arXiv:2603.05954v1 [math.SP] 6 Mar 2026

谱密度、散射截面、时间延迟及逗留时间界中的形状共振

HEMANT BANSAL、ALOK MAHARANA、LINGARAJ SAHU 和 KALYAN B. SINHA

Abstract. 重新考察 Friedrichs模型 [8]，以获得关于嵌入特征值附近共振的渐近行为（即所谓的布赖特-维格纳公式 [4]）的精确结果，并由此推导出“谱集中”结果。部分涉及的抽象结果也可用于探讨拉普拉斯算子的秩一扰动中的类似问题。此外，还得到了逗留时间、散射振幅和时间延迟的精确渐近性质。

1. Introduction

量子理论中的共振是定态和含时散射理论中都已得到深入研究的现象。自伴算子的一个嵌入特征值可能在“小”扰动下消失，并在未扰动算子的嵌入特征值附近产生共振。这种行为通常通过嵌入特征值附近各种量的局部性质来刻画，例如谱密度、时间延迟、逗留时间和散射振幅。更一般地，也可以用谱集中来描述这一现象。人们已发展出多种研究共振的方法，例如：(a) 特征值的形式扰动级数 [5, 9, 12]；(b) 将预解式的适当矩阵元从复平面的上半部亚纯延拓至下半部 [18, 11]，或考察预解式矩阵元在上半平面的边界行为 [10]；(c) 伸缩解析势理论（也称复缩放法） [15, 6]；(d) 散射矩阵的解析延拓 [14, 2]。作为一种简化近似，文献 [8, 10, 16, 3]利用自伴算子的秩一扰动研究了共振现象。重新考察 Friedrichs 模型 $H_\alpha = M_x + \alpha\langle\cdot,\ u\rangle u$在 $L^2(\mathbb{R})$，我们通过对谱密度渐近行为进行细致而深入的分析，研究共振现象；该分析导向谱集中，并以柯西分布的形式呈现（物理学家常称之为布赖特-维格纳公式 [4]）。此外，经过适当的“能量”平移和缩放后，通过极限过程，也可以对散射振幅和时间延迟进行类似的细致分析。我们还为受扰演化下的逗留时间导出了一个下界，避免了文献 [3]中可能不够精确的极限结果。文献 $L^2(\mathbb{R})$中这一模型的结果被推广至拉普拉斯算子的秩一扰动，见文献$L^2(\mathbb{R}^3)$。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47A10;47A55; 81Q15.*Key words and phrases.* 共振；嵌入特征值；时间延迟；逗留时间；秩一扰动。

本文的组织结构如下。在第2节，我们介绍预备结果，并确定后续分析所用的记号。在第3节，我们讨论 M_x 在$L^2(\mathbb{R})$中的乘法算子秩一扰动的谱理论，建立嵌入特征值存在的充要条件，并确定所用模型。第4 节考察适当平移和缩放下谱密度的渐近行为。在第5节，我们推导逗留时间的估计。在第6节，我们讨论受扰散射系统趋近初始散射系统时散射振幅的行为，并导出时间延迟的渐近式。第7 节研究 $\mathbb{R}^3$.中拉普拉斯算子的秩一扰动所涉及的共振现象。

2. Notations and preliminaries

对于可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子 T （可能是无界的），分别用 $\sigma(T)$、$\sigma_{ac}(T)$ 和 $\sigma_s(T)$ 表示 T 的谱、绝对连续谱和奇异谱。用 $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(T)$ 表示相对于 T 的绝对连续子空间。分别用 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$、 $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ 和 $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上有界算子、迹类算子和希尔伯特–施密特算子所构成的空间。迹范数和希尔伯特–施密特范数分别记为 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$。若序列$\{T_n\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 强收敛于算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，记作 s-lim $_{n\to\infty} T_n = T$，则对每个 $v \in \mathcal{H}$， $T_n v \to Tv$ 当 $n \to \infty$.时

令 $C^\infty(\mathbb{R})$、 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 分别表示所有光滑函数、在 $\pm\infty$ 处消失的光滑函数以及在 $\mathbb{R}$ 上快速衰减的光滑函数构成的空间。对于 $1 \le p \le \infty$，令 $L^p(\mathbb{R})$ 表示标准勒贝格空间。

函数 f 的傅里叶变换定义为:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}$$

只要积分以适当的意义收敛。

现在给出一些初步结果，这些结果将用于计算乘法算子 M_x的预解式极限。

定义 2.1. 令 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。 f的柯西主值记为 $\gamma(f,\cdot)$，定义为

$$\gamma(f,\lambda) := \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)} \frac{f(x)}{x-\lambda}\, \mathrm{d}x \quad \textit{for } \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

其中上述极限存在(参见 [13])中的推论4.95 (b) 。

命题 2.2. 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。则以下性质成立:

(a) 函数 $\gamma(f,\cdot)$ 满足

$$\gamma(f,\lambda) = \frac{1}{2i} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{sgn}(\xi) \mathrm{e}^{i\xi\lambda}\, \mathrm{d}\xi \quad \textit{for } \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

其中，当 $\xi > 0$ 时，$\mathrm{sgn}(\xi) = 1$ ；当 $\xi < 0.$ 时，$\mathrm{sgn}(\xi) = -1$

(b) $\gamma(f,\cdot)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$，其 k 阶导数满足

$$\frac{\partial^k\gamma(f,\cdot)}{\partial\lambda^k}=\gamma\left(\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\lambda^k},\cdot\right) \tag{2.3}$$

(c) $\lim_{|\lambda|\to\infty}\lambda\gamma(f,\ \lambda)=-\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\mathrm{d}x$

(d) 对每个 $\lambda\in\mathbb{R}$，共轭性质成立：

$$\overline{\gamma(f,\lambda)}=\gamma(\overline{f},\lambda)$$

(e) $\gamma(f,\cdot)\in L^2(\mathbb{R})$ 和 $||\gamma(f,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}=||f||_{L^2(\mathbb{R})}$

证明。部分 (a) 的证明见推论 4。95 (c)，见 [13]。注意，由部分 (a) 可得：

$$\begin{aligned}\gamma\left(\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\lambda^k},\lambda\right)&=\frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\lambda^k}}(\xi)\,\mathrm{sgn}(\xi)\mathrm{e}^{i\xi\lambda}\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{sgn}(\xi)(i\xi)^k\mathrm{e}^{i\xi\lambda}\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{sgn}(\xi)\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(\mathrm{e}^{i\xi\lambda})\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

为完成部分 (b) 的证明，我们注意到，由于 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，根据勒贝格控制收敛定理，可以反复交换导数与积分，这意味着 $\gamma(f,\cdot)\in C^\infty(\mathbb{R})$。此外，根据黎曼－勒贝格引理，有 $\gamma(f,\cdot)\to 0$ 当 $|\lambda|\to\infty$。因此，$\gamma(f,\cdot)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$。根据 (2.1) 中 γ 的定义，我们有

$$\lambda\gamma(f,\lambda)=-\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\mathrm{d}x+\gamma(q,\lambda)$$

其中 $q(x)=xf(x)$，而 (c) 部分由 $\gamma(q,\ \cdot)\in C_0(\mathbb{R})$。(d) 部分由 (a) 部分及傅里叶变换的定义推出。(e) 部分由 (a) 部分及普朗歇尔定理的应用推出。□

命题 2.3。设 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 使得 $f(x_0)=0$。令

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x-x_0} & if\ x\neq x_0\\ f'(x_0) & if\ x=x_0\end{cases}$$

则以下性质成立：

(a) $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$

(b) $\frac{\partial}{\partial\lambda}\gamma(|f|^2,\cdot)_{|\lambda=x_0}=\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^2\,\mathrm{d}x$

证明。当 $|x|$ 足够大时，$g(x)$ 的行为类似于 $f(x)$，因此 g 在 $\pm\infty$ 处是一个快速衰减函数。由于 $f(x_0)=0$ 且 $f\in C^1(\mathbb{R})$ $g\in C^1(\mathbb{R})$。重复同样的论证，我们得出 $g\in C^\infty(\mathbb{R})$。因此 $g\in S(\mathbb{R})$，这证明了 (a)。现在考虑 $x\neq x_0$，

$$(f\overline{g})'(x)=\frac{(|f|^2)'(x)}{x-x_0}-\frac{|f(x)|^2}{(x-x_0)^2}$$

由于 $f(x_0) = 0$，上式右侧的两项均可积。由 $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(|f|^2)'(x)}{x - x_0}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|^2}{(x - x_0)^2}\,\mathrm{d}x$$

至此，部分 (b) 的证明完成。 □

命题 2.4 (普莱梅利-普里瓦洛夫定理)。 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。 那么

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x - (\lambda \pm i\epsilon)}\,\mathrm{d}x = \gamma(f, \lambda) \pm i\pi f(\lambda)$$

在 λ 取遍紧集时一致成立。

证明见 [13] 中的公式 (4.7.48)。

3. The model

考虑希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上的乘法算子 M_x，其定义域为:

$$D(M_x) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \middle| \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

and

$$(M_x f)(x) = xf(x) \quad \text{for } f \in D(M_x)$$

那么 M_x 是自伴算子，其定义域为 $\mathcal{H}_{ac}(M_x) = L^2(\mathbb{R})$。令 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，其中$||u||_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$， 考虑扰动算子

$$H_\alpha := M_x + \alpha\langle \cdot, u\rangle u \quad \text{ on } L^2(\mathbb{R})$$

算子 H_α 显然是自伴算子，其定义域为 $D(H_\alpha) = D(M_x)$。我们分别用 R_α 和 E_α 表示 H_α 的预解式和谱测度。为了分析 H_α的谱，我们在下述引理中考察 H_α 与 H_0 的预解式矩阵元之间的关系。

