arXiv:2603.05968v1 [math.AG] 6 Mar 2026

关于霍奇理论非阿贝尔几何的一则札记

QIXIANG WANG

摘要。格罗滕迪克的非阿贝尔猜想预言，数域上的某些簇类在很大程度上由其 étale基本群决定。望月定理表明，对于数域或 p-adic域上的双曲曲线，优势态射与其 étale基本群之间的开同态一一对应。

受非阿贝尔霍奇理论启发，我们提出了非阿贝尔猜想的一个霍奇理论版本，其中伽罗瓦作用被非阿贝尔霍奇理论所产生的基本群原代数完备化上的自然 $\mathbb{C}^*$-作用所取代。特别地，我们证明了望月定理关于 $\mathbb{C}$上光滑射影双曲曲线的一个霍奇理论类比。我们还得到了适用于球商型复双曲流形的高维类比，并讨论了将基本群替换为同伦型，以推广到非$K(\pi,1)$ 空间的可能性。

1. 引言

在数域 K 上，双曲曲线（即亏格为 $\geqslant 2$ 的光滑完备曲线）的算术几何极为丰富。一个著名例子是莫德尔猜想（现称法尔廷斯定理），该猜想断言双曲曲线只有有限多个有理点。它的证明，以及其几何类比（关于函数域上双曲曲线的莫德尔猜想）的证明，都表明算术几何与双曲几何之间存在更深层的联系。

双曲几何的一个关键特征是，双曲流形（尤其是高维双曲流形）具有复杂的基本群，其复杂程度足以捕捉大部分几何信息。更准确地说，莫斯托刚性定理指出：

定理 1.1 (莫斯托刚性**)**。设 X 和 Y 是紧致双曲流形，且 维数 X,维数 Y >2。那么， $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ 当且仅当 $X \simeq Y$ 作为黎曼流形。并且，

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{gp}}\big(\pi_1(X), \pi_1(Y)\big) \simeq \mathrm{Isom}(X, Y).$$

作为算术类比，格罗滕迪克提出了非阿贝尔几何纲领，其大致预测：通过取 étale基本群的函子，具有“复杂” étale基本群的 K 上的簇范畴应当完全忠实地嵌入赋范群范畴。

S. Mochizuki 得到了这方面的一项具体结果，即以下定理（也称为*Hom*猜想）。

定理1.2 ([Moc99])。设 K 为一个 p-进域或数域，并设 G_K 为 K的伽罗瓦群。设 X 与 Y 为 K上的双曲曲线。则自然映射

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{dom}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{G_K}\big(\pi_1(X), \pi_1(Y)\big)$$

日期：2025年10月。

是双射。这里，$\mathrm{Hom}^{\mathrm{dom}}(-,-)$ 是优势态射的集合，而$\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{G_K}\big(\pi_1(X),\pi_1(Y)\big)$表示基本群之间与纤维序列相容的开同态的集合

$$1 \longrightarrow \pi_1(\bar{Z}) \longrightarrow \pi_1(Z) \longrightarrow G_K \longrightarrow 1 \qquad (Z = X \ \ or\ Y).$$

请注意，基域的伽罗瓦群在命题本身中发挥着至关重要的作用。事实上，在代数闭域（例如 $\mathbb{C}$）上，基本群之间的同态集合所包含的信息，远不如曲线之间的态射集合丰富。特别地，双曲曲线的基本群之间存在同构，当且仅当它们的亏格相等。

受 Hitchin 和 Simpson 关于非阿贝尔霍奇理论的工作启发，我们为复双曲黎曼曲面表述定理 1.2 的一个复解析类比，其中伽罗瓦群 G_K 被非阿贝尔霍奇理论所产生的“$\mathbb{C}^*$-作用”取代。

非阿贝尔霍奇对应指出，对于光滑真 X ，存在范畴等价:

$$\left\{\begin{matrix}\textit{finite-dimensional } \mathbb{C}-\textit{representations}\\ \textit{of the fundamental group } \pi_1(X)\end{matrix}\right\} \simeq \left\{\begin{matrix}\textit{semistable Higgs bundles on } X\\ \textit{with vanishing Chern classes}\end{matrix}\right\}$$

