arXiv:2603.05951v1 [math.RA] 6 Mar 2026

环上的弱可分多项式与弱拟可分多项式

Satoshi Yamanaka

综合科学与技术系　国立津山工業高等専門学校　日本冈山 708-8509

yamanaka@tsuyama.kosen-ac.jp

摘要

非交换环的可分扩张已得到广泛研究。最近，N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 引入了弱可分扩张和弱拟可分扩张的概念。他们研究了系数环为交换环时的弱可分多项式和弱拟可分多项式。本文旨在改进并推广 Hamaguchi 和 Nakajima 的一些结果。我们将利用其导数 $f'(X)$ 和判别式 $\delta(f(X))$，刻画交换环上的弱可分多项式 $f(X)$。此外，对于系数环为非交换环的情形，我们还将尝试给出扭多项式环中弱可分多项式的充要条件。

arXiv 版本说明。本文对应于发表于 *Math. J. OkayamaUniv.* **58** (2016年), 169–182 的论文《环上的弱可分多项式与弱拟可分多项式》。正式出版版本见 10.18926/mjou/53924。

数学主题分类：主要分类 16S36；次要分类 16S32

关键词：可分扩张、拟可分扩张、弱可分扩张、弱拟可分扩张、扭多项式环、导子。

1 引言

在本文中，A/B 始终表示具有共同单位元 1 的环扩张。设M 为一个 A-A-双模，且 x、y 为 A中的任意元素。若加法映射 δ 满足 $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ 且 $\delta(\alpha) = 0$ 对任意 $\alpha \in B$成立，则称其为从 A 到 M 的 B-导子 。此外，若 δ 满足 $\delta(x)y = y\delta(x)$，则称其为中心的；若对于某个固定元素 $m \in M$，δ 满足 $\delta(x) = mx - xm$，则称其为内 的。若 A/B 的 A-A-同态

从 $A\otimes_B A$到 A且由 $a\otimes b\mapsto ab$定义的映射可分裂，则称其为拟可分。众所周知， A/B是可分的，当且仅当对于任意 A-A-双模 M，从 A 到 M 的每个 B-导子都是内导子（参见 [1, Satz 4.2]）。在 [13], ，Y. Nakai 利用模微分引入了交换环的拟可分扩张这一概念；在非交换情形下，H. Komatsu 在 [9, Lemma 2.1] 中将其刻画如下： A/B 是拟可分的，当且仅当对于任意 A-A-双模 M，从 A 到 M 的每个中心的 B-导子都为零。最近， [2], N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 给出了可分扩张和拟可分扩张的以下推广定义。

定义 1.1. [2, 定义 2.1] **(1)** A/B 称为弱可分，如果从 A 到 A的每个 B-导子都是内导子。

(2) 如果从 A 到 A 的每个中心的 B-导子都是零，则称 A/B 为弱拟可分。

显然，可分扩张是弱可分的，拟可分扩张是弱拟可分的。此外，根据 [9, 定理 2.4], 可分扩张是拟可分的。

设 B 是一个环， ρ是 B的一个自同构， D 是一个 ρ-导子，也就是说， D 是 B 的一个加法自同态，满足对任意 α、 $\beta\in B$，有 $D(\alpha\beta) = D(\alpha)\rho(\beta)+\alpha D(\beta)$。 $B[X;\ \rho;\ D]$ 表示乘法由对任意 $\alpha\in B$有 $\alpha X = X\rho(\alpha) + D(\alpha)$给出的扭多项式环。记 $B[X;\ \rho] = B[X;\ \rho、\ 0]$ 以及 $B[X;\ D] = B[X;\ 1、\ D]$。用 $B[X;\ \rho、\ D]_{(0)}$ 表示 $B[X;\ \rho、\ D]$ 中满足 $gB[X;\ \rho、\ D] = B[X;\ \rho、\ D]g$的所有首一多项式 g 的集合。设 f 属于 $B[X;\ \rho、\ D]_{(0)}$。那么剩余环 $B[X;\ \rho、\ D]/fB[X;\ \rho、\ D]$ 是 B的自由环扩张。如果 $B[X;\ \rho、\ D]/fB[X;\ \rho、\ D]$ 是 B上的可分（分别为弱可分、弱拟可分），则称 f 是 $B[X;\ \rho、\ D]$ 中的可分（分别为弱可分、弱拟可分）多项式。

K. Kishimoto、T. Nagahara、Y. Miyashita 和 S. Ikehata 对扭多项式环中的可分多项式进行了广泛研究（参见参考文献）。T. Nagaraha 深入研究了交换环上的可分多项式以及扭多项式环中的二次可分多项式。他利用交换环上可分多项式 $f(X)$ 的导数 $f'(X)$ 和判别式 $\delta(f(X))$，如下对其进行了刻画：

