde{\alpha}, \text{ and type II roots } \tilde{\beta}.$$

Define $\hat{\eta} : \mathscr{E}(\widehat{\mathrm{Adm}(\mu)^K}) \to (\Lambda, \preceq)$ by $\hat{\eta}(ws_{\tilde{\alpha}} \gtrdot w) = \tilde{\alpha}$ and $\hat{\eta}(\hat{1} \gtrdot t^{a(\mu)}) = \eta_a$.

本文的主要结果如下。

定理 2.5. 边标记 $\hat{}\eta$ 在 $\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 上是一个对偶 *EL* 标记。更一般地，给定子集 $C \subseteq W^{J,K}$，若其满足如下条件：对所有 $a \in C$ 与 $b \in W^{J,K}$，当 $\eta_a \succ \eta_b$ 时有 $b \in C$，则 $\hat{}\eta$ 到

$$\{w \in \tilde{W}^K \mid \exists a \in C : \ w \leq t^{a(\mu)}\} \sqcup \{\hat{1}\}$$

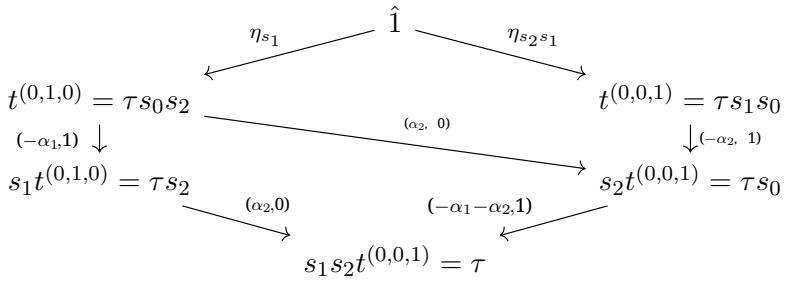
是一个对偶 *EL* 标记。

例 2.6. 考虑一般线性群 GL_3。我们自然地将其特征格与余特征格 X_*, X^* 等同于 $\mathbb{Z}^3$。（余）根的集合由下式给出

$$\Phi = \Phi^\vee = \{\pm(1,-1,0), \pm(1,0,-1), \pm(0,1,-1)\}.$$

˜单根为 $\alpha_1 = (1, -1, 0)$ 和 $\alpha_2 = (0, 1, -1)$。我们记 $\mathbb{S} = \{s_0, s_1, s_2\}$，其中 $s_1 = s_{\alpha_1}$， $s_2 = s_{\alpha_2}$以及 $s_0 = t^{(1,0,-1)} s_1 s_2 s_1$。令 $K = \{\alpha_1\} \subseteq \Delta_{\text{aff}}$。设 $\mu = (1, 0, 0)$。那么 $J = \{\alpha_2\}$。容许集 $\mathsf{Adm}(\mu)^K$ 含有唯一一个长度为零的元素,

w我们将其记为 $\tau = s_1 s_2 t^{(0,0,1)}$。偏序集 Adm($\mu$)^K 可以如下绘出 s:



我们的边标记按如下方式全序排列:

$$(-\alpha_2, 1) \prec (-\alpha_1 - \alpha_2, 1) \prec \eta_{s_1} \prec \eta_{s_2 s_1} \prec (-\alpha_1, 1) \prec (\alpha_2, 0).$$

留给读者自行验证这是一个对偶 EL 标记。

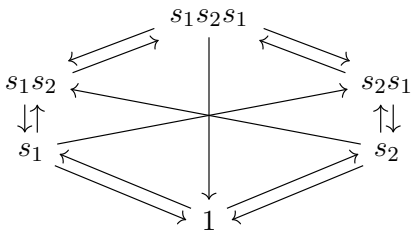
˜3. Quantum Bruhat Graph and Bruhat Order on W

3.1. 量子布鲁哈特图。 理解仿射Weyl群上的布鲁哈特序$\curlywedge W$ 是我们研究容许集的核心。应对这一复杂性的有力工具是量子布鲁哈特图（QBG），由 Fomin、Gelfand 和 Postnikov 于 [17] 引入。

设 $\rho = \frac{1}{-2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$。量子布鲁哈特图 QBG($\mathcal{R}$) 是一个有向加权图，具有:

- 顶点: W_0 的元素。
- 边：分为两类，以正根 $\alpha \in \Phi^+$ 标记：(1) Bruhat边: $w \rightharpoonup ws_\alpha$ 当 $ws_\alpha > w$ 时。(2) 量子边: $w \rightharpoondown ws_\alpha$ 当 $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) + 1 - \langle \alpha^\vee,\ 2\rho \rangle$。
- 权：Bruhat边 $w \rightharpoonup ws_\alpha$ 的权为 0；量子边 $w \rightharpoondown ws_\alpha$ 的权为 t $\alpha^\vee$。

我们用 $\rightharpoonup$ 和 $\rightharpoondown$ 分别表示布鲁哈特边和量子边，以强调这些边在布鲁哈特序中向上或向下。我们还用 $\to$ 同时表示布鲁哈特边和量子边。



例 3.1。 对于具有单根 α_1, α_2 的类型 A_2，QBG 有六个顶点。最长元 $w_0 = s_1 s_2 s_1$ 有量子边连至 $s_1 s_2$ 和 $s_2 s_1$，其权分别为 $\alpha_1^\vee$ 和 $\alpha_2^\vee$。

容易看出，QBG($\mathcal{R}$) 是路径连通的。对于 u，$v \in W_0$，从 u 到 v 的任意最短路径的长度记为 $d(u, v)$。路径的权是其各条边的权之和。量子 Bruhat 图的以下性质由 Postnikov [50, 引理 1] 和 Mili´cevi´c-Viehmann [47, 公式（4.3）]建立。

引理 3.2. 设 u，$v \in W_0$。则

(1) 在 $\mathrm{QBG}(\mathcal{R})$ 中，从 u 到 v 的所有最短路径具有相同的权。我们将此权记为 $\mathrm{wt}(u, v)$。

(2) 从 u 到 v 的任意路径的权都不小于 $\geq \mathrm{wt}(u, v)$，且当且仅当该路径是最短路径时取等号。

(3) $\mathrm{wt}(u, v) = 0$ 当且仅当 $u \leq v$。

根据权函数的定义，我们有

$$\mathrm{wt}(u, u'') \leq \mathrm{wt}(u, u') + \mathrm{wt}(u', u'') \text{ for any } u, u', u'' \in W_0.$$

现在我们证明特定形式的最短路径存在。QBG($\mathcal{R}$)中的下-上型 路径是指一条路径 $u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_r$，其中不存在满足 $u_{i-1} < u_i$ 和$u_i > u_{i+1}$的 i。类似地，我们定义上-下型 路径。特别地，仅由 Bruhat边或仅由量子边组成的路径，既是下-上型路径，也是上-下型路径。

命题 3.3. 设 $u, v \in W_0$ 满足 $u \neq v$。则存在一条从 u 到 v的下-上型最短路径。同样，存在一条从 u 到 v 的上-下型最短路径。

注 3.4. $v = 1$ 的特殊情形最早由 [47, 命题 4.11]证明。

证明. 我们证明下-上型路径的存在性。另一结论由对偶性 $w \mapsto w_0 w$得出。

首先考虑特殊情形 $d(u, v) = 2$。此时存在一条长度为 2 的最短路径 p，从 u 到 v；除非 p 具有如下形式，否则结论显然成立：

$$p : u \rightharpoonup v s_\gamma \rightharpoonup v$$

对于满足 $\mathrm{wt}(u, v) = \gamma^\vee$的根 γ。在此情形下，vs_γ 是一个长度相加乘积，因此将 v 的一个约化词与s_γ的一个约化词连接起来，就得到 vs_γ 的一个约化词。现在，由 $u \lessdot vs_\gamma$ 可知，删除 vs_γ的约化词中的一个字母，即可得到 u 的一个约化词。

如果 $u = u_1 s_\gamma$ 满足 $\ell(u) = \ell(u_1) + \ell(s_\gamma)$ 且 $u_1 \lessdot v$，我们就得到一条替代路径 $u \rightharpoonup u_1 \rightharpoonup v$，其类型正如所需，为下-上型。

否则，$u = v u_2$ 满足 $\ell(u) = \ell(v) + \ell(u_2)$ 且 $u_2 \lessdot s_\gamma$。我们有 $u_2 = s_\gamma s_\alpha$，其中某个 $\alpha \in \Phi^+$。由于 $u_2 \leq s_\gamma$，根 $s_\gamma(\alpha)$ 为负。根据 [55, 引理 3.1 和注 3.3]，γ 作为量子边 $vs_\gamma \rightharpoonup v$ 的一部分出现这一事实意味着 $\langle \gamma^\vee, \alpha \rangle = 1$。

