arXiv:2603.05879v1 [math.PR] 6 Mar 2026

Gurau 谱密度并非单个实对称张量的概率测度

Maximilian Jerdee*[1]、Dmitriy Kunisky†[2] 和 Cristopher Moore‡[1]

[1]SantaFe Institute[2]应用数学与统计系，约翰斯·霍普金斯大学

2026年3月6日

摘要

Gurau（2020）提出了将矩阵预解式的迹推广到高阶张量的方法。近期研究从这一视角探讨了随机矩阵理论中的 Wigner 半圆分布和 Marchenko-Pastur 分布的类似物，以及自由概率论的若干方面。具体而言，在适当的大型随机张量上求值时，Gurau 的预解式迹级数展开系数的极限期望给出了与上述分布类似的概率测度的矩序列。另一方面，我们构造了某些单个确定性张量，使得在这些张量上求值所得的相同系数并不构成任何概率测度的矩序列。因此，与 Gurau 的预解式迹相关联的“谱密度”虽然在某种意义上可针对某些随机张量系综定义其平均形式，但并非对所有单个张量都能逐点定义（除非或许将其视为带符号测度）。

1 引言

回顾一下， 实对称矩阵 $X \in \mathbb{R}^{N\times N}_{\text{sym}}$ 的经典预解式迹是函数 n

$$R_X(z) := \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(zI_N - X)^{-1}, \tag{1}$$

定义在 $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上。对于这样的 z，展开成洛朗级数可得

$$R_X(z) = \sum_{k\geq 0} z^{-k-1}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(X^k). \tag{2}$$

众所周知，这一展开的系数 $\frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}(X^k)$ 是 X 的特征值经验分布的矩。

*电子邮件：mjerdee@umich.edu。

†电子邮件：kunisky@jhu.edu。

‡电子邮件：moore@santafe.edu。部分经费由美国国家科学基金会通过 BIGDATA- 1838251 号资助提供。

在 [Gur20], Gurau 提出了将矩阵的预解式迹推广到实对称张量的方案。我们用 $\mathrm{Sym}^p(\mathbb{R}^N)$ 表示每个轴的维度均为 N 的 p 元实对称张量集合（特别地，$\mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^{N\times N}_{\mathrm{sym}}$）；随后，Gurau 为每个 $T \in \mathrm{Sym}^p(\mathbb{R}^N)$ 关联了一个函数 $R_T : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \to \mathbb{C}$，发挥预解式迹的作用。我们在下文第 2.2 节回顾这一方案的细节。Gurau 的预解式迹也有一个形式上的洛朗级数展开，类似于式 (2),

$$R_T(z) = \sum_{k\geq 0} z^{-k-1}\frac{1}{N}\mathcal{I}_k(T), \tag{3}$$

对于某些关于 T 的元素、次数为 k 的齐次多项式 $\mathcal{I}_k(T)$。如果接受这种 R_T 与上述 R_X之间的类比，那么自然会问：是否存在 $\mathbb{R}$ 上的概率测度γ_T，其矩由这些系数给出，即满足

$$\int x^k \, d\gamma_T(x) = \frac{1}{N}\mathcal{I}_k(T) \text{ for each } k \geq 0. \tag{4}$$

等价地，这个问题是在问 $R_T(z)$ 是否是某个 γ_T的斯蒂尔切斯变换。不过，为避免级数收敛性方面的顾虑，我们来关注式 (4) 中的矩表述。如果这样的 γ_T存在，它理应在张量领域发挥某种类似于矩阵特征值经验分布的作用。我们将这个对象称为*Gurau* 谱密度（若其存在）。

