arXiv:2603.05939v1 [math.RA] 6 Mar 2026

关于环扩张中 Morita等价的注记

Satoshi Yamanaka

综合科学与技术系 津山工业高等专门学校 国立工业技术高等专门学校 冈山 708-8509，日本

yamanaka@tsuyama.kosen-ac.jp

摘要

Morita不变性似乎是判断相关环扩张类重要性的一个有用标准。Y. Miyashita 引入了环扩张中 Morita等价的概念，并证明了 G-伽罗瓦扩张类和 Frobenius扩张类具有 Morita不变性。此后，S. Ikehata 证明了可分扩张类、Hirata可分扩张类、对称扩张类和 QF扩张类具有 Morita不变性。本文将证明若干扩张类具有 Morita不变性。此外，我们还将给出一个不具有 Morita不变性的环扩张类的例子。

arXiv版本说明。 本文是作者已接受的论文稿，题为《环扩张中的Morita等价》，发表于《代数通信》44(2016)，第9期，4121–4131页。本文稿内容与已发表的文章一致。正式发表版本可通过 DOI 10.1080/00927872.2015.1044098 获取。

2010数学主题分类： 16D90,16S70

关键词： Morita等价，环扩张

1 引言与预备知识

全文中，所有环都含有单位元 1，其子环也含有 1，且环上的所有模都是幺模。设 A 和 A' 为环， ${}_AM_{A'}$ 和 ${}_AN_{A'}$ 为 A-A'-模。若 ${}_AM_{A'}$ 同构于 ${}_AN_{A'}$的若干个副本的有限直和的一个直和项，我们记作 ${}_AM_{A'}|{}_AN_{A'}$ 。若 ${}_AM_{A'}|{}_AN_{A'}$和 ${}_AN_{A'}|{}_AM_{A'}$，则记作 ${}_AM_{A'} \sim {}_AN_{A'}$。$\mathrm{Hom}^r({}_AM,\ {}_AN)$ 表示从 M 到 N 的所有左 A-同态所构成的模，其中这些同态作用在 M的右侧。同理，$\mathrm{Hom}^\ell(M_{A'},\ N_{A'})$ 表示从 M 到 N 的所有右 A'-同态所构成的模，其中这些同态作用在 M的左侧。若 ${}_AM_{A'}$ 满足 ${}_AM \sim {}_AA$ 且 $\mathrm{End}^r({}_AM) = A'$，则称其为一个***Morita***模 。

本文中， A/B 表示一个环扩张，即 B 是 A的子环。设 A/B为一个环扩张。对于 A 的子集 X 以及一个 A-A-模 S，记 $V_A(X) = \{a \in A \mid xa = ax$，其中对所有 $x \in X\}$ 成立；并且对所有 $\alpha \in A\}$成立。特别地， $V_A(B)$ 是 B 在 A 中的中心化子，而 $V_A(A)$ 是 A的中心。若存在一个 B-B-模 S，使得 $A = B \oplus S$，且 A 中的乘法定义为 $(b,s)(c,t) = (bc, bt + sc)$，则称 A/B 为平凡扩张。平凡扩张是经典环扩张之一。若存在 $V_A(B)$中的有限元素集 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，使得按 J. C. Robson 和 L. W. Small 的定义有 $A = \sum_{i=1}^{n} v_i B$ （参见 [4]），则称 A/B为自由扩张。若 ${}_BA \otimes_B A_A | {}_BA_A$ （分别为 ${}_AA \otimes_B A_B | {}_AA_B$），则称 A/B 为左（分别为右）二阶深度扩张（参见 [6]）。L. Kadison 和 K. Szlach´anyi 将左深度二扩张和右深度二扩张刻画如下：

命题 1.1。 [6, 引理 3。7] 环扩张 A/B 是左(（分别是右） 深度二，当且仅当存在 $t_i \in (A \otimes_B A)^B$ 和 $\beta_i \in \mathrm{End}^{\ell}({}_BA_B)$ 使得，对于所有 x、 $y \in A$，有 $\sum_i t_i \beta_i(x) y = x \otimes y$（分别有 $\sum_i x \beta_i(y) t_i = x \otimes y$）。

对于环扩张 A/B，设 $V = V_A(B)$ 和 $C = V_A(A)$。若 A/B 定义的从 $A \otimes_B A$ 到 A 的 A-A-同态 $a \otimes b \to ab$ 可分裂，则称其为可分扩张；若 $A \otimes_B A$ 与 A-A 同构于 A 的若干份拷贝的有限直和的一个直和项，或者等价地， V 作为 C- 模是有限生成投射的，且 ${}_AA \otimes_B A_A \cong {}_A\mathrm{Hom}^{\ell}(V_C, A_C)_A$，则称其为平田可分扩张。平田可分扩张这一概念由 K. Hirata 提出，是阿祖马亚代数的一种推广（参见 [3]）。在 [8], 中，A. Mewborn 和 E. McMahon 将平田可分扩张的概念推广如下：若 V 作为 C-模是有限生成投射的，且由 $x \otimes y \mapsto [v \mapsto xvy]$ 定义的从 $A \otimes_B A$ 到 $\mathrm{Hom}^{\ell}(V_C, A_C)$ 的 A-A-同态可分裂，则称 A/B 为强可分扩张。显然，平田可分扩张是强可分的；根据 [8, 命题 3.2], ，强可分扩张是可分扩张。在 [11], 中，K. Sugano 对强可分扩张作了如下刻画：