设 $\beta = s_\alpha(\gamma)$。那么 $\beta^\vee = s_\alpha(\gamma^\vee) = \gamma^\vee - \alpha^\vee$。由 [7, 引理 4.3], 可得不等式

$$\ell(vs_\alpha) \le \ell(v) + \ell(s_\alpha) \le \ell(v) + \langle \alpha^\vee, 2\rho\rangle - 1,$$
$$\ell(u) \le \ell(vs_\alpha) + \ell(s_\beta) \le \ell(vs_\alpha) + \langle \beta^\vee, 2\rho\rangle - 1.$$

考察路径 p，我们得到如下观察

$$\ell(u) = \ell(vs_\gamma) - 1 = \ell(v) + \langle \gamma^\vee, 2\rho\rangle - 2.$$

结合 上述三个公式与恒等式 $\gamma^\vee = \alpha^\vee + \beta^\vee$，我们得到所需路径

$$u = vs_\gamma s_\alpha = vs_\alpha s_\beta \rightharpoonup vs_\alpha \rightharpoonup v.$$

这就完成了情形 $d(u, v) = 2$ 的证明。

一般而言，给定一条从 u 到 v 的任意最短路径，若它不是下-上型，则可以找到一段长度为二的子路径，其中先是一条 Bruhat边，后接一条量子边。我们按照上述方法，用一条长度为二的下-上型路径替换这段子路径，同时不改变路径的其余部分。

通过这一过程，路径中量子边的总数可能保持不变或增加，但绝不会减少。此外，如果总数保持不变，那么路径中量子边的位置会向起点移动。因此，反复进行这一过程，最终会得到一条从 u 到 v 的下-上型路径。□

3.2. 锐表示。 本小节将介绍一类特别方便的 Iwahori-Weyl群元素因子分解 $w = xt^\lambda y \in \tilde{W}$，其中有 x、$y \in W_0$ 和 $\lambda \in X_*$，称为锐表示。这些表示特别适用于研究˜Bruhat-Tits大厦中凹室的几何，以及 W 上的长度函数及其布鲁哈特序。对我们的工作最重要的元素，例如平移元 $t^{a(\mu)}$ 或 $K \subseteq \Delta_{\text{aff}}$的 $\tilde{W}^K$ 中的元素，都有各自特定的锐表示，事实证明它们非常有用。本节统一了以往的一些方法，例如 Haines-Ngˆo 的锐锥概念 [24]，以及第二作者提出的长度正性概念。我们将说明如何用锐表示的语言优雅地表述以往文献中的结果。

定义 3.5。 设 $w \in \tilde{W}$。若因式分解 $w = xt^\lambda y$ 满足 $x, y \in W_0, \lambda \in X_*$ 则称其为锐表示，当且仅当

$$\delta_{\Phi^-}(x(\alpha)) + \langle \lambda, \alpha\rangle - \delta_{\Phi^-}(y^{-1}(\alpha)) \ge 0 \quad \text{for all } \alpha \in \Phi^+,$$

其中 $\delta_{\Phi^-}(\beta)$ 是克罗内克符号，即当 $\beta \in \Phi^-$ 时 $\delta_{\Phi^-}(\beta) = 1$，否则为 0。

锐表示的概念与 [55, 定义 2.2] 中引入的长度正元概念一致。具体而言，当且仅当 $y^{-1} \in \mathrm{LP}(w)$ 时，$w = xt^\lambda y$ 是锐的。Haines–Ngô [24, §5]通过锐锥 给出了锐表示的几何诠释。

˜扩张仿射魏尔群 W 通过仿射变换作用于实向量空间 $V = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$：$t^\lambda w \cdot v = \lambda + w(v)$。根据定义，凹室是$V - \bigcup_{\tilde{\alpha}} H_{\tilde{\alpha}}$的连通分支，其中 $\tilde{\alpha}$ 遍历仿射根 Φ_{aff} 的集合。按照惯例，基本小室定义为

$$\mathfrak{a} = \{v \in V \mid 0 < \langle v, \alpha \rangle < 1 \text{ for every } \alpha \in \Phi^+\}.$$

设 $C^+ \subseteq V$ 为支配魏尔室， $X_*^+ \subseteq X_*$ 为支配余特征的集合。设 ℓ 为长度函数， $\leq$ 为相对于基本小室 $\mathfrak{a}$ 的布鲁哈特序。

定义 3.6。设 $z \in W_0$。沿 z方向的锐锥为

$$\mathcal{C}(\mathfrak{a},\ z) = \{w \in \tilde{W} \mid w(\mathfrak{a}) \subseteq H^{z+} \text{ 对所有满足 } \mathfrak{a} \subseteq H^{z+}\} \text{ 的根超平面 },$$

其中 $H^{z+} = H + z(C^+)$ 是 $V \setminus H$ 的连通分支，它包含韦尔室 $z(C^+)$ 中任意足够深的小室。

w 的锐表示与包含 w 的锐锥之间存在自然双射。

命题 3.7。设 $w = xt^\lambda y \in \tilde{W}$ 满足 x、$y \in W_0$ 和 $\lambda \in X_*$。那么， $xt^\lambda y$ 是 w 的锐表示，当且仅当 $w \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\ x)$。

证明。根据定义，对于每个 $\beta \in \Phi^+\}.$，$\mathfrak{a} = \{v \in V \mid -\delta_{\Phi^-}(\beta) < \langle v, \beta \rangle < 1 - \delta_{\Phi^-}(\beta)$。继而根据定义，当且仅当 $w(\mathfrak{a}) \subseteq \bigcap_{\beta \in x(\Phi^+)} \{v \in V \mid \langle v, \beta \rangle \geq -\delta_{\Phi^-}(\beta)\}$. 时， $w \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, x)$ 成立。对于任意 $v \in V$ 和 $\alpha \in \Phi^+$，我们有 $\langle w(v)\ x(\alpha) \rangle = \langle x(\lambda) + xy(v)\ x(\alpha) \rangle = \langle \lambda, \alpha \rangle + \langle v, y^{-1}(\alpha) \rangle$。因此，对于任意 $\alpha \in \Phi^+$，当且仅当 $\langle \lambda, \alpha \rangle - \delta_{\Phi^-}(y^{-1}(\alpha)) \geq -\delta_{\Phi^-}(x(\alpha))$ 时， $w \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, x)$ 成立。□

推论 3.8 ([54, 推论 2.11])。设 $w = xt^\lambda y$，其中 x、$y \in W_0$ 与 $\lambda \in X_*$。则$\ell(w) \geq \ell(x) + \langle \lambda,\ 2\rho \rangle - \ell(y)$，等号成立当且仅当 $xt^\lambda y$ 是 w 的锐表示。

每个 $w \in \tilde{W}$ 都有唯一的标准表示 $w = x_0 t^{\lambda_0} y_0$，其中 $\lambda_0 \in X_*^+$ 与$t^{\lambda_0} y_0$ 在其陪集 $W_0 \backslash \tilde{W}$ 中长度最小（参见例如 [30, §9.1]）。在此表示中， $w(\mathfrak{a})$ 位于韦尔室 $x_0(C^+)$ 中，因此 $w \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\ x_0)$，且 $x_0 t^{\lambda_0} y_0$ 具有锐性。一般而言，一个元素可能属于若干个锐锥；它恰好属于一个锐锥，当且仅当 $w(\mathfrak{a})$ 位于收缩韦尔室中，或等价地，当 w 位于 W 的最低双侧 ˜Kazhdan–Lusztig 胞中（见 [54, 命题 2.15]）。本文不需要这一事实。