命题 1.2。 *[11, 定理 2.3]* 设 B 为交换环，且 $f(X)$ 是 $B[X]$中的一个首一多项式。那么以下各条件等价。

(1) $f(X)$ 在 $B[X]$中可分。(2) $f'(X)$在 $B[X]$ 模 $(f(X))$下可逆。(3) $\delta(f(X))$ 在 B中可逆。

关于扭多项式环中的可分多项式，Y. Miyashita 证明了以下结论。

命题 1.3。 [10, 定理 1。8] 设 $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$属于$B[X;\ \rho, D]_{(0)}$。我们令 $A = B[X;\ \rho, D]/fB[X;\ \rho, D]$ 以及 $x = X + fB[X;\ \rho, D]$。那么， f在 $B[X;\ \rho, D]$ 中可分，当且仅当存在 $h\in A$，使得对于任意 $\alpha\in B$和 $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h x^j = 1$，都有 $\rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha$，其中 $y_j = x^{m-j-1} + x^{m-j-2}a_{m-1} + \cdots + xa_{j+2} + a_{j+1}(0\le j\le m-2)$且 $y_{m-1} = 1$。

最近，[15], 中的作者和 S. Ikehata 分别在 $B[X;\ \rho]$ 和 $B[X;\ D]$中给出了上述命题的另一种证明。此外，S. Ikehata 对 Miyashita 关于扭多项式环中可分多项式的结果作了一些改进和强化（参见 [4], [5], [6], [7]）。

在 [2], N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 研究了交换环上的弱可分多项式。他们还研究了斜多项式环 $B[X;\rho]$ 和 $B[X;D]$ 中的弱可分多项式与弱拟可分多项式，其中 B 是整环。本文旨在对他们在 [2] 中得到的结果作出一些改进和推广。

在第 2 节中，我们讨论交换环上的弱可分多项式。如上所述，$B[X]$ 中的可分多项式 $f(X)$ 与其导数 $f'(X)$ 及其判别式 $\delta(f(X))$ 的可逆性密切相关。我们将根据 $f'(X)$ 和 $\delta(f(X))$ 的性质来刻画 $f(X)$ 的弱可分性。

在第 3 节中，我们研究斜多项式环中的弱可分多项式与弱拟可分多项式。当 B 是整环时，N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 给出了 $B[X;\rho]$ 和 $B[X;D]$ 中弱可分多项式的充要条件（参见 [2, 定理 4.1.4 和定理 4.2.3]）。我们将尝试针对非交换系数环 B 对他们的结果作出改进。此外，我们还将分别研究斜多项式环 $B[X;\rho]$ 和 $B[X;D]$ 中可分性与弱可分性之间的关系。

2 交换环上的弱可分多项式

本节将研究交换环上的弱可分多项式。众所周知，环扩张（非交换）A/B 可分，当且仅当存在 $\sum_j x_j\otimes y_j \in A\otimes_B A^A$ $\sum_j x_jy_j = 1$ $A\otimes_B A^A = \{\mu \in A\otimes_B A \mid x\mu =$ ( ) μx $x \in A\}$ [3, 2] 使得，其中对任意 ( )（参见定义）。首先，我们证明以下结论。

引理 2.1. 设 A/B 是一个交换环扩张。若存在 $\sum_j x_j \otimes y_j \in (A\otimes_B A)^A$，使得 $\sum_j x_jy_j$ 是 A中的非零因子，则 A/B 是弱可分的。

证明。设 D 是 A 的一个 B-导子，且 $\sum_j x_j \otimes y_j$ 属于 $(A\otimes_B A)^A$，满足 $\sum_j x_jy_j$ 是 A 中的非零因子。于是我们考虑以下 A-B-同态:

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes_B A & \longrightarrow & A\otimes_B A & \longrightarrow & A \\ x\otimes y & \longmapsto & x\otimes D(y) & \longmapsto & xD(y) \end{array}$$

由于对于任意 $\alpha \in A$，都有 $\alpha\sum_j x_j\otimes y_j = \sum_j x_j\otimes y_j\alpha$，因此

$$\alpha\sum_j x_jD(y_j) = \sum_j x_jD(y_j\alpha) = \sum_j x_jD(y_j)\alpha + \sum_j x_jy_jD(\alpha),$$

从而 $\sum_j x_jy_jD(\alpha) = 0$。由于 $\sum_j x_jy_j$ 是 A 中的非零因子，我们得到 $D(\alpha) = 0$。因此 A/B 是弱可分的。证明完毕。 □