可以将其视为霍奇分解的一个非阿贝尔版本。在希格斯侧，有一个通过对希格斯场进行缩放而定义的自然 $\mathbb{C}^*$-作用， $\theta \mapsto t\theta$。这意味着，在局部系统侧应当存在一个隐藏的“$\mathbb{C}^*$-作用”于 $\pi_1(X)$之上，并且 $\mathbb{C}^*$ 应被视为复数的“动机伽罗瓦群”。基于这一思路，我们提出并证明以下霍奇理论版本的定理 1.2。

定理1.3 (定理 3.1.1，定理3.2.1)。 设 X 是一个紧致凯勒流形， $Y/\mathbb{C}$ 是一条光滑射影双曲曲线。那么自然映射

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{dom}}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\mathbb{C}^*}\big(\pi_1(X),\pi_1(Y)\big)$$

是双射。我们在定义 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\mathbb{C}^*}(-,\ -)$ 中解释其定义，见定义 *2.2.1*。

证明相对简单，但关键依赖于非阿贝尔霍奇理论。运用类似的方法，我们还证明了一个高维推广。

定理1.4。 设 X 是一个紧致凯勒流形， Y 是一个（紧致）球商型复双曲流形。那么自然态射

$$\pi\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^*}\big(\pi_1(X),\pi_1(Y)\big)$$

诱导出一个同构

$$\pi^{-1}(\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\mathbb{C}^*}(\pi_1(X),\pi_1(Y))) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^*}\big(\pi_1(X),\pi_1(Y)\big)$$

绝对几何的最新进展表明，某些非$K(\pi、\ 1)$ 空间也会出现绝对现象，前提是考虑整个 étale同伦型，而不是 étale基本群。特别是，以下定理已在 [SS16]中得到证明。

定理1.5 ([SS16，定理1.2])。 设 $K/\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$的有限生成扩张。设 X 和Y 是 K 上的光滑几何连通簇，它们可以嵌入为 K上的双曲曲线的乘积中的局部闭子概形。那么

$$\mathrm{Isom}_K(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Isom}_{(\mathrm{Spec}\,K)^{\sim}_{\text{ét}}}\big((X_{\text{ét}})^{\sim},(Y_{\text{ét}})^{\sim}\big)$$

存在一个截面。这里，$(-)^{\sim}_{\text{ét}}$ 表示概形的*étale*同伦型。

在复解析语境中，我们选取在 [KPT08] 中构造的概形同伦型作为étale同伦型的类似物，并将给出它的一个类似的霍奇理论版本。

猜想1.6. 设 X 与 Y 是 $\mathbb{C}$ 上的光滑几何连通簇，且可作为闭子概形嵌入 $\mathbb{C}$上双曲曲线的乘积中。则

$$\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}^*}\left(X(\mathbb{C})^{\sim}, Y(\mathbb{C})^{\sim}\right)$$

存在一个截面。关于右侧的定义，我们参见定义*3.3.2* *e.*

本注记源于试图理解定理1.2，所借助的视角是 p进非阿贝尔霍奇理论（通常称为 p进Simpson对应；例如参见[Heu25]）。Mochizuki的证明关键依赖于 p进霍奇理论，这自然表明，一个更为精细的框架——即 p进非阿贝尔霍奇理论——或许能提供新的视角。值得注意的是，Mochizuki的论证技术性很强，难以直接移植到我们的霍奇理论设定中，而我们的方法则相对简单直接。

受定理 1.3 的证明启发，我们认为，深入研究某些双曲曲线上的一致化局部系统[1]（定义在 $\mathbb{C}_p$ 上），或许能为定理 1.2 提供一种更具概念性的证明。鉴于这些想法仍处于初步阶段，且在逻辑上独立于本文的工作，我们在此不再进一步探讨，而是请感兴趣的读者留意未来的工作，以了解更多细节。

1.1.致谢。 作者谨此感谢 Kęstutis Česnavičius 的支持。作者也感谢 Daniel Litt、Vadim Vologodsky 和 Sasha Petrov 所进行的有益讨论。