我们有如下 ˜通过锐表示给出的 W 中布鲁哈特序的描述。

定理 3.9 ([55, 定理 4.2, 引理 4.3])**.** 设 $w \in \tilde{W}$，并设 $xt^\lambda y$ 是 w 的锐性˜表示。设 $w' \in W$。那么， $w \leq w'$ 当且仅当存在 x'、$y' \in W_0$ 和 $\lambda' \in X_*$，满足 $w' = x' t^{\lambda'} y'$，使得

$$\mathrm{wt}(x, x') + \mathrm{wt}(y'^{-1}, y^{-1}) \leq \lambda' - \lambda.$$

$In\ t$在这种情况下，可以选择 x'、y'、λ'，使得 $w'=x't^{\lambda'}y'$ 是一个锐性表示 $n.$

作为一项 应用，我们可以通过量子 Bruhat 图描述容许集。

命题 3.10 ([55, 命题 4.12])**.** 设 $w=xt^{\lambda}y$ 是一个锐表示，且$\mu\in X_*^+$。那么 $w\in\mathrm{Adm}(\mu)$ 当且仅当不等式

$$\mathrm{wt}(x,y^{-1})\le\mu-\lambda$$

成立。

下面给出平移元的锐表示的描述。

引理 3.11. 设 $z\in W_0$、$\lambda\in X_*^+$ 和 $J=\{\alpha\in\Delta_0\mid\langle\lambda,\alpha\rangle=0\}$。那么，$t^{z(\lambda)}$ 的锐表示为 $zut^{\lambda}u^{-1}z$，其中 u 遍历 W_J。

证明。设 $u\in W_0$。我们有 $t^{z(\lambda)}=zut^{u^{-1}(\lambda)}u^{-1}z^{-1}$。于是

$$\begin{aligned}
&zut^{u^{-1}(\lambda)}u^{-1}z^{-1}\text{ is an acute presentation of }t^{z(\lambda)}\\
\iff&\delta_{\Phi^-}(zu(\alpha))+\langle u^{-1}(\lambda),\alpha\rangle-\delta_{\Phi^-}(zu(\alpha))\ge0\text{ for any }\alpha\in\Phi^+\\
\iff&u^{-1}(\lambda)\text{ is dominant}\\
\iff&u\in W_J.
\end{aligned}$$

□

最后，$\tilde{W}^K$ 中的元素具有特别有用的锐表示。

命题 3.12. 设 $w\in\tilde{W}^K$。那么存在一个锐表示 $w=xt^{\lambda}y$，使得对于所有 $\tilde{\alpha}=(\alpha,k)\in K$，都有 $y(\alpha)\in\Phi^-$。

注 3.13. 对于任意 $w\in\tilde{W}$ 和 $\tilde{\alpha}\in\Phi^+$仿射，$ws_{\tilde{\alpha}}>w$ 当且仅当 $w(\tilde{\alpha})\in\Phi^+$仿射。因此，对于任意 $\lambda\in X_*$，我们有（例如参见 [35, §1.3, (1.1)]）

$$t^{\lambda}\in\tilde{W}^K\iff\langle\lambda,\alpha\rangle\le0\text{ for any }\tilde{\alpha}=(\alpha,k)\in K.$$

特别地，在命题 3.12 的情形下，$t^{y^{-1}(\lambda)}\in\tilde{W}^K$。

~证明。我们用 pr 表示自然投影映射 pr: $W\longrightarrow W_0$ 和 $\Phi_{\mathrm{aff}}\to\Phi$。

令 $w_{0,K}\in W_K$ 表示由 K 生成的群的最长元。则 $w_1:=ww_{0,K}$ 是一个长度相加乘积。令 $w_1=x_1t^{\lambda_1}y_1$ 为任意一个锐表示。根据命题 3.7，有 $w_1\in\mathcal{C}(\mathfrak{a},x_1)$。由 [24, §5], ，从 $\mathfrak{a}$ 到 $w_1(\mathfrak{a})$ 的任意最短廊道都沿 x_1 方向。由于 $\ell(w_1)=\ell(w)+\ell(w_{0,K})$，存在一条从 $\mathfrak{a}$ 到 $w_1(\mathfrak{a})$ 且经过 $w(\mathfrak{a})$ 的最短廊道。由 [24, 引理 5.3], ，这迫使 $w\in\mathcal{C}(\mathfrak{a},x_1)$。根据命题 3.12，我们得到一个锐表示 $w=x_1t^{\lambda}y$，其中 λ 和 y。

显然 $y=y_1\mathrm{pr}(w_{0,K})$。由 [54, 引理 2.9], ，我们有 $y_1(\alpha)\in\Phi^+$，对所有 $\tilde{\alpha}=\tilde{(\alpha,k)}\in K$。注意到 $y(\alpha)=y_1\mathrm{pr}(w_{0,K}(\tilde{\alpha}))=y_1\mathrm{pr}(-\beta)=-y_1(\mathrm{pr}(\beta))$。此处，$\beta=-w_{0,K}(\tilde{\alpha})\in K$。因此 $y(\alpha)\in\Phi^-$。□

3.3. $\mathrm{Adm}(\mu)^K$**的顶部两层。** 设 $\hat{\eta}\colon \mathscr{E}(\mathrm{Adm}(\mu)^K) \to (\Lambda, \preceq)$ 为 §2.3 中构造的边标记。设 $J = \{\alpha \in \Delta_0 \mid \langle \mu, \alpha \rangle = 0\}$。

现在我们给出 $\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 的最上两层的显式描述。

命题 3.14. 令 $w \in \mathrm{Adm}(\mu)^K$ 满足 $\ell(w) = \langle \mu, 2\rho \rangle - 1$。设 $z_1 t^{\lambda} z_2^{-1}$是 w 的一个锐表示，如命题 *3.12* 中所述。那么，

(1) $\mathrm{QBG}(\mathcal{R})$ 中存在一条边 $z_1 \to z_2$，$\lambda = \mu - \mathrm{wt}(z_1, z_2)$ 且 $\mathrm{wt}(z_1, z_2) \notin \Phi_J$。*(2)* w 恰好被 $\mathrm{Adm}(\mu)$ 中的两个元素 $t^{z_1(\mu)}$ 和 $t^{z_2(\mu)}$ 覆盖。*(3)* 令 zW_J为 W/W_J 中满足 $w \leq t^{z(\mu)}$ 和 $t^{z(\mu)} \in \tilde{W}^K$的最小元素。

$\hat{\eta}(t^{z(\mu)} \geqslant w)$ 是一个 *II* 型仿射根。

注 3.15. 第 (3) 部分对于定理 2.5 的证明至关重要。这也是 §2.3 中显式构造边标记 $\hat{\eta}$ 的原因。

证明。设 $t^{\mu'} \geqslant w$ 为一条布鲁哈特覆盖，其中 $\mu' \in W_0(\mu)$ 是 μ的 W_0-轨道。应用[55, 命题 4.5] 和引理 3.11。存在 $\alpha \in \Phi^+$，使得以下条件之一成立。

(i) $z_2 = z_1 s_\alpha$, $\lambda = \mu$, $\mu' = z_1(\mu)$，且存在一条 Bruhat边 $z_1 \rightharpoonup z_2$。此时，$\hat{\eta}(t^{\mu'} \geqslant w) = (z_1(\alpha), 0)$。(ii) $z_2 = z_1 s_\alpha$, $\lambda = \mu - \alpha^\vee$, $\mu' = z_1(\mu)$，且存在一条量子边 $z_1 \rightharpoonup z_2$。此时，$\hat{\eta}(t^{\mu'} \geqslant w) = (z_1(\alpha), 1)$。(iii) $z_2 = z_1 s_\alpha$, $\lambda = \mu$, $\mu' = z_2(\mu)$，且存在一条 Bruhat 边 $z_1 \rightharpoonup z_2$。此时，$\hat{\eta}(t^{\mu'} \geqslant w) = (-z_1(\alpha)\ \langle \mu, \alpha \rangle)$。(iv) $z_2 = z_1 s_\alpha$, $\lambda = \mu - \alpha^\vee$, $\mu' = z_2(\mu)$，且存在一条量子边 $z_1 \rightharpoonup z_2$。此时，$\hat{\eta}(t^{\mu'} \geqslant w) = (-z_1(\alpha)\ \langle \mu, \alpha \rangle - 1)$。

我们首先证明 $\alpha \notin \Phi_J$。

在情形 (i) 和 (iii) 中，由于 $z_1 t^{\mu} s_\alpha z_1^{-1}$是 w的锐表示，我们得到

$$\Phi^-(z_1(\alpha)) + \langle \mu, \alpha \rangle - \Phi^-(z_1 s_\alpha(\alpha)) \geq 0.$$

由于 $z_1(\alpha) \in \Phi^+$，我们有 $0 + \langle \mu,\ \alpha \rangle - 1 \geq 0$ 从而 $\alpha \notin \Phi_J$。

在情形 (ii) 和 (iv) 中，由于 $z_1 t^{\mu - \alpha^\vee} s_\alpha z_1^{-1}$是 w的锐表示，我们得到

$$\Phi^-(z_1(\alpha)) + \langle \mu - \alpha^\vee, \alpha \rangle - \Phi^-(z_1 s_\alpha(\alpha)) \geq 0.$$