例. 设 B 为一个环， G 为阶为 n 的有限群，并且 $A = B[G]$，也就是说， A 是 G 在 B 上的群环。于是容易看出 $\sum_{g\in G} g\otimes g^{-1} \in (A\otimes_B A)^A$，从而当 $n(=\sum_{g\in G} gg^{-1})$ 为可逆元时，A/B 是可分的。当 B 是交换的且 G 是阿贝尔的时，若 n 是 A 中的非零因子，则由引理 2.1 可知 A/B 是弱可分的。此外，当 B 是非交换的且 G 是阿贝尔的时，该结论同样成立。事实上，对 A 的任意 B-导子 D 以及 $\alpha\in A$，我们看到

$$\alpha\sum_{g\in G} gD(g^{-1}) = \sum_{g\in G} gD(g^{-1}\alpha) = \sum_{g\in G} gD(g^{-1})\alpha + \sum_{g\in G} gg^{-1}D(\alpha).$$

注意到 $D(g^{-1})$ 位于 A 的中心，因此有 $nD(\alpha) = 0$。因此，若 n 是 A 中的非零因子，则 $D = 0$。

现在，设 B 是一个交换环。对于首一多项式 $f(X) \in B[X]$， $f'(X)$ 和 $\delta(f(X))$ 分别表示 $f(X)$ 的导数和 $f(X)$ 的判别式。接着，利用 $f'(X)$ 和 $\delta(f(X))$，命题 1.2 刻画了 $B[X]$ 中的可分多项式 $f(X)$。在 [2], 中，N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 研究了 $B[X]$ 中多项式 $f(X) = X^m - Xa - b$ 的弱可分性。他们证明， $f(X) = X^m - Xa - b$ 在 $B[X]$ 中弱可分，当且仅当 $\delta(f(X))$ 是 B 中的非零因子；等价地， $f'(X)$ 在模 $(f(X))$ 的 $B[X]$ 中是非零因子（参见 [2, 定理 3.1 和推论 3.2]）。现在我们将给出他们结果的一个加强。

定理 2.2。 设 B 是一个交换环，且 $f(X)$ 是 $B[X]$中的首一多项式。以下条件等价。

(1) $f(X)$ 在 $B[X]$中弱可分。(2) $f'(X)$是 $B[X]$中模 $(f(X))$的非零因子。(3) $\delta(f(X))$ 是 B中的非零因子。

证明。 由 [11, 定理 1.3]可知，(2) 与 (3) 等价。我们将证明 (1) 与 (2) 等价。设 $f(X) = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$属于$B[X]$, $A = B[X]/(f(X))$, $x = X + (f(X))$, 且 $f'(x) = f'(X) + (f(X)) \in A$。

(2) $\Longrightarrow$(1)。 由 [15, 引理 2.1] （或 [15, 引理 3.1]）可得

$$(A\otimes_B A)^A = \{\sum_{j=0}^{m-1} y_j h\otimes x^j \mid h\in A\},$$

其中 $y_j = x^{m-j-1} + x^{m-j-2}a_{m-1} + \cdots + xa_{j+2} + a_{j+1} (0\le j\le m-2)$ 且 $y_{m-1} = 1$。特别地，我们看到 $\sum_{j=0}^{m-1} y_j\otimes x^j \in (A\otimes_B A)^A$。注意到 $f'(x) = \sum_{j=0}^{m-1} y_j x^j$ 且 $f'(x)$ 是 A中的非零因子， $f(X)$ 根据引理 2.1 在 $B[X]$ 中是弱可分的。

(1) $\Longrightarrow$ (2). </style}假设对于某个 $g(x) \in A$，有 $f'(x)g(x) = 0$。于是，我们可以构造一个 B-导子 D，使得 $D(x) = g(x)$，因为 $D(f(x)) = f'(x)D(x) = f'(x)g(x) = 0$。由于 $f(X)$ 是弱可分的，因此 $g(x) = 0$。证毕。 □

3 斜多项式环中的弱可分多项式

在 [2], N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 于 $B[X$ 中刻画了斜多项式环中的弱可分多项式和弱拟可分多项式； $\rho]$ 并且当 B 是整环时，结论也成立于 $B[X;\ D]$。本节中，我们将把他们的结果推广到非交换系数环 B。

我们采用以下约定：$Z = BV_A(B) =$ 的中心
化子 B 在 $AB^\rho = \{\alpha \in B \mid \rho(\alpha) = \alpha\}$
$B^D = \{\alpha \in B \mid D(\alpha) = 0\}$ 以及 $Z^D = Z \cap B^D$
$D(B) = \{D(\alpha) \mid \alpha \in B\}$

3.1 自同构型

本节中，我们考虑 f 属于 $B[X;\ \rho]_{(0)}$ 的多项式，其形式为

$$f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 = \sum_{j=0}^{m} X^j a_j \quad (a_m = 1,\ m \geq 2).$$