引理 3.1. 对于任意 $v, w \in L^2(\mathbb{R})$ 以及 虚部 $z \neq 0$，以下关系成立:

$$\langle R_\alpha(z)v, w\rangle = \langle R_0(z)v, w\rangle - \alpha \frac{\langle R_0(z)v, u\rangle\langle R_0(z)u, w\rangle}{1 + \alpha\langle R_0(z)u, u\rangle} \tag{3.1}$$

证明. 根据预解式恒等式,

$$R_\alpha(z) - R_0(z) = -\alpha\langle R_0(z)\cdot, u\rangle R_\alpha(z)u$$

由此得到

$$\langle R_\alpha(z)v, w\rangle = \langle R_0(z)v, w\rangle - \alpha\langle R_0(z)v, u\rangle\langle R_\alpha(z)u, w\rangle \tag{3.2}$$

从而得到

$$\langle R_\alpha(z)u, w\rangle = \frac{\langle R_0(z)u, w\rangle}{1 + \alpha\langle R_0(z)u, u\rangle} \tag{3.3}$$

将（3.3）代入（3.2），我们得到（3.1）。 □

为了研究自伴算子 H_α的谱性质，在下一个引理中，我们分析当Im3.1）中各项的边界值，即Im $z \to 0$分别从复平面的上半平面和下半平面趋近时的情形。

引理 3.2. 设 $v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. 令

$$\langle R_0(\lambda \pm i0)v, w\rangle := \lim_{\epsilon\to 0^+} \langle R_0(\lambda \pm i\epsilon)v, w\rangle, \text{ if it exists; and}$$

$$\Gamma_\alpha^\pm = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid 1 + \alpha\langle R_0(\lambda \pm i0)u, u\rangle = 0\}$$

Then

(a) $\langle R_0(\lambda \pm i0)v, w\rangle = \gamma(v\overline{w}, \lambda) \pm i\pi v(\lambda)\overline{w(\lambda)}$，对紧集中的 λ 一致成立。*(b)* $\Gamma_\alpha^+ = \Gamma_\alpha^-$，记作 Γ_α，是一个勒贝格测度为0 的闭集，且 $\sigma_s(H_\alpha) \subset \Gamma_\alpha$。*(c)* 对于 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_\alpha$，以下结论成立

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \langle R_\alpha(\lambda \pm i\epsilon)v, w\rangle = \langle R_0(\lambda \pm i0)v, w\rangle - \alpha \frac{\langle R_0(\lambda \pm i0)v, u\rangle\langle R_0(\lambda \pm i0)u, w\rangle}{1 + \alpha\langle R_0(\lambda \pm i0)u, u\rangle}$$

其中，上述收敛在 $\mathbb{R} \setminus \Gamma_\alpha$ 的紧子集中的 λ 上一致成立。

证明。 部分 (a) 可由应用命题 2.4 得出。 $\Gamma_\alpha^+ = \Gamma_\alpha^-$ 由部分 (a) 得出。关于部分 (b) 其余内容的证明，见 [1]中的引理 9.5。部分 (c) 由 Γ_α的定义、部分 (a) 以及方程 (3.1) 得出。 □

在此模型中，由于扰动是紧的（事实上是秩一的）， H_α 的本质谱为整个实数轴。因此， H_α 的任何特征值（若存在）自然都嵌入连续谱中，我们将研究这种情形。定义

$$F(\alpha, \lambda) := 1 + \alpha\langle R_0(\lambda + i0)u, u\rangle = F_1(\alpha, \lambda) + iF_2(\alpha, \lambda) \tag{3.4}$$

其中

$$F_1(\alpha, \lambda) = 1 + \alpha\gamma(|u|^2, \lambda) \quad \text{and} \quad F_2(\alpha, \lambda) = \alpha\pi|u(\lambda)|^2 \tag{3.5}$$

定理 3.3. 设 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为固定的。则

(a) 算子 H_{α_0} 有特征值 λ_0 ，当且仅当 $u(\lambda_0) = 0$ 且 $1 + \alpha_0\gamma(|u|^2, \lambda_0) = 0$。在这种情况下， λ_0 是一个单特征值，其特征向量为

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{u(x)}{x-\lambda_0} & \text{if } x \neq \lambda_0 \\ u'(\lambda_0) & \text{if } x = \lambda_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

(b) 假设 u 仅在 $x = \lambda_0$ 处为零，且 $1+\alpha_0\gamma(|u|^2, \lambda_0) = 0$。则 $\mathcal{H}_{ac}(H_{\alpha_0}) = \{\phi\}^\perp$ 且 $\mathcal{H}_{ac}(H_\alpha) = L^2(\mathbb{R})$ ，对 $\alpha \neq \alpha_0$成立。

证明。 由引理 3.2 (b)，可得若 λ_0 是 H_{α_0} 的特征值，则 $\lambda_0 \in \Gamma_{\alpha_0}$这意味着 $u(\lambda_0) = 1+\alpha_0\gamma(|u|^2, \lambda_0) = 0$. 反之，由于 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 且 $u(\lambda_0) = 0$,

由命题 2.3(a)，函数 ϕ 在 (3.6) 中定义，属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$，因而 $\phi \in D(H_{\alpha_0})$。给定条件 $1+\alpha_0\gamma(|u|^2,\lambda_0)=0$，可得

$$(H_{\alpha_0}-\lambda_0)\phi=\left(1+\alpha_0\gamma(|u|^2,\lambda_0)\right)u=0$$

此外，若 ψ 是 H_{α_0} 对应于 λ_0的任一其他特征向量，则

$$(M_x-\lambda_0)\psi+\alpha_0\langle\psi,u\rangle u=0$$

由此可得

$$\psi(x)=-\alpha_0\langle\psi,u\rangle\frac{u(x)}{x-\lambda_0}\qquad\text{for a.e. } x\in\mathbb{R}$$

因此 λ_0 是 H_{α_0}的单特征值。

为证明部分 (b)，首先注意到，由于对 $\lambda\neq\lambda_0$有 $F_2(\alpha_0,\lambda)=\alpha_0\pi|u(\lambda)|^2\neq 0$，因此 $\Gamma_{\alpha_0}=\{\lambda_0\}$. 故对任意 $v\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$与 $\lambda\neq\lambda_0$，$\lim_{\epsilon\to0^+}\langle R_{\alpha_0}(\lambda+i\epsilon)v,v\rangle$ 存在。由于$\mathcal{S}(\mathbb{R})$在 $L^2(\mathbb{R})$中稠密，由 [17], 中的推论 3.28 可知 $\mathcal{H}_{ac}(H_{\alpha_0})=\{\phi\}^{\perp}$。现在对于 $\alpha\neq\alpha_0$,

$$F_2(\alpha,\lambda)\neq0\quad\text{for }\lambda\neq\lambda_0\qquad\text{and}\qquad F_1(\alpha,\lambda_0)=1+\alpha\gamma(|u|^2,\lambda_0)=1-\frac{\alpha}{\alpha_0}\neq0$$

因此对所有 $\alpha\neq\alpha_0$ 均有 $\Gamma_\alpha=\emptyset$，从而得到 $\mathcal{H}_{ac}(H_\alpha)=L^2(\mathbb{R})$. 至此完成部分 (b) 的证明。□

我们现在定义作为后续分析基础的模型。

定义 3.4（模型于 $\mathbb{R}$）。设 α_0、$\lambda_0\in\mathbb{R}$ 固定。对于 $\alpha\in\mathbb{R}$，考虑

$$H_\alpha=M_x+\alpha\langle\cdot,u\rangle u\quad on\ L^2(\mathbb{R})$$

其中 u 满足：$u\in\mathcal{S}$（$\mathbb{R}$）且$||u||_{L^2(\mathbb{R})}=1$，$u$ 仅在 $x=\lambda_0$ 和 $1+\alpha_0\gamma$（$|u|^2$，λ_0）$=0$. 处为零

在上述定义的模型中，由定理 3.3，λ_0 是H_{α_0} 的一个单特征值，嵌入绝对连续谱中，并在扰动后消失。以下所有结果均针对该模型。

4. Spectral density and its asymptotic properties

在我们的模型中，由于 H_α 对于 $\alpha\neq\alpha_0$ 是纯绝对连续的，与测度 $\langle E_\alpha(\mathrm{d}\lambda)v$，$w\rangle$ 对于 v，$w\in L^2(\mathbb{R})$ 相关联的谱密度由下式给出

$$\begin{aligned}\rho^{v,w}(\alpha,\lambda)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\langle E_\alpha(\mathrm{d}\lambda)v,w\rangle\\&=\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{1}{2\pi i}\left(\langle R_\alpha(\lambda+i\epsilon)v,w\rangle-\langle R_\alpha(\lambda-i\epsilon)v,w\rangle\right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

对于几乎所有的 $\lambda\in\mathbb{R}.$，我们显式计算了模型的密度 $\rho^{v,\,w}(\alpha,\,\cdot)$，并研究了其在嵌入特征值 λ_0 附近以柯西分布为参照的渐近行为（当 $\alpha\to\alpha_0$ 时），随后得到了谱集中和时间衰减。

引理 4.1。 对于算子 H_α、 $\alpha \in \mathbb{R}$，有

(a) 对于 $v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 以及 $\alpha \neq \alpha_0$，谱密度 $\rho^{v,\ w}(\alpha, \cdot)$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\rho^{v,w}(\alpha,\lambda) =& v(\lambda)\,\overline{w(\lambda)} - \alpha\frac{F_1(\alpha,\lambda)}{|F(\alpha,\lambda)|^2}\left(\gamma(v\overline{u},\lambda)\,u(\lambda)\,\overline{w(\lambda)} + \gamma(u\overline{w},\lambda)\,v(\lambda)\,\overline{u(\lambda)}\right)\\ &+ \alpha\frac{F_2(\alpha,\lambda)}{|F(\alpha,\lambda)|^2}\left(-\pi v(\lambda)\,\overline{w(\lambda)}\,|u(\lambda)|^2 + \frac{1}{\pi}\,\gamma(v\overline{u},\lambda)\,\gamma(u\overline{w},\lambda)\right)\end{aligned} \tag{4.2}$$