由于 $z_1(\alpha) \in \Phi^-$，我们有 $1 + \langle \mu,\ \alpha \rangle - 2 + 0 \geq 0$ 从而 $\alpha \notin \Phi_J$。

注意，陈述 (1) 和 (2) 直接由上述显式描述以及 $\hat{\eta}$ 的定义得到。现在我们证明 (3)。

我们首先考虑 $z_1 \to z_2$ 是量子边的情形。此时 $z_2(\alpha) \in \Phi^+$。在这种情况下，$\hat{\eta}(t^{z_2(\mu)} \geqslant w) = (z_2(\alpha)\ \langle \mu,\ \alpha \rangle - 1)$ 是一个 II 型仿射根，且 $t^{z_2(\mu)} \in \tilde{W}^K$，如所需。

现在考虑 $z_1 \to z_2$ 是 Bruhat边 的情形。于是 $z_1(\alpha) \in \Phi^+$。假设$t^{z_1(\mu)} \in \tilde{W}^K$，则 $\hat{\eta}(t^{z_1(\mu)} \geqslant w) = (z_1(\alpha),\ 1)$ 是所需的 II型根。现在假设

n

$t^{z_1(\mu)} \notin \tilde{W}^K$，则必有 $t^{z_1(\mu)} = {}^{w}s_{\tilde{\beta}}$，其中某个 $\tilde{\beta} \in K$。于是 $(z_1(\alpha),\ 0) = \tilde{\beta}$。特别地，$z_1(\alpha) \in K \cap \Delta_0$。由此可得，$\hat{\eta}(t^{z_2(\mu)} \geqslant w) = (-z_1(\alpha)\ \langle \mu,\ \alpha \rangle)$ 是一个 II 型仿射根。□

4. Proof of dual EL-shellability

4.1. 证明策略概述。 现在我们证明定理 2.5：§2.3 中定义的边标记 $\widehat{\eta}$ 是 $\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 上的对偶 EL 标记。这需要证明，对于 $\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 中的每个区间：

- 存在唯一的标签递增极大链。
- 该链在所有极大链中字典序最小。

对于 $[w_1, w_2]^K$ 满足 $w_1, w_2 \in \mathrm{Adm}(\mu)^K$ 的区间，命题 2.2 可直接应用，从而得到所需性质。关键情形是 $[w, \hat{1}]^K$ 对于 $w \in \mathrm{Adm}(\mu)^K$ 的区间。我们首先将构造一条从 1 到 w 的标签递增极大链，该链按字典序最小，然后证明它确实是唯一的标签递增链。这需要利用第 §3 节中发展的量子 Bruhat 图和锐表示。

4.2. 集合 $\Sigma^{J,\ K}_{\ w}$。 设 $w \in \mathrm{Adm}(\mu)^K$。在本小节中，我们研究 $\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 中大于或等于 w 的极大元。

固定一个满足命题 3.12 中条件的锐表示 $w = xt^{\lambda}y$。那么 $t^{y^{-1}(\mu)} \in \tilde{W}^K$。定义

$$\Sigma_w := \{z \in W_0 \mid \mathrm{wt}(x, z) + \mathrm{wt}(z, y^{-1}) \leq \mu - \lambda\}.$$

这个集合显然取决于锐表示的选择。

由 [35, 推论 3.4]，集合 $\{z \in W_0 \mid \mathrm{wt}(x,\ z) \leq \mu - \lambda\}$ 有唯一极小元 $z_{\min}$。我们将此元素记为 $z_{\min}$。由命题 3.10，得到 $\mathrm{wt}(x,\ y^{-1}) \leq \mu - \lambda_\circ$ 于是 $y^{-1} \geq z_{\min}$ 根据 $z_{\min}$ 的定义。因此，由引理 3.2（3），$\mathrm{wt}(z_{\min},\ y^{-1}) = 0$。由此可得 $z_{\min} \in \Sigma_w$。显然，$\Sigma_w \subseteq \{z \in W_0 \mid \mathrm{wt}(x,\ z) \leq \mu - \lambda\}$。因此，$z_{\min}$ 是 Σ_w 的唯一极小元。

回顾 使得 $J = \{\alpha \in \Delta_0 \mid \langle \mu, \alpha \rangle = 0\}$ 且 $W^{J,\ K} = \{a \in W^J \mid t^{a(\mu)} \in \tilde{W}^K\}$。定义 e

$$\Sigma_w^{J,K} = \{a \in W^{J,K} \mid w \leq t^{a(\mu)}\}.$$

集合 $\Sigma^{J,\ K}_{\ w}$ 与 $\mathrm{Adm}(\mu)^K$ 中大于或等于 w 的极大元集合存在自然双射。接下来，我们在 $\Sigma^{J,\ K}_{\ w}$ 中确定一个特殊元素，它将作为我们标签递增链经过的通道。

引理 4.1. 集合 $\Sigma^{J,\ K}_{\ w}$ 有唯一极小元 $a^K_{\min}$。该元素 $a^K_{\min}$ 是 $\mathrm{pr}(W_K) z_{\min} W_J \cap W^{J,\ K}$ 中唯一的元素。这里，pr 是投影 $\tilde{W} \to W_0$。

证明。令 $\Sigma^J_w := \{a \in W^J \mid w \leq t^{a(\mu)}\}$。于是 $\Sigma^{J,\ K}_{\ w} = \{a \in \Sigma^J_w \mid t^{a(\mu)} \in \tilde{W}^K\}$。令 a_1 为陪集 $z_{\min} W_J$ 中的极小代表元。对于 $a \in W^J$，由定理 3.9 和

引理 3.11， $w \le t^{a(\mu)}$ 当且仅当存在某个 $u \in W_J$使得 $au \in \Sigma_w$。因此， a_1 是 Σ_w^J中的唯一极小元。特别地， a_1 是 $\Sigma^{J,\ w}{}^K$的下界。

设给定元素 $a_j \in \Sigma_w^J$，它是 $\Sigma^{J,\ w}{}^K$ 的下界。若 $t^{a_j(\mu)} \in \tilde{W}^K$，则 a_j 是 $\Sigma^{J,\ w}{}^K$ 中的唯一极小元，正如所需。设 $t^{a_j(\mu)} \notin \tilde{W}^K$。我们按如下方式构造具有相同性质的 a_{j+1} 。

由于 $t^{a_j(\mu)} \notin \tilde{W}^K$，存在 $\tilde{\alpha} = (\alpha,\ k) \in K$，使得 $t^{a_j(\mu)} s_{\tilde{\alpha}} < t^{a_j(\mu)}$。在这种情况下，我们有 $\langle a_j(\mu)\ \alpha\rangle > 0$，或者等价地，$a_j^{-1}(\alpha) \in \Phi^+ - \Phi_J$。由于假设 $w \in \tilde{W}^K$，我们得到

$$w \le t^{a_j(\mu)} s_{\tilde{\alpha}} < s_{\tilde{\alpha}} t^{a_j(\mu)} s_{\tilde{\alpha}} = t^{s_\alpha a_j(\mu)}.$$

定义 a_{j+1} 为陪集 $s_\alpha a_j$ 中的极小代表元。则 $a_{j+1} \in \Sigma_w^J$。我们声称 a_{j+1} 也是 $\Sigma^{J,\ w}{}^K$ 的下界。

先考虑如下情形：对于 Φ 的某个不可约分支的最高根 θ， $\tilde{\alpha} = (-\theta, 1)$。由于 $a_j^{-1}(-\theta) \in \Phi^+$，我们有 $a_{j+1} \le s_\theta a_j < a_j$。因此，$a_{j+1}$ 也是 $\Sigma^{J,w}{}^K$ 的一个下界。

接下来考虑情形 $\tilde{\alpha} = (\alpha, 0) \in \Delta_0$。由于 $a_j^{-1}(\alpha) \in \Phi^+ - \Phi_J$，我们有 $a_j < s_\alpha a_j$ 和 $s_\alpha a_j \in \tilde{W}^J$。因此，根据定义，$a_{j+1} = s_\alpha a_j$。令 $b \in \Sigma^{J,w}{}^K$。由于 $t^{b(\mu)} \in \tilde{W}^K$，我们有 $\langle b(\mu)\ \alpha\rangle \le 0$，从而 $b^{-1}(\alpha) \in \Phi^- \cup \Phi_J^+$。在两种情形下，都很容易看出$a_{j+1} \le b$。这证明了 a_{j+1} 是 $\Sigma^{J,w}{}^K$ 的一个下界。

