arXiv:2603.05943v1 [math.RA] 6 Mar 2026

斜多项式环中的弱可分多项式

Satoshi Yamanaka

综合科学与技术系，国立技术学院津山学院，日本冈山县津山市沼624-1，邮编708-8509
yamanaka@tsuyama.kosen-ac.jp

摘要

N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 引入了弱可分扩张的概念，作为可分扩张的一种推广。本文旨在刻画斜多项式环中的弱可分多项式。此外，我们将说明导子型斜多项式环中的可分性与弱可分性之间的关系。

arXiv 版本说明。本文稿对应于发表于 *Math. J. Okayama Univ.* **64** （2022年），47–61 页的文章《斜多项式环中的弱可分多项式》。正式出版版本可在 10.18926/mjou/62795 获取。

数学主题分类：主分类 16S36；次分类 16S32

关键词：可分扩张、弱可分扩张、斜多项式环、导子。

1 引言

本文是作者前一篇论文 [9] 的续篇。

设 A/B 是具有公共单位元 1 的环扩张， M 是一个 A-A-双模。加性映射 $\delta: A \to M$ 称为从 A 到 M 的 B-导子，如果对任意 z、$w \in A$ 有 $\delta(zw) = \delta(z)w + z\delta(w)$，且 $\delta(B) = \{0\}$。此外，从 A 到 M 的 B-导子 δ 称为内的，如果存在 $m \in M$ 使得对任意 $z \in A$ 有 $\delta(z) = mz - zm$。我们称 A/B 是可分的，如果由 $\sum z_j \otimes w_j \mapsto \sum z_j w_j (z_j, w_j \in A)$ 定义的从 $A \otimes_B A$ 到 A 上的 A-A-同态可分裂。众所周知， A/B 可分当且仅当对任意 A-A-双模 N，从 A 到 N 的每一个 B-导子都是内的（参见 [1, 定理 4.2]）。若从 A 到 A 的每一个 B-导子都是内的，则称 A/B 为弱可分的。弱可分扩张的概念被引入

由 N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 作为可分扩张的推广而提出（参见 [2]）。显然，可分扩张是弱可分的。

本文中，设 B 是一个环，ρ 是 B 的一个自同构，D 是 B 的一个 ρ-导子（即，D 是 B 的一个加法自同态，使得对任意 α、$\beta \in B$，均有 $D(\alpha\beta) = D(\alpha)\rho(\beta) + \alpha D(\beta)$）。我们用 $B[X;\rho, D]$ 表示斜多项式环，其中乘法定义为：对任意 $\alpha \in B$，$\alpha X = X\rho(\alpha) + D(\alpha)$。记作 $B[X;\rho] = B[X;\rho,0]$ 和 $B[X;D] = B[X;1,D]$。此外，我们用 $B[X;\rho,D]_{(0)}$ 表示 $B[X;\rho,D]$ 中满足 $fB[X;\rho,D] = B[X;\rho,D]f$ 的所有首一多项式 f 的集合。对于每个多项式 $f \in B[X;\rho,D]_{(0)}$，商环 $B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$ 是 B 的一个自由环扩张。称 $B[X;\rho,D]_{(0)}$ 中的多项式 f 在 $B[X;\rho,D]$ 中可分（分别为弱可分），如果 $B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$ 在 B 上可分（分别为弱可分）。

设 $B^\rho = \{\alpha \in B \mid \rho(\alpha) = \alpha\}$。在前一篇论文 [9], 中，我们研究了环上的弱可分多项式。特别地，我们给出了多项式 $f \in B[X;\ \rho]_{(0)} \cap B^\rho[X]$（相应地，一个含素数 p 的 p-多项式 $f \in B[X;\ D]_{(0)}$）在 $B[X;\ \rho]$（相应地，$B[X;\ D]$）中弱可分的充要条件（参见 [9, 定理 3.2 与定理 3.8]）。本文的目的是对一般斜多项式环 $B[X;\ \rho, D]$ 上的结果给出若干改进与推广。在第 2 节中，我们将简要述及 $B[X;\ \rho, D]_{(0)}$ 中多项式的一些性质。在第 3 节中，我们将给出 $B[X;\ \rho, D]_{(0)} \cap B^\rho[X]$ 中的多项式 f 在 $B[X;\ \rho, D]$ 中弱可分的充要条件。此外，我们将说明 $B[X;\ D]$ 中可分性与弱可分性之间的关系。