对于 $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) 存在一个 C^1 函数 $\lambda(\alpha)$，定义在围绕 α_0 的开区间 J 上，使得 $F_1(\alpha, \lambda(\alpha)) = 0$ 对于 $\alpha \in J$ 成立，并且当 $\alpha \to \alpha_0$ 时，$|\lambda(\alpha) - \lambda_0| = O(|\alpha - \alpha_0|)$。

证明。 (a) 由 (4.1) 和引理3.2可得。注意，函数 $F_1(\alpha, \lambda) = 1 + \alpha\gamma(|u|^2, \lambda)$ 是从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的光滑映射，并且 $F(\alpha_0, \lambda_0) = 0$. 此外，利用引理2.3 (b)，可得

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}(\alpha_0,\lambda_0) = \alpha_0\gamma((|u|^2)', \lambda_0) = \alpha_0||\phi||^2 \neq 0 \tag{4.3}$$

因此，根据隐函数定理，存在一个包含 α_0 的开区间 J 以及一个 C^1 函数 $\lambda : J \to \mathbb{R}$，使得 $\lambda(\alpha_0) = \lambda_0$ 且 $F_1(\alpha, \lambda(\alpha)) = 0$。此外

$$\lambda'(\alpha_0) = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}(\alpha_0,\lambda_0)}{\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}(\alpha_0,\lambda_0)} = \frac{1}{\alpha_0^2||\phi||^2}$$

由于 $\lambda'(\alpha_0) \neq 0$，当 $\alpha \to \alpha_0$. 时，$|\lambda(\alpha) - \lambda_0| = O(|\alpha - \alpha_0|)$。这就完成了部分 (b) 的证明。□

现在通过以下方式定义函数 κ: $J \to \mathbb{R}$

$$\kappa(\alpha) := \frac{\pi|u(\lambda(\alpha))|^2}{||\phi||^2} \tag{4.4}$$

于是 $\kappa(\alpha_0) = 0$，并且对于 $\alpha \in J \setminus \{\alpha_0\}$，$\kappa(\alpha) > 0$。由于 $u(\lambda_0) = 0$，并且

$$|u(\lambda(\alpha)) - u(\lambda_0)|^2 = \left|\int_{\lambda_0}^{\lambda(\alpha)} u'(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \leq ||u'||_\infty^2|\lambda(\alpha) - \lambda_0|^2$$

存在 $C' > 0$，使得当 α_0 附近的 α 时，$\kappa(\alpha) \leq C'|\alpha - \alpha_0|^2$。如果 u 在 λ_0 处具有 n 阶零点，那么重复上述论证，存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\kappa(\alpha) \leq C|\alpha - \alpha_0|^{2n} \quad \text{for } \alpha \text{ near } \alpha_0 \tag{4.5}$$

为简化记号，我们设

$$\lambda_h(\alpha) = \lambda(\alpha) + h\kappa(\alpha) \quad \text{for } \alpha \in J,\ h \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

引理 4.2. 对于任意固定的 $h \in \mathbb{R}$，我们有

(a)

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)} = h\alpha_0||\phi||^2 \quad \textit{and} \quad \lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)} = \alpha_0||\phi||^2 \tag{4.7}$$

(b)

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\kappa(\alpha)F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_h(\alpha))|^2}=\frac{1}{\alpha_0||\phi||^2}\frac{h}{h^2+1} \tag{4.8}$$

(c)

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\kappa(\alpha)F_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_h(\alpha))|^2}=\frac{1}{\alpha_0||\phi||^2}\frac{1}{h^2+1} \tag{4.9}$$

证明. 为证明 (a) 部分，我们使用以下事实：对于 $q\in C^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{q(\lambda_h(\alpha))-q(\lambda(\alpha))}{\kappa(\alpha)}=hq'(\lambda_0) \tag{4.10}$$

由于 $F_1(\alpha,\ \lambda(\alpha))=0$，我们有

$$\frac{F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)}=\frac{F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))-F_1(\alpha,\lambda(\alpha))}{\kappa(\alpha)}=\alpha\frac{\gamma(|u|^2,\lambda_h(\alpha))-\gamma(|u|^2,\lambda(\alpha))}{\kappa(\alpha)}$$

现将（4.10）应用于函数 $\gamma\left(|u|^2,\ \cdot\right)$，并利用（4.3），我们得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)}=h\alpha_0\gamma((|u|^2)',\lambda_0)=h\alpha_0||\phi||^2$$

注意到由（4.10），

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{|u(\lambda_h(\alpha))|^2-|u(\lambda(\alpha))|^2}{\kappa(\alpha)}=h(|u|^2)'(\lambda_0)=0$$

这意味着

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{|u(\lambda_h(\alpha))|^2}{\kappa(\alpha)}=\frac{||\phi||^2}{\pi}$$

因此，根据 F_2 在（3.5）中的定义，我们得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)}=\alpha_0||\phi||^2$$

这就完成了 (a) 的证明。对于部分 (b)，我们写作

$$\frac{\kappa(\alpha)F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_h(\alpha))|^2}=\frac{\dfrac{F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)}}{\left(\dfrac{F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)}\right)^2+\left(\dfrac{F_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)}\right)^2}$$

利用部分 (a)，即可得出部分 (b)。部分 (c) 的证明类似。 □

下一个定理在简单模型的背景下，给出了当 $\alpha\to\alpha_0$ 时密度行为的精确结果。柯西分布的出现应与 [10] 中的定理 3 进行比较。

定理 4.3. 设 $v,w\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$。那么对于任意固定的 $h\in\mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\kappa(\alpha)\rho^{v,w}(\alpha,\lambda_h(\alpha))=\frac{1}{\pi}\frac{1}{h^2+1}\langle P_{\lambda_0}v,w\rangle \tag{4.11}$$

其中，P_{λ_0} 表示与 $H_{\alpha_0}.$ 的特征值 λ_0 相对应的特征投影。特别地，

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\kappa(\alpha)\rho^{\phi}(\alpha,\lambda_h(\alpha))=\frac{||\phi||^2}{\pi}\frac{1}{h^2+1} \tag{4.12}$$

证明。固定 $h \in \mathbb{R}$，将 $\lambda = \lambda_h(\alpha)$ 代入 4.2式，并将其乘以 $\kappa(\alpha)$，得到

$$\begin{aligned}\kappa(\alpha)\rho^{v,w}(\alpha,\lambda_h(\alpha)) =& \kappa(\alpha)\, v\left(\lambda_h(\alpha)\right)\, \overline{w(\lambda_h(\alpha))} \\ &- \alpha\frac{\kappa(\alpha)\, F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_h(\alpha))|^2}\left(\gamma(v\overline{u},\lambda_h(\alpha))\, u(\lambda_h(\alpha))\, \overline{w(\lambda_h(\alpha))}\right) \\ &+ \alpha\frac{\kappa(\alpha)\, F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_h(\alpha))|^2}\left(\gamma(u\overline{w},\lambda_h(\alpha))\, v(\lambda_h(\alpha))\, \overline{u(\lambda_h(\alpha))}\right) \\ &- \alpha\pi\frac{\kappa(\alpha)\, F_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_h(\alpha))|^2}\left(v(\lambda_h(\alpha))\, \overline{w(\lambda_h(\alpha))}\, |u(\lambda_h(\alpha))|^2\right) \\ &+ \frac{\alpha}{\pi}\frac{\kappa(\alpha)\, F_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_h(\alpha))|^2}\left(\gamma(v\overline{u},\lambda_h(\alpha))\, \gamma(u\overline{w},\lambda_h(\alpha))\right)\end{aligned} \tag{4.13}$$

为得到（4.11），我们证明最后一项给出所需的极限，而其他项在 $\alpha \to \alpha_0$. 由于 λ_h（α）$\to \lambda_0$，κ（α）$\to 0$ 当 $\alpha \to \alpha_0$时，我们注意到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \kappa(\alpha) v(\lambda_h(\alpha))\overline{w(\lambda_h(\alpha))} = 0 \cdot v(\lambda_0) \cdot \overline{w(\lambda_0)} = 0$$

由于 $\lim_{\alpha\to\alpha_0} {}^{u}$（$\lambda_h$（$\alpha$））$= 0$，利用（4.8）和（4.9），（4.13）中的第二、第三和第四项在 $\alpha \to \alpha_0$时趋于 0。此外，

$$\lim_{\alpha\to\overline{\alpha_0}} {}^{\gamma}(vu,\ \lambda_h(\alpha)) = \gamma(vu,\ \lambda_0) = \langle v,\ \phi\rangle \text{ 以及 } \lim_{\alpha\to\alpha_0} {}^{\gamma}(\overline{u}w,\ \lambda_h(\alpha)) = \gamma(u\overline{w},\ \lambda_0) = \langle\phi,\ w\rangle$$

因此再次利用（4.9），我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\alpha}{\pi}\frac{\kappa(\alpha)F_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_h(\alpha))|^2}\left(\gamma(v\overline{u},\lambda_h(\alpha))\gamma(u\overline{w},\lambda_h(\alpha))\right) \\ &= \frac{\alpha_0}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha_0||\phi||^2}\frac{1}{h^2+1}\right)\left(\langle v,\phi\rangle\langle\phi,w\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{h^2+1}\langle P_{\lambda_0}v, w\rangle\end{aligned}$$

□

接下来我们考虑 H_α 在 $\alpha \to \alpha_0$.时 λ_0 附近的谱集中现象。让我们回顾一下 [12]中谱集中的定义。

定义 4.4（谱集中）。设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，$\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一族自伴算子，其对应的谱测度为 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$。设 λ_0 是 T_{α_0}. 的一个特征值。若存在 $\{J_\alpha\}$（$\mathbb{R}$ 的一族博雷尔子集），使得 J_α、$|J_\alpha| \to 0$ 的勒贝格测度以及 E_α（J_α）$\to E_{\alpha_0}$（$\{\lambda_0\}$）在 $\alpha \to \alpha_0$ 时强收敛，则称 T_α 的谱在 $\alpha \to \alpha_0$ 时集中于 λ_0 附近。此外，若$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{|J_\alpha|}{|\alpha-\alpha_0|^p} = 0$，则称 $\{T_\alpha\}$ 的谱在 λ_0. 附近以 p 阶集中。