我们重复这一过程，直到得到一个元素 $a_n \in \Sigma^{J,\ w}{}^K$它是 $\Sigma^{J,\ w}{}^K$的下界（ K 是球形这一事实很容易推出该过程会终止）。于是，a_n 是 $\Sigma^{J,\ w}{}^K$的唯一极小元。

最后，根据构造可知，所有 a_j都属于双陪集 $\mathrm{pr}(W_K) z_{\min} W_J$。另一方面，由 [35, 引理 1.3], 可知，交集 $\mathrm{pr}(W_K) z_{\min} W_J \cap W^{J,\ K}$只包含一个元素。□

4.3. 构造递增链。现在我们构造 $[w, \hat{1}]^K$中唯一递增链的一个候选。令 $a_{\min}^K$如引理 4.1 所述。

• 内部片段：考虑区间 $[w, t^{a^K{}_{\min}(\mu)}]^K$。根据命题 2.2，存在唯一一条标签递增极大链

$$p_w : t^{a_{\min}^K(\mu)} \gtrdot w_r \gtrdot w_{r-1} \gtrdot \cdots \gtrdot w_1 = w$$

位于此区间内，并且在所有从 $t^{a_{\min}^K(\mu)}$到 w的链中，这条链按字典序最小。

• 增广边：插入边$\hat{1} \gtrdot t^{a^K{}_{\min}(\mu)}$ ，其由 $\eta_{a^K \min}$ 标记，以得到完整的链：

$$\hat{p}_w : \hat{1} \gtrdot t^{a_{\min}^K(\mu)} \gtrdot w_r \gtrdot w_{r-1} \gtrdot \cdots \gtrdot w_1 = w. \tag{4.1}$$

由于 $a_{\min}^K$ 是 $W^{J,K}$ 中关于 $w \le t^{a_{\min}^K(\mu)}$ 的极小元，根据命题 3.14 (3)，子链 $\hat{1} \gtrdot t^{a_{\min}^K(\mu)} \gtrdot w_{a_{\min}^K, r}$ 是标签递增的。因此，串接 (4.1) 是

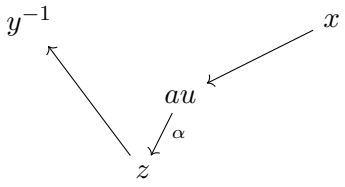


FIGURE 1.

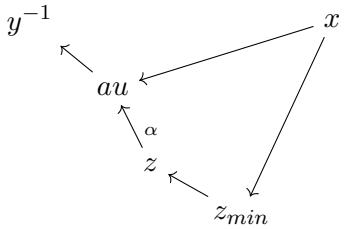


FIGURE 2. 标签递增的。根据 $\hat{}\eta$ 的构造，链 (4.1) 是 $[w, \hat{}1]^K$ 中所有极大链中字典序最小的。

4.4. 标签递增链的唯一性。 为了完成定理 2.5 的证明，还需证明 (4.1) 是 $[w, \hat{}1]^K$ 中唯一的标签递增极大链。令 $a \in \Sigma^{J,w^K}$ 满足 $a \neq a^K_{\min}$，并且

$$p_{a,w} : t^{a(\mu)} \gtrdot w_{a,r} \gtrdot w_{a,r-1} \gtrdot \cdots \gtrdot w_{a,1} = w$$

是 $[w, t^{a(\mu)}]^K$ 中唯一的标签递增极大链。只需证明 $\hat{1} \gtrdot t^{a(\mu)} \gtrdot w_{a,r}$ 不是标签递增的，或者等价地，$t^{a(\mu)} \gtrdot w_{a,r}$ 由一个 I 型根标记。

我们将构造一个元素 w'，使得

(1) $t^{a(\mu)} \gtrdot w'$; (2) $w' \geq w$，并且 (3) $t^{a(\mu)} \gtrdot w'$ 由一个 I 型根标记。

将 $t^{a(\mu)} \gtrdot w'$ 与从 w' 到 w 的任意链拼接起来，便得到一条从 $t^{a(\mu)}$ 到 w 且以 I 型根开头的链。因此，字典序最小链 $p_{a,w}$ 也以 I 型根开头。由此完成定理 2.5 的证明。

w' 的构造是我们论证的核心，所有此前得到的结果都汇集于此。

注意，$a \in \Sigma^{J,\ w^K}$。令 u 为 W_J 中的一个极小元，使得 $au \in \Sigma_w$。也就是说，$\mathrm{wt}(x,\ au) + \mathrm{wt}(au,\ y^{-1}) \leq \mu - \lambda$。我们分别考虑两种情形。图 1 和图 2 分别展示了情形 1 和情形 2 中所考察的 QBG($\mathcal{R}$) 的元素与路径。

情形 1： $\mathrm{wt}(au,\ y^{-1}) > 0$。

由命题 3.3，存在一条从 au 到 y^{-1}的“下-上型”路径。特别地，QBG($\mathcal{R}$)中存在一条量子边 $au \rightharpoonup z$，使得 $\mathrm{wt}(au,\ y^{-1}) = \alpha^\vee + \mathrm{wt}(z,\ y^{-1})$，其中 $\alpha \in \Phi^+$ 是满足 $z = aus_\alpha$的正根。由于这是一条量子边，我们得到 $z < au$ 且 $z(\alpha) \in \Phi^+$。根据 u的选取，这意味着 $\alpha \notin \Phi_J$（因为显然 $z \in \Sigma_w$）。因此，$\langle \mu,\ \alpha \rangle > 0$。设

$$w' := t^{au(\mu)} s_{(-z(\alpha),1)} = aut^{\mu - \alpha^\vee} z^{-1}.$$

由于 $\langle \mu,\ \alpha \rangle > 0$，我们有 $w' < t^{au\mu}$。特别地，$\ell(w') \leq \langle \mu,\ 2\rho \rangle - 1$。另一方面，根据量子边的定义，我们有 $\ell(au) + \langle \mu - \alpha^\vee,\ 2\rho \rangle - \ell(z) = \langle \mu,\ 2\rho \rangle - 1$。根据

推论 3.8，可推得表示$w' = aut^{\mu-\alpha^\vee}z^{-1}$ 具有锐性，且 $\ell(w') = \langle\mu,\ 2\rho\rangle - 1$。这验证了 w' 的条件 (1)。

我们将定理 3.9 与如下观察一并应用

$$\mathrm{wt}(x, au) + \mathrm{wt}(z, y^{-1}) = \mathrm{wt}(x, au) + \mathrm{wt}(au, y^{-1}) - \alpha^\vee \le \mu - \lambda - \alpha^\vee$$

以验证 w'的条件 (2)。

由 [45, 引理 7.7 (3)], , 对所有 $z \in W_0$ 与 $\beta \in K\cap\Delta_0$，我们有 $\mathrm{wt}(s_\beta z, y^{-1}) = \mathrm{wt}(z, y^{-1})$。因此，对所有 $a' \in W_{K\cap\Delta_0}$，$\mathrm{wt}(a'z, y^{-1}) = \mathrm{wt}(z, y^{-1})$。由于 $\mathrm{wt}(au, y^{-1}) \neq \mathrm{wt}(z, y^{-1})$，故 $z(\alpha) \notin \Phi^+_{K\cap\Delta_0}$。因此 $(-\alpha, 1)$ 是一个 I 型仿射根。这验证了 w'的条件 (3)。

情形 2： $\mathrm{wt}(au, y^{-1}) = 0$。这意味着 $au \le y^{-1}$。我们得到 $z_{\min} \le au$。这不可能是等式，因为由引理 4.1 我们得到 $a \notin \mathrm{pr}(W_K)z_{\min}W_J$。

由于 $z_{\min} < au$，我们找到一个极大元 $z' \in W_{K\cap\Delta_0}z_{\min}$，使得 $z' \le au$ （这是从 [13] 得到的 Deodhar 提升）。上文已知 $z_{\min} \notin W_{K\cap\Delta_0}au$，所以 $z' < au$。现在将 [44, 引理 7.4] 应用于集合 $K \cap \Delta_0 \subseteq \Delta_0$ 和元素 $w_0(au)^{-1}$，$w_0(z')^{-1} \in W_0$，便可找到一个 Bruhat 下覆盖 $z \lessdot au$，使得 $y \le z$ 且 $z \notin W_{K\cap\Delta_0}au$。令 $\alpha \in \Phi^+$，其中 $z = aus_\alpha$。因此，$z(\alpha) \in \Phi^+ - \Phi^+_{K\cap\Delta_0}$。