2. Non-abelian Hodge theory and the $\mathbb{C}^*$-action

2.1. 非阿贝尔霍奇理论回顾。 对于紧致凯勒流形 $(X,\ \omega)$，Simpson 建立的非阿贝尔霍奇对应将拓扑对象——局部系统——与代数对象——Higgs 丛——联系起来。回顾一下，希格斯丛 $(E,\ \theta)$ 在 X 上是一个向量丛 E，其定义在X 上，并带有一个 $\mathcal{O}_X$-线性态射

$$\theta\colon E \longrightarrow E\otimes\Omega^1_X, \theta\wedge\theta = 0.$$

若每个希格斯子丛 $F\subset E$ 都满足 $\deg(F)/\mathrm{rk}(\mathrm{E}) \leqslant \deg(F)/\mathrm{rk}(F)$，其中 $\deg(F) \coloneqq \int_X c_1(F)\wedge\omega^{n-1}$，则称希格斯丛 (E,θ) 半稳定。若 $\int_X c_1(E)\wedge\omega^{n-1} = \int_X c_2(E)\wedge\omega^{n-2} = 0$，则称希格斯丛 (E,θ) 的陈类消失。非阿贝尔霍奇对应如下。

定理 2.1.1 ([Sim92])。存在一个范畴等价：

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Finite-dimensional } \mathbb{C}-\textit{representations}\\ \textit{of the fundamental group } \pi_1(X)\end{matrix}\right\} \simeq \left\{\begin{matrix}\textit{Semistable Higgs bundles on } X\\ \textit{with vanishing Chern classes}\end{matrix}\right\}$$

此外，对于每个约化群 G，这诱导出基本群的表示模空间与(半稳定且陈类消失) 的希格斯丛模空间之间的一个同胚：

$$\mathrm{Rep}_{G(\mathbb{C})}\left(\pi_1(X)\right)(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Higgs}_G^{\mathrm{ss},\,\mathrm{Ch}=0}(X)(\mathbb{C}), \tag{2.1}$$

它关于约化群之间的同态 G具有函子性。

[1]也就是说，$\mathbb{C}_p$-局部系统在 p-进 Simpson 对应下所对应的希格斯丛，是例2.1.3中定义的一致化希格斯丛。Xu–Zhu 最近在尚未发表的工作中有条件地证明了此类局部系统的存在性。

我们回顾非阿贝尔霍奇对应的一些基本事实。

命题 2.1.2 ([Sim92])。在上述设定下：

(1) 设 $\mathcal{L}$ 是 X上的局部系统。若希格斯丛 $(E,\ \theta)$ 在 (2.1.1) 下对应于 $\mathcal{L}$ 具有以下形式：

$$E \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} E_i, \qquad \theta = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \theta_i \ \textit{with}\ \theta_i \colon E_i \to E_{i-1}\otimes\Omega_X^1, \tag{2.2}$$

其中 E_i 是向量丛，且 θ_i 是 $\mathcal{O}_X$-线性的，那么 $\mathcal{L}$ 构成一个极化霍奇结构变分 (（*PVHS*）)。我们称形如 (2.2) 的希格斯丛为 分次希格斯丛。

(2) 对任意 $t\in\mathbb{C}^*$，缩放 $\theta\mapsto t\theta$ 在希格斯$^{ss}_G(X)(\mathbb{C})$上定义一个连续的 $\mathbb{C}^*$-作用。希格斯丛 (E,θ) 在此 $\mathbb{C}^*$-作用下不变，当且仅当 (E,θ) 是分次希格斯丛。

(3) (由 *(1)* 推出 *+(2)*。) 在 (2.1)下， $\mathbb{C}^*$-作用传递为 $\mathbb{C}^*$-作用于 $\pi_1(X)$的表示模空间。特别地，局部系统 $\mathcal{L}$ 对应于该作用的一个不动点，当且仅当它构成一个 极化霍奇结构变分。

以下是极化霍奇结构变分底层的分次希格斯丛及其对应局部系统的一个重要例子。

例 2.1.3。 考虑如下射影希格斯丛 $\mathbb{P}\big((E_X,\ \theta)\big)$:

$$E_X \coloneqq \mathcal{O}_X\oplus\Omega_X^1, \qquad \theta\colon \mathcal{O}_X\oplus\Omega_X^1 \to \Omega_X^1\oplus(\Omega_X^1)^{\otimes 2} \ \text{ with } \ \theta|_{\mathcal{O}_X}=0,\ \theta|_{\Omega_X^1}=(\mathrm{id},0),$$