命题1.2. [11, 定理1.1] 环扩张 A/B 是强可分的，当且仅当存在 $v_i \in V_A(B)$ 与 $\sum_j x_{ij} \otimes y_{ij} \in (A \otimes_B A)^A$ 使得$u = \sum_{i,j} v_i x_{ij} u y_{ij}$ 对所有 $u \in V_A(B)$。

设 S 是一个 A-A-模，且 $D : A \longrightarrow S$ 是一个加法映射。若 $D(xy) = D(x) y + xD(y)$，且对所有 $b \in B$， $D(b) = 0$，则称 D 为从 A 到 S 的 B-导子；若对于某个固定元素 $s \in S$，有 $D(x) = sx - xs$，则称其为内导子；若 $D(A) \subseteq S^A$，则称其为中心导子。根据 [1, Satz 4.2], A/B 可分，当且仅当对任意 A-A-模 S，从 A 到 S 的每个 B-导子都是内导子。在 [10], Y. Nakai 利用模微分引入了交换环的拟可分扩张这一概念；在非交换情形下，H. Komatsu 在 [7, 引理 2.1] 中将其刻画如下： A/B 是拟可分扩张，当且仅当对任意 A-A-模 S，从 A 到 S 的每个中心 B-导子都为零。最近，在 [2], N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 将可分扩张和拟可分扩张的概念推广如下：若从 A 到 A 的每个 B-导子都是内导子，则称 A/B 为弱可分扩张；若从 A 到 A 的每个中心 B-导子都为零，则称其为弱拟可分扩张。显然，可分扩张是弱可分扩张，拟可分扩张是弱拟可分扩张。此外，根据 [7, 定理 2.1], 可分扩张是拟可分扩张。

在 [9], Y. Miyashita 引入了环扩张中 Morita不变性的概念。设 A/B 和 A'/B' 是环扩张。若存在 Morita模 ${}_AM_{A'}$ 和 ${}_BN_{B'}$ 使得 ${}_AA\otimes_B N_{B'}\cong {}_AM_{B'}$，则记作 $A/B\sim A'/B'$。如 [9, 命题 3.2] 所示，$\sim$ 是一种等价关系。在这种情况下，我们称 A/B 和 A'/B' 为*Morita*等价。若环扩张类 $\mathscr{C}$ 具有如下性质：当 A/B 属于 $\mathscr{C}$ 且 $A/B\sim A'/B'$ 时，A'/B' 也属于 $\mathscr{C}$，则称该类为莫里田不变。

在第2节中，我们将回顾 [5], 中已得到的一些结果，并展示 $A/B\sim A'/B'$情形下的一些新结果。在第3节中，我们将证明平凡扩张类、自由扩张类、二阶深度扩张类、强可分扩张类和弱可分扩张类都是莫里田不变的。最后，我们将给出一个环扩张类不具有莫里田不变性的例子。

2 预备结果

在本节中，我们假设 $A/B\sim A'/B'$，也就是说，存在Morita模 ${}_AM_{A'}$ 和${}_BN_{B'}$，使得 ${}_AA\otimes_B N_{B'}\cong {}_AM_{B'}$。令 $N^*=\mathrm{Hom}^r({}_BN,{}_BB)$，并用 u^ρ 表示 $u\in N$在 $\rho\in N^*$下的像。由于 ${}_BN\sim {}_BB$，存在两个系统 $\{g_k,n_k\}$和 $\{f_j,m_j\}$(g_k，$f_j\in N^*$, n_k，$m_j\in N$)，使得对所有 $n\in N$，均有 $\sum_k n_k{}^{g_k}=1$和 $\sum_j n^{f_j}\cdot m_j=n$。此外，我们看到，映射 η：$N^*\otimes_B N\longrightarrow B'$ 由 $\rho\otimes u\mapsto \rho\cdot u_r$ 定义（u_r 是 u的右乘法），它是一个 B'-B'-同构（η^{-1} 由 $h\mapsto \sum_j f_j\otimes m_j{}^h$给出）；映射 ξ：$N\otimes_{B'}N^*\longrightarrow B$ 由 $u\otimes\rho\mapsto u^\rho$ 定义，它是一个 B-B-同构（ξ^{-1} 由$b\mapsto\sum_k b\cdot n_k\otimes g_k$给出）。现在可以定义映射 α：$N^*\otimes_B A\otimes_B N\longrightarrow A'=\mathrm{End}^r({}_AA\otimes_B N)$，其定义为 $\rho\otimes x\otimes u\mapsto[y\otimes v\mapsto y\cdot v^\rho\cdot x\otimes u]$。于是，$\alpha$是一个 B'-B'-同构，它诱导出一个 B'-B'-同构 $N^*\otimes_B B\otimes_B N\longrightarrow B'$。事实上，$\alpha^{-1}$由 $h\mapsto\sum_j f_j\otimes(1\otimes m_j)^h$给出。此外，可以通过$(\rho\otimes x\otimes u)(\sigma\otimes y\otimes v)=\rho\otimes x\cdot u^\sigma\cdot y\otimes v$定义 $N^*\otimes_B A\otimes_B N$中元素之间的乘法。显然，$\sum_j f_j\otimes 1\otimes m_j$是环 $N^*\otimes_B A\otimes_B N$的单位元，而 α 是一个环同构。因此，我们可以分别将 A' 和 B' 与 $N^*\otimes_B A\otimes_B N$ 和$N^*\otimes_B B\otimes_B N$等同起来。