2 $B[X;\ \rho,\ D]_{(0)}$中的多项式

本节将简要介绍 $B[X;\ \rho,\ D]_{(0)}$ 中的多项式。我们归纳地定义 B 的加法自同态 $\Phi_{[i,j]}$ ($0 \le j \le i$) 如下：

$$\Phi_{[i,j]} = \begin{cases} 1\ (=\text{the identity map}) & (i=j=0) \\ D^i & (j=0,\ i\ge 1) \\ \rho^i & (i=j\ge 1) \\ \rho\Phi_{[i-1,j-1]} + D\Phi_{[i-1,j]} & (i\ge 2,\ 1\le j\le i-1) \end{cases}$$

首先陈述如下结果。

引理 2.1。对于任意 $\alpha \in B$，有

$$\alpha X^i = \sum_{j=0}^{i} X^j \Phi_{[i,j]}(\alpha)\ \ (i \ge 0).$$

证明。我们将用归纳法证明。当 $i = 0$ 时结论成立。设 α 是.....中的任意元素

B，并假设当 $i \geq 0$ 时结论成立。那么我们有

$$\begin{aligned}
\alpha X^{i+1} &= \alpha X^i \cdot X \\
&= \left(\sum_{j=0}^{i} X^j \Phi_{[i,j]}(\alpha) \right) X \\
&= \sum_{j=0}^{i} X^j \left(X\rho\Phi_{[i,j]}(\alpha) + D\Phi_{[i,j]}(\alpha) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{i} X^{j+1} \rho\Phi_{[i,j]}(\alpha) + \sum_{j=0}^{i} X^j D\Phi_{[i,j]}(\alpha) \\
&= \sum_{j=1}^{i+1} X^j \rho\Phi_{[i,j-1]}(\alpha) + \sum_{j=0}^{i} X^j D\Phi_{[i,j]}(\alpha) \\
&= X^{i+1}\rho\Phi_{[i,i]}(\alpha) + \sum_{j=1}^{i} X^j \left(\rho\Phi_{[i,j-1]} + D\Phi_{[i,j]} \right)(\alpha) + D\Phi_{[i,0]}(\alpha) \\
&= X^{i+1}\Phi_{[i+1,i+1]}(\alpha) + \sum_{j=1}^{i} X^j \Phi_{[i+1,j]}(\alpha) + \Phi_{[i+1,0]}(\alpha) \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} X^j \Phi_{[i+1,j]}(\alpha).
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 2.2。 设 f 是 $B[X;\rho,D]$ 中的首一多项式，其形式为 $f = \sum X^i a_i \, (m \geq 1, a_m = 1)$。那么 f 属于 $B[X;\rho,D]_{(0)}$ 当且仅当

1. $a_j \rho^m(\alpha) = \sum_{i=j}^{m} \Phi_{[i,j]}(\alpha) a_i$ *for any* $\alpha \in B$ $(0 \leq j \leq m-1)$.

2. $D(a_i) = \begin{cases} a_{i-1} - \rho(a_{i-1}) + a_i\big(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}\big) & (1 \leq i \leq m-1) \\ a_0\big(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}\big) & (i = 0) \end{cases}$.

证明。 设 $f = \sum X^i a_i (m \geq 1,\ a_m = 1)$ 属于 $B[X;\rho,\ D]$ 且 α 是 B 中的任意元素。如 [4, 引理 1.1] 所示，f 属于 $B[X;\ \rho,\ D]_{(0)}$ 当且仅当 $\alpha f = f\rho^m(\alpha)$ 且 $Xf = f(X - \big(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}\big))$。由引理 2.1 可得

$$\alpha f = \sum_{i=0}^{m} \alpha X^i a_i = \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{i} X^j \Phi_{[i,j]}(\alpha) \right) a_i = \sum_{j=0}^{m} X^j \left(\sum_{i=j}^{m} \Phi_{[i,j]}(\alpha) a_i \right).$$

$_{m-1}$注意到 $f\rho^m(\alpha)=\sum X^j a_j\rho^m(\alpha)$，方程 $\alpha f=f\rho^m(\alpha)$ 蕴含条件 (1)，$_{j=0}$反之亦然。接下来我们看到

$$
\begin{aligned}
&f\Big(X-\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)\Big)\\
&=\sum_{i=0}^{m}X^i a_i X-\sum_{i=0}^{m}X^i a_i\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)\\
&=\sum_{i=0}^{m}X^i\big(X\rho(a_i)+D(a_i)\big)-\sum_{i=0}^{m}X^i a_i\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)\\
&=\sum_{i=0}^{m}X^{i+1}\rho(a_i)+\sum_{i=0}^{m}X^i D(a_i)-\sum_{i=0}^{m}X^i a_i\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)\\
&=\sum_{i=1}^{m+1}X^i\rho(a_{i-1})+\sum_{i=0}^{m}X^i\Big(D(a_i)-a_i\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)\Big)\\
&=X^{m+1}+X^m a_{m-1}+\sum_{i=1}^{m-1}X^i\Big(\rho(a_{i-1})+D(a_i)-a_i\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)\Big)\\
&\quad+D(a_0)-a_0\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big).
\end{aligned}
$$