以下命题有助于推导谱集中结论，其证明只需遵循 [12]中的第八章定理 1.15 的证明即可。

命题 4.5. 设 T_α 在强预解式意义下收敛到 T_{α_0}，当 $\alpha \to \alpha_0$。设 $b(\alpha)$ 是一个在 α_0 处连续的实值函数，并且 $P = E_{\alpha_0}(\{b(\alpha_0)\})$。那么

$$\operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\alpha_0} E_\alpha(-\infty, b(\alpha)](1-P) = E(-\infty, b(\alpha_0))$$

定理 4.3与命题 4.5 共同推出 H_α在嵌入特征值 λ_0 处的 H_{α_0} 谱集中（参见 [10]中的定理 4）。

推论 4.6. 假设 u 在 $x = \lambda_0.$ 处消失的阶数为 n。那么对于任意 $p \in [0, 2n)$， H_α 的谱以 λ_0 为中心集中，阶数为 p，当 $\alpha \to \alpha_0$。

证明。设 $p \in [0, 2n)$。现在选取 r，使得 $p < r < 2n$，并令 $J_\alpha = \left(\lambda(\alpha) - (\kappa(\alpha))^{\frac{r}{2n}}, \lambda(\alpha) + (\kappa(\alpha))^{\frac{r}{2n}}\right]$。根据预解式恒等式，当 $Im,$

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} ||R_\alpha(z) - R_{\alpha_0}(z)||_1 = 0$$

特别是， $R_\alpha(z) \to R_{\alpha_0}(z)$ 在强预解式意义下。由命题4.5可得

$$\operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\alpha_0} E_\alpha(J_\alpha)(I - P_{\lambda_0}) = 0 \tag{4.14}$$

另一方面,

$$\langle E_\alpha(J_\alpha)\phi, \phi\rangle = \int_{J_\alpha} \rho^\phi(\alpha, \lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\frac{|J_\alpha|}{2\kappa(\alpha)}}^{\frac{|J_\alpha|}{2\kappa(\alpha)}} \kappa(\alpha)\,\rho^\phi(\alpha, \lambda_h(\alpha))\,\mathrm{d}h$$

Set

$$f_\alpha(h) := \chi_{\left(-\frac{|J_\alpha|}{2\kappa(\alpha)}, \frac{|J_\alpha|}{2\kappa(\alpha)}\right)}(h)\,\kappa(\alpha)\,\rho^\phi(\alpha, \lambda_h(\alpha)),\ f(h) := \frac{||\phi||^2}{\pi}\frac{1}{h^2+1}$$

其中 χ_A 表示集合 A 的示性函数。由于

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{|J_\alpha|}{2\kappa(\alpha)} = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{1}{\kappa(\alpha)^{1-\frac{r}{2k}}} = \infty$$

那么由（4.12）可得 $f_\alpha \to f$ 逐点成立，当 $\alpha \to \alpha_0.$ 此外,

$$\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(h)\,\mathrm{d}h \le ||\phi||^2 = \int_{\mathbb{R}} f(h)\,\mathrm{d}h$$

那么由引理8.1可得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(h)\,\mathrm{d}h = \int_{\mathbb{R}} f(h)\,\mathrm{d}h$$

这意味着

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \langle E_\alpha(J_\alpha)\phi, \phi\rangle = ||\phi||^2 = \langle P_{\lambda_0}\phi, \phi\rangle \tag{4.15}$$

现在对于任意 $v,\ w \in L^2(\mathbb{R})$，我们有

$$\begin{aligned}\langle E_\alpha(J_\alpha)P_{\lambda_0}v, w\rangle &= \langle E_\alpha(J_\alpha)P_{\lambda_0}v, P_{\lambda_0}w\rangle + \langle E_\alpha(J_\alpha)P_{\lambda_0}v, (I-P_{\lambda_0})w\rangle \\ &= \frac{\langle P_{\lambda_0}v, w\rangle}{||\phi||^2}\langle E_\alpha(J_\alpha)\phi, \phi\rangle + \langle P_{\lambda_0}v, E_\alpha(J_\alpha)(I-P_{\lambda_0})w\rangle\end{aligned}$$

由（4.14）和（4.15），可得 $\langle E_\alpha\left(J_\alpha\right) P_{\lambda_0} v,\ w\rangle \to \langle P_{\lambda_0} v,\ w\rangle$ 当 $\alpha \to \alpha_0$. 由于极限算子是一个投影，弱收敛意味着强收敛，因此我们得到 $E_\alpha\left(J_\alpha\right) P_{\lambda_0} \to P_{\lambda_0}$ 当 $\alpha \to \alpha_0$. 因此，由（4.14），我们得出

$$\operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\alpha_0} E_\alpha(J_\alpha) = P_{\lambda_0}$$

此外，由（4.5），可得

$$\frac{|J_\alpha|}{|\alpha-\alpha_0|^p} = \frac{2\kappa(\alpha)^{\frac{r}{2n}}}{|\alpha-\alpha_0|^p} \le \frac{2C^{\frac{r}{2n}}|\alpha-\alpha_0|^r}{|\alpha-\alpha_0|^p}$$

这意味着 $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{|J_\alpha|}{|\alpha-\alpha_0|^p} = 0$. 因此，我们得出结论： H_α 的谱集中在 λ_0 附近，其阶为 p，当 $\alpha \to \alpha_0$. □

现在，我们想研究由 H_α 生成的演化在 $\alpha = \alpha_0$.附近通过平移均值并缩放时间后所呈现的更精细结构。以下结果直接由（4.12）得出。参见 [7]，其中讨论了与谱密度的行为和谱集中相关的各种推论。

推论 4.7。 对于H_{α_0}的特征向量 ϕ,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \langle \mathrm{e}^{-it\frac{H_\alpha-\lambda(\alpha)}{\kappa(\alpha)}}\phi, \phi\rangle = ||\phi||^2 \mathrm{e}^{-|t|}$$

关于 t.一致

证明。 对 $h \in \mathbb{R}$，定义

$$g_\alpha(h) := \kappa(\alpha)\rho^\phi(\alpha, \lambda_h(\alpha)),\ g(h) = \frac{||\phi||^2}{\pi}\frac{1}{h^2+1}$$

由（4.11），$g_\alpha \to g$ 逐点成立，其中 $\alpha \to \alpha_0$. 注意，

$$\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(h)\,\mathrm{d}h = \int_{\mathbb{R}} g(h)\,\mathrm{d}h = ||\phi||^2$$

因此，由引理 8.1，可得 $g_\alpha \to g$ 在 L^1 范数下收敛，其中 $\alpha \to \alpha_0$. 这也意味着 $\widehat{g_\alpha} \to \widehat{g}$ 在 $\mathbb{R}$. 上一致成立。注意 $\sqrt{2\pi}\hat{g}(t) = ||\phi||^2\mathrm{e}^{-|t|}$ 以及

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{e}^{-it\frac{H_\alpha-\lambda(\alpha)}{\kappa(\alpha)}}\phi, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-it\frac{\lambda-\lambda(\alpha)}{\kappa(\alpha)}}\rho^\phi(\alpha,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ith}\kappa(\alpha)\rho^\phi(\alpha,\lambda_h(\alpha))\,\mathrm{d}h \\ &= \sqrt{2\pi}\hat{g_\alpha}(t)\end{aligned}$$

因此，当 t 取值时，$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle \mathrm{e}^{-it\frac{H_\alpha-\lambda(\alpha)}{\kappa(\alpha)}}\phi, \phi\rangle = ||\phi||^2\mathrm{e}^{-|t|}$ 一致收敛。 □

5. Sojourn time and its properties

相对于由自伴算子 H_α 生成的时间演化，状态 $v \in L^2(\mathbb{R})$ 的逗留时间为：

$$\tau_\alpha(v) := \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \mathrm{e}^{-itH_\alpha} v, v\rangle|^2 \, \mathrm{d}t$$

在我们的模型背景下，在下一个定理中，我们针对 v, w 中的一对向量，分析 $\int_{-\infty}^{\infty} |\langle \mathrm{e}^{-itH_\alpha} v, w\rangle|^2 \, \mathrm{d}t$；这些向量属于 $L^2(\mathbb{R})$的某个适当稠密子集，其中 $\alpha \neq \alpha_0$。

定理 5.1。 设 $v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。那么对任意 $\alpha \neq \alpha_0$,

$$\tau_\alpha(v, w) := \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \mathrm{e}^{-itH_\alpha} v, w\rangle|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$$

证明。 对 $\alpha \neq \alpha_0$，应用普朗歇尔定理可得，

$$\tau_\alpha(v, w) = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-it\lambda} \rho^{v,w}(\alpha, \lambda) \, \mathrm{d}\lambda \right|^2 \mathrm{d}t = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\rho^{v,w}(\alpha, \lambda)|^2 \, \mathrm{d}\lambda$$

由于 $u \in S(\mathbb{R})$和 $\gamma(|u|^2, \cdot) \in C_0(\mathbb{R})$，$\lim F(\alpha, \lambda) = 1.$，且对任意 λ， $F(\alpha, \lambda)$均不为零，因此存在常数 $c_\alpha > 0$，使得对所有 $\lambda \in \mathbb{R}.$， $|F(\alpha, \lambda)| \geq c_\alpha > 0$。由于所有函数 $u, v, w, \gamma(uv, \cdot)\ \gamma(vw, \cdot)\ \gamma(uw)$都有界，由(4.2)中$\rho^{v,w}(\alpha, \cdot)$的表达式可知，存在常数 $\tilde{c_\alpha} > 0$ 满足$|\rho^{v,w}(\alpha, \lambda)| \leq \tilde{c_\alpha}$ ，对所有 $\lambda \in \mathbb{R}.$ 均成立。由于 $\rho^{v,w}(\alpha, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$, 可得 $\rho^{v,w}(\alpha, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$，从而完成证明。□