令人鼓舞的是，Gur20] 的工作 [发现，对于一种自然的 T高斯分布，极限期望 矩 $\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}\,\frac{1}{N}\mathcal{I}_k(T)$ 确实构成一个矩序列，即随机矩阵理论中占据重要地位的半圆律 $\gamma^{(2)}$ 的一种自然张量推广 $\gamma = \gamma^{(p)}$。此外，Bon26] 证明了这一结论对更一般的随机 T 具有普适性，这些随机对象的元素在对称性约束下相互独立。Bon24] 的结果 [还包括证明 $\frac{1}{N}\mathcal{I}_k(T)$集中于其期望值附近，并对 Marchenko-Pastur 分布的张量推广进行了类似分析，同时还提出了适用于这些矩序列及相关测度的自由卷积概念。然而，据我们所知，以往的研究尚未探讨：对于每个给定的 $T \in \mathrm{Sym}^p(\mathbb{R}^N)$, 是否存在满足式 (4) 的 Gurau 谱密度 γ_T。这也在 Bon26]（最近出版的版本）中被明确列为一个未解决问题 [。

我们的目标是证明，事实上，存在一些确定性的实对称张量，使得 Gurau 谱密度并不存在：

定理 1.1。 存在 $T \in \mathrm{Sym}^3(\mathbb{R}^{27})$，使得 $\mathcal{I}_4(T) < 0$，因此特别是不存在满足 (4) 的概率测度 γ_T。

我们注意到，由于 $\mathcal{I}_4(T)$ 是一个多项式，因而是连续的，如果存在一个这样的 T，那么其附近也存在一整小球这样的 T，且该小球具有正测度。

这使张量预解式迹 $R_T(z)$ 处于一个颇为奇特的境地：一方面，由 [Gur20, Bon26] 研究的测度 $\gamma^{(p)}$ 是定义良好的，其矩是 $\frac{1}{N}\mathcal{I}_k(T)$ 期望的极限，并且是半圆律的一种自然推广（ [Bon24] 的张量 Marchenko-Pastur 律也同样如此）。另一方面，定理 1.1 表明，不存在与每一种 T 实现相对应的连贯的逐点谱密度概念 γ_T（至少不存在与预解式迹 R_T 相容的概念）；如果这种概念确实存在，人们便会希望它以某种弱意义收敛到这些极限分布，例如 $\gamma^{(p)}$。我们希望定理 1.1 能推动未来的研究，阐明这一不寻常的情况。

注 1.2。 解决这一现状的一种可能"办法"，是允许 γ_T 为带符号测度。虽然我们证明，对于某些张量 T，序列 $\frac{1}{N}\mathcal{I}_k(T)$ 不可能是非负测度的矩，但该序列总能表示为某个带符号拉东测度的矩（任何实数序列也都如此；参见 *[BJ39]* 和 *[ST43，定理 3.11]*）。此前也曾在研究张量特征值和特征向量时使用带符号测度的一些构造 *[Sas23, Sas24, RKS24]*。感谢 *Razvan Gurau* 提醒我们注意到这种可能性；我们将其留作一个值得进一步探讨的方向。

2 背景

我们首先回顾 Gurau 的预解式迹 $R_T(z)$ 的构造，并对相关"矩" $\mathcal{I}_k(T)$ 给出一种与 [Gur20, Bon 26]，中略有不同的解释，这种解释将有助于我们构造定理 1.1。

2.1 匹配与不变多项式

定义 2.1（匹配）。记 $\mathcal{M}_{p,k}$ 为 $[pk]$ 的匹配集合，其中 $[pk]$ 配备了划分 $\pi_0 = \{\{1,\dots,p\},\dots,\{(p-1)k+1,\dots,pk\}\}$，划分中的每个子集大小均为 p。对于 $\mu \in \mathcal{M}_{p,k}$，记 $G(\mu)$ 为如下构造的多重图：先在 $[pn]$ 上形成由 μ 描述的完美匹配图，再将 π_0 的各部分粘合在一起，从而得到一个有 n 个顶点的 p-正则多重图，该图的顶点可由 $[n]$ 自然标记。记 $\mathcal{M}_{p,k}^{\mathrm{conn}} := \{\mu \in \mathcal{M}_{p,k} : G(\mu) \text{ 连通}\}$。