$_{m-1}$注意到 $Xf=\sum_{i=0}^{m}X^{i+1}a_i=X^{m+1}+X^m a_{m-1}+\sum_{i=1}X^i a_{i-1}$，方程 $Xf=f(X-\rho(a_{m-1})-a_{m-1}))$ 意味着

$$
\begin{cases}
a_{i-1}=\rho(a_{i-1})+D(a_i)-a_i\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big) & (1\le i\le m-1)\\
0=D(a_0)-a_0\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)
\end{cases}.
$$

因此，我们得到条件 (2)。反之显然成立。 □

回顾 $B^\rho=\{\alpha\in B\mid\rho(\alpha)=\alpha\}$。此外，设 $B^D=\{\alpha\in B\mid D(\alpha)=0\}$,$B^{\rho,D}=B^\rho\cap B^D$，且 $C(B^{\rho,D})$ 是 $B^{\rho,D}$ 的中心。于是有如下结论。

$_m$**推论 2.3**。设 $f=\sum X^i a_i\,(m\ge 1,a_m=1)$ 属于 $B[X;\rho,D]_{(0)}$。如果 $f\in B^\rho[X]$ 那么$_{i=0}f\in C(B^{\rho,D})[X]$。

$_m$证明。设 $f=\sum X^i a_i\,(m\ge 1,a_m=1)$ 属于 $B[X;\rho,D]_{(0)}$ 并假设 $f\in B^\rho[X]$.$_{i=0}$

于是，由引理 2.2 (2) 可得

$$\begin{aligned} D(a_i) &= a_{i-1} - \rho(a_{i-1}) + a_i\big(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}\big) \\ &= a_{i-1} - a_{i-1} + a_i\big(a_{m-1} - a_{m-1}\big) \\ &= 0 \quad (1 \le i \le m-1), \\ D(a_0) &= a_0\big(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}\big) \\ &= a_0\big(a_{m-1} - a_{m-1}\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此 $a_i \in B^D$，也就是说，$a_i \in B^{\rho,\ D}$ $(0 \le i \le m-1)$。令 β 为 $B^{\rho,\ D}$中的任意元素。显然，$\Phi_{[i,j]}(\beta) = \begin{cases} \beta \\ 0 \end{cases}$ $(i = j)$ $(i > j)$。因此，由引理 2.2 (1) 可得

$$a_j\beta = a_j\rho^m(\beta) = \sum_{i=j}^{m} \Phi_{[i,j]}(\beta)a_i = \beta a_j \quad (0 \le j \le m-1).$$

因此 $a_j \in C(B^{\rho,\ D})$ $(0 \le j \le m-1)$。 □

3 弱可分多项式在 $B[X;\ \rho,\ D]$ 中

本节将沿用上一节采用的约定和记号。在本节中，令 $R = B[X;\ \rho,\ D]$，$R_{(0)} = B[X;\ \rho,\ D]_{(0)}$，且令 f为 $R_{(0)} \cap B^\rho[X]$ 中形如 $f = \sum X^i a_i$ $(m \ge 1,\ a_m = 1)$ 的首一多项式$_m$。注意，根据$_{i=0}$推论 2.3，f属于 $C(B^{\rho,\ D})[X]$。我们将采用以下约定：

- $R_1 = \{g \in R \,|\, \alpha g = g\rho(\alpha)\ (\forall \alpha \in B)\}$
- $A = R/fR$(R模 fR的商环)$_{m-1}$
- $x = X + fR \in A$(即 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{m-1}\}$ 是 A和 $x^m = -\sum x^j a_j$的自由 B-基)$_{j=0}$
- I_x 是由 x 诱导的 A 的内导子(即 $I_x(z) = zx - xz\ (\forall z \in A)$)
- $C(A)$是 A的中心
- $A_k = \{u \in A \,|\, \alpha u = u\rho^k(\alpha)\ (\forall \alpha \in B)\}$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $V = A_0 = \{z \in A \,|\, \alpha z = z\alpha\ (\forall \alpha \in B)\}$ （即 V 是 A 中 B 的中心化子）