其中， $\mathbb{P}(E,\ \theta)$ 表示 $(E_X,\ \theta)$的关联射影丛。我们称 $(E_X,\ \theta)$ 为一致化希格斯丛（（由于此构造与 X的维数无关，因此对任意光滑代数簇均使用同一术语））。

若 X 是一条双曲曲线，则该希格斯丛在非阿贝尔霍奇对应下对应于 $\pi_1(X)$ 的 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$表示，其定义为

$$\rho_X\colon \pi_1(X)\longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H})\simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}),$$

˜其中，第一个映射来自一致化 $X\simeq\mathbb{H}$。至多只需选取一个双覆盖（ $H^1(X,\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$中的一个元素），即可将此表示提升至 $\tilde{\rho}_X$： $\pi_1(X)\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$。相应的希格斯丛至多只需选取 Ω_X^1的一个平方根，即为如下形式

$$\tilde{E}_X \coloneqq \Omega_X^{-\frac{1}{2}}\oplus\Omega_X^{\frac{1}{2}}, \qquad \theta\colon \Omega_X^{-\frac{1}{2}}\oplus\Omega_X^{\frac{1}{2}}\to\Omega_X^{\frac{1}{2}}\oplus\Omega_X^{\frac{3}{2}} \ \text{ with } \ \theta|_{\Omega_X^{-\frac{1}{2}}}=0,\ \theta|_{\Omega_X^{\frac{1}{2}}}=(\mathrm{id},0).$$

1 1¯这是一个分次希格斯丛（其中 $\Omega_{\tilde{X}}{}^2$为权 0 部分，Ω_X^2 为权一部分），因此 $\tilde{\rho}_X$ 给出一个局部系统 $\mathbb{L}_X$，在 X 上支撑一个极化霍奇结构变分结构。

事实上，在 [Sim88] Simpson 通过考虑周期映射重新证明了一致化定理˜ ˜对应于 $\mathbb{L}_X$： p： $X\to\mathbb{H}$，其中 X是万有覆盖。可以看到， p 的切映射可由 θ计算，在我们的情形中为恒等映射。因此， p 是一个同构，因为二者均为单连通。

沿此思路，Simpson 给出了如下例子

例 2.1.4 ([Sim88，命题 9.1，命题 9.8])。 设 X 是一个维数为 n的紧致凯勒流形，考虑射影一致化 Higgs 束 $\mathbb{P}(E_X,\ \theta)$。若满足

$$(2c_2(X)-\frac{n}{n+1}c_1(X)^2)[\omega]^{n-2}=0$$

其中 $c_i(X)$ 是陈类， $[\omega]$ 是凯勒形式的类，则 $\mathbb{P}(E_X,\ \theta)$ 给出一个具有消失陈类的稳定射影希格斯丛。此外，它还给出一个定义在 X 上的$\tilde{}$PU$(n,\ 1)$-极化霍奇结构变分，其周期映射将万有覆盖 $X \simeq \mathbb{D}^n$ 同构映到复双曲球（PU$(n,\ 1)$ 的周期域）。反过来，若 X 的万有覆盖是复双曲球，则它存在一个按上述方式构造的 PU$(n,\ 1)$-极化霍奇结构变分。

2.2. $\mathbb{C}^*$**作用于基本群**。受命题 2.1.2(2) 的启发，人们预期存在一个隐藏的$\mathbb{C}^*$作用于 $\pi_1(X)$。事实上，Simpson 证明，在选定一个基点 $x \in X(\mathbb{C})$之后，存在一个典范的 $\mathbb{C}^*$作用（其中 $\mathbb{C}^*$ 被视为离散群）作用于 $\pi_1(X,\ x)^{\mathrm{alg}}_{\mathbb{C}}$ 即 $\mathbb{C}$-线性原代数完备化 $\pi_1(X,\ x)$ [Sim92，定理 6]。现在我们简要说明一个略有不同的版本。