定义 2.2 (匹配张量)。对于 $\mu \in \mathcal{M}_{p,k}$，将其视为由 $[pk]$、$\mu = \{\{a_1,b_1\},\dots,\{a_{pk/2},b_{pk/2}\}\}$ 中元素构成的配对集合，定义匹配张量 $w(\mu) \in (\mathbb{R}^N)^{\otimes pk}$，使其在指标 $i \in [N]^{pk}$ 处的取值为

$$w(\mu)_i = \prod_{\{a,b\}\in\mu} \mathbf{1}\{i_a = i_b\}.$$

对于空匹配，令 $w(\varnothing) = 1$。

定义 2.3 (不变多项式)。设 $T \in \mathrm{Sym}^p(\mathbb{R}^N)$。对于每个 $\mu \in \mathcal{M}_{p,k}$，不变张量 $w(\mu)$ 定义一个多项式

$$M_\mu(T) := \langle T^{\otimes k}, w(\mu)\rangle \tag{5}$$

$$= \sum_{i:E(G(\mu))\to[n]} \prod_{v\in V(G(\mu))} T_{i(\partial v)}, \tag{6}$$

其中，在第二种表述中，$i(\partial v)$ 表示分配给与顶点 v 相邻的边的标签串 i，这些边属于 $G(\mu)$。对于每个 $k \ge 0$，我们定义

$$M_k(T) := \sum_{\mu\in\mathcal{M}_{p,k}} M_\mu(T),$$

$$M_k^{\mathrm{conn}}(T) := \sum_{\mu\in\mathcal{M}_{p,k}^{\mathrm{conn}}} M_\mu(T).$$

注释 2.4（在不变理论中的作用）。匹配张量 $w(\mu)$ 在 $O(N)$ 对 $(\mathbb{R}^N)^{\otimes pk}$的自然作用下保持不变：对所有 $Q \in O(N)$，

$$Q^{\otimes pk} w(\mu) = w(\mu).$$

根据 *Weyl* 的一个著名定理 *[Wey46]*，即关于 $O(N)$ 不变理论的所谓第一基本定理，这些匹配张量实际上张成了$(\mathbb{R}^N)^{\otimes pk}$中的所有不变张量；它们张成的空间有时称为Brauer 空间，名称源自 *[Bra37]*的相关工作。

类似地，$M_\mu(T)$ 张成了在 *{style id='14'>Sym*$^p(\mathbb{R}^N)$上、在 $O(N)$ 的自然作用下保持不变的 k 次齐次多项式。由于上文(6) 中的图形解释，它们有时被称为与图 $G(\mu)$相关的张量网络 。关于这一观点的进一步阐述，参见 *[KMW24]*；关于不变理论的现代参考资料，参见 *[Pro07]* 。

我们注意到，不同的匹配 μ 可能导出同构的图 $G(\mu)$，因此某些 $M_\mu(T)$ 会在 $M_k(T)$ 和 $M_k^{\mathrm{conn}}(T)$ 的表达式中多次出现，从而实际上在这些求和中占有更大的“权重”。 [Gur20、Bon26、Bon24] 及相关研究（关于这一主题的专著式论述，参见 [Gur17] ）所偏好的形式体系，以“有根地图”而非匹配为这些多项式编制索引，因此能消除部分重复计数。不过，我们将看到，从匹配的角度思考有助于阐明接下来的一些计算，因此下面我们用 M_k^{conn}推导出 $\mathcal{I}_k(T)$ 的表达式。

2.2 Gurau 的预解式迹

前文所提及的函数 $R_T(z)$ 在 [Gur20] 中定义为

$$Z_T(z) := \mathop{\mathbf{E}}_{g\sim\mathcal{N}(0,I_N)} \exp\left(\frac{1}{pz}\langle T, g^{\otimes p}\rangle\right),$$
$$R_T(z) := \frac{1}{z\cdot Z_T(z)} \mathop{\mathbf{E}}_{g\sim\mathcal{N}(0,I_N)} \frac{\|g\|^2}{N} \exp\left(\frac{1}{pz}\langle T, g^{\otimes p}\rangle\right),$$