此外，我们将多项式 $Y_j \in R \cap C(B^{\rho,D})[X]$ $(0 \leq j \leq m-1)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
Y_0 &= X^{m-1} + X^{m-2}a_{m-1} + \cdots + Xa_2 + a_1, \\
Y_1 &= X^{m-2} + X^{m-3}a_{m-1} + \cdots + Xa_3 + a_2, \\
&\cdots\cdots \\
Y_j &= X^{m-j-1} + X^{m-j-2}a_{m-1} + \cdots + Xa_{j+2} + a_{j+1} \left(= \sum_{k=j}^{m-1} X^{k-j}a_{k+1} \right), \\
&\cdots\cdots \\
Y_{m-2} &= X + a_{m-1}, \\
Y_{m-1} &= 1.
\end{aligned}$$

显然，

$$XY_j = \begin{cases} Y_{j-1} - a_j & (1 \leq j \leq m-1) \\ f - a_0 & (j = 0) \end{cases}. \tag{3.1}$$

多项式 Y_j $(0 \leq j \leq m-1)$ 由 Y. Miyashita 引入，用以刻画 $B[X$ 中的可分多项式；$\rho, D]$（参见 [6]）。现设 $y_j = Y_j + fR \in A$ $(0 \leq j \leq m-1)$。由等式 (3.1)，下述引理是显然的。

引理 3.1。

$$xy_j = \begin{cases} y_{j-1} - a_j & (1 \leq j \leq m-1) \\ -a_0 & (j = 0) \end{cases}.$$

因此，我们定义映射 τ： $A \to A$ 为

$$\tau(z) = \sum_{j=0}^{m-1} y_j z x^j \quad (z \in A).$$

显然， τ 是 A 的一个 $C(A)$-$C(A)$-端同态。利用 τ， R 中的可分多项式可刻画如下：

引理 3.2. ([6, 定理 1.8] 或 [8, 定理 1.3]) f 在 R 中可分，当且仅当存在 $u \in A_{1-m}$ (即 $\rho^{m-1}(\alpha)u = u\alpha$ 对任意 $\alpha \in B$) 使得 $\tau(u) = 1$。

注 3.3. 毋庸赘言，每个 a_i $(0 \leq i \leq m-1)$ 都满足：对于任意 $u \in A_k$ $(k \in \mathbb{Z})$， $a_i x = x a_i$ 且 $a_i u = u a_i$。特别地，我们看到 $y_i x = x y_i$ $(0 \leq i \leq m-1)$。

首先，我们将证明以下关于内导子 I_x 和 $C(A)$-$C(A)$-端同态 τ 的引理。

引理 3.4. *1.* $I_x(A_k) \subset$ 核(τ)，其中任意整数 k 均成立。

2. $I_x(V) \subset$ 核$(\tau) \cap A_1$.

证明。(1) 设 k 为任意整数且 $u \in A_k$。于是我们得到

$$\begin{aligned}
\tau(I_x(u)) &= \tau(ux - xu) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} y_j(ux - xu)x^j \\
&= \left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j u x^j\right) x - x\left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j u x^j\right) \\
&= \tau(u)x - x\tau(u).
\end{aligned}$$

因此，只需证明 $\tau(u)x = x\tau(u)$。根据引理 3.1，我们有

$$\begin{aligned}
x\tau(u) &= x\left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j u x^j\right) \\
&= xy_0u + \sum_{j=1}^{m-1} xy_j u x^j \\
&= -a_0u + \sum_{j=1}^{m-1}(-a_j + y_{j-1})ux^j \\
&= -ua_0 - u\sum_{j=1}^{m-1} x^j a_j + \sum_{j=1}^{m-1} y_{j-1}ux^j \\
&= u\left(-\sum_{j=0}^{m-1} x^j a_j\right) + \sum_{j=0}^{m-2} y_j u x^{j+1} \\
&= ux^m + \left(\sum_{j=0}^{m-2} y_j u x^j\right) x \\
&= (y_{m-1}ux^{m-1})x + \left(\sum_{j=0}^{m-2} y_j u x^j\right) x \\
&= \left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j u x^j\right) x \\
&= \tau(u)x.
\end{aligned}$$

（2）由于条件（1），只需证明 $I_x(V) \subset A_1$。对于任意 $\alpha \in B$ 和 $u \in V$，我们得到

$$\begin{aligned}
\alpha I_x(u) &= \alpha(ux - xu) \\
&= u\alpha x - \alpha xu \\
&= u(x\rho(\alpha) + D(\alpha)) - (x\rho(\alpha) + D(\alpha))u \\
&= ux\rho(\alpha) + uD(\alpha) - xu\rho(\alpha) - uD(\alpha)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (ux - xu)\rho(\alpha) \\
&= I_x(u)\rho(\alpha).
\end{aligned}
$$

因此 $I_x(V) \subset A_1$。 □

为证 明后续引理（引理 3.7），我们需要以下两个引理 .