现在我们将陈述一些在 [5] 中得到的引理。下面的引理可通过直接计算证明。

引理 2.1. [5, 引理 1] ${}_BA|_BB$ (分别 ${}_BB|_BA$) 蕴含 ${}_{B'}A'|_{B'}B'$ (分别 ${}_{B'}B'|_{B'}A'$)。

对于任意 $x\in A$，我们令 $x'_{(j,k)}=f_j\otimes x\otimes n_k$ 和 $x'_{[j,k]}=g_k\otimes x\otimes m_j$。然后，S. Ikehata 考虑了以下映射：

$$\varphi: A\longrightarrow A',\quad \varphi(x)=\sum_j f_j\otimes x\otimes m_j$$
$$\phi:\mathrm{End}^\ell({}_BA_B)\longrightarrow \mathrm{End}^\ell({}_{B'}A'_{B'}),\quad \phi(\eta)=1\otimes\eta\otimes 1$$
$$\psi: A\otimes_B A\longrightarrow A'\otimes_{B'}A',\quad \psi(x\otimes y)=\sum_{j,k} x'_{(j,k)}\otimes y'_{[j,k]}.$$

他利用上述映射证明了以下引理（引理 2.3、引理 2.4 和引理 2.5）。这些结果对我们后续的研究很有帮助。

引理 2.2。 [5, 引理 2] φ 诱导出环同构 $V_A(B) \cong V_{A'}(B')$, $V_A(A) \cong V_{A'}(A')$, 以及 $V_B(B) \cong V_{B'}(B')$.

引理 2.3. [5, 引理 3]

(1) ϕ 是一个环同构。(2) ϕ 诱导一个加法群同构 $\mathrm{Hom}^{\ell}({}_BA_B, {}_BB_B) \cong \mathrm{Hom}^{\ell}({}_{B'}A'_{B'}, {}_{B'}B'_{B'})$。(3) ϕ 诱导一个加法群同构 $\mathrm{Aut}^{\ell}(A/B) \cong \mathrm{Aut}^{\ell}(A'/B')$。(4) 若 H 是$\mathrm{Aut}^{\ell}(A/B)$ 的一个子群，且 $A^H = B$，则 $A'^{\phi(H)} = B'$。

引理 2.4. [5, 引理 4] ψ 诱导一个加法群同构 $(A \otimes_B A)^A \cong (A' \otimes_{B'} A')^{A'}$。

为了证明主要结果（定理 3.3 和定理 3.5），我们需要一些引理。首先，我们将证明以下结论。

引理 2.5. ψ 诱导一个加法群同构 $(A \otimes_B A)^B \cong (A' \otimes_{B'} A')^{B'}$。

证明。注意到 $N \otimes_{B'} N^* \cong B$，我们考虑一个 B'-B'-同构 $\theta: A' \otimes_{B'} A' \longrightarrow N^* \otimes_B A \otimes_B A \otimes_B N$，其定义为 $(\rho \otimes x \otimes u) \otimes (\sigma \otimes y \otimes v) \mapsto \rho \otimes x \cdot u^{\sigma} \otimes y \otimes v$ (θ^{-1} 由 $\rho \otimes x \otimes y \otimes u \mapsto \sum_k (\rho \otimes x \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y \otimes u)$ 给出)。令 $\sum_r x_r \otimes y_r$ 属于 $(A \otimes_B A)^B$。对于任意 $\sum_\ell \rho_\ell \otimes b_\ell \otimes u_\ell \in B'$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\theta\left(\sum_{\ell} \rho_\ell \otimes b_\ell \otimes u_\ell \cdot \psi\left(\sum_r x_r \otimes y_r\right)\right) \\
&= \theta\left(\sum_{\ell} \rho_\ell \otimes b_\ell \otimes u_\ell \cdot \sum_{r,j,k} (f_j \otimes x_r \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_r \otimes m_j)\right) \\
&= \theta\left(\sum_{r,\ell,j,k} (\rho_\ell \otimes b_\ell \cdot {u_\ell}^{f_j} \cdot x_r \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_r \otimes m_j)\right) \\
&= \sum_{r,\ell,j} \rho_\ell \otimes b_\ell \cdot u_\ell^{f_j} \cdot x_r \otimes y_r \otimes m_j \\
&= \sum_{\ell,j} \rho_\ell \otimes \left(\sum_r x_r \otimes y_r\right) \cdot b_\ell \otimes u_\ell^{f_j} \cdot m_j \\
&= \sum_{r,\ell} \rho_\ell \otimes x_r \otimes y_r \cdot b_\ell \otimes u_\ell,
\end{aligned}
$$

and

$$\begin{aligned}
&\theta\left(\psi\left(\sum_r x_r\otimes y_r\right)\cdot\sum_\ell \rho_\ell\otimes b_\ell\otimes u_\ell\right)\\
&=\theta\left(\sum_{r,j,k}(f_j\otimes x_r\otimes n_k)\otimes(g_k\otimes y_r\otimes m_j)\cdot\sum_\ell \rho_\ell\otimes b_\ell\otimes u_\ell\right)\\
&=\theta\left(\sum_{r,\ell,j,k}(f_j\otimes x_r\otimes n_k)\otimes(g_k\otimes y_r\cdot {m_j}^{\rho_\ell}\cdot b_\ell\otimes u_\ell)\right)\\
&=\sum_{r,\ell,j} f_j\otimes x_r\otimes y_r\cdot {m_j}^{\rho_\ell}\cdot b_\ell\otimes u_\ell\\
&=\sum_{\ell,j} f_j\cdot {m_j}^{\rho_\ell}\otimes\left(\sum_r x_r\otimes y_r\right)\cdot b_\ell\otimes u_\ell\\
&=\sum_{r,\ell}\rho_\ell\otimes x_r\otimes y_r\cdot b_\ell\otimes u_\ell.
\end{aligned}$$