特别地，对于特征向量 ϕ，我们有 $\tau_\alpha(\phi) < \infty$对 $\alpha \neq \alpha_0$成立。注意到$\tau_{\alpha_0}(\phi) = \infty$ ，在下一个定理中，我们将推导出 $\tau_\alpha(\phi)$ 关于 α 在 α_0.附近的一个下界

定理 5.2。 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\tau_\alpha(\phi) > \frac{||\phi||^4}{4\kappa(\alpha)} \quad for\ |\alpha - \alpha_0| < \delta$$

证明。 对于 $\alpha \in J \setminus \{\alpha_0\}$ 和 $T \in (0, \infty)$，定义

$$\tau_\alpha(\phi, T) := \int_{-T}^{T} |\langle \mathrm{e}^{-itH_\alpha} \phi, \phi\rangle|^2 \, \mathrm{d}t. \tag{5.1}$$

那么 $\lim_{T\to\infty} \tau_\alpha(\phi, T) = \tau_\alpha(\phi)$。 将 T替换为 $T/\kappa(\alpha)$ 于（5.1）中，可得

$$\kappa(\alpha)\tau_\alpha\left(\phi, T/\kappa(\alpha)\right) = \int_{-T}^{T} \left| \left\langle \mathrm{e}^{-it\frac{H_\alpha - \lambda(\alpha)}{\kappa(\alpha)}} \phi, \phi \right\rangle \right|^2 \mathrm{d}t$$

由于对于任意接近 α_0 的 α， $t \in \mathbb{R}$,

$$\left| \langle \mathrm{e}^{-it\frac{H_\alpha - \lambda(\alpha)}{\kappa(\alpha)}} \phi, \phi\rangle \right| \leq ||\phi||^2$$

根据推论 4.7,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \left| \langle \mathrm{e}^{-it\frac{H_\alpha - \lambda(\alpha)}{\kappa(\alpha)}} \phi, \phi\rangle \right|^2 = ||\phi||^4 \mathrm{e}^{-2|t|}$$

因此，对于任意有限的 T，由勒贝格控制收敛定理可得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \kappa(\alpha)\tau_\alpha\left(\phi, T/\kappa(\alpha)\right) = ||\phi||^4 \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-2|t|}\,\mathrm{d}t = ||\phi||^4(1-\mathrm{e}^{-2T})$$

选择 $T_0>0$ 使得 $1-\mathrm{e}^{-2T_0}>\frac{1}{2}$，对于这个 T_0，我们有一个 $\delta>0$，使得对于 $|\alpha-\alpha_0|<\delta$,

$$\kappa(\alpha)\tau_\alpha\left(\phi, \frac{T_0}{\kappa(\alpha)}\right) > \|\phi\|^4(1-\mathrm{e}^{-2T_0}) - \frac{\|\phi\|^4}{4} > \frac{\|\phi\|^4}{4}$$

由于 $\tau_\alpha(\phi)\geq\tau_\alpha\left(\phi, \frac{T_0}{\kappa(\alpha)}\right)$，因此 $\tau_\alpha(\phi) > \frac{\|\phi\|^4}{4\kappa_\alpha()}$.

□

注 5.3. 精确求出逗留时间的“精确极限形式”存在数学上的困难 $\tau_\alpha(\phi)$，正如 [3]，中所做的那样；不过，定理5.2中的下界给出了 $\tau_\alpha(\phi)$ 在 $\alpha\to\alpha_0$.时发散速率的估计

6. Scattering theory and Krein's spectral shift function

对于我们模型中满足 $\alpha\neq\alpha_0$ 的算子对 H_0 和 H_α，注意到 $H_\alpha - H_0 \in \mathcal{B}_1(L^2(\mathbb{R}))$。因此，根据 [19], 中的定理 6.2.1，波算子

$$\Omega_\pm^{(\alpha)} := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{itH_\alpha}\mathrm{e}^{-itH_0}$$

存在且完备。考虑与算子对 H_0, H_α) 相对应的散射算子 $S^{(\alpha)} = \Omega_+^{(\alpha)*}\,\Omega_-^{(\alpha)}$。由于 $S^{(\alpha)}$ 是与 H_0 相交换的酉算子，因此它是由模为 1 的函数 $S^{(\alpha)}(x)$ 所定义的乘法算子，其中 $x\in\mathbb{R}.$。由于 H_0 已在 $L^2(\mathbb{R})$ 中对角化，根据 [19], 中的定理 6.7.3，我们有

$$S^{(\alpha)}(x) = 1 - 2\pi i\alpha\frac{|u(x)|^2}{F(\alpha,x)}$$

注意，右侧是良定义的，因为 $F(\alpha,x)$ 在 $\alpha\neq\alpha_0.$ 上永不为零。于是由（3.5），

$$S^{(\alpha)}(x) = 1 - 2i\frac{F_2(\alpha,x)}{F(\alpha,x)} = \frac{\overline{F(\alpha,x)}}{F(\alpha,x)} = \mathrm{e}^{-2\pi i\xi_\alpha(x)} \tag{6.1}$$

其中

$$\xi_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\arg F(\alpha,x)$$

是算子对 (H_0, H_α) 的 Krein 谱移位函数，而“arg”表示辐角函数的主值支（有关谱移函数的更多细节，参见 [19] ）。现在我们研究 $R^{(\alpha)}(x) = S^{(\alpha)}(x) - 1$，以及 $|R^{(\alpha)}(x)|^2$ 的行为；按照高维散射理论的时空图景 [1]，我们将后者解释为“能量” x 处的总散射截面。

定理 6.1。对于任意固定的 $h\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} R^{(\alpha)}(\lambda_h(\alpha)) = -\frac{2i}{h+i} \quad and \quad \lim_{\alpha\to\alpha_0} |R^{(\alpha)}(\lambda_h(\alpha))|^2 = \frac{4}{h^2+1} \tag{6.2}$$

证明。注意到

$$R^{(\alpha)}(\lambda_h(\alpha))) = -2i\frac{F_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{F(\alpha,\lambda_h(\alpha))}$$

应用（4.7）即可得出该定理。 □

在下面的定理中，我们得到 ξ'_α 在 α 趋于 α_0. 时， ξ'_α 在 λ_0 附近的行为

定理 6.2。 对于每个固定的 $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \kappa(\alpha)\xi'_\alpha(\lambda_h(\alpha)) = -\frac{1}{\pi(h^2+1)}$$

证明。 由（6.1），可得

$$\xi'_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{F_1(\alpha,\lambda)\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda) - F_2(\alpha,\lambda)\frac{\partial F_1}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda)}{|F(\alpha,\lambda)|^2} \tag{6.3}$$

将 $\lambda = \lambda_h$（α）代入（6.3），并将其乘以 κ（α），即可得到

$$\kappa(\alpha)\xi'_\alpha(\lambda_h(\alpha)) = \frac{1}{\pi}\frac{\kappa(\alpha)F_1(\alpha,\lambda_h(\alpha))\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_h(\alpha))|^2} - \frac{1}{\pi}\frac{\kappa(\alpha)F_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))\frac{\partial F_1}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_h(\alpha))|^2}$$

现在利用（4.8）、（4.9）以及 $\frac{\partial F_1}{\partial\lambda}(\alpha_0,\lambda_0) = \alpha_0||\phi||^2$, $\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha_0,\lambda_0) = 0$，证明即得。 □

类比于物理散射理论中未扰动算子为拉普拉斯算子的情形（将在下一节讨论，见（7.17）），在“能量” λ 处的散射时间延迟定义为谱移函数导数的一个倍数。然而，类比于通常的时空表述，本模型中无法作出这样的时空定义（因为“空间”变量看起来像“能量”变量），因此我们将 $-2\pi\xi'_\alpha$（λ）作为“能量” λ处时间延迟的定义。

7. An application to perturbation of Laplacian in $\mathbb{R}^3$

考虑希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^3)$上拉普拉斯算子 $-\Delta = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$的自伴扩张 H_0，其定义域为

$$D(H_0) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} \left||\xi|^2\hat{v}(\xi)\right|^2 < \infty \right\}$$

其中，$\hat{}v$ 是 v 的 L^2意义下的傅里叶变换。于是 H_0 是一个正自伴算子。令 $u \in L^2($ $\mathbb{R}^3)$。 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$， 定义

$$H_\alpha = H_0 + \alpha\langle\cdot, u\rangle u \quad \text{ on } L^2(\mathbb{R}^3)$$

于是 H_α 是一个自伴算子，且 $D(H_\alpha) = D(H_0)$。 由于该扰动是秩一的， H_α 的本质谱为 $[0,\infty)$。我们将 H_α 的预解式和谱测度分别记为 R_α 和 E_α 。为了应用前一模型的某些结果，通过由下式定义的同构 U，将该问题置于酉同构的希尔伯特空间 $L^2($ $[0,\infty)$ $L^2(S^2))$中是方便的。

$$(Uv)_\lambda(\omega) = 2^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}\widehat{v}(\sqrt{\lambda}\omega) \equiv v_\lambda(\omega) \quad \text{ for almost every } \lambda \in [0,\infty), \omega \in S^2 \tag{7.1}$$

其中 S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中带有表面积测度的单位球面，而集合 $[0,\infty)$带有勒贝格测度。我们将 $L^2(S^2)$上的内积和范数分别记为$\langle\langle\cdot,\ \cdot\rangle\rangle$ 和 $|||\cdot|||$。于是

$$\langle v,w\rangle=\int_0^\infty \langle\langle v_\lambda,w_\lambda\rangle\rangle\,\mathrm{d}\lambda$$

稍微滥用一下记号，对于 $v,w\in L^2(\mathbb{R}^3)$，定义

$$\langle\langle v,w\rangle\rangle(\lambda):=\langle\langle v_\lambda,w_\lambda\rangle\rangle\quad\text{ for almost every }\lambda\in(0,\infty)$$