令 $A = B[X;\ \rho]/fB[X;\ \rho]$，且 $x = X + fB[X;\ \rho] \in A$。根据 [4,引理 1.3]， f属于 $B[X;\ \rho]_{(0)}$ 当且仅当

$$\begin{cases} \alpha a_j = a_j \rho^{m-j}(\alpha) \quad (\alpha \in B,\ 0 \leq j \leq m-1), \\ \rho(a_j) - a_j = a_{j+1}(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}) \ (0 \leq j \leq m-2), \\ a_0(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}) = 0. \end{cases}$$

现在，令 f 属于 $B[X;\ \rho]_{(0)} \cap B^\rho[X]$。那么存在一个 A 的自同构 $\tilde{\rho}$，它由 ρ自然诱导，也就是说，$\tilde{\rho}$ 定义为 $\tilde{\rho}(\sum_{j=0}^{m-1} x^j c_j) = \sum_{j=0}^{m-1} x^j \rho(c_j)$。我们记$J_{\rho^k} = \{h \in A \mid \alpha h = h\rho^k(\alpha)\ (\alpha \in B)\}\ (k \geq 1)$，$V = V_A(B)$，以及 $V^{\tilde{\rho}} = \{h \in V \mid \tilde{\rho}(h) = h\}$。 ˜ ˜接着考虑一个 $J_\rho \longrightarrow J_{\rho^m}$ 上的 V^ρ-V^ρ-同态 τ，其定义为

$$\begin{aligned} \tau(h) &= x^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\tilde{\rho}^j(h) + x^{m-2}\sum_{j=0}^{m-2}\tilde{\rho}^j(h)a_{m-1} + \cdots x\big\{\tilde{\rho}(h) + h\big\}a_2 + ha_1 \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{j=0}^{k}\tilde{\rho}^j(h)a_{k+1}. \end{aligned}$$

首先，我们将证明以下结论。

引理 3.1。若 δ 是 A的 B-导子，则 $\delta(x) \in J_\rho$ 且 $\tau(\delta(x)) = 0$。反之，若$g \in J_\rho$ 且满足 $\tau(g) = 0$，则存在一个 B-导子 δ，使得 $\delta(x) = g$。

证明。设 δ 是 A的 B-导子。容易看出，对于任意 $\alpha \in B$，都有 $\alpha\delta(x) = \delta(x)\rho(\alpha)$。由于 $\delta(x^k) = x^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{\rho}^i(\delta(x))$ $(k \geq 2)$，因此我们有

$$0 = \delta(\sum_{k=0}^{m} x^k a_k) = \sum_{k=0}^{m-1} \delta(x^{k+1})a_{k+1} = \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(\delta(x))a_{k+1} = \tau(\delta(x)).$$

反之，设 $g = g_0 + fB[X;\rho]$ $(g_0 \in B[X;\rho])$ 属于 J_ρ，使得 $\tau(g) = 0$。由于 $\alpha g_0 = g_0\rho(\alpha)$ $(\alpha \in B)$，我们可以定义一个 B-导子 δ^*，作用于 $B[X;\rho]$，使得 $\delta^*(X) = g_0$。此外，由于 $\tau(g) = 0$，容易看出 $\delta^*(f) \in fB[X;\rho]$。因此，存在一个 B-导子 δ，作用于 A，使得 $\delta(x) = g$，它由 δ^*自然诱导而来。证明完毕。 □

现在我们将给出 [2, 定理 4.1.4] 的一个加强版本。

定理 3.2. 设 $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$ 属于 $B[X;\ \rho]_{(0)} \cap B^\rho[X]$。那么$f$ 在 $B[X;\ \rho]$ 中弱可分，当且仅当

$$\{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\} = \{x(\tilde{\rho}(h) - h) \,|\, h \in V\}.$$

证明。假设 $\{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\} = \{x(\tilde{\rho}(h) - h) \,|\, h \in V\}$，并令 δ 为 A 的一个 B-导子。由引理 3.1 可得 $\delta(x) \in \{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\}$，因此对于某个 $h \in V$，有 $\delta(x) = x(\tilde{\rho}(h) - h) = hx - xh$。于是容易看出，对于任意 $w \in A$，$\delta(w) = hw - wh$。因此 δ 是内的。

反过来，假设 f 是弱可分的，并令 g 为 J_ρ 中满足 $\tau(g) = 0$ 的一个元素。由引理 3.1，可定义 A 的一个 B-导子 δ，使得 $\delta(x) = g$。由于 f 是弱可分的，对于某个 $h \in V$，可得 $g = \delta(x) = hx - xh = x(\tilde{\rho}(h) - h)$。因此 $\{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\} \subset \{x(\tilde{\rho}(h) - h) \,|\, h \in V\}$。容易看出，$\{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\} \supset \{x(\tilde{\rho}(h) - h) \,|\, h \in V\}$。事实上，对于任意 $h \in A$，通常有 $hx^k = x^k\tilde{\rho}^k(h)$ $(k \geq 1)$。这意味着对于任意 $h \in V$，$\sum_{k=0}^{m-1} x^k(\tilde{\rho}^k(h) - \tilde{\rho}^m(h))a_k = 0$，因此我们有