条件 $z_{\min} \le z \le au \le y^{-1}$ 立即推出 $z \in \Sigma_w$。因此，根据 u 的选取可得 $z \notin aW_J$，即 $\alpha \notin \Phi_J$。特别地，$\langle\mu,\ \alpha\rangle > 0$。令

$$w' := t^{a\mu}s_{(-z\alpha, \langle\mu,\alpha\rangle)} = zt^\mu(au)^{-1}.$$

注意到 $\langle a(\mu)\ z(\alpha)\rangle = \langle au(\mu)\ aus_\alpha(\alpha)\rangle = -\langle\mu,\ \alpha\rangle < 0$。因此 $w' < t^{a\mu}$。特别地，$\ell(w') \le \langle\mu,\ 2\rho\rangle - 1$。另一方面，我们有 $\ell(z) + \langle\mu,\ 2\rho\rangle - \ell(au) = \langle\mu,\ 2\rho\rangle - 1$。由推论 3.8 可得，表示 $w' = zt^\mu(au)^{-1}$ 具有锐性，且 $\ell(w') = \langle\mu,\ 2\rho\rangle - 1$。这验证了 w' 的条件 (1)。

我们结合定理 3.9 和以下观察

$$\mathrm{wt}(x, z) + \mathrm{wt}(au, y^{-1}) = \mathrm{wt}(x, z) \le \mathrm{wt}(x, z_{\min}) \le \mu - \lambda$$

来验证 w'的条件 (2)。

我们已证明 $z(\alpha) \notin \Phi_{K\cap\Delta_0}$。因此，$(-z(\alpha)\ \langle\mu,\ \alpha\rangle) \in \Phi^+$ 仿射 是一个 I 型根。这验证了 w' 的条件 (3)。

5. Cohen-Macaulayness of Local Models

5.1. 记号。 我们采用 [49, §4.1–4.5] 和 [25, §8.1]中的约定。设 F 是一个非阿基米德局部域，L 是固定可分闭包 F^{sep}/F中最大非分歧扩张的完备化。设 $\Gamma_0 := \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{sep}}/L)$。

对于连通约化 L群 G，令 $S \subseteq G$ 为一个极大 L-分裂环面，其中心化子为 T——根据斯坦伯格定理，它是一个极大环面。分别用 $W := N_G(T)(L^{\mathrm{sep}})/T(L^{\mathrm{sep}})$和 $W_0 := N_G(T)(L)/T(L)$表示绝对魏尔群和相对魏尔群。

约化根数据 $\Sigma := (X^*,\ X_*,\ \Phi,\ \Phi^\vee)$给出$(G,\ T)$的仿射Weyl群$\sim W_{\mathrm{aff}}(\Sigma)$，它与单连通覆盖 G_{sc}的Iwahori-Weyl群 $W(G_{\mathrm{sc}})$同构。令 $V := X_*(T)_{\Gamma_0} \otimes \mathbb{R} \cong X_*(S) \otimes \mathbb{R}$ 表示 S 的套间，该套间配备一个固定的特殊顶点，以及反支配房中的凹室 $^-\mathbf{a}$ ，其闭包包含该顶点。

$\widetilde{\ }$Iwahori-Weyl群 $W(G)$ 分解为： $X_*(T)_{\Gamma_0} \rtimes W_0$ 以及 $W_{\mathrm{aff}}(\Sigma) \rtimes \Omega$，其中 $\widetilde{\Omega} \subseteq W(G)$ 稳定 $^-\mathbf{a}$。挠子群 $X_*(T)_{\Gamma_0,\ \text{挠}} \subseteq X_*(T)_{\Gamma_0}$是 $W(G)$ 的中心，因为 W_0 在其上作用平凡。

令 $(-)^\flat$ 表示对 $X_*(T)_{\Gamma_0,\ \text{挠}}$取商。这诱导出同构：

$$\widetilde{W}(G)^\flat \cong X_*(T)^\flat_{\Gamma_0} \rtimes W_0 \cong W_{\mathrm{aff}}(\Sigma) \rtimes \Omega^\flat,$$

其中 Σ 被重新解释为一个根数据，且 $X_* = X_*(T)^\flat_{\Gamma_0}$。对于 $x \in \widetilde{W}(G)$，将其在 $\widetilde{W}(G)^\flat$ 中的像记为 $x^\flat$ 。

$\widetilde{\ }$对于一个 G-共轭类 $\{\mu\} \subseteq X_*(G) \cong X_*(T)/W$，定义 $\Lambda_{\{\mu\}}$ 为 $\{\mu\}$ 中某个 L-有理 Borel 子群 $B \supset T$ 下的 B-支配代表元，并令 $\Lambda_{\{\mu\}}$ 为 $\Lambda_{\{\mu\}}$在 $X_*(T)_{\Gamma_0}$中的像。定义

$$\mathrm{Adm}(\{\mu\}) := \{x \in \widetilde{W}(G) \mid x \le t^\lambda \text{ for some } \lambda \in \Lambda_{\{\mu\}}\}$$

$\widetilde{\ }$其布鲁哈特序 $\le$来自分解 $W(G) = W_{\mathrm{aff}}(\Sigma) \rtimes \Omega$。

以下结果在 [25, §8.2]中证明。

引理 5.1。 *(1)* 对于 $\tau \in \Omega$ 和 $x, y \in W_{\mathrm{aff}}(\Sigma)\tau$： $x \le y \iff x^\flat \le y^\flat$。

(2) 若 $\Lambda_{\{\mu\}} \subseteq W_{\mathrm{aff}}(\Sigma)\tau$，则 $\mathrm{Adm}(\{\mu\})$是 $\mathrm{Adm}(\Lambda^\flat_{\{\mu\}})$在 $W_{\mathrm{aff}}(\Sigma)\tau \to \widetilde{W}(G)^\flat$下的原像，其中 $\Lambda^\flat_{\{\mu\}} \subseteq X_*(T)^\flat_{\Gamma_0}$。

5.2. **舒伯特簇**。令 K 为如前所述的 Δ_{aff} 的子集，并将每个 $w \in \tilde{W}^K$ 在部分仿射旗簇中的相应舒伯特簇记为 S_w。在混合特征情形，或在满足 $p \nmid |\pi_1(G_{\mathrm{der}})|$ 的等特征情形下，这些舒伯特簇都是正规且科恩–麦考利的。 [26, 定理 1.1] 发现，在满足 $p \mid |\pi_1(G_{\mathrm{der}})|$ 的等特征情形下，只有有限多个舒伯特簇是正规的，而任何非正规舒伯特簇都不是科恩–麦考利的。在这种情况下，需要转而考虑半正规化。根据 Stacks Project，半正规化$\sim S_w$ 是以相同剩余域普遍同胚地映射到 S_w 的初始概形。以下结果归功于 Fakhruddin-Haines-Louren˜co-Richarz [15, 定理 4.1]。

$\tilde{\ }$**定理 5.2**。 半正规化舒伯特簇 S_w 是正规且具有科恩–麦考利性质。

5.3. **局部模型**。 本小节中，我们考虑具有抛物层级结构的局部模型。设$\mathbf{G}$ 是定义在 F 上的连通约化群，且 $\{\mu\}$ 是定义在反射域 E上的几何余特征的一个共轭类（不一定是极小余特征），其中反射域是 F的有限可分扩张。

这些局部模型尚无统一的定义；其构造经由数项关键工作逐步发展而来。Pappas–Zhu [48]奠定了温和分歧群的群论构造基础。随后，Levin [45], Louren˛co [46], 和 Fakhruddin–Haines–Louren˛co–Richarz[15]将其推广至温和分歧情形之外。在等特征下，Richarz[52], 给出了任意群的构造，而混合特征情形则主要由上述作者加以处理。我们指出，在混合特征下，构造取决于所选的仿抛物群概形提升。最后，对于极小余特征 μ，Ansch¨utz-Gleason- Louren˛co-Richarz [1]的工作给出了唯一一个射影平坦弱正规概形，用以表示 Scholze-Weinstein 的钻石局部模型 [53,猜想 21.4.1。]

就我们的目的而言，我们考虑满足以下基本性质的局部模型（参见[33,猜想 2.13]）：

˜与 $(\mathbf{G},\ K,\ \{\mu\})$ 相关的局部 $M_{\{\mu\}}$ 是一个平坦概形，其一般纤维是∗舒伯特簇 $\tilde{S}$，位于 B_{dR}^{+}-仿射Grassmann流形中，并且对应于**G**的 $\{\mu\}$、˜；其约化特殊纤维等于 $\cup_{w\in \mathrm{Adm}(\{\mu'\})^K} S'_{w}$。