并令其在 $\lambda\le 0$ 处取 0，以此延拓。考虑由所有强光滑函数 $v\in L^2([0,\infty)\ L^2(S^2))$ 组成的空间 $\mathcal{E}((0,\infty)\ L^2(S^2))$，这些函数满足 $|||v_\lambda|||$，且当 $\lambda\to\infty$ 时，$|||v_{(1/\lambda)}|||$ 快速递减。于是，$\mathcal{E}((0,\infty)\ L^2(S^2))$ 在 $L^2([0,\infty)\ L^2(S^2))$ 中稠密。我们将 n 阶强导数 $\mathrm{d}^n\,\mathrm{d}\lambda^n u_\lambda$ 在 $\lambda=s$ 处记为 $u_s^{(n)}$.。对于 $v,w\in\mathcal{E}((0,\infty)\ L^2(S^2))$，注意函数 $\langle\langle v,w\rangle\rangle\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，并由命题 2.4 可得

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\langle R_0(\lambda\pm i\epsilon)v,w\rangle=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\mathbb{R}}\frac{\langle\langle v,w\rangle\rangle(x)}{x-(\lambda+i\epsilon)}\,\mathrm{d}x=\gamma(\langle\langle v,w\rangle\rangle,\lambda)\pm i\pi\langle\langle v_\lambda,w_\lambda\rangle\rangle\quad(7.2)$$

在以下范围内一致：λ 在 $\mathbb{R}$的紧子集上，其中 $\gamma(f,\cdot)$ 是f在（2.1）中定义的柯西主值。设 $u\in\mathcal{E}((0,\infty)\ L^2(S^2))$，则对于 $\alpha\in\mathbb{R},\lambda>0$，定义

$$G(\alpha,\lambda):=\lim_{\epsilon\to0^+}(1+\alpha\langle R_0(\lambda+i\epsilon)u,u\rangle)=G_1(\alpha,\lambda)+iG_2(\alpha,\lambda)$$

其中

$$G_1(\alpha,\lambda):=1+\alpha\gamma(\langle\langle u,u\rangle\rangle,\lambda),\ G_2(\alpha,\lambda):=\alpha\pi\langle\langle u,u\rangle\rangle(\lambda)=\alpha\pi|||u_\lambda|||^2\qquad(7.3)$$

我们有以下定理3.3的类似结果。

定理7.1。设 $u\in\mathcal{E}((0,\infty)\ L^2(S^2))$ 固定。则有

(a) $\lambda_0>0$ 是H_{α_0} 的特征值，当且仅当 $u_{\lambda_0}=0$ 作为 $L^2(S^2)$中的向量且 $1+\alpha_0\gamma(\langle\langle u,u\rangle\rangle,\lambda_0)=0$。此时，$\lambda_0$是一个单特征值，其特征向量为 ϕ，其中

$$\phi_\lambda=\begin{cases}\frac{u_\lambda}{\lambda-\lambda_0} & \text{if }\lambda\neq\lambda_0\\ u'_{\lambda_0} & \text{if }\lambda=\lambda_0\end{cases}\qquad\text{as vectors in }L^2(S^2)\qquad(7.4)$$

此外，$\phi\in\mathcal{E}((0,\infty)\ L^2(S^2))$。

(b) 假设 λ_0、$\alpha_0>0$ 和 $u_\lambda=0$ 仅对 $\lambda=\lambda_0\in(0,\infty)$ 成立，且$1+\alpha_0\gamma(\langle\langle u,u\rangle\rangle,\lambda_0)=0$。则 $\mathcal{H}_{ac}(H_{\alpha_0})=\{\phi\}^\perp$，且对于$\alpha\neq\alpha_0$ 和 $\alpha>0$，$\mathcal{H}_{ac}(H_\alpha)=L^2(\mathbb{R}^3)$。

证明。首先注意，对于 $\alpha>0$，H_α 不可能具有任何非负特征值，因为H_α 严格为正。采用与定理 3.3 证明中类似的论证，可得结论 (a) 和 (b)。□

定义 7.2 （ $\mathbb{R}^3$ 中的模型）。 设 α_0 和 λ_0 为两个固定的正实数。对于$\alpha > 0$，令

$$H_\alpha = H_0 + \alpha\langle\cdot, u\rangle u \quad on\ L^2(\mathbb{R}^3) \tag{7.5}$$

其中 $u \in \mathcal{E}((0,\infty)\ L^2(S^2))$ 且 $||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1$ 满足 $u_\lambda = 0$ 于 $L^2(S^2)$ 中，仅对$\lambda = \lambda_0$ 在 $(0,\infty)$ 内，以及 $1 + \alpha_0\gamma(\langle\langle u, u\rangle\rangle, \lambda_0) = 0$。

本节后续所有结果均针对该模型。

7.1. **密度渐近及其他谱性质。** 对于上述定义中的模型，我们有如下与第4 节和第5节结果类似的结论。

定理 7.3. 对于算子 H_α，定义于 (7.5)，我们有如下结论：

(a) 对于 $\alpha > 0$ 且 $\alpha \neq \alpha_0$ 与 v，$w \in \mathcal{E}((0,\infty)\ L^2(S^2))$，谱密度$\rho^{v,w}(\alpha,\cdot)$ 与测度 $\langle E_\alpha(\mathrm{d}\lambda)v, w\rangle$ 相关联，由下式给出：

$$\begin{aligned}\rho^{v,w}(\alpha,\lambda) =& \langle\langle v_\lambda, w_\lambda\rangle\rangle - \alpha\frac{G_1(\alpha,\lambda)}{|G(\alpha,\lambda)|^2}\left[\gamma(\langle\langle v,u\rangle\rangle,\lambda)\,\langle\langle u_\lambda, w_\lambda\rangle\rangle + \gamma(\langle\langle u,w\rangle\rangle,\lambda)\,\langle\langle v_\lambda, u_\lambda\rangle\rangle\right] \\ &+ \alpha\frac{G_2(\alpha,\lambda)}{|G(\alpha,\lambda)|^2}\left[-\pi\langle\langle v_\lambda, w_\lambda\rangle\rangle\,|||u_\lambda|||^2 + \frac{1}{\pi}\gamma(\langle\langle v,u\rangle\rangle,\lambda)\,\gamma(\langle\langle u,w\rangle\rangle,\lambda)\right]\end{aligned} \tag{7.6}$$

(b) 存在一个定义在包含 J 的开区间上的 C^1 函数 $\lambda(\alpha)$，使得 $\lambda(\alpha_0) = \lambda_0$ 且 $G_1(\alpha,\lambda(\alpha)) = 0$，当 $\alpha \in J$ 且 $|\lambda(\alpha) - \lambda_0| = O(|\alpha - \alpha_0|)$ 时，随着 α 趋于 α_0。在 J 上定义函数 κ 如下：

$$\kappa(\alpha) := \frac{\pi|||u_{\lambda(\alpha)}|||^2}{||\phi||^2} \tag{7.7}$$

于是，$\kappa(\alpha_0) = 0$ 且 $\kappa(\alpha) > 0$，当 $\alpha \in J \setminus \{\alpha_0\}$. 时。如果 u_λ 在λ_0处的消失阶为 n，则存在 $C > 0$，使得当 α 接近 α_0时，$\kappa(\alpha) \le C|\alpha - \alpha_0|^{2n}$。

(c) 按照前文记 $\lambda_h(\alpha) = \lambda(\alpha) + h\kappa(\alpha)$，对于任意固定的 $h \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\kappa(\alpha)\rho^{v,w}(\alpha,\lambda_h(\alpha)) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{h^2+1}\langle P_{\lambda_0}v, w\rangle \tag{7.8}$$

其中，P_{λ_0} 表示 H_{α_0}.*(d)*对应于特征值 λ_0 的特征投影。如果 u_λ 在 λ_0处的消失阶为 n，那么对于任意 $p < 2n$，当 α 趋于 α_0.时，H_α 的谱以 p 阶集中于 λ_0 处

（*e*）对于 H_{α_0} 的特征向量 ϕ，

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle \mathrm{e}^{-it\frac{H_\alpha - \lambda(\alpha)}{\kappa(\alpha)}}\phi, \phi\rangle = ||\phi||^2\mathrm{e}^{-|t|}$$

关于 t. 一致地

(f) 对于具有 $\alpha \neq \alpha_0$ 的 $\alpha > 0$，我们有 $\tau_\alpha(v,w) := \int_{-\infty}^{\infty}|\langle \mathrm{e}^{-itH_\alpha}v, w\rangle|^2\,\mathrm{d}t < \infty$。这里$\tau_\alpha(\phi) := \tau_\alpha(\phi,\phi)$ 是向量 ϕ 处的逗留时间。此外，存在一个$\delta > 0$ 使得

$$\tau_\alpha(\phi) > \frac{||\phi||^4}{4\kappa(\alpha)} \quad for\ |\alpha - \alpha_0| < \delta$$

证明。 部分 (a) 是前一模型中（4.2）的类似结果，其证明沿用相同思路。对于部分 (b)，由命题 2.3(b) 可知

$$\frac{\partial G_1}{\partial \lambda}(\alpha_0, \lambda_0) = \alpha_0 \int_{\mathbb{R}} \frac{|||u_\lambda|||^2}{(\lambda - \lambda_0)^2} \, \mathrm{d}\lambda = \alpha_0 ||\phi||^2 \neq 0$$

因此，根据隐函数定理，我们有一个围绕 α_0 的开区间 J，使得存在一个 C^1 函数 $\lambda : J \to \mathbb{R}$，满足所需性质。由于 $|||u_\lambda|||$ 仅在 λ_0 处消失，我们有 $\kappa(\alpha_0) = 0$ 且 $\kappa(\alpha) > 0$，其中 $\alpha \in J \setminus \{\alpha_0\}$。此外，我们有

$$|||u_{\lambda(\alpha)}||| = |||u_{\lambda(\alpha)} - u_{\lambda_0}||| = \left| \left| \left| \int_{\lambda_0}^{\lambda(\alpha)} u'_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \right| \right| \right| \leq \left| \int_{\lambda_0}^{\lambda(\alpha)} |||u'_\lambda||| \, \mathrm{d}\lambda \right|$$