$$\begin{aligned}
\tau(x(\tilde{\rho}(h) - h)) &= \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(x(\tilde{\rho}(h) - h))a_{k+1} \\
&= x^m \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{\rho}^j(\tilde{\rho}(h) - h) + \sum_{k=0}^{m-2} x^{k+1} \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(\tilde{\rho}(h) - h)a_{k+1} \\
&= (-\sum_{k=0}^{m-1} x^k a_k)(\tilde{\rho}^m(h) - h) + \sum_{k=1}^{m-1} x^k(\tilde{\rho}^k(h) - h)a_k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} x^k(\tilde{\rho}^k(h) - \tilde{\rho}^m(h))a_k \\
&= 0.
\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

作为定理 3.2 的直接推论，我们有如下结论。

推论 3.3. *[2, 定理 4.1.4 (ii)]* 设 B 为整环， m 为 ρ 的阶，且 $f = X^m - u\,(u \neq 0)$ 属于 $B[X;\rho]_{(0)}$。则 f 在 $B[X;\rho]$ 中弱可分当且仅当

$$\{b \in B \mid \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j(b) = 0\} = \{\rho(c) - c \,|\, c \in B\}.$$

证明。由于 B是整环，因此容易看出 $J_\rho = \{xb \,|\, b \in B\}$和 $V = B$。若对任意 $b \in B$，都有 $\tau(xb) = 0$，则有

$$0 = \tau(xb) = x^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{\rho}^j(xb) = u \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j(b).$$

这意味着 $\sum_{j=0}^{m-1} \rho^j(b) = 0$。因此，由定理 3.2 可得所述结论。证毕。

□

根据定理 3.2，我们得到以下关于 $B[X$ 中可分性与弱可分性之间关系的定理； $\rho]$。

定理 3.4。设 m 为 ρ的阶， $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$ 属于$B[X;\ \rho]_{(0)} \cap B^\rho[X]$, $C(A)$ 是 A的中心，且 I_x 是由 x 给出的 A 的内导子(即，对任意 $h \in A$，$I_x(h) = hx - xh$)。

(1) f 在 $B[X;\rho]$ 中弱可分，当且仅当以下 $V^{\tilde{\rho}}$-$V^{\tilde{\rho}}$-同态序列正合:

$$0 \longrightarrow C(A) \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{I_x} J_\rho \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{\rho}}.$$

(2) f 在 $B[X;\rho]$ 中可分，当且仅当以下 $V^{\tilde{\rho}}$-$V^{\tilde{\rho}}$-同态序列正合:

$$0 \longrightarrow C(A) \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{I_x} J_\rho \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{\rho}} \longrightarrow 0.$$

证明。显然，$\mathrm{Im}\,\tau \subset V^{\tilde{\rho}}$，因为 $\tilde{\rho}^j(h)a_j = ha_j\,(0 \leq j \leq m-1)$。

(1) 由定理 3.2 可知，这是显然的。

(2) 若 f 可分，则 f 总是弱可分，因此只需证明 $\mathrm{Im}\ \tau = V^{\tilde{\rho}}$。由命题 1.3， f在 $B[X;\rho]$ 中可分，当且仅当存在 $h \in A$，使得对于任意 $\alpha \in B$和 $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h x^j = 1$，$\rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha$，其中 $y_j = x^{m-j-1} + x^{m-j-2}a_{m-1} + \cdots + xa_{j+2} + a_{j+1}\,(0 \leq j \leq m-2)$ 和 $y_{m-1} = 1$。显然， $h \in J_\rho$。注意到 $y_j x^j = \sum_{k=j}^{m-1} x^k a_{k+1}$, 我们得到

$$1 = \sum_{j=0}^{m-1} y_j x^j \tilde{\rho}^j(h) = \sum_{j=0}^{m-1} \{\sum_{k=j}^{m-1} x^k a_{k+1}\} \tilde{\rho}^j(h) = \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(h) a_{k+1} = \tau(h).$$

这表明 $\mathrm{Im}\,\tau = V^\rho$，因为 τ是一个 V^ρ-同态。证明至此完成。 □

注记。在本节中，我们假设 f 属于 $B[X;\rho]_{(0)} \cap B^{\rho}[X]$。然而，在一般情况下，属于 $B[X;\rho]_{(0)}$ 的多项式并不总是属于 $B^{\rho}[X]$。关于这一点，我们已由 [4, 推论 1.5] 得知，若 B 是半素环，则 $B[X;\rho]_{(0)}$ 中的每个多项式都属于 $C(B^{\rho})[X]$，其中 $C(B^{\rho})$是 B^{ρ}的中心。