这里，$(\mathbf{G}',\ K,\ \{\mu'\})$ 是 $(\mathbf{G},\ K,\ \{\mu\})$ 的等特征类似物（见 [15, §2]）；$\check{I}'$ 是标准的 Iwahori 子群，$\check{P}' = \check{I}' W_K \check{I}'$ 是 K 的仿抛物子群，而 $\cup_{w\in \mathrm{Adm}(\{\mu'\})^K} \tilde{S}'_{w}$ 是等特征部分仿射旗簇中的 μ'-可容许轨迹。在 [48, 45, 46, 15, 52] 中构造的局部模型以及在 [1] 中构造的大多数局部模型都满足性质（∗）。

˜**定理 5.3.** 设 $M_{\{\mu\}}$ 是满足性质 $(*)$的 $(\mathbf{G},\ K, \{\mu\})$ 局部模型。那么˛$M_{\{\mu\}}$ 是科恩–麦考利的。

˜证明. 我们考虑部分仿射旗簇˜˜中的半正规化舒伯特簇 S'_w。由定理 5.2，对任意 w，S'_w 都是科恩–麦考利的。令 $X = \cup_{w\in \mathrm{Adm}(\{\mu'\})} S'_{w}$。由定理 2.5 和命题 1.4，$\mathrm{Adm}(\{\mu'\})^K$ 是 N-科恩–麦考利的。因此，根据 [20,命题 4.24]，X 是科恩–麦考利的。

˜注意，$M_{\{\mu\}}$ 的一般纤维是单个舒伯特簇的半正规化，因此由定理 5.2 可知它是科恩–麦考利的。由 [27, 引理 5.7], ，整个局部模型˛$M_{\{\mu\}}$ 是科恩–麦考利的。□

类似的证明可得出如下结果。

命题 5.4. 由 *Scholze-Weinstein [53]* 刻画并由 *Ansch¨utz-Gleason-Louren˛co-Richarz [1]* 构造的局部模型是科恩–麦考利的。

证明。平坦性见 [1, 定理 1.2], ，该定理也描述了一般纤维，并推出特殊纤维的约化性。Cass-Louren˛co [8, 推论 1.5] 将所有情形下的特殊纤维描述为 G 的部分旗簇中可容许轨迹的典范去完美化。他们在 [8, 定理 4.15] 中证明，概形 $A_{\mathcal{G},\ \mu,\ 1}$，

该概形在 [8, 推论 4.16], 中被认定为局部模型的特殊纤维，它是去完美化舒伯特簇 $\mathcal{F}\ell_{\mathcal{G},\leq t^{a(\mu),\ 1}}$ 的并。这些去完美化舒伯特簇是整的科恩–麦考利概形，其闭包关系由布鲁哈特序给出。现在我们可以像定理 5.3 的证明那样进行论证。□

我们得以重新证明以下已知结果。

推论 5.5. *Kisin-Pappas-Zhou[40]* 构造的志村簇整模型是科恩–麦考利的。

证明. 事实上，根据 [40, 定理 1.1，2], 它们的整模型在 ´étale 局部同构于命题 5.4 中考虑的局部模型。□

结合定理 2.5 和 [20, 引理 4，22], 我们得到以下结果。

定理 5.6. 设 $C \subseteq W^{J,\ K}$ 为一个子集，使得对所有 $a \in C$ 及所有 $b \in W^{J,\ K}$ 满足 $a > b$ 的情形，均有 $b \in C$。换言之，C 是 $W^{J,\ K}$ 与任意一个˜下 *Bruhat* 区间的并 $[1, a], a \in W_0$ 的交集。那么，部分仿射旗簇的子簇 $\cup_{v\in C} S'_{t^{v(\mu)}}$ 是科恩–麦考利的。

˜5.4. **进一步的问题**。设 σ 是 W 的保长度自同构。那么每个˜元素 $w \in W$ 都可以写成如下形式

$$w = \tau s_1 \cdots s_{\ell(w)}$$

˜ ˜其中 $\tau \in W$ 的长度为零，且 $s_1, \ldots, s_{\ell(w)} \in \mathbb{S}$ 为简单反射。注意，˜ ˜τ 的共轭作用诱导了一个自同构 $\mathsf{Ad}(\tau) : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$。如果 s_i 位于两两不同的 $\sigma \circ \mathsf{Ad}(\tau)$-轨道中，我们就称 w 为一个偏 σ-*Coxeter* 元。如果˜此外还存在至少一个不包含任何 s_i 的 $\mathbb{S}$ $\mathsf{Ad}(\tau)$-轨道，我们就称它为一个球形 σ-*Coxeter* 元 。这两个概念均不依赖于 w 的约化词。令

$$\mathrm{Cox}(\mu)^K := \{w \in \mathrm{Adm}(\mu)^K \mid w \text{ is a spherical } \sigma\text{-Coxeter element}\}.$$

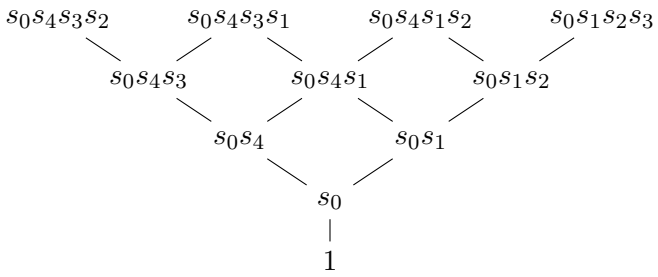
对于 G¨ortz-He-Nie [22], 意义下的*Coxeter* 型基本轨迹，这是该基本轨迹 EKOR 分层的指标集。这是某些性质极佳的志村簇特殊纤维之基本轨迹的一个群论模型。基于经验观察，我们提出以下猜想。

猜想 5.7. 对任意元组 $(\tilde{W}, \sigma, \mu, K)$，偏序集 $\widehat{\mathrm{Cox}(\mu)^K} = \mathrm{Cox}(\mu)^K \sqcup \{\hat{}1\}$ 是对偶 *EL* 可壳的。[1]

在 Coxeter 型情形（A_4，$\sigma = \mathrm{id}$ $\mu = \omega_1^\vee + \omega_4^\vee$，$K = \Delta_0$）中，集合 $\mathsf{Cox}(\mu)^K$ 如下图所示。很容易在该集合上构造所需的标记。

[1] $\mathsf{Cox}(\mu)^K$ 中的偏序是精化序 $\leq_{K,\sigma}$。然而，由 [22, 命题 2.8], 在 Coxeter 型情形下，该精化序等价于通常的布鲁哈特序。

这一猜想意味着，对于 Coxeter 型基本轨迹的 Cohen–Macaulay性，只需逐一检查每个 EKOR 分层。



References

[1] J. Ansch¨utz、I. Gleason、J. Louren˛co 和 T. Richarz。《局部模型的 p 进理论》。即将发表于《数学年刊》，2022。arXiv：2201.01234 [math.AG]。[2] E. Arasteh Rad 和 S. Habibi。“全局 G- shtuka 的模栈的局部模型”。载于：《数学研究快报》26.2（2019），第 323–364 页。[3] H. Bao 和 X. He。“全非负旗簇的乘积结构与正则性定理”。载于：《数学年刊》237.1（2024），第 1–47 页。[4] A. Bjorner 和 F. Brenti。《Coxeter群组合学》。数学研究生教材。Springer Berlin Heidelberg，2006。[5] A. Bj¨orner。“可壳的科恩–麦考利偏序集”。载于：《美国数学会汇刊》260.1（1980），第 159–183 页。[6] A. Bj¨orner 和 M. Wachs。“论字典序可壳偏序集”。载于：《美国数学会汇刊》277.1（1983），第 323–341 页。[7] F. Brenti、S. Fomin 和 A. Postnikov。“魏尔群的混合 Bruhat算子与Yang-Baxter方程”。载于：《国际数学研究通知》8（1999），第 419–441 页。[8] R. Cass 和 J. Louren˛co。《Witt旗上的模 p 层片》。2025。arXiv：2503.01796。[9] P. Cellini 和 P. Papi。“仿射根系中全反射序的结构”。载于：《代数杂志》205.1（1998年7月），第 207–226 页。[10] C.-L. Chai 和 P. Norman。“带有 $\Gamma_0(p)$-层结构的亏格二Siegel模概形的坏约化”。载于：《美国数学杂志》112.6（1990），第 1003–1071 页。[11] C.-L. Chai和P. Norman。“ $\Gamma_0(p)$-层结构的奇点”。载于：《代数几何杂志》1.2（1992），第 251–278 页。[12] P. Deligne 和 G. Pappas。“Hilbert模空间在判别式的因子整除的特征下的奇点”。载于：《Compositio Mathematica》90.1（1994），第 59–79 页。[13] V. V. Deodhar。“科克斯特群上布鲁哈特序的分裂准则”。载于：《通信代数》15.9（1987），第 1889–1894 页。