回顾一下，对于抽象群 G，其 $\mathbb{C}$-线性原代数完备化 为 G 上的 pro代数群 G^{alg}，并配备映射 $G \to G^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C})$，使得任意有限维 $\mathbb{C}$-表示 G 都经由 G^{alg}. 。等价地，它是有限维 $\mathbb{C}$-表示 G 所构成的坦纳卡范畴的坦纳卡群，并配备遗忘 G-表示结构的纤维函子。不取纤维函子时，这定义了一个格布 BG^{alg} （见 [Mil07]）。

现在，类似地，考虑 $\mathbb{C}$-局部系统的坦纳卡范畴 $\mathrm{Loc}_{\mathbb{C}}(X)$ （定义在 X 上），选取一个基点 $x \in X$，便可通过将局部系统映射到其在 x 处的茎，得到纤维函子 $\mathrm{Loc}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$，进而产生坦纳卡群 $\pi_1(X,\ x)^{\mathrm{alg}}$。若不选取基点，则该坦纳卡范畴对应于一个格布 $B\pi_1(X)^{\mathrm{alg}}$。

根据定理 2.1.1，坦纳卡范畴$\mathrm{Loc}_{\mathbb{C}}(X)$ 等价于坦纳卡范畴$\mathrm{Higgs}^{\mathrm{ss},\ \mathrm{Ch}=0}(X)$ 由具有消失陈类的半稳定希格斯丛组成。后一个范畴上存在 $\mathbb{C}^*$ 如命题2.1.2中的作用，它诱导出 $\mathbb{C}^*$ 格布上的作用 $B\pi_1(X)^{\mathrm{alg}}$，或者等价地，一个同态

$$\mathbb{C}^* \to \pi_0 \operatorname{Aut}_{\mathrm{Stack}/\mathbb{C}}\big(B\pi_1(X)^{\mathrm{alg}}\big). \tag{2.3}$$

具体来说，这意味着一个 $\mathbb{C}^*$-作用于 $\pi_1(X)^{\mathrm{alg}}$ （模共轭）：

$$\mathbb{C}^* \to \mathrm{Out}\big(\pi_1(X)^{\mathrm{alg}}\big). \tag{2.4}$$

设 Y 是另一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇。由原代数完备化的函子性，模共轭的同态集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gp}}\big(\pi_1(X),\ \pi_1(Y)\big)/\sim$ 自然映射到 $\mathrm{Hom}_{\text{alg-gp}}\big(\pi_1(X)^{\mathrm{alg}},\ \pi_1(Y)^{\mathrm{alg}}\big)/\sim$。更形式地说，我们有

$$\mathrm{alg}(X,Y)\colon \pi_0\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ani}}\big(B\pi_1(X), B\pi_1(Y)\big) \longrightarrow \pi_0\mathrm{Hom}_{\mathrm{Stack}/\mathbb{C}}\big(B\pi_1(X)^{\mathrm{alg}}, B\pi_1(Y)^{\mathrm{alg}}\big).$$

由（2.3），目标上有一个 $\mathbb{C}^*$-作用。

定义 2.2.1。在上述情形下：

(1) 同态 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{gp}}\big(\pi_1(X),\ \pi_1(Y)\big)/\sim$ 若其像 $\mathrm{alg}(X,\ Y)(f)$ 在 $\mathbb{C}^*$-作用下保持不变，则称其为 $\mathbb{C}^*$-等变。(2) 若同态 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{gp}}\big(\pi_1(X),\ \pi_1(Y)\big)/\sim$ 的像 $f\big(\pi_1(X)\big)$ 包含 $\pi_1(Y)$ 的一个有限指数子群，则称其为开。

我们用 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\mathbb{C}^*}\big(\pi_1(X),\ \pi_1(Y)\big)$ 表示既为开映射又是 $\mathbb{C}^*$-等变的同态集合。

现在我们来解释定理 1.2 中我们的 ${}^{\mathrm{open}}_{\mathbb{C}^*}(-\mathrm{Hom}-)$ 、${}^{\mathrm{open}}_{G_K}(-$与 $-)$ 经典概念$\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{G_K}(-$ 之间的关系。