本节末尾，我们将简要提及 $B[X;\rho]$ 中的弱拟可分多项式。当 B 是整环时，N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 证明了 $B[X;\rho]_{(0)}$ 中的每个多项式都是弱拟可分的（参见 [2, 定理 4.1.1]）。更确切地说，他们证明：对于交换环 B，当 $\rho \neq 1$ 和 $\{\rho(c) - c \,|\, c \in B\}$ 在 B 中含有一个非零因子时，这一结论成立。对于任意环 B，我们有以下结论。

命题 3.5. (1) 如果 $\rho \neq 1$ 和 $\{\rho(c) - c \,|\, c \in B\}$ 含有一个非零因子，那么 $B[X;\rho]_{(0)}$ 中的每个多项式都是弱拟可分的。

(2) 设 $f = X^m - u$ 属于 $B[X;\rho]_{(0)}$。如果 m 和 u 是 B 中的非零因子，那么 f 在 $B[X;\rho]$ 中是弱拟可分的。

证明。(1) 设 g属于 $B[X;\ \rho]_{(0)}$、δ 是 $B[X$ 的一个中心的 B-导子；$\rho]/gB[X;\ \rho]$，且 $x = X + gB[X;\ \rho] \in B[X;\ \rho]/gB[X;\ \rho]$。于是，对于任意 $\alpha \in B$，我们有 $\delta(x)(\rho(\alpha) - \alpha) = 0$。因此，如果 $\{\rho(c) - c \,|\, c \in B\}$ 包含一个非零因子，则 $\delta = 0$。

(2) 设 δ 是 A 的一个中心的 B-导子，满足 $\delta(x) = \sum_{j=0}^{m-1} x^j d_j$。通过简单归纳可得，对于 $k \geq 1$，有 $\delta(x^k) = kx^{k-1}\delta(x)$。注意到 $x^m = u$，我们得到

$$0 = \delta(x^m) = mx^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} x^j d_j = mx^{m-1}d_0 + m\sum_{j=0}^{m-2} x^j u d_{j+1}.$$

因此 $md_0 = 0$ 和 $mud_j = 0\,(1 \leq j \leq m-1)$，并且显然，如果 m 和 u 是 B 中的非零因子，则 $\delta = 0$。证明完毕。 □

3.2 导子类型

在本节中，设 B 具有素特征 p，并考虑一个 p多项式 f，它属于$B[X;\ D]_{(0)}$ 且形式如下

$$f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}}b_e + \cdots + X^p b_2 + Xb_1 + b_0 = \sum_{j=0}^{e} X^{p^j} b_{j+1} + b_0 \ (b_{e+1} = 1).$$

我们设 $A = B[X;\ D]/fB[X;\ D]$，且 $x = X + fB[X;\ D] \in A$。根据 [4,推论 1.7]，f 属于$B[X;\ D]_{(0)}$ 当且仅当

$$\begin{cases} b_0 \in B^D,\ \ b_{j+1} \in Z^D \ (0 \leq j \leq e-1), \\ \sum_{j=0}^{e} D^{p^j}(\alpha) b_{j+1} = b_0\alpha - \alpha b_0 \ \ (\alpha \in B). \end{cases}$$

由于 f属于 $B^D[X]$，存在一个由 D自然诱导的 A的导子 $\tilde{D}$，即 $\tilde{D}$由 $\tilde{D}(\sum_{j=0}^{p^e-1} x^j c_j) = \sum_{j=0}^{p^e-1} x^j D(c_j)$定义。我们记 $V = V_A(B)$，$\tilde{D}(V) = \{\tilde{D}(h) \,|\, h \in V\}$，

且 $V^{\tilde{D}} = \{v \in V \mid \tilde{D}(v) = 0\}$。接着我们考虑一个 $V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-同态 $\tau : V \longrightarrow V^{\tilde{D}}$，其定义为

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \tilde{D}^{p^e-1}(h) + \tilde{D}^{p^{e-1}-1}(h)b_e + \cdots + \tilde{D}^{p-1}(h)b_2 + hb_1 \\ &= \sum_{j=0}^{e} \tilde{D}^{p^j-1}(h)b_{j+1}.\end{aligned}$$

首先，我们将给出以下两个关于 A 的 B-导子的引理。

引理 3.6. 若 δ 是 A 的导子，则

$$\delta(x^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x)) \quad for\ k \geq 2.$$