引理 3.5。 令 g_1 为 R中的任意元素。我们归纳定义 $g_0 = 0$ 和 $g_{j+1} = g_j X + X^j g_1 (j \geq 1)$。

1. $g_{i+k} = g_i X^k + X^i g_k \ (i, k \geq 0)$.

2. *If* $g_1 \in R_1$ *then* $\alpha g_j = \sum_{k=1}^{j} g_k \Phi_{[j,k]}(\alpha) \ (j \geq 1)$ *for any* $\alpha \in B$.

证明。 (1) 固定 $i \geq 0$ ，我们将对 k使用归纳法证明。当 $k = 0$时命题成立。假设当 $k \geq 1$时命题成立。因此我们得到

$$
\begin{aligned}
g_{i+k+1} &= g_{i+k} X + X^{i+k} g_1 \\
&= \left(g_i X^k + X^i g_k\right) X + X^{i+k} g_1 \\
&= g_i X^{k+1} + X^i g_k X + X^{i+k} g_1 \\
&= g_i X^{k+1} + X^i \left(g_k X + X^k g_1\right) \\
&= g_i X^{k+1} + X^i g_{k+1}.
\end{aligned}
$$

证明至此完成。

(2) 令 g_1 为 R_1 中的任意元素。我们将用归纳法证明这一点。当 $j = 1$ 时命题成立。假设当 $j \geq 1$ 时命题成立。那么，由引理 2.1 可得

$$
\begin{aligned}
\alpha g_{j+1} &= \alpha \left(g_j X + X^j g_1\right) \\
&= \alpha g_j X + \alpha X^j g_1 \\
&= \sum_{k=1}^{j} g_k \Phi_{[j,k]}(\alpha) X + \sum_{k=0}^{j} X^k \Phi_{[j,k]}(\alpha) g_1 \\
&= \sum_{k=1}^{j} g_k \left(X \rho \Phi_{[j,k]}(\alpha) + D\Phi_{[j,k]}(\alpha)\right) + \sum_{k=0}^{j} X^k g_1 \rho \Phi_{[j,k]}(\alpha) \\
&= \sum_{k=1}^{j} g_k X \rho \Phi_{[j,k]}(\alpha) + \sum_{k=1}^{j} g_k D\Phi_{[j,k]}(\alpha) + \sum_{k=0}^{j} X^k g_1 \rho \Phi_{[j,k]}(\alpha) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \left(g_k X + X^k g_1\right) \rho \Phi_{[j,k]}(\alpha) + \sum_{k=1}^{j} g_k D\Phi_{[j,k]}(\alpha) \\
&= \sum_{k=0}^{j} g_{k+1} \rho \Phi_{[j,k]}(\alpha) + \sum_{k=1}^{j} g_k D\Phi_{[j,k]}(\alpha)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{j+1} g_k \rho\Phi_{[j,k-1]}(\alpha) + \sum_{k=1}^{j} g_k D\Phi_{[j,k]}(\alpha) \\
&= g_{j+1}\rho\Phi_{[j,j]}(\alpha) + \sum_{k=1}^{j} g_k \left(\rho\Phi_{[j,k-1]} + D\Phi_{[j,k]}\right)(\alpha) \\
&= g_{j+1}\Phi_{[j+1,j+1]}(\alpha) + \sum_{k=1}^{j} g_k \Phi_{[j+1,k]}(\alpha) \\
&= \sum_{k=1}^{j+1} g_k \Phi_{[j+1,k]}(\alpha).
\end{aligned}
$$

证明至此完成。 □

引理 3.6 . 对于任意 $g \in R_1$，存在一个 B-导子 Δ，使得 R 满足 $\Delta(X) = g$.