首先，在复解析情形下，我们尚无充分发展的“算术基本群”（或者更准确地说，“Weil基本群”）概念，无法补全如下形式的正合序列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow ? \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{Weil}}(\mathbb{C}) \coloneqq \mathbb{C}^* \longrightarrow 1.$$

相比之下，$\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(-,-)$ 的定义涉及源和目标两端算术基本群之间的同态。然而，在 G_K 上的 $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ 与 $\pi_1^{\text{ét}}(Y)$ 之间的满同态（模共轭）等价于（假设 $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y})$ 无中心）几何基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{X})$ 与 $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y})$之间的同态（模共轭），且该同态相对于 G_K的外作用是等变的。事实上，由于在这种情况下，可以通过左侧的笛卡儿图从 $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y})$ 重构出 $\pi_1^{\text{ét}}(Y)$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{ét}}(Y) & \longrightarrow & G_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Aut}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y})) & \longrightarrow & \mathrm{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y})) \\ \downarrow{\scriptstyle -\circ f} & & \downarrow{\scriptstyle -\circ f} \\ \mathrm{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{X}), \pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y})) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{X}), \pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y}))/\sim \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{ét}}(X) & \longrightarrow & G_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Aut}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{X})) & & \mathrm{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y})) \\ \downarrow{\scriptstyle f\circ -} & & \downarrow{\scriptstyle -\circ f} \\ \mathrm{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{X}), \pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y})) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{X}), \pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y}))/\sim \end{array}$$

其中，f是给定的 G_K-等变满射 $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{X}) \to \pi_1^{\text{ét}}(\bar{Y})$。随后，右侧的交换图根据 f重构出映射 $\tilde{f}$: $\pi_1^{\text{ét}}(X) \to \pi_1^{\text{ét}}(Y)$。

从这个角度来看，我们对基本群之间的 $\mathbb{C}^*$-等变同态的定义，完全类似于 G_K 上算术基本群之间的同态这一概念。

其次，给定一个非平凡的有限群之间的开同态 $G_1 \to G_2$，其像必然包含 G_2 的一个有限指数子群；事实上，这类子群构成了 G_2 上赋范拓扑的一个基。

从这个意义上说，我们对 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^*}^{\mathrm{open}}$ 的定义，自然类似于经典的单群几何中的 $\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}$。

最后，我们记录基本群的 $\mathbb{C}^*$-等变同态的一项基本性质。

命题 2.2.2。在上述设定中，设 $\mathcal{L}$ 是 Y 上一个 $\mathbb{C}$-局部系统，且它底层的结构是一个极化霍奇结构变分。那么，对于任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^*}^{\mathrm{open}}\big(\pi_1(X), \pi_1(Y)\big)$，$X$ 上的拉回局部系统 $f^*\mathcal{L}$ 也具有极化霍奇结构变分的底层结构。

证明。这正是 [Sim92，引理5.5和引理5。6]。 □

3. 绝对几何的霍奇理论版本

3.1. 双曲曲线的情形。现在我们来表述并证明双曲曲线的霍奇理论Hom猜想。

定理3.1.1。设 $X, Y/\mathbb{C}$ 为光滑射影双曲曲线。那么自然映射

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{dom}}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^*}^{\mathrm{open}}\big(\pi_1(X), \pi_1(Y)\big)$$

是双射。这里，$\mathrm{Hom}^{\mathrm{dom}}(X,Y)$ 表示优势态射 $X \to Y$ 的集合。

证明。单射性。此处我们给出一个更简单的证明，尽管定理 3.2.1 的证明也适用于此处。设 F，G: $X \to Y$是优势态射。若基本群上的诱导映射

$\pi_1(F)$ 和 $\pi_1(G)$ 在共轭意义下等价，我们将证明 $F = G$。令 $x_0 \in X$ 并设$y_0 = G(x_0)$ 和 $y = F(x_0)$。考虑上同调上的诱导映射

$$F^*\colon H^1(Y,\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathbb{C}), \qquad G^*\colon H^1(Y,\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathbb{C}).$$