由此可得 $\sum_\ell h_\ell\otimes b_\ell\otimes u_\ell\cdot\psi\left(\sum_r x_r\otimes y_r\right)=\psi(\sum_r x_r\otimes y_r)\cdot\sum_\ell h_\ell\otimes b_\ell\otimes u_\ell$。因此，$\psi$ 从 $(A\otimes_B A)^B$ 到 $(A'\otimes_{B'}A')^{B'}$ 诱导出一个加法群同态。假设 $\psi(\sum_r x_r\otimes y_r)=0$。由于

$$\begin{aligned}
0=\theta\left(\psi\left(\sum_r x_r\otimes y_r\right)\right)&=\theta\left(\sum_{r,j,k}(f_j\otimes x_r\otimes n_k)\otimes(g_k\otimes y_r\otimes m_j)\right)\\
&=\sum_{r,j} f_j\otimes x_r\otimes y_r\otimes m_j,
\end{aligned}$$

我们得到

$$0=\sum_{r,j,k} {n_k}^{f_j}\cdot x_r\otimes y_r\cdot {m_j}^{g_k}=\sum_{j,k}{n_k}^{f_j}\cdot {m_j}^{g_k}\left(\sum_r x_r\otimes y_r\right)=\sum_r x_r\otimes y_r.$$

最后，我们将证明 $\psi\left((A\otimes_B A)^B\right)=(A'\otimes_{B'}A')^{B'}$。设 $X'=\sum_r(\sum_\lambda \rho_{r\lambda}\otimes x_{r\lambda}\otimes u_{r\lambda})\otimes\left(\sum_\mu \sigma_{r\mu}\otimes y_{r\mu}\otimes v_{r\mu}\right)$ 属于 $(A'\otimes_{B'}A')^{B'}$。显然，对于任意 $b\in B$，都有 $(g_s\otimes b\otimes n_\ell)X'=X'(g_s\otimes b\otimes n_\ell)$。由于

$$(g_s\otimes b\otimes n_\ell)X'=\sum_{r,\lambda,\mu}(g_s\otimes b\cdot {n_\ell}^{\rho_{r\lambda}}\cdot x_{r\lambda}\otimes u_{r\lambda})\otimes(\sigma_{r\mu}\otimes y_{r\mu}\otimes v_{r\mu})$$

and

$$X'(g_s\otimes b\otimes n_\ell)=\sum_{r,\lambda,\mu}(\rho_{r\lambda}\otimes x_{r\lambda}\otimes u_{r\lambda})\otimes(\sigma_{r\mu}\otimes y_{r\mu}\cdot {v_{r\mu}}^{g_s}\cdot b\otimes n_\ell),$$

我们可以看出

$$b\left(\sum_{r,\lambda,\mu,\ell} {n_\ell}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \cdot {u_{r\lambda}}^{\sigma_{r\mu}} \otimes y_{r\mu} \cdot {v_{r\mu}}^{g_\ell}\right) = \left(\sum_{r,\lambda,\mu,s} {n_s}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \cdot {u_{r\lambda}}^{\sigma_{r\mu}} \otimes y_{r\mu} \cdot {v_{r\mu}}^{g_s}\right) b.$$

因此，$X = \sum_{r,\ \lambda,\ \mu,\ \ell} {n_\ell}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \cdot {u_{r\lambda}}^{\sigma_{r\mu}} \otimes y_{r\mu} \cdot {v_{r\mu}}^{g_\ell}$ 属于 $(A \otimes_B A)^B$。此外，

$$\begin{aligned}
\psi(X) &= \sum_{r,\lambda,\mu,\ell,j,k} (f_j \otimes {n_\ell}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \cdot {u_{r\lambda}}^{\sigma_{r\mu}} \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{r\mu} \cdot {v_{r\mu}}^{g_\ell} \otimes m_j) \\
&= \sum_{r,\lambda,\mu,\ell,j,k} (f_j \otimes {n_\ell}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda})(\sigma_{r\mu} \otimes 1 \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{r\mu} \cdot {v_{r\mu}}^{g_\ell} \otimes m_j) \\
&= \sum_{r,\lambda,\mu,\ell,j,k} (f_j \otimes {n_\ell}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda}) \otimes (\sigma_{r\mu} \otimes 1 \otimes n_k)(g_k \otimes y_{r\mu} \cdot {v_{r\mu}}^{g_\ell} \otimes m_j) \\
&= \sum_{r,\lambda,\mu,\ell,j} (f_j \otimes {n_\ell}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda}) \otimes (\sigma_{r\mu} \otimes y_{r\mu} \cdot {v_{r\mu}}^{g_\ell} \otimes m_j) \\
&= \sum_{r,\lambda,\mu,\ell,j} (f_j \otimes 1 \otimes n_\ell)(\rho_{r\lambda} \otimes x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda}) \otimes (\sigma_{r\mu} \otimes y_{r\mu} \otimes v_{r\mu})(g_\ell \otimes 1 \otimes m_j) \\
&= \sum_{\ell,j} (f_j \otimes 1 \otimes n_\ell)(g_\ell \otimes 1 \otimes m_j) X' \\
&= X'.
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