证明。 任取 g 为 R_1中的元素。我们归纳地定义 $g_0 = 0$、 $g_1 = g$ 和 $g_{j+1} = g_j X + X^j g_1 (j \geq 1)$。此外，令 Δ 为由 $\Delta(X^j) = g_j (j \geq 0)$ 定义的 R 的右 B-端同态（即 $\Delta\left(\sum_j X^j c_j\right) = \sum_j g_j c_j$ $(c_j \in B,\ j \geq 0)$）。对于任意 $i,\ j \geq 1$ 和 $\alpha,\ \beta \in B$，由引理 2.1 和引理 3.5 可得

$$
\begin{aligned}
\Delta(X^i \alpha X^j \beta) &= \Delta\left(X^i \left(\sum_{k=0}^{j} X^k \Phi_{[j,k]}(\alpha)\right)\beta\right) \\
&= \Delta\left(\sum_{k=0}^{j} X^{i+k}\Phi_{[j,k]}(\alpha)\beta\right) \\
&= \sum_{k=0}^{j} g_{i+k}\Phi_{[j,k]}(\alpha)\beta \\
&= \sum_{k=0}^{j} \left(g_i X^k + X^i g_k\right)\Phi_{[j,k]}(\alpha)\beta \\
&= g_i \sum_{k=0}^{j} X^k \Phi_{[j,k]}(\alpha)\beta + X^i \sum_{k=1}^{j} g_k \Phi_{[j,k]}(\alpha)\beta \\
&= g_i \alpha X^j \beta + X^i \alpha g_j \beta \\
&= \Delta(X^i\alpha)X^j\beta + X^i\alpha\Delta(X^j\beta).
\end{aligned}
$$

这意味着，对于任意 $h_1,\ h_2 \in R$，都有 $\Delta(h_1h_2) = \Delta(h_1)h_2 + h_1\Delta(h_2)$，也就是说， Δ 是 R 的导子。

□

现在我们将如下刻画 A 上的 B-导子：

引理 3.7。 若 δ 是 A 的 B-导子，则 $\delta(x) \in A_1 \cap$ 核(τ)。反之，若 $u \in A_1 \cap$ 核(τ)，则存在一个 B-导子 δ，其作用于 A，使得 $\delta(x) = u$。

证明。设 δ 是 A 的一个 B-导子。对于任意 $\alpha \in B$，我们有 $\alpha\delta(x) = \delta(\alpha x) = \delta(x\rho(\alpha) + D(\alpha)) = \delta(x)\rho(\alpha)$，因此 $\delta(x) \in A_1$。简单的归纳法可得

$$\delta(x^{k+1}) = \sum_{j=0}^{k} x^{k-j}\delta(x)x^j \quad (k \geq 0).$$

于是，由于$0 = \sum_{k=j}^{m-1} x^k a_k$且 $y_j = \sum^{m} x^{k-j}a_{k+1}$，可见$k=0$

$$\begin{aligned}
0 &= \delta\left(\sum_{k=0}^{m} x^k a_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \delta(x^k)a_k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \delta(x^{k+1})a_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^{k} x^{k-j}\delta(x)x^j\right) a_{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{k=j}^{m-1} x^{k-j}a_{k+1}\right) \delta(x)x^j \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} y_j\delta(x)x^j \\
&= \tau(\delta(x)).
\end{aligned}$$

因此 $\delta(x) \in$ 核(τ)。

反之，假设 $u \in A_1 \cap$核(τ)。设 u_0属于 R，使得 $u = u_0 + fR$且$\deg(u_0) < m$。显然， $u_0 \in R_1$，因为 $u \in A_1$。因此，由引理 3.6，存在 R 的一个B-导子 Δ，使得 $\Delta(X) = u_0$。由于 $u \in$ 核(τ)，我们有

$$0 = \tau(u) = \sum_{j=0}^{m-1} y_j u x^j = \sum_{j=0}^{m-1} Y_j u_0 X^j + fR.$$

这意味着$\sum_{j=0}^{m-1} Y_j\Delta(X)X^j \in fR$。因此我们得到

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{m} \Delta(X^k)a_k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \Delta(X^{k+1})a_{k+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^{k} X^{k-j} \Delta(X) X^j \right) a_{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{k=j}^{m-1} X^{k-j} a_{k+1} \right) \Delta(X) X^j \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} Y_j \Delta(X) X^j \\
&\in fR.
\end{aligned}
$$

这意味着，对于任意 $g \in R$， $\Delta(fg) = \Delta(f)g + f\Delta(g) \in fR$，即 $\Delta(fR) \subset fR$。因此，存在一个 B-导子 δ，作用于 A，使得 $\delta(x) = u$，它由 Δ 自然诱导。 □