基本群上的条件蕴含 $F^* = G^*$。由霍奇分解的函子性和托雷利定理，这意味着雅可比簇上的相应映射F_*, $G_*\colon Jac(X) \to Jac(Y)$是等价的。此外，存在一个图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad F \quad} & Y \\ & \xrightarrow[\quad G \quad]{} & \\ {\scriptstyle AJ_{X,x}}\downarrow & & \downarrow\downarrow{\scriptstyle AJ_{Y,y_0}+y} \\ & {\scriptstyle G_{AJ_{Y,y_0}}} & \\ \mathrm{Jac}(X) & \xrightarrow{F_*=G_*} & \mathrm{Jac}(Y) \end{array}$$

其中竖直映射是阿贝尔–雅可比映射，内侧图表和外侧图表分别交换。由于阿贝尔–雅可比映射将 X 和 Y 单射地嵌入各自的雅可比簇中，根据 F和 G的主导性，该图表表明 Y在 $Jac(T)$中经由 AJ_Y和 $AJ_Y + y$映射后具有相同的像。但除非 $F(x_0) = y = y_0 = G(x_0)$, Y和 $Y + y$ 在 $\mathrm{Jac}(Y)$ 中的交集只有有限多个点。因此，由于我们对 x_0 的选择是任意的，这表明 $F = G$。

满射性。令 $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\mathbb{C}^*}\big(\pi_1(X),\ \pi_1(Y)\big)$。我们构造一个主导态射 $\mathcal{F}\colon X \to Y$，使得其在基本群上诱导的同态 $\pi_1(\mathcal{F})$（相差一个共轭）为 f。

考虑$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$-局部系统 $\mathcal{L}_Y$对应于 ρ_Y例 2.1.3；它蕴含一个 极化霍奇结构变分。由命题 2.2.2, X 对应于 $\rho_Y \circ f$ 的局部系统也蕴含一个 极化霍奇结构变分。这˜在万有覆盖上给出一个周期映射 X:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \simeq \mathbb{H} & \xrightarrow{\tilde{F}} & D = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \simeq \mathbb{H} \\ \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

其中 $\mathbb{H}$ 是上半平面, D 是周期域。由 f的开性可知，局部系统

˜不是酉的，因此 F 不是常值的。对单值化群取商后, F 诱导出一个全纯映射

$$F'\colon X \longrightarrow D/\Gamma,$$

其中 $\Gamma = \mathrm{Im}_{\rho_Y \circ f}\big(\pi_1(X)\big)$。由于 $\rho_Y\big(\pi_1(Y)\big)$是 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$的忠实离散子群（因此在 D上作用真不连续），且 Γ 是其子群，所以商空间 D/Γ 是一个复流形。与

$$G\colon D/\Gamma \longrightarrow D/\rho_Y\big(\pi_1(Y)\big) \simeq \mathbb{H}/\pi_1(Y) \simeq Y$$

我们得到 $F = G \circ F'\colon X \to Y$。根据构造，诱导的基本群映射 $\pi_1(F)$ 等价于 f。证明完毕。□

3.2. 高维类阿贝尔几何。 双曲曲线的一种自然的高维推广是球商型复双曲流形。这些流形自然是 $K(\pi,\ 1)$ 空间，并具有“双曲性”，因此有可能是绝对几何对象。本节将在一定程度上证实这一推测。

回顾一下, n 维复双曲球是区域

$$\mathbb{D}^n \coloneqq \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z|^2 < 1\}.$$

它具有全纯 rphic 自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^n) \simeq \mathrm{PU}(n,1)$ 并带有 Bergman 度量 ic

$$h = \frac{(1-|z|^2)\sum_i dz_i \otimes d\bar{z}_i + (\sum_i \bar{z}_i dz_i) \otimes (\sum_i z_i d\bar{z}_i)}{(1-|z|^2)^2}$$

的常截面曲率 -1。我们称紧致凯勒流形 B 为球商型，若$B \simeq \mathbb{D}^n/\Gamma$ 存在某个余有限体积离散子群 $\Gamma \subset \mathrm{PU}(n,\ 1)$。本节将证明，球商型具有霍奇理论绝对数学性质；更确切地说，我们有以下结论。

定理 3.2.1。设 X 为紧致凯勒簇， Y 为球商型复双曲流形。那么自然态射

$$\pi\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^*}\big(\pi_1(X),\pi_1(Y)\big)$$