设 S是一个 A-A-模，且 $S' = N^* \otimes_B S \otimes_B N$。那么 S'是一个 A'-A'-模。我们定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{Der}_B(A, S) &= \{D \mid D : A \longrightarrow S,\ D \text{ is a } B\text{-derivation}\}, \text{ and} \\
\mathrm{Der}_{B'}(A', S') &= \{D' \mid D' : A' \longrightarrow S',\ D' \text{ is a } B'\text{-derivation}\}.
\end{aligned}$$

接下来我们将证明以下结论。

引理 2.6. ϕ 诱导出加法群同构 $\mathrm{Der}_B(A, S) \cong \mathrm{Der}_{B'}(A', S')$。证明。 设 D属于 $\mathbf{Der}_B(A, S)$。对于任意 $x' = \sum_\lambda \rho_\lambda \otimes x_\lambda \otimes u_\lambda$和 $y' = \sum_\mu \sigma_\mu \otimes y_\mu \otimes v_\mu \in A'$,

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\phi(D)(x'y') \\
&= \phi(D)\left(\sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes x_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot y_\mu \otimes v_\mu\right) \\
&= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes D(x_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot y_\mu) \otimes v_\mu \\
&= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes (D(x_\lambda) \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot y_\mu + x_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot D(y_\mu)) \otimes v_\mu \\
&= \sum_{\lambda,\mu} (\rho_\lambda \otimes D(x_\lambda) \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot y_\mu \otimes v_\mu + \rho_\lambda \otimes x_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot D(y_\mu) \otimes v_\mu) \\
&= \sum_{\lambda,\mu} \left((\rho_\lambda \otimes D(x_\lambda) \otimes u_\lambda)\,(\sigma_\mu \otimes y_\mu \otimes v_\mu) + (\rho_\lambda \otimes x_\lambda \otimes u_\lambda)\,(\sigma_\mu \otimes D(y_\mu) \otimes v_\mu)\right) \\
&= \phi(D)(x')y' + x'\phi(D)(y').
\end{aligned}
$$

此外，显然有 $\phi(D)(B') = 0$。因此，ϕ 诱导了从 $\mathrm{Der}_B(A,S)$ 到 $\mathrm{Der}_{B'}(A',S')$ 的一个加法群同态。对任意 $D' \in \mathrm{Der}_{B'}(A',S')$，我们可以如下定义一个加法同态 $D' : A \longrightarrow S$：$D'(x) = \sum_{\lambda,k,\ell} {n_k}^{\rho_{k\ell\lambda}} \cdot x_{k\ell\lambda} \cdot {u_{k\ell\lambda}}^{g_\ell}$，其中 $D'(g_k \otimes x \otimes n_\ell) = \sum_\lambda \rho_{k\ell\lambda} \otimes x_{k\ell\lambda} \otimes u_{k\ell\lambda}$。然后我们考虑由 $\pi(D') = D'$ 定义的加法同态 $\pi : \mathrm{Der}_{B'}(A',S') \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,S)$。对任意 $D' \in \mathrm{Der}_{B'}(A',S')$ 以及 $x,y \in A$，我们有

$$
\begin{aligned}
&D'(g_k \otimes xy \otimes n_\ell) \\
&= D'\left(\sum_s (g_k \otimes x \otimes n_s)(g_s \otimes y \otimes n_\ell)\right) \\
&= \sum_s (D'(g_k \otimes x \otimes n_s)(g_s \otimes y \otimes n_\ell) + (g_k \otimes x \otimes n_s)D'(g_s \otimes y \otimes n_\ell)) \\
&= \sum_{\lambda,\mu,s} ((\rho_{ks\lambda} \otimes x_{ks\lambda} \otimes u_{ks\lambda})(g_s \otimes y \otimes n_\ell) + (g_k \otimes x \otimes n_s)(\rho_{s\ell\mu} \otimes y_{s\ell\mu} \otimes u_{s\ell\mu})) \\
&= \sum_{\lambda,\mu,s} (\rho_{ks\lambda} \otimes x_{ks\lambda} \cdot {u_{ks\lambda}}^{g_s} \cdot y \otimes n_\ell + g_k \otimes x \cdot {n_s}^{\rho_{s\ell\mu}} \cdot y_{s\ell\mu} \otimes u_{s\ell\mu}).
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
\pi(D')(xy) &= \sum_{\lambda,\mu,s,k,\ell} ({n_k}^{\rho_{ks\lambda}} \cdot x_{ks\lambda} \cdot {u_{ks\lambda}}^{g_s} \cdot y \cdot {n_\ell}^{g_\ell} + {n_k}^{g_k} \cdot x \cdot {n_s}^{\rho_{s\ell\mu}} \cdot y_{s\ell\mu} \cdot {u_{s\ell\mu}}^{g_\ell}) \\
&= \left(\sum_{\lambda,\mu,s,k} {n_k}^{\rho_{ks\lambda}} \cdot x_{ks\lambda} \cdot {u_{ks\lambda}}^{g_s}\right) y + x\left(\sum_{\lambda,\mu,s,\ell} {n_s}^{\rho_{s\ell\mu}} \cdot y_{s\ell\mu} \cdot {u_{s\ell\mu}}^{g_\ell}\right) \\
&= \pi(D')(x)y + x\pi(D')(y).
\end{aligned}
$$

此外，显然 $\pi(D')(B) = 0$。因此，π 是从 $\mathrm{Der}_{B'}(A',S')$ 到 $\mathrm{Der}_B(A,S)$ 的加法同态。对于任意 $D \in \mathrm{Der}_B(A,S)$ 和 $x \in A$，我们有 $\pi(\phi(D))(x) =$