这意味着 $|||u_{\lambda(\alpha)}|||^2 \leq |\lambda(\alpha) - \lambda_0|^2 \, ||u'||^2_{L^\infty((0,\infty), L^2(S^2))}$。进一步利用 $\lambda(\alpha)$的性质可得，对于某个常数 $C' > 0$，当 α 接近α_0.时， $\kappa(\alpha) \leq C'|\alpha - \alpha_0|^2$。当 u_λ 在 λ_0 处的零点阶数为 n 时，重复上述论证即可得到所需估计。由此完成部分 (b) 的证明。仿照引理 4.2 (a) 中的论证，对于任意固定的 $h \in \mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{G_1(\alpha, \lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)} = h\alpha_0 ||\phi||^2 \text{ and } \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{G_2(\alpha, \lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)} = \alpha_0 ||\phi||^2 \tag{7.9}$$

且 (c) 得证。(d) 和 (e) 部分可分别通过与推论 4.6和推论 4.7 中类似的论证得出。

对于任意固定的 $\alpha > 0$ 满足 $\alpha \neq \alpha_0$， $\tau_\alpha(v, w)$ 的有限性可由L^2-可积性推出， $\rho^{v,w}(\alpha, \cdot)$，如定理 5.1所示。(f) 部分的证明沿用定理5.2中的论证思路。□

7.2. **散射截面和时间延迟的行为。** 由于 $H_\alpha - H_0 \in \mathcal{B}_1(L^2(\mathbb{R}))$，与前一个模型类似，$(H_0, H_\alpha)$ 这一对的波算子 $\Omega_\pm^{(\alpha)}$ 存在且完备（更多说明见第 6 节）。散射算子$S^{(\alpha)} = \Omega_+^{(\alpha)*} \, \Omega_-^{(\alpha)}$ 与 H_0 对易，并且相对于7.1式的表象 H_0是可分解的，即

$$US^{(\alpha)}U^{-1} = \{S_\lambda^{(\alpha)}\}$$

对于 $\lambda \in (0, \infty)$ $S^{(\alpha)}$

λ 是 $L^2(S^2)$ 上的一个酉算子，称为“能量” λ. 处的散射矩阵。根据 [19]中的定理 6.7.3（另见 [1]中的命题 8.22），我们有

$$S_\lambda^{(\alpha)} = I - \frac{2\pi i \alpha}{G(\alpha, \lambda)} \langle\langle \cdot, u_\lambda \rangle\rangle u_\lambda$$

由（7.3），对于 $\lambda \neq \lambda_0$

$$S_\lambda^{(\alpha)} = I - 2i \frac{G_2(\alpha, \lambda)}{G(\alpha, \lambda)} \langle\langle \cdot, \frac{u_\lambda}{|||u_\lambda|||} \rangle\rangle \frac{u_\lambda}{|||u_\lambda|||} \tag{7.10}$$

注意，行列式

$$\det S_\lambda^{(\alpha)} = 1 - 2i \frac{G_2(\alpha, \lambda)}{G(\alpha, \lambda)} = \frac{\overline{G(\alpha, \lambda)}}{G(\alpha, \lambda)} = \mathrm{e}^{-2\pi i \xi_\alpha(\lambda)} \tag{7.11}$$

其中 $\xi_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi}\arg G(\alpha, \lambda)$ 是 Krein 谱移位函数。对于 $\alpha > 0$, $\alpha \neq \alpha_0$, 定义 $R_\lambda^{(\alpha)} = S_\lambda^{(\alpha)} - I$, 即

$$R_\lambda^{(\alpha)} = -\frac{2\pi i\alpha}{G(\alpha,\lambda)}\langle\langle \cdot, u_\lambda\rangle\rangle u_\lambda \tag{7.12}$$

在下面的定理中，我们研究当 α 趋于 α_0 时， $R_\lambda^{(\alpha)}$ 在 λ_0 附近的渐近行为。

定理 7.4. 考虑定义 7.2 中的模型，并附加假设 $u'_{\lambda_0} \neq 0$. 那么，对于任意固定的 $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} R^{(\alpha)}_{\lambda_h(\alpha)} = -\frac{2i}{h+i}\langle\langle \cdot, e(\lambda_0)\rangle\rangle e(\lambda_0) \quad \textit{in Hilbert-Schmidt norm}$$

其中 $e(\lambda_0) = u'_{\lambda_0}/|||u'_{\lambda_0}|||$.

证明。 将 $\lambda = \lambda_h(\alpha)$ 代入 (7.12)，得到

$$R^{(\alpha)}_{\lambda_h(\alpha)} = -2i \cdot I_1(\alpha, h) \cdot I_2(\alpha, h) \tag{7.13}$$

其中

$$I_1(\alpha,h) = \langle\langle \cdot, \frac{u_{\lambda_h(\alpha)}}{|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||}\rangle\rangle \frac{u_{\lambda_h(\alpha)}}{|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||} \quad \text{and} \quad I_2(\alpha,h) = \frac{\alpha\pi|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||^2}{G(\alpha,\lambda_h(\alpha))}$$

根据定义（7.3）可得 G_2：

$$I_2(\alpha,h) = \frac{G_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{G(\alpha,\lambda_h(\alpha))} = \frac{\kappa(\alpha)}{G(\alpha,\lambda_h(\alpha))}\frac{G_2(\alpha,\lambda_h(\alpha))}{\kappa(\alpha)}$$

（7.9）给出

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} I_2(\alpha,h) = \frac{1}{h+i} \tag{7.14}$$

我们可以改写为

$$I_1(\alpha,h) = \langle\langle \cdot, \frac{\tilde u_{\lambda_h(\alpha)}}{|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||}\rangle\rangle \frac{\tilde u_{\lambda_h(\alpha)}}{|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||}$$

其中 $\tilde u_{\lambda_h(\alpha)} = \operatorname{sgn}(\lambda_h(\alpha) - \lambda_0) u_{\lambda_h(\alpha)}$. 我们有

$$\begin{aligned} |||u_{\lambda_h(\alpha)} - u'_{\lambda_0}(\lambda_h(\alpha)-\lambda_0)||| &= \left|\left|\left| \int_{\lambda_0}^{\lambda_h(\alpha)} (u'_\lambda - u'_{\lambda_0})\,\mathrm{d}\lambda \right|\right|\right| \\ &= \left|\left|\left| \int_{\lambda_0}^{\lambda_h(\alpha)} \int_{\lambda_0}^{\lambda} u''_s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\lambda \right|\right|\right| \le c|\lambda_h(\alpha)-\lambda_0|^2 \end{aligned} \tag{7.15}$$

其中 $c = \|u''\|_{L^\infty((0,\infty)\ L^2(S^2))}$. 根据三角不等式,

$$|||u'_{\lambda_0}||| \cdot |\lambda_h(\alpha) - \lambda_0| - |||u_{\lambda_h(\alpha)}||| \le c|\lambda_h(\alpha)-\lambda_0|^2 \tag{7.16}$$

对于 $\alpha \in J \setminus \{\alpha_0\}$, 考虑

$$\begin{aligned} \frac{\tilde u_{\lambda_h(\alpha)}}{|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||} - e(\lambda_0) &= \frac{\tilde u_{\lambda_h(\alpha)}}{|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||} - \frac{u'_{\lambda_0}[\operatorname{sgn}(\lambda_h(\alpha)-\lambda_0)]}{|||u'_{\lambda_0}|||}\frac{\lambda_h(\alpha)-\lambda_0}{|\lambda_h(\alpha)-\lambda_0|} \\ &= \frac{\tilde u_{\lambda_h(\alpha)}}{|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||} - \frac{\tilde u_{\lambda_h(\alpha)}}{|||u'_{\lambda_0}||| \cdot |\lambda_h(\alpha)-\lambda_0|} + \frac{\tilde u_{\lambda_h(\alpha)} - u'_{\lambda_0}[\operatorname{sgn}(\lambda_h(\alpha)-\lambda_0)](\lambda_h(\alpha)-\lambda_0)}{|||u'_{\lambda_0}||| \cdot |\lambda_h(\alpha)-\lambda_0|} \end{aligned}$$

由三角不等式可得

$$\left|\left|\left|\frac{\tilde{u}_{\lambda_h(\alpha)}}{|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||}-e(\lambda_0)\right|\right|\right| \le \frac{|||u_{\lambda_h(\alpha)}-u'_{\lambda_0}(\lambda_h(\alpha)-\lambda_0)|||}{|||u'_{\lambda_0}|||\cdot|\lambda_h(\alpha)-\lambda_0|} + |||u_{\lambda_h(\alpha)}|||\left|\frac{1}{|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||}-\frac{1}{|||u'_{\lambda_0}|||\cdot|\lambda_h(\alpha)-\lambda_0|}\right|$$

As $\alpha\to\alpha_0$，第一项由(7.15)趋于0，第二项由(7.16)趋于0。因此，

$$\operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\tilde{u}_{\lambda_h(\alpha)}}{|||u_{\lambda_h(\alpha)}|||}=e(\lambda_0)$$

并且 $I_1(\alpha,\ h)$ 在希尔伯特-施密特范数下收敛于 $\langle\langle\cdot,\ e(\lambda_0)\rangle\rangle e(\lambda_0)$，当 $\alpha\to\alpha_0$ 时；由(7.14)可得结论。□

注7.5。当 u_λ 是强解析的，且在 λ_0处直至 n 阶均为零时，对任意固定的 $h\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}R^{(\alpha)}_{\lambda_h(\alpha)}=-\frac{2i}{h+i}\langle\langle\cdot,\frac{u^{(n)}_{\lambda_0}}{|||u^{(n)}_{\lambda_0}|||}\rangle\rangle\frac{u^{(n)}_{\lambda_0}}{|||u^{(n)}_{\lambda_0}|||}\quad \textit{in Hilbert-Schmidt norm.}$$