证明。 我们用归纳法证明。注意到 $\delta(x)x = x\delta(x) + D(\delta(x))$，当 $k = 2$ 时结论成立。假设 $\delta(x^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x))$。于是我们得到

$$\begin{aligned}\delta(x^{k+1}) &= \delta(x^k)x + x^k\delta(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x))x + x^k\delta(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \Big\{ x\tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) \Big\} + x^k\delta(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^{j+1} \tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x)) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + x^k\delta(x) \\ &= kx^k\delta(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j-1} x^j \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^k(\delta(x)) + x^k\delta(x) \\ &= (k+1)x^k\delta(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ \binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} \right\} x^j \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^k(\delta(x)) \\ &= (k+1)x^k\delta(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k+1}{j} x^j \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^k(\delta(x)) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} x^j \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 3.7。若 δ 是 A 的 B-导子，则 $\delta(x) \in V$ 且 $\tau(\delta(x)) = 0$。反之，若$g \in V$且 $\tau(g) = 0$，则存在 A 的一个 B- 导子 δ，使得 $\delta(x) = g$。

证明。设 δ 是 A的一个 B-导子。容易看出，对于任意 $\alpha \in B$，有 $\alpha\delta(x) = \delta(x)\alpha$。此外，由引理 3.6，我们有

$$0 = \delta(\sum_{j=0}^{e} x^{p^j} b_{j+1} + b_0) = \sum_{j=0}^{e} \delta(x^{p^j}) b_{j+1} = \sum_{j=0}^{e} \tilde{D}^{p^j-1}(\delta(x)) b_{j+1} = \tau(\delta(x)).$$

逆命题可通过类似于引理 3.1 的证明方法加以证明。证明完毕。

□

现在我们将给出 [2, 定理 4.2.3] 的一个加强形式。

定理 3.8。设 $f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}} b_e + \cdots + X^p b_2 + X b_1 + b_0$ 属于 $B[X;\ D]_{(0)}$。则 f 在 $B[X;\ D]$ 中是弱可分的，当且仅当

$$\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} = \tilde{D}(V).$$

证明。假设 f 是弱可分的。我们看到，由于 $\tau D(v) = D\tau(v) = 0$，对于任意 $v \in V$，有 $\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} \supset D(V)$。设 g 是 V 中满足 $\tau(g) = 0$ 的一个元素。根据引理 3.7，我们可以通过 $\delta(x) = g$ 定义 A 的一个 B-导子。由于 f 是弱可分的，对于某个 $h \in V$，有 $g = \delta(x) = hx - xh = D(h)$。因此，$g \in D(V)$。

反过来，假设 $\{g \in A \mid \tau(g) = 0\}$ 为 A 的 B-导子。由引理 3.7 可得 $\delta(x) \in V$且 $\tau(\delta(x)) = 0$，因此对于某个 $h \in V$，有 $\delta(x) = D(h) = hx - xh$。于是容易看出，对于任意 $w \in A$，都有 $\delta(w) = hw - wh$。因此 δ 是内的。证毕。

□

由定理 3.8 可直接推出以下结论。

推论 3.9。*[2, 定理 4.2。3]*设 B 是素特征为 p的整环，且 $f = X^p + X b_1 + b_0$ 属于 $B[X;\ \rho]_{(0)}$。那么 f在 $B[X;\ D]$ 中弱可分，当且仅当

$$\{c \in B \mid D^{p-1}(c) + c b_1 = 0\} = D(B).$$

证明。设 $h = \sum_{j=0}^{p-1} x^j c_j$ 属于 V。由于对任意 $\alpha \in B$，都有 $\alpha h = h\alpha$，因此

$$c_i \alpha = \sum_{j=i}^{p-1} \binom{j}{i} D^{j-i}(\alpha) c_j \quad (0 \le i \le p-1).$$

这意味着 $c_{p-2}\alpha = \alpha c_{p-2} + (p-1)D(\alpha)c_{p-1}$，从而有 $c_{p-1} = 0$。重复此过程可得$h = c_0 \in B$，即 $V = B$。由定理 3.8 可得所述结论。证毕。

□

根据定理 3.8，我们得到以下关于 $B[X; D]$ 中可分性与弱可分性之间关系的定理。

定理 3.10. 设 $f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}}b_e + \cdots + X^p b_2 + Xb_1 + b_0$ 属于 $B[X;\ D]_{(0)}$。

(1) f 在 $B[X;\ D]$ 中是弱可分的，当且仅当以下 V^D-V^D-同态序列是正合的：

$$0 \longrightarrow V^{\tilde{D}} \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{\tilde{D}} V \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{D}}.$$

(2) f 在 $B[X;\ D]$ 中是可分的，当且仅当以下 V^D-V^D-同态序列是正合的：

$$0 \longrightarrow V^{\tilde{D}} \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{\tilde{D}} V \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{D}} \longrightarrow 0.$$

证明。(1) 根据定理 3.8，结论显然成立。

(2) 如果 f 是可分的，那么 f 总是弱可分的，因此只需证明 $\text{Im}\tau = V^D$。根据 [4, 定理 4.1]，f 在 $B[X$ 中是可分的；$D]$ 当且仅当存在 $h \in V$ 使得 $\tau(h) = 1$。由于 τ 是一个 V^D-同态，这意味着 $\text{Im}\,\tau = V^D$。证明完毕。 □