并且我们还提及如下额外定义

$$F_T(z) := \log Z_T(z)$$

这在稍后将会有用。此处 $\mathcal{N}(0, I_N)$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 中标准高斯随机向量的分布。我们注意到，这些期望一般而言对 $z \in \mathbf{R}$ 并非良定义；然而，它们对纯虚的 $z \in i\mathbf{R}$ 显然是良定义的，并且可以解析延拓到 $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$，正如 [Gur20] 所讨论的那样。

用统计物理和自旋玻璃理论的语言来说，$Z_T(z)$ 可视为一个高斯 p-自旋模型的配分函数，类似于或许更为人熟知的球面 p-自旋模型，只不过其中 g 取为某个半径的球面上的均匀分布。在这一解释下，不计各种记号约定与归一化上的差异，z是温度，$F_T(z)$ 是自由能，而 $R_T(z)$ 是二点关联函数的对角值之和，或等价地，是所涉自旋在相应吉布斯测度下的二阶矩之和。

利用高斯分部积分进行计算，可得以下等价表示形式，这对我们的推理更加方便。此处及下文中，函数R_T、F_T和 Z_T的所有导数均关于 z求取。

命题 2.5 （ [Bon26]的命题 2.10）。 对所有 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$R_T(z) = z^{-1} - \frac{p}{N} F_T'(z).$$

注意到函数 Z_T 与 F_T 可分别解释为矩生成函数和累积量生成函数，将会很有用。

定义 2.6. 设 Y 为实值随机变量。我们将 $m_k(Y) := \mathbf{E}Y^k$ 记为 Y 的第 k 阶矩，并将矩的形式指数生成函数记为

$$\phi_Y(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k(Y)}{k!} z^k.$$

我们将 $\kappa_k(Y)$ 记为 Y 的第 k 阶累积量，它由形式生成函数之间的关系隐式定义

$$\psi_Y(z) := \log \phi_Y(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_k(Y)}{k!} z^k.$$

更直接地说， $\kappa_k(Y)$ 是通过对这些关系递归求逆来定义的

$$m_k(Y) = \sum_{\pi \in \mathrm{Part}([k])} \prod_{A \in \pi} \kappa_{|A|}(Y). \tag{7}$$

于是，由定义显然有

$$Z_T(z) = \phi_{\langle T, g^{\otimes p} \rangle} \left(\frac{1}{pz} \right), \tag{8}$$

$$F_T(z) = \psi_{\langle T, g^{\otimes p} \rangle} \left(\frac{1}{pz} \right), \tag{9}$$

其中 $g \sim \mathcal{N}(0, I_N)$。下面借助先前定义的不变多项式，描述这些系数，即 $\langle T, g^{\otimes p} \rangle$ 的矩与累积量:

命题 2.7。 设 $g \sim \mathcal{N}(0, I_N)$。对于任意 $T \in \mathrm{Sym}^p(\mathbb{R}^N)$ 以及 $k \geq 1$,

$$m_k(\langle T, g^{\otimes p} \rangle) = M_k(T),$$
$$\kappa_k(\langle T, g^{\otimes p} \rangle) = M_k^{\mathrm{conn}}(T).$$

证明。 我们可以将 k 阶矩写为

$$\begin{aligned} m_k(\langle T, g^{\otimes p} \rangle) &= \mathop{\mathbf{E}}_g \langle T, g^{\otimes p} \rangle^k \\ &= \left\langle T^{\otimes k}, \mathop{\mathbf{E}}_g g^{\otimes pk} \right\rangle \end{aligned}$$

内部期望可通过维克公式计算，用我们的记号表示为

$$\begin{aligned} &= \left\langle T^{\otimes k}, \sum_{\mu \in \mathcal{M}_{p,k}} w(\mu) \right\rangle \\ &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}_{p,k}} M_\mu(T) \\ &= M_k(T). \end{aligned}$$