$D(x)$，因此 $\pi\phi = 1_{\mathrm{Der}_B(A,S)}$。对于任意 $D' \in \mathbf{Der}_{B'}(A', S')$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\phi\left(\pi(D')\right)(\sigma \otimes x \otimes v) \\
&= \sigma \otimes \pi(D')(x) \otimes v \\
&= \sigma \otimes \left(\sum_{\lambda,k,\ell} {n_k}^{\rho_{k\ell\lambda}} \cdot x_{k\ell\lambda} \cdot {u_{k\ell\lambda}}^{g_\ell}\right) \otimes v \\
&= \sum_{k,\ell} (\sigma \otimes 1 \otimes n_k) \left(\sum_{\lambda} \rho_{k\ell\lambda} \otimes x_{k\ell\lambda} \otimes u_{k\ell\lambda}\right) (g_\ell \otimes 1 \otimes v) \\
&= \sum_{k,\ell} (\sigma \otimes 1 \otimes n_k) D'(g_k \otimes x \otimes n_\ell)(g_\ell \otimes 1 \otimes v) \\
&= D'\left(\sum_{k,\ell} (\sigma \otimes 1 \otimes n_k)(g_k \otimes x \otimes n_\ell)(g_\ell \otimes 1 \otimes v)\right) \\
&= D'(\sigma \otimes x \otimes v).
\end{aligned}$$

这意味着 $\phi\pi = 1_{\mathrm{Der}_{B'}(A',\ S')}$。证明至此完成。 □

3 主要结果

在 $A/B \sim A'/B'$ 的情形下，本节将沿用前一节所采用的约定和记号。首先，我们陈述如下结果。

命题 3.1. 平凡扩张这一类是莫里田不变的。

证明。 假设 $A/B \sim A'/B'$ and A/B 是一个平凡扩张，也就是说，存在一个 B-B-模 S，使得 $A = B \oplus S$，且 A 中的乘法定义为 $(b,\ s)(c,\ t) = (bc,\ bt + sc)$。显然，$A' = B' \oplus S'$。令 $(b',\ s') = (\sum_\lambda \rho_\lambda \otimes b_\lambda \otimes u_\lambda,\ \sum_\lambda \rho_\lambda \otimes s_\lambda \otimes u_\lambda)$ 和 $(c',\ t') = \left(\sum_\mu \sigma_\mu \otimes c_\mu \otimes v_\mu, \sum_\mu \sigma_\mu \otimes t_\mu \otimes v_\mu\right)$ 为 A' 中任意元素。由于 $b'c' = \sum_{\lambda,\ \mu} \rho_\lambda \otimes b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu \otimes v_\mu$ 且 $b't' + s'c' = \sum_{\lambda,\ \mu} \rho_\lambda \otimes (b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot t_\mu + s_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu) \otimes v_\mu$，我们得到

$$\begin{aligned}
&(b', s')(c', t') \\
&= \left(\sum_\lambda \rho_\lambda \otimes (b_\lambda, s_\lambda) \otimes u_\lambda\right) \left(\sum_\mu \sigma_\mu \otimes (c_\mu, t_\mu) \otimes v_\mu\right) \\
&= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes (b_\lambda, s_\lambda)({u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu,\ {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot t_\mu) \otimes v_\mu \\
&= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes (b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu,\ b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot t_\mu + s_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu) \otimes v_\mu \\
&= \sum_{\lambda,\mu} (\rho_\lambda \otimes b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu \otimes v_\mu,\ \rho_\lambda \otimes (b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot t_\mu + s_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu) \otimes v_\mu) \\
&= (b'c', b't' + s'c').
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

在 [4], J. C. Robson 和 L. W. Small 研究了自由扩张。关于自由扩张，我们将证明如下结论。

命题 3.2. 自由扩张类是莫里田不变的。

证明. 假设 $A/B \sim A'/B'$ 和 A/B 是一个自由扩张，也就是说，存在 $V_A(B)$ 的有限元集 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，使得 $A = \sum_{i=1}^{n} v_i B$。根据引理 2.2，$v_i' = \sum_j f_j \otimes v_i \otimes m_j$ 属于 $V_{A'}(B')$。令 $x' = \sum_\lambda \rho_\lambda \otimes x_\lambda \otimes u_\lambda$ 属于 A'，且 $x_\lambda = \sum_{i=1}^{n} v_i b_{\lambda i} (b_{\lambda i} \in B)$。于是我们有

$$\begin{aligned} x' &= \sum_\lambda \rho_\lambda \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} v_i b_{\lambda i} \right) \otimes u_\lambda \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_\lambda \left(\sum_j f_j \cdot {m_j}^{\rho_\lambda} \right) \otimes v_i b_{\lambda i} \otimes u_\lambda \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_\lambda \sum_j f_j \otimes v_i \cdot {m_j}^{\rho_\lambda} \cdot b_{\lambda i} \otimes u_\lambda \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_\lambda \sum_j (f_j \otimes v_i \otimes m_j)(\rho_\lambda \otimes b_{\lambda i} \otimes u_\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i' \left(\sum_\lambda \rho_\lambda \otimes b_{\lambda i} \otimes u_\lambda \right). \end{aligned}$$