现在我们陈述以下定理，它是 [9, 定理 3.2] 和 [9, 定理 3.8] 的推广。

定理 3.8. *f 在 R 中弱可分，当且仅当*

$$A_1 \cap \mathrm{Ker}(\tau) = I_x(V).$$

证明. 注意，根据引理 3.4 (2)， $I_x(V) \subset$ 核$(\tau) \cap A_1$。

假设 f 在 R 中弱可分，也就是说， A 的每个 B-导子都是内的。设 $u \in A_1 \cap$ 核(τ)。由引理 3.7，存在一个 B-导子 δ，其作用于 A，使得 $\delta(x) = u$。由于 δ 是内的，对于某个固定元素 $v \in A$，我们有 $u = \delta(x) = vx - xv$。特别地，我们看到 $v \in V$，因为对于任意 $\alpha \in B$，都有 $0 = \delta(\alpha) = v\alpha - \alpha v$。于是我们有 $u = \delta(x) \in I_x(V)$，即 $A_1 \cap$核$(\tau) \subset I_x(V)$。因此，根据引理 3.4 (2)， $A_1 \cap$核$(\tau) = I_x(V)$。

反过来，假设 $A_1 \cap \mathrm{Ker}(\tau) = I_x(V)$，并令 δ 为 B的一个导子。由引理 3.7 可知， $\delta(x) \in A_1 \cap \mathrm{Ker}(\tau) = I_x(V)$。因此，对于某个 $v \in V$，有 $\delta(x) = vx - xv$。容易通过归纳法证明

$$\delta(x^j) = vx^j - x^j v \quad (j \geq 0).$$

因此，对于任意 $z = \sum_{j=0}^{m-1} x^j c_j \in A$ ($c_j \in B$)，我们有

$$
\begin{aligned}
\delta(z) &= \delta \left(\sum_{j=0}^{m-1} x^j c_j \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \delta(x^j) c_j \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (vx^j - x^j v) c_j \\
&= v \sum_{j=0}^{m-1} x^j c_j - \sum_{j=0}^{m-1} x^j c_j v \\
&= vz - zv.
\end{aligned}
$$

因此 δ 是内的，从而 f 在 R 中是弱可分的。 □

根据定理 3.8，我们有如下结论。

推论3.9. f 在 R 中是弱可分的，当且仅当以下由 $C(A)$-$C(A)$同态构成的序列是正合的：

$$V \xrightarrow{I_x} A_1 \xrightarrow{\tau} A.$$

证明。 由定理 3.8 可知，这显然成立。 □

注 3.10. 总有 $\mathrm{Ker}(I_x : V \to A_1) = C(A)$。因此， f 在 R 中是弱可分的，当且仅当以下由 $C(A)$-$C(A)$同态构成的序列是正合的：

$$0 \longrightarrow C(A) \xrightarrow{\text{inclusion}} V \xrightarrow{I_x} A_1 \xrightarrow{\tau} A.$$

关于 $B[X;D]$中可分性与弱可分性之间的关系，我们将陈述以下定理，它改进了 [9, 定理 3.10]。

定理 3.11. 设 $R = B[X;D]$, $R_{(0)} = B[X;\ D]_{(0)}$，且 f 是 $R_{(0)}$中的一个首一多项式，形式为 $f = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i\,(a_m = 1, m \geq 1)$。

1. f 在 R 中弱可分，当且仅当以下 $C(A)$-$C(A)$-同态序列是正合的：

$$V \xrightarrow{I_x} V \xrightarrow{\tau} C(A).$$

2. f 在 R 中可分，当且仅当以下 $C(A)$-$C(A)$-同态序列是正合的：

$$V \xrightarrow{I_x} V \xrightarrow{\tau} C(A) \longrightarrow 0.$$

证明。 注意在此情形下 $A_k = V(k \in \mathbb{Z})$。首先我们将证明 $\tau(V) \subset C(A)$。令 φ 为一个从 $A \otimes_B A$ 到 A 的满射 A-A-同态，定义为 $\sum z_j \otimes w_j \mapsto \sum z_j w_j$ $_j(z_j,$ $w_j \in A)$，且$(A \otimes_B A)^A = \{\mu \in A \otimes_B A \,|\, z\mu = \mu z (\forall z \in A)\}$。显然，$\varphi\left((A \otimes_B A)^A\right) \subset C(A)$。任取 V中的元素 v。如 [8, 引理3.1]，$_{m-1}$所示，我们已知 $\sum y_j v \otimes x^j \in (A \otimes_B A)^A$，因此$_{j=0}$

$$\tau(v) = \sum_{j=0}^{m-1} y_j v x^j = \varphi\left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j v \otimes x^j\right) \in C(A).$$