这就证明了第一个结果。

对于第二个结果，回顾一下，我们将图 $G(\mu)$ 与一个匹配 μ 关联起来。该图可划分为若干连通分支，并且每个连通分支对应于对 μ 的一个划分，即划分为更小的匹配。将后一个划分记为 $\mathrm{conn}(\mu)$。于是，我们有

$$M_\mu(T) = \prod_{\nu \in \mathrm{conn}(\mu)} M_\nu(T).$$

对所有匹配求和后，我们得到

$$\begin{aligned} M_k(T) &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}_{p,k}} M_\mu(T) \\ &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}_{p,k}} \prod_{\nu \in \mathrm{conn}(\mu)} M_\nu(T) \end{aligned}$$

如果按照图 $G(\mu)$ 的各连通分支的顶点划分 $\pi \in \mathrm{Part}([k])$ 对匹配 μ 进行汇总，那么在每个顶点子集 $A \in \pi$ 内，我们对 $p|A|$ 个对象的所有匹配 ν 求和，使得 $G(\nu)$ 是一个具有 $|A|$ 个顶点的连通图，从而得到

$$= \sum_{\pi \in \mathrm{Part}([k])} \prod_{A \in \pi} M^{\mathrm{conn}}_{|A|}(T).$$

由（7）可知

$$\kappa_k(\langle T, g^{\otimes p} \rangle) = M^{\mathrm{conn}}_k(T). \qquad \square$$

因此，我们得到用不变多项式表示的形式级数

$$\begin{aligned} Z_T(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k(T)}{k!} \left(\frac{1}{pz}\right)^k, \\ F_T(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^{\mathrm{conn}}_k(T)}{k!} \left(\frac{1}{pz}\right)^k. \end{aligned}$$

现在可以提取 $R_T(z)$ 的形式级数展开（3）的系数，这也确定了上文讨论的 $\mathcal{I}_k(T)$；这些量经过缩放后，是 Gurau 谱密度的候选矩：

命题 2.8. 对任意 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 且 $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\mathcal{I}_k(T) &:= \frac{1}{(k+1)!} \lim_{s \to \infty} \left(-z^2\right)^{k+1} R_T^{(k+1)}(s z_0) && (10) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{p^{k-1}(k-1)!} M^{\mathrm{conn}}_k(T) && (11) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{p^{k-1}(k-1)!} \kappa_k(\langle T, g^{\otimes p} \rangle). && (12) \end{aligned}$$

上文的第二个表达式，即 (10) 的右端，正是从形如 (3) 的级数中提取 z^{-k-1} 的系数的公式；我们注意到，在其他方面与之类似的 [Bon26] 的命题 2.11 中，这一点的表述似乎略有不准确。第三个表达式，即 (11)，描述了我们的 $M_k^{\mathrm{conn}}(T)$ 与上文所述 [Gur20, Bon26]，所考虑的 $\mathcal{I}_k(T)$ 之间的缩放差异，这是由于它们是根据不同的组合结构定义的。另见下文注 2.9。

证明。 我们从命题 2.5 中的表达式出发；将其与观察 (9) 及命题 2.7 相结合，可得

$$\begin{aligned} R_T(z) &= z^{-1} - \frac{p}{N} F_T'(z) \\ &= z^{-1} - \frac{p}{N}\frac{d}{dz}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^{\mathrm{conn}}(T)}{k!}\left(\frac{1}{pz}\right)^k\right] \\ &= z^{-1} + \frac{p}{N}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^{\mathrm{conn}}(T)}{p^k(k-1)!} z^{-k-1} \\ &= z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N}\frac{M_k^{\mathrm{conn}}(T)}{p^{k-1}(k-1)!} z^{-k-1}, \end{aligned}$$

通过比较系数即可得到所述结果。 □

注 2.9。 在 $p = 2$ 的矩阵情形中， k 个顶点上唯一的连通二正则图是圈 C_k，它（同构于） $G(\mu)$，对应于 $2^{k-1}(k-1)!$ 个互异匹配 $\mu \in \mathcal{M}_{2,k}$。因此，对于矩阵 $X \in \mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^{N\times N}_{\mathrm{sym}}$，由命题 *2.8* 可得

$$\frac{1}{N}\mathcal{I}_k(X) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(X^k), \tag{13}$$