由此可得 $A' = \sum_i v_i' B'$。证明完毕。 □

在 [6], 中，L. Kadison 和 K. Szlach´anyi 研究了左深度二扩张和右深度二扩张，并给出了命题 1.1。接下来我们将证明以下结论。

定理 3.3。 左深度二扩张类和右深度二扩张类分别是莫里田不变的。

证明。 假设 $A/B \sim A'/B'$ 和 A/B 是左深度二扩张。根据命题 1.1，存在 $t_i \in (A \otimes_B A)^B$ 和 $\beta_i \in \mathrm{End}^\ell({}_B A_B)$，使得对所有 $x,y \in A$ $t_i = \sum_r x_{ir} \otimes y_{ir}$ 2 3 2 5 ϕ β_i $= 1 \otimes \beta_i \otimes 1 \in$ ${}_{B'}A'_{B'}$ ，都有 $\sum_i t_i \beta_i(x) y = x \otimes y$。令 。由引理 。和引理 。可得 ( ) End$^\ell$( ) 且 $\psi(t_i) = \sum_{r,\ j,\ k} (f_j \otimes x_{ir} \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{ir} \otimes m_j)$ $\in (A' \otimes_{B'} A')^{B'}$。令 θ 如引理 2.5 的证明中所述。对于 A' 中的任意 $z' = \sum_\lambda \rho_\lambda \otimes z_\lambda \otimes u_\lambda$ 和 $w' = \sum_\mu \sigma_\mu \otimes w_\mu \otimes v_\mu$，我们有

$\theta(z' \otimes w') = \sum_{\lambda,\ \mu} \rho_\lambda \otimes z_\lambda \otimes {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot w_\mu \otimes v_\mu$，并且

$$
\begin{aligned}
&\theta\left(\sum_i \psi(t_i)\phi(\beta_i)(z')w'\right) \\
&= \theta\left(\sum_{i,r,\lambda,\mu,j,k} (f_j \otimes x_{ir} \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{ir} \otimes m_j)\,(\rho_\lambda \otimes \beta_i(z_\lambda) \otimes u_\lambda)\,(\sigma_\mu \otimes w_\mu \otimes v_\mu)\right) \\
&= \theta\left(\sum_{i,r,\lambda,\mu,j,k} (f_j \otimes x_{ir} \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{ir} \cdot {m_j}^{\rho_\lambda} \cdot \beta_i(z_\lambda) \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot w_\mu \otimes v_\mu)\right) \\
&= \sum_{i,\lambda,\mu,j} f_j \otimes t_i \cdot {m_j}^{\rho_\lambda} \cdot \beta_i(z_\lambda) \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot w_\mu \otimes v_\mu \\
&= \sum_{\lambda,\mu,j} f_j \cdot {m_j}^{\rho_\lambda} \otimes \left(\sum_i t_i \cdot \beta_i(z_\lambda) \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot w_\mu\right) \otimes v_\mu \\
&= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes z_\lambda \otimes {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot w_\mu \otimes v_\mu.
\end{aligned}
$$

这意味着 $\sum_i \psi(t_i)\phi(\beta_i)(z')w' = z' \otimes w'$。因此，根据命题 1.1，$A'/B'$ 是左深度二扩张。

用上述相同的方法，可以证明右深度二扩张类是莫里田不变的。证明至此完成。

□

在 [8], A. Mewborn 和 E. McMahon 将强可分扩张的概念引入，作为 Hirata可分扩张的一种推广。在 [11], K. Sugano 将强可分扩张刻画为命题1.2。接下来我们将证明如下结论。

Theorem 3.4. 强可分扩张类是莫里田不变的。

证明。 假设 $A/B \sim A'/B'$ 和 A/B 是强可分扩张。根据命题 1.2，存在 $v_i \in V_A(B)$ 和 $\sum_r x_{ir} \otimes y_{ir} \in (A \otimes_B A)^A$，使得 $u = \sum_{i,\ r} v_i x_{ir} u y_{ir}$对任意 $u \in V_A(B)$ 均成立。令 $v'_i = \sum_\lambda f_\lambda \otimes v_i \otimes m_\lambda$和 $\sum_r x'_{ir} \otimes y'_{ir} = \sum_{r,\ j,\ k}(f_j \otimes x_{ir} \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{ir} \otimes m_j)$。那么，根据引理 2.2 和引理 2.4，有 $v'_i \in V_{A'}(B')$ 和 $\sum_r x'_{ir} \otimes y'_{ir} \in (A' \otimes_{B'} A')^{A'}$。

对于任意满足 $u \in V_A(B)$ 的 $u' = \sum_\ell f_\ell \otimes u \otimes m_\ell \in V_{A'}(B')$，我们看到

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,r} v_i' x_{ir}' u' y_{ir}' \\
&= \sum_{i,r,\lambda,j,k,\ell} (f_\lambda \otimes v_i \otimes m_\lambda)(f_j \otimes x_{ir} \otimes n_k)(f_\ell \otimes u \otimes m_\ell)(g_k \otimes y_{ir} \otimes m_j) \\
&= \sum_{i,r,\lambda,j,k,\ell} (f_\lambda \otimes v_i \cdot {m_\lambda}^{f_j} \cdot x_{ir} \otimes n_k)(f_\ell \otimes u \cdot {m_\ell}^{g_k} \cdot y_{ir} \otimes m_j) \\
&= \sum_{i,r,\lambda,j,k,\ell} (f_\lambda \cdot {m_\lambda}^{f_j} \otimes v_i \cdot x_{ir} \otimes n_k)(f_\ell \cdot {m_\ell}^{g_k} \otimes u \cdot y_{ir} \otimes m_j) \\
&= \sum_{i,r,j,k} (f_j \otimes v_i \cdot x_{ir} \otimes n_k)(g_k \otimes u \cdot y_{ir} \otimes m_j) \\
&= \sum_{i,r,j} f_j \otimes v_i \cdot x_{ir} \cdot u \cdot y_{ir} \otimes m_j \\
&= \sum_{j} f_j \otimes u \otimes m_j \\
&= u'.
\end{aligned}$$