现在我们分析散射系统$(H_0,\ H_\alpha)$的散射截面和散射振幅。散射系统$(H_0,\ H_\alpha)$在“能量” λ 下的总散射截面 $\sigma_\alpha(\lambda)$满足（参见 [1]中的公式(7.69)）

$$\overline{\sigma}_\alpha(\lambda):=\pi\lambda^{-1}||R^{(\alpha)}_\lambda||^2_2$$

注意，$R^{(\alpha)}_\lambda$ 的核为

$$R^{(\alpha)}_\lambda(\omega_0,\omega)=-2\pi i\alpha\frac{u_\lambda(\omega_0)\overline{u_\lambda(\omega)}}{G(\alpha,\lambda)}\quad \text{for a.e. } (\omega_0,\omega)\in S^2\times S^2$$

现在我们定义散射振幅 $f(\lambda;\ \omega_0\to\omega)$（见 [1] 中的公式 (7.48)）

$$f_\alpha(\lambda;\omega_0\to\omega):=-2\pi i\lambda^{-1/2}R^{(\alpha)}_\lambda(\omega,\omega_0)=-\frac{4\pi^2\alpha}{\sqrt{\lambda}}\frac{u_\lambda(\omega)\overline{u_\lambda(\omega_0)}}{G(\alpha,\lambda)}$$

对于几乎所有的 $\lambda\in(0,\infty)$ 和 $(\omega_0,\omega)\in S^2\times S^2$.
以下关于总散射截面和散射振幅的行为的结果，是定理 7.4 的直接推论。

推论7.6. 对于任意固定的 $h\in\mathbb{R}$,
(a) $\lim_{\alpha\to\alpha_0}\overline{\sigma}_\alpha(\lambda_h(\alpha))=\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{1}{h^2+1}$ *(b)* 存在一个收敛到 α_0 的序列 $\{\alpha_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}f_{\alpha_k}(\lambda_h(\alpha_k);\omega_0\to\omega)=-\frac{4\pi}{\sqrt{\lambda_0}}\frac{u'_{\lambda_0}(\omega)\overline{u'_{\lambda_0}(\omega_0)}}{|||u'_{\lambda_0}|||^2}\frac{1}{h+i}\quad \textit{for a.e. } (\omega_0,\omega)\in S^2\times S^2$$

此外，如果 $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$，那么 $\hat{}u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$，并且根据（7.1），振幅 $f_\alpha(\lambda;\ \omega_0\to\omega)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上连续。 $\times S^2\times S^2$. 我们对振幅的收敛性作如下注记。

注记 7.7。 设 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ 且 $u'_{\lambda_0} \neq 0$ 属于 $L^2(S^2)$。那么，对于任意固定的 $h \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} f_\alpha(\lambda_h(\alpha);\omega_0 \to \omega) = -\frac{4\pi}{\sqrt{\lambda_0}} \frac{u'_{\lambda_0}(\omega)\overline{u'_{\lambda_0}(\omega_0)}}{|||u'_{\lambda_0}|||^2} \frac{1}{h+i} \quad \textit{uniformly for } \omega_0, \omega \in S^2$$

当 u_λ 在 λ_0 处至少具有 n 阶零点时，将 u'_{λ_0} 替换为 $u^{(n)}_{\lambda_0}.$，则有类似的极限结果

接下来，我们研究散射系统 (H_0, H_α) 的平均时间延迟。对于$\alpha \neq \alpha_0$，能量 $\zeta_\alpha(\lambda)$ 处的平均时间延迟 λ 可表示为（见 [2]）

$$\zeta_\alpha(\lambda) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \arg\left(\det S^{(\alpha)}_\lambda\right)$$

因此，由 (7.11)，我们得到以下关系：

$$\zeta_\alpha(\lambda) = -2\pi\xi'_\alpha(\lambda) \tag{7.17}$$

在下面的定理中，我们得到当 α 趋于 α_0. 时，平均时间延迟在 λ_0 附近的行为 ζ_α

定理 7.8. 对于每个固定的 $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \kappa(\alpha)\zeta_\alpha(\lambda_h(\alpha)) = \frac{2}{h^2+1}$$

证明。 由（7.17），注意到

$$\zeta_\alpha(\lambda) = -2\pi\xi'_\alpha(\lambda) = -2\frac{G_1(\alpha,\lambda)\frac{\partial G_2}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda) - G_2(\alpha,\lambda)\frac{\partial G_1}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda)}{|G(\alpha,\lambda)|^2}$$

现在按照定理 6.2 的证明进行，并结合（7.9）以及 $\frac{\partial G_1}{\partial\lambda}(\alpha_0, \lambda_0) = \underline{\alpha_0||\phi||^2}$, $\frac{\partial G_2}{\partial\lambda}(\underline{\alpha_0}, \underline{\lambda_0}) = 0$，即可得出结论。 □

8. Appendix

引理 8.1。 设 (X, Σ, μ) 为一个测度空间，且 $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$ 是 Σ-可测函数，满足以下条件：

(a) $f_n, f \geq 0$***(b)*** $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X f\,\mathrm{d}$
$\mu < \infty$***(c)*** $f_n \to f$ 几乎处处逐点。

Then

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$$

证明。 令 $g_n = f_n - f$ 及其正部和负部分分别为 g_n^+和 g_n^-，$g_n^- = \max\{0, -g_n\} \leq f.$ 因此，根据控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n^-\,\mathrm{d}\mu = 0$$

根据条件 (b)，我们有

$$0 \geq \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g_n^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X g_n^- \, \mathrm{d}\mu$$

这意味着

$$\int_X g_n^+ \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g_n^- \, \mathrm{d}\mu \text{ and } \lim_{n\to\infty} \int_X g_n^+ \, \mathrm{d}\mu = 0$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |g_n| \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n^+ \, \mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X g_n^- \, \mathrm{d}\mu = 0$$

证明至此完成。 □

Acknowledgements

第一作者感谢 NBHM（隶属印度政府原子能部）提供的博士研究生奖学金，项目编号为 0203/7/2019/RD-II/14855。

References

[1] W. O. Amrein、J. M. Jauch、K. B. Sinha，《量子力学中的散射理论：物理原理与数学方法》，W. A. Benjamin, Inc.，雷丁、马萨诸塞州、伦敦、阿姆斯特丹，1977年，第691页。[2] W. O. Amrein、K. B. Sinha，《势散射中的时间延迟与共振》，J. Phys. A**39**，2006年，第29期，9231–9254页。[3] J. Asch、M. A. Astaburuaga、P. Briet、V. H. Cort´es、P. Duclos、C. Fern´andez，《秩一扰动的逗留时间》，J. Math. Phys. 47 (3)，2006年。[4] G. Breit、E. Wigner，《慢中子的俘获》，Phys. Rev. 49 (7)，1936年，519–531页。[5] C. C. Conley、P. A. Rejto，《谱集中。II. 一般理论》，载于：《量子力学中的微扰理论及其应用》，Wiley，纽约、伦敦、悉尼，1966年，第129–143页。[6] H. L. Cycon、R. G. Froese、W. Kirsch、B. Simon，《薛定谔算子及其在量子力学和整体几何中的应用》，Springer-Verlag，柏林，1987年，第319页。[7] E. B. Davies，《共振、谱集中与指数衰减》，*Lett. Math. Phys.*，第1卷，第1期，第31–35页，1975/76年。[8] K. O. Friedrichs、P. A. Rejto，《关于使离散谱变为连续谱的扰动》，Comm. Pure Appl. Math. 15，1962年，219–235页。[9] W. M. Greenlee，《嵌入特征值附近的谱集中》，J. Math. Anal. Appl. 151 (1)，1990年，20–27页。[10] J. S. Howland，《有限秩算子对嵌入特征值的扰动》，J. Math. Anal. Appl. 23，1968年，575–584页。[11] J. S. Howland，《嵌入特征值与虚极点》，Pacific J. Math. 29，1969年，565–582页。[12] T. Kato，《线性算子的微扰理论》，Springer-Verlag，柏林，1995年，第619页。[13] D. Mitrea，《分布、偏微分方程与调和分析》，Springer，纽约，2013年，第460页。[14] R. G. Newton，《波与粒子的散射理论》，Dover Publications, Inc.，米尼奥拉，纽约州，2002年，第745页。[15] B. Simon，《伸缩解析势下多体量子系统中的共振与含时微扰理论的基础》，Ann. of Math. (2) 97，1973年，247–274页。[16] K. B. Sinha，《简单散射中的时间延迟与共振》，载于：《数学、化学与物理中的量子力学》，1981年，第99–106页。

[17] G. Teschl, 《量子力学中的数学方法：薛定谔算子的应用》，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2009年，第305页。[18] E. C. Titchmarsh, 《微扰理论的一些定理。III》，伦敦皇家学会会刊 A 辑 207，1951年，321–328页。[19] D. R. Yafaev, 《数学散射理论：一般理论》，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1992年，第341页。

Hemant Bansal, Department of Mathematical Sciences,
Indian Institute of ScienceEducation and Research Mohali, Sector 81, SAS Nagar,
Punjab 140306, India*Email address*: ph20030@iisermohali.ac.in

Alok Maharana, Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Science Education and Research Mohali, Sector 81, SAS Nagar, Punjab 140306, India*Email address*: maharana@iisermohali.ac.in

Lingaraj Sahu, Department of Mathematical Sciences,
Indian Institute of ScienceEducation and Research Mohali, Sector 81, SAS Nagar,
Punjab 140306, India*Email address*: lingaraj@iisermohali.ac.in

Kalyan B. Sinha, Theoretical Sciences Unit,
Jawaharlal Nehru Centre for AdvancedScientific Research, Jakkur, Bangalore,
Karnataka 560064, India*Email address*: kbs@jncasr.ac.in