从而，将张量定义应用于 $X \in \mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^N)$ 时， $R_X(z)$ 确实恢复了标准的矩阵预解式迹。

综上所述，我们的计算对如下问题给出了重新表述：对所有 $T \in \mathrm{Sym}^p(\mathbb{R}^N)$，是否存在满足 Gurau 谱密度要求 (4) 的概率测度 γ_T；若此为真，则对任意这样的 T，序列

$$\begin{aligned} &\alpha_0(T) := 1, \\ &\alpha_k(T) := \frac{1}{N}\frac{1}{p^{k-1}(k-1)!}\kappa_k(\langle T, g^{\otimes p}\rangle) \text{ for } k \geq 1 \end{aligned}$$

将会是某个概率测度的矩序列。用这些术语来表述，这个猜想或许显得不那么可信：它假定对多个累积量序列进行某种变换后，总能得到有效的矩序列。由于累积量并不具备矩所具有的那些易于描述的正性约束，这一猜想似乎不太可能成立；事实上，它在矩阵情形下确实成立，这相当令人惊讶 $p = 2$。

下面的构造将表明，从某种意义上说，这反映出矩阵 T 的随机变量 $\langle T,\ g^{\otimes 2}\rangle = g^\top T g$ 所能具有的分布相当受限；而一旦 $p \geq 3$，我们就可以将更多的随机变量近似为 $\langle T,\ g^{\otimes p}\rangle$，其中 T 适当。可以将其视为

谱定理的一个结果：对于矩阵 $T \in \mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^N)$，其特征值为 λ_1、……、λ_N，$g^\top T g$ 的分布与 $\sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2$ 的分布相同，即各种重标度和反射后的$\chi^2(1)$密度的卷积。对于张量，并不存在这样的结构定理；事实上，我们将看到，因此可以构造出作为 $\langle T, g^{\otimes 3}\rangle$ 的性质更差的随机变量。

3 反例的构造：定理 1.1 的证明

定理 *1.1* 的证明。根据以上推理，只需构造一个 $T \in \mathrm{Sym}^p(\mathbb{R}^N)$，使得$\kappa_4(\langle T, g^{\otimes p}\rangle) < 0$当 $g \sim \mathcal{N}(0, I_N)$ 时成立。事实上，若如此，则根据命题 2.8，我们将有 $\mathcal{I}_4(T) < 0$，从而得到所需的矛盾。

除了给出反例本身，我们也简要说明一下如何想到这种构造。我们将反复用到一般随机变量 Y 的 κ_4 公式，

$$\kappa_4(Y) = m_4(Y) - 4m_3(Y)m_1(Y) - 3m_2(Y)^2 + 12m_2(Y)m_1(Y)^2 - 6m_1(Y)^4,$$

对于对称的 Y，该公式可简化为

$$\kappa_4(Y) = m_4(Y) - 3m_2(Y)^2 = \mathbf{E}[Y^4] - 3(\mathbf{E}[Y^2])^2.$$

下文中，我们始终取足够大的 N，使得 $g \sim \mathcal{N}(0, I_N)$。

我们首先寻找一个一元多项式 q，使得 $\kappa_4(q(g_1)) < 0$。通常这应当是可行的，因为这样的 $q(g_1)$ 可以在分布意义下逼近 R 上的任意 绝对连续概率测度：将 g_1 变换为适当累积分布函数及其逆函数的多项式逼近即可。之后我们将对 q 进行近似齐次化，构造出形如 $\langle T, g^{\otimes p}\rangle$ 的随机变量，因此 q 的次数最终将成为张量 T 的元数 p。可以验证，不存在次数为 $p = 2$ 的多项式 q 具有上述性质；具体而言，我们有 $\kappa_4(ag_1^2 + bg_1 + c) = 48(a^4 + a^2b^2)$，这与矩阵 T 相吻合，从而根据式 (13) 得到有效的矩序列 $\frac{1}{N}\mathcal{I}_k(T)$。不过，事实证明，在第一个张量次数 $p = 3$ 处就有一个简单的例子，

$$\kappa_4\left(g_1 - \frac{1}{10}g_1^3\right) = -\frac{87}{250}.$$

接下来，我们引入 N额外的 $g_2, \ldots, g_{N+1}$，用齐次$q(g_1, \ldots, g_{N+1})$来近似这个 $q(g_1)$。经过另一个明确的计算可得

$$\kappa_4\left(g_1\left(\frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N+1} g_i^2\right) - \frac{1}{10}g_1^3\right) = -\frac{87}{250} + \frac{6}{N} + \frac{72}{N^2} + \frac{144}{N^3} =: f(N).$$