最后，我们简要提及 $B[X;\ D]$ 中的弱拟可分多项式。与自同构型的情形相同，N. Hamaguchi 和 A. Nakajima 证明了，当 B 是整环时，$B[X;\ D]_{(0)}$ 中的每个多项式都是弱拟可分的（参见 [2, 定理 4.2.1]）。更准确地说，他们证明了：对于交换环 B，当 $D(B)$ 包含非零因子时，结论成立。对于任意环 B，我们有如下结论。

命题 3.11. (1)若 $D(B)$ 包含一个非零因子，则 $B[X; D]_{(0)}$ 中的每个多项式都是弱拟可分的。

(2) 设 $f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}}b_e + \cdots + X^p b_2 + Xb_1 + b_0$ 属于 $B[X;\ D]_{(0)}$。若 b_1 是 B 中的非零因子，则 f 是弱拟可分的。

证明. (1) 设 g 属于 $B[X;\ D]_{(0)}$，δ 为 $B[X;\rho]/gB[X;\ D]$ 的一个中心的 B-导子，且 $x = X + gB[X;\ D] \in B[X;\rho]/gB[X;\ D]$。则对任意 $\alpha \in B$，我们看到

$$\delta(x\alpha)x = \delta(x)(x\alpha + D(\alpha)) = x\delta(x\alpha) + \delta(x)D(\alpha).$$

因此我们得到 $\delta(x)D(\alpha) = 0$。从而，若 $D(B)$ 包含一个非零因子，则 $\delta = 0$。

(2) 设 δ 是 A 的一个中心的 B-导子。由引理 3.7，$\delta(x) \in V$ 且 $\tau(\delta(x)) = 0$。由于 $x\delta(x) = \delta(x)x$，我们可知 $\delta(x) \in V^D$。于是有

$$0 = \tau(\delta(x)) = \sum_{j=0}^{e} \tilde{D}^{p^j-1}(\delta(x))b_{j+1} = \delta(x)b_1.$$

因此，若 b_1 是 B 中的非零因子，则 $\delta = 0$。证明完毕。 □

致谢

作者谨向导师 S. Ikehata 致谢，本工作是在其指导与鼓励下完成的。作者亦感谢审稿人提出的宝贵意见。

参考文献

.[1] S. Elliger, 论环的自同构与导子, J. Reine Angew. Math., 277 1975年, 155–177. [2] N. Hamaguchi 与 A. Nakajima, 论环上可分多项式的推广, Hokkaido Math. J., 42 2013年, no. 1, 53–68.[3] K. Hirata 与 K. Sugano, 论非交换环上的半单扩张与可分扩张, J. Math. Soc. Japan 18 (1966年), 360–373.[4] S. Ikehata, 论斜多项式环中的可分多项式与 Frobenius 多项式, Math. J. Okayama Univ., 22 1980年, 115–129.[5] S. Ikehata, Azumaya 代数与斜多项式环, Math. J. Okayama Univ., 23 1981年, 19–32.[6] S. Ikehata, 关于导子型可分多项式的一个注记, Int. J. Algebra, 3 no.15, 2009年, 707–711. [7] S. Ikehata, 论斜多项式环中次数为 p 的可分多项式与 H-可分多项式, Int. J. Pure Appl. Math., 51 no. 1, 2009年, 129–156.[8] K. Kishimoto, 论环的阿贝尔扩张. I, Math. J. Okayama Univ., 14 1970年, 159–174.[9] H. Komatsu, 非交换环的拟可分扩张, Comm. Algebra, 29 (3) 2001年, 1011–1019.[10] Y.Miyashita, 论斜多项式环, J. Math. Soc. Japan, 31 1979年, no. 2, 317–330.[11] T. Nagahara, 论交换环上的可分多项式 II, Math. J. Okayama Univ., 15 1972年, 149–162.[12] T. Nagahara, 论斜多项式环中的二次可分多项式, Math. J. Okayama Univ., 19 1976年, 65–95.[13] Y. Nakai, 论交换环中的微分理论, J. Math. Soc. Japan, 13 1961年, 63–84.[14] K. Sugano, 可分扩张与 Frobenius 扩张, Osaka J. Math. 7 (1970年), 29–40.[15] S. Yamanaka 与 S. Ikehata, 斜多项式环中 Miyasita 定理的另一证明, Int. J. Algebra, 21 2012年, 1011–1023.[16] S. Yamanaka 与 S. Ikehata, 论导子型斜多项式环中次数为 p 的伽罗瓦多项式, Southeast Asian Bull. Math., 37 2013年, 625–634.