[14] M. J. Dyer。“Hecke代数与Bruhat区间的壳分解”。载于：《Compositio Mathematica》89.1（1993），第 91–115 页。[15] N. Fakhruddin、T. Haines、J. Louren˛co 和 T. Richarz。“局部模型的奇点”。载于：《数学年刊》391.4（2025），第 6205–6250 页。[16] G. Faltings。“若干矩阵奇点的环面分辨”。载于：《阿贝尔簇模空间》（泰瑟尔岛，1999）。第195卷。《数学进展》。Birkh¨auser，巴塞尔，2001，第 157–184 页。[17] S. Fomin、S. Gelfand 和 A. Postnikov。“量子Schubert多项式”。载于：《美国数学会杂志》10.3（1997），第 565–596 页。[18] P. Galashin、S. N. Karp 和 T. Lam。“全非负旗簇的正则性定理”。载于：《美国数学会杂志》35.2（2022），第 513–579 页。[19] I. Gleason 和 J. Louren˛co。“局部模型的管状邻域”。载于：《杜克数学杂志》173.4（2024），第 723–743 页。[20] U. G¨ortz。“关于某些 PEL 型志村簇模型的平坦性”。载于：《数学年刊》321.3（2001），第 689–727 页。[21] U. G¨ortz 和 X. He。“志村簇中Coxeter型的基本轨迹”。载于：《剑桥数学杂志》3（3）（2015），第 323–353 页。[22] U. G¨ortz、X. He 和 S. Nie。“具有任意抛物层级的Coxeter型基本轨迹”。载于：《加拿大数学杂志》76.1（2024），第 126–172 页。[23] U. G¨ortz、X. He 和 M. Rapoport。《整Hecke对应》。编写中。[24] T. J. Haines 和 N. B. Chˆau。“与局部模型特殊纤维相关的小室”。载于：《美国数学杂志》124.6（2002），第 1125–1152 页。[25] T. J. Haines 和 X. He。“凹室容许性的逐顶点判据”。载于：《美国数学杂志》139.3（2017），第 769–784 页。[26] T. J. Haines、J. Louren˛co 和 T. Richarz。“关于舒伯特簇的正规性：正特征下的剩余情形”。载于：《高等师范学校科学年刊》 ´Ec. Norm. Sup ´er.（第4辑）57.3（2024），第 895–959 页。[27] T. J. Haines 和 T. Richarz。“抛物型局部模型的正规性与科恩–麦考利性”。载于：《欧洲数学会杂志》（JEMS）25.2（2023），第 703–729 页。[28] M. Harris 和 R. Taylor。《若干简单志村簇的几何与上同调》（AM-151）。附录作者：Vladimir G. Berkovich。普林斯顿大学出版社，2001。[29] X. He。“志村簇局部模型的正规性与科恩–麦考利性”。载于：《杜克数学杂志》162.13（2013），第 2509–2523 页。[30] X. He。“仿射Deligne–Lusztig簇的几何与同调性质”。载于：《数学年刊》（第2辑）179.1（2014），第 367–404 页。[31] X. He。“关于仿射Deligne–Lusztig簇并集的Kottwitz–Rapoport猜想”。载于：《高等师范学校科学年刊》 ´Ec. Norm. Sup ´er.（第4辑）49.5（2016），第 1125–1141 页。

[32] X. He 和 S. Nie。“关于志村簇的 μ-普通轨迹”。载于：Adv. Math. 321 (2017)，第 513–528 页。[33] X. He、G. Pappas 和 M. Rapoport。“志村簇的良约化与半稳定约化”。载于：J. ´Ec. polytech. Math. 7 (2020)，第 497–571 页。[34] X. He、J. Yu 和 W. Zhang。迈向全局典范基。准备中。[35] X. He 和 Q. Yu。局部模型的不可约性。2024。arXiv：2412.16575 [math.AG]。[36] A. J. de Jong。“具有 $(\Gamma_0)p$ 层结构的主极化阿贝尔簇的模空间”。载于：J. Algebraic Geom. 2.4 (1993)，第 667–688 页。[37] D. Kazhdan 和 G. Lusztig。“科克斯特群与 Hecke代数的表示”。载于：Invent. Math. 53.2 (1979)，第 165–184 页。[38] M. Kisin 和 G. Pappas。“具有抛物层级结构的志村簇的整模型”。载于：Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 128 (2018)，第 121–218 页。[39] M. Kisin。“有限平坦群概形的模空间与模性”。载于：《数学年刊》（2）170.3 (2009)，第 1085–1180 页。[40] M. Kisin、G. Pappas 和 R. Zhou。具有抛物层级结构的志村簇的整模型，II。2024。arXiv：2409.03689。[41] A. Knutson 和 E. Miller。“Schubert多项式的Gr¨obner几何”。载于：Ann. Of Math. 161.3 (2005)，第 1245–1318 页。[42] R. KottwitzandM. Rapoport。“GL_n 和 $G\mathrm{Sp}_{2n}$ 的极小拱形”。载于：Manuscripta Math. 102.4 (2000)，第 403–428 页。[43] T. Lam 和 M. Shimozono。“ G/P 的量子上同调与仿射格拉斯曼流形的同调”。载于：Acta Math. 204.1 (2010)，第 49–90 页。[44] C. Lenart 等。“Kirillov–Reshetikhin晶体的统一模型 I：抛物量子Bruhat图的提升”。载于：International Mathematics Research Notices 2015.7 (2015年1月)，第 1848–1901 页。[45] B. Levin。“Weil限制群的局部模型”。载于：Compos. Math. 152.12 (2016)，第 2563–2601 页。[46] J. Louren¸co。“整数环上的扭曲仿射格拉斯曼簇”。载于：《数学论坛》Sigma 11 (2023年1月)，e12。[47] E. Mili´cevi´c 和 E. Viehmann。“Iwahori双陪集中的一般Newton点与Newton偏序集”。载于：《数学论坛》Sigma 8 (2020)，论文编号 e50，共 18 页。[48] G. Pappas 和 X. Zhu。“志村簇的局部模型与 Kot-twitz 猜想”。载于：Invent. Math. 194.1 (2013)，第 147–254 页。[49] G. Pappas、M. Rapoport 和 B. Smithling。“志村簇的局部模型，I：几何与组合学”。载于：Handbook of moduli。第 III 卷。第 26 卷。Adv. Lect. Math. (ALM)。Int. Press，Somerville, MA，2013，第 135–217 页。[50] A. Postnikov。“量子 Bruhat 图与 Schubert多项式”。载于：Proc. Amer. Math. Soc. 133.3 (2005)，第 699–709 页。

[51] M. Rapoport 和 T. Zink。《 p-可除群的周期空间》。第 141 卷。数学年刊研究丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西，1996，第 xxii+324 页。[52] T. Richarz。“仿射格拉斯曼簇与几何Satake等价”。载于：国际数学研究通讯 IMRN 12 (2016)，第 3717–3767 页。[53] P. Scholze 和 J. Weinstein。《伯克利讲义： p-进几何》。第 207 卷。数学年刊研究丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西，2020，第 x+250 页。[54] F. Schremmer。一般Newton点与cordial元。2022。arXiv：2205.02039[math.RT]。[55] F. Schremmer。“仿射Bruhat序与Demazure积”。载于：《数学论坛》Sigma 12，e53 (2024)。[56] X. Zhu。“关于 Pappas 和 Rapoport 的相干性猜想”。载于：《数学年刊》（2）180.1 (2014)，第 1–85 页。[57] X. Zhu。“混合特征下的仿射格拉斯曼簇与几何Satake”。载于：《数学年刊》（2）185.2 (2017)，第 403–492 页。Department of Mathematics and New Cornerstone Science Laboratory, The University ofHong Kong, Pokfulam, Hong Kong, Hong Kong SAR, China*Email address*: xuhuahe@hku.hkDepartment of Mathematics and New Cornerstone Science Laboratory, The University ofHong Kong, Pokfulam, Hong Kong, Hong Kong SAR, China*Email address*: schremmer@hku.hkInstitute for Advanced Study, Shenzhen University, Nanshan District, Shenzhen,Guangdong, China*Email address*: qingchao yu@outlook.com