正如预期，随着 $N \to \infty$，它具有 $\kappa_4(g_1 - \frac{1}{10}g_1^3) + o(1)$ 的形式，因为根据强大数定律，我们几乎必然有 $\frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N+1} g_i^2 \to 1$，当 $N \to \infty$ 时。由于这是一个齐次多项式，因此存在某个 $T^{(N)} \in \mathrm{Sym}^3(\mathbb{R}^{N+1})$，使得

$$\langle T^{(N)}, g^{\otimes 3}\rangle = g_1\left(\frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N+1} g_i^2\right) - \frac{1}{10}g_1^3.$$

我们计算得出 $f(N) = \kappa_4(\langle T_{(N)}\, g^{\otimes 3}\rangle) < 0$一旦 $N \geq 26$，便得到该结果。

明确地说，这个张量 $T = T^{(26)}$ 的各项为

$$T_{1,1,1} = -\frac{1}{10},$$
$$T_{1,i,i} = T_{i,1,i} = T_{i,i,1} = \frac{1}{3 \cdot 26} = \frac{1}{78} \text{ for all } i \in \{2, 3, \ldots, 27\},$$

其余所有元素均为零。对于任意的 N，将上文中的 26 替换为 N、27 替换为 $N+1$，即可得到我们为其构造的多项式所表示的一般张量 $T^{(N)}$。 □

致谢

感谢 R´emi Bonnin、Charles Bordenave 和 Razvan Gurau 对本文初稿提出的宝贵意见。

参考文献

[BJ39] Ralph Philip Boas Jr. 有界变差函数的 Stieltjes 矩问题。美国数学会通报，45:399–404，1939。[Bon24] R´emi Bonnin. 高阶张量自由卷积、半圆分布、自由泊松分布与 R变换。*arXiv* 预印本 *arXiv:2412.02572*，2024。[Bon26] R´emi Bonnin. 随机张量的 Wigner-Gurau极限的普适性。电子概率期刊，31:1 – 31，2026。[Bra37] Richard Brauer. 关于与半单连续群相关的代数。数学年刊，38(4):857–872，1937。[Gur17] Razvan Gurau. 随机张量。牛津大学出版社，2017。[Gur20] Razvan Gurau. Wigner半圆律向实对称张量的推广。*arXiv* 预印本 *arXiv:2004.02660*，2020。[KMW24] Dmitriy Kunisky、Cristopher Moore 和 Alexander S Wein. 不变分布上统计推断的张量累积量。载于*2024* 年 *IEEE* 第 *65* 届计算机科学基础研讨会（*FOCS*），第 1007–1026 页。IEEE，2024。[Pro07] Claudio Procesi. 李群：通过不变量与表示进行研究，第 115 卷。施普林格，2007。[RKS24] Max Regalado Kloos 和 Naoki Sasakura. 随机张量有符号特征值/特征向量分布的实用性。数学物理快报，114(3):80，2024。[Sas23] Naoki Sasakura. 通过四费米子理论得到的高斯张量模型实张量特征向量的有符号分布。物理快报*B*辑，836:137618，2023。[Sas24] Naoki Sasakura. 复三阶随机张量的有符号特征值/特征向量分布。理论与实验物理进展，2024(5):053A04，2024。

[ST43] James Alexander Shohat 和 Jacob David Tamarkin。《矩问题》。第 1 号。美国数学会，1943 年。[Wey46] Hermann Weyl。《经典群：其不变量与表示》。1946 年。