因此 $\tau(V) \subset C(A)$。

(1) 由推论3.9可知。

(2) 若 f 在 R 中可分，则 f 在 R中总是弱可分的，因此只需证明 $\tau(V) = C(A)$。由引理 3.2， f 在 R 中可分当且仅当存在$v \in V$使得 $\tau(v) = 1$。这意味着 $\tau(V) = C(A)$，因为 τ是一个 $C(A)$-$C(A)$-同态。

□

例 3.12. 设 $B=\begin{bmatrix}\mathbb{Z} & \mathbb{Z}\\ 0 & \mathbb{Z}\end{bmatrix}$（$\mathbb{Z}$上的上三角矩阵），$D$ 为B的一个导子，由 $D\left(\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ 0 & b_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & b_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $(b_1,b_2,b_3\in\mathbb{Z})$ 定义，$R=B[X;\ D]$，以及 $R_{(0)}=B[X;\ D]_{(0)}$。此处我们令 $a=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in B$ 与 $f=X^2+Xa+a\in R$。易见对任意 $\alpha\in B$ 与 $Xf=fX$ 有 $\alpha f=f\alpha$，从而 $f\in R_{(0)}$。现设 $A=R/fR$ 与 $x=X+fR$。容易看出

$$V=C(A)=\left\{x\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s+t & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}\ \middle|\ s,t\in\mathbb{Z}\right\}.$$

令 $v=xb+c$ 为 V中的任意元素，使得 $b=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix}s+t & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}$ $(s,t\in\mathbb{Z})$。由于 $xb=bx$ 且 $xc=cx$，我们得到

$$I_x(v)=vx-xv=(xb+c)x-x(xb+c)=0.$$

因此 $I_x(V)=\{0\}$。回顾一下，此时 $y_0=x+a$ 且 $y_1=1$。于是我们有

$$\begin{aligned}\tau(v)&=y_0v+y_1vx\\&=(x+a)(xb+c)+(xb+c)x\\&=x^2b+x(ab+c)+ac+x^2b+xc\\&=x^2 2b+x(ab+2c)+ac\\&=(-xa-a)2b+x(ab+2c)+ac\\&=x(2c-ab)+ac-2ab\\&=x\left(\begin{bmatrix}2(s+t) & 0\\ 0 & 2t\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}\right)\\&\quad+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+t & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}\\&=x\begin{bmatrix}2t-s & 0\\ 0 & 2t-s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3t-3s & 0\\ 0 & t-2s\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

所以我们看到，如果 $v\in\mathrm{Ker}(\tau)$，则 $s=t=0$（即 $v=0$）。因此 $\mathrm{Ker}(\tau)\cap V=\{0\}=I_x(V)$，从而根据定理 3.11 (1)，$f$ 在 R 中是弱可分的。然而，显然 $\tau(V)\subsetneq C(A)$（例如，不存在满足 $\tau(u)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in C(A)$ 的元素 $u\in V$）。因此，根据定理 3.11 (2)，f 在 R 中不可分。

致谢

作者谨向审稿人致谢，感谢其提出的宝贵建议和意见。

参考文献

.[1] *S. Elliger*，关于环的自同构与导子，*J. Reine Angew. Math., 277 (1975), 155–177*。[2] *N. Hamaguchi* 和 *A. Nakajima*，关于环上可分多项式的推广，*Hokkaido Math. J., 42 (2013), no.1, 53–68*。[3] *K. Hirata* 和 *K. Sugano*，关于非交换环上的半单扩张与可分扩张，*J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 360–373*。[4] *S. Ikehata*，关于斜多项式环中的可分多项式与弗罗贝尼乌斯多项式，*Math. J. Okayama Univ., 22 (1980), 115–129*。[5] *S. Ikehata*，阿祖马亚代数与斜多项式环，*Math, J. Okayama Univ., 23 (1981), 19–32*。[6] *Y. Miyashita*，关于斜多项式环，*J. Math. Soc. Japan, 31 (1979), no.2, 317–330*。[7] *K. Sugano*，可分扩张与弗罗贝尼乌斯扩张，*Osaka J. Math., 7 (1970), 29–40*。[8] *S. Yamanaka* 和 *S. Ikehata*，斜多项式环中 *Miyasita* 定理的另一种证明，*Int. J. Algebra, 21 (2012), 1011–1023*[9] *S. Yamanaka*，关于环上的弱可分多项式与弱拟可分多项式，*Math. J. Okayama Univ., 58 (2016), 169–182*。