因此，根据命题1.2，A'/B' 是强可分扩张。证明完毕。

□

N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 在其近期论文 [2] 中引入了弱可分扩张这一概念，作为可分扩张的推广。关于弱可分扩张，我们将证明以下结果。

定理 3.5。弱可分扩张类是莫里田不变的。

证明。假设 $A/B \sim A'/B'$ 和 A/B 是弱可分扩张。令 D' 属于 $\mathrm{Der}_{B'}(A', A')$。根据引理 2.6，$D' = 1 \otimes D \otimes 1$ 对于某个 $D \in \mathrm{Der}_B(A, A)$ 成立。根据假设，存在 $v \in A$ 使得 $D(x) = vx - xv$ ($x \in A$)。显然，v 属于 $V_A(B)$。现在，我们在此置 $v' = \sum_j f_j \otimes v \otimes m_j$。于是，对于任意 $x' = \sum_r \rho_r \otimes x_r \otimes u_r \in A'$，我们有

$$\begin{aligned}
D'(x') &= \sum_r \rho_r \otimes D(x_r) \otimes u_r \\
&= \sum_r \rho_r \otimes (vx_r - x_r v) \otimes u_r \\
&= \sum_r \left(\left(\sum_i f_i \cdot {m_i}^{\rho_r} \right) \otimes vx_r \otimes u_r - \rho_r \otimes x_r v \otimes \left(\sum_j {u_r}^{f_j} \cdot m_j \right) \right) \\
&= \sum_{r,i,j} (f_i \otimes v \cdot {m_i}^{\rho_r} \cdot x_r \otimes u_r - \rho_r \otimes x_r \cdot {u_r}^{f_j} \cdot v \otimes m_j) \\
&= \sum_{r,i,j} ((f_i \otimes v \otimes m_i)(\rho_r \otimes x_r \otimes u_r) - (\rho_r \otimes x_r \otimes u_r)(f_j \otimes v \otimes m_j)) \\
&= v'x' - x'v'.
\end{aligned}$$

因此，D' 是一个内 B'-导子。这就完成了证明。 □

最后，我们将给出一个并非莫里田不变的环扩张类的例子。

例。 设 k 是一个具有素特征 p 的域， $A = k[t]$，且 $B = k[t^p]$。于是我们看到 $\{x^p \,|\, x \in A\} \subseteq B$。在此设 $A' = \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$、 $B' = \begin{bmatrix} B & B \\ B & B \end{bmatrix}$、 ${}_AM = {}_AA \oplus {}_AA$，以及 ${}_BN = {}_BB \oplus {}_BB$。容易看出，$\mathrm{End}^r({}_AM) = A'$，$\mathrm{End}^r({}_BN) = B'$，且 ${}_AA \otimes_B N_{B'} \cong {}_AM_{B'}$。因此 $A/B \sim A'/B'$。然而，对于任意正整数 n， $\{(x')^n \,|\, x' \in A'\} \nsubseteq B'$。事实上，$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin B'$。考虑满足以下性质的环扩张类：存在一个正整数 n，使得 $\{x^n \,|\, x \in A\} \subseteq B$。那么该环扩张类不是莫里田不变的。

备注。 乍看之下，几乎所有环扩张的类都是莫里田不变的。但是，作者不知道拟可分扩张和弱拟可分扩张的类是否具有莫里田不变性。此外，如果存在元素的有限集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，其中 A 满足$A = \sum_{i=0}^{n} a_i B$ 和 $a_i B = B a_i$ （$0 \leqq i \leqq n$），则将 A/B 称为有限正规化扩张 。作者也不知道有限正规化扩张的类是否具有莫里田不变性。

致谢。 作者谨向 S. Ikehata 教授致以感谢；本论文正是在他的指导和鼓励下完成的。作者还要感谢审稿人提出的宝贵建议。

参考文献

.[1] S. Elliger，关于环的自同构与导子，*J. Reine Angew. Math.,* **277**1975，155–177。[2] N. Hamaguchi 和 A. Nakajima，关于环上可分多项式的推广，北海道数学杂志，**42** 2013年第1期，53–68。[3] K. Hirata，环的可分扩张与中心化子，*Nagoya Math. J.,* **35** 1969，31–45。[4] J. C. Robson 和 L. W. Small，自由扩张，*Proc. London Math. Soc.,* (3) **42**1981年第1期，87–103。[5] S. Ikehata，关于环扩张中的Morita等价，冈山大学数学杂志，**18**1975，73–79。[6] L. Kadison 和 K. Szlach´anyi，二阶深度扩张上的双代数胚作用与对偶，*Adv. in Math.,* **179** 2003，75–121。[7] H. Komatsu，非交换环的拟可分扩张，*Comm. Algebra,* **29**(3) 2001，1011–1019。

[8] A. Mewborn 和 E. McMahon，非交换环的可分扩张，北海道数学杂志，**13** 1984，74–88。[9] Y. Miyashita，关于伽罗瓦扩张与交叉积，北海道大学理学部学报，*Ser. I*，**21** 1970，97–121。[10] Y. Nakai，关于交换环中微分理论，日本数学会杂志，**13**1961，63–84。[11] K. Sugano，关于强可分弗罗贝尼乌斯扩张，北海道数学杂志，**25** 1996，657–666。