诱导出一个同构

$$\pi^{-1}(\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\mathbb{C}^*}(\pi_1(X),\pi_1(Y))) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^*}\big(\pi_1(X),\pi_1(Y)\big)$$

此外，假设 X 也为球商型，则它诱导出一个同构 sm

$$\mathrm{Isom}(X,Y) \simeq \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}^*}(\pi_1(X),\pi_1(Y)).$$

请注意，最后一部分得出的结论本质上弱于 Siu 全纯莫斯托刚性[Siu80]。可以设想，证明中所采用的策略或许能为 Siu 的结果提供另一种证明。

注 3.2.2。 构造 *Theorem* 3.2.1 略显人为。这是因为尚不清楚，对于给定的球商型之间的全纯映射 $f\colon X \to Y$，其在基本群上诱导的映射 $\pi_1(f)\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 是满射，是否足以证明 f是主导的。当 f 光滑时，由 [KM08]可知，这在某种程度上成立。

在继续证明之前，我们先简要回顾实约化群 $G_{\mathbb{R}}$ 及霍奇余特征 $h\colon \mathbb{S} \simeq \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m \to G_{\mathbb{R}}$的 $(G_{\mathbb{R}},$ $h)$-极化霍奇结构变分的概念。

定义 3.2.3。 设 G 为实约化群，且 $h\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m \to G$ 为霍奇余特征。

(1) 复流形 X 上的 G-霍奇结构变分（G-极化霍奇结构变分）是 X 上的 $G(\mathbb{R})$-局部系统 $\mathbb{L}$，满足：对于每个忠实表示 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$，诱导的局部系统 $\mathbb{L} \times_{G(\mathbb{R})} V_{\mathbb{R}}$ 都关于霍奇余特征 $\rho \circ h$具有极化霍奇结构变分。**(2)** 设 H_h 为稳定霍奇余特征 h的 $G(\mathbb{R})$ 的子群。那么，实解析流形 $D_{G,h} \coloneqq G(\mathbb{R})/H_h$ 具有复流形结构，我们称之为与 (G,h).相关的周期域。**(3)** 回顾一下，根据 [Mil11 定理 7.3]，对于复流形 X 及其万有覆盖

$\tilde{}$ $\tilde{X}$， X 上的 G-极化霍奇结构变分 $\mathbb{L}$ 诱导出一个全纯映射 $f_{\mathbb{L}}\colon X \to D_{G,h}$，该映射关于 $\pi_1(X)$ 是等变的（这里， $\pi_1(X)$ 通过将 $G(\mathbb{R})$ 在 $D_{G,h}$ 上的作用与底层表示 $\rho_{\mathbb{L}}\colon \pi_1(X) \to G(\mathbb{R})$复合，作用于 $D_{G,h}$ ）。我们称此映射 $f_{\mathbb{L}}$ 为与 $\mathbb{L}$.相关的周期映射

将 h 与共轭作用 $G \to \mathrm{Aut}(G)$ 复合，我们在 G上得到一个 $\mathbb{C}^*$-作用。我们称之为与 h相关联的$\mathbb{C}^*$-作用于 G 相关联于 h。

根据坦纳卡形式主义，复Kähler流形 X 上的 G局部系统 $\mathbb{L}$ 等价于（原）代数群之间的一个态射 $\pi_{\mathbb{L}}\colon \pi_1^{\mathrm{alg}}(X) \to G$，且等价关系取模共轭。

命题 3.2.4. 设 G 为实约化群，且 $h\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m \to G$ 为一个霍奇余特征。若$\mathbb{L}$ 是紧致凯勒流形 X 上的局部系统，对应于原代数群的一个态射 $\pi_{\mathbb{L}}\colon \pi_1^{\mathrm{alg}}(X) \to G$，则 $\mathbb{L}$ 具有 G-极化霍奇结构变分 结构，当且仅当该 $\pi_{\mathbb{L}}$ 相对于 $\mathbb{C}^*$ 作用是等变的。

此外，若 $\mathbb{L}$ 不可约且 $\pi_{\mathbb{L}}$ 是 $\mathbb{C}^*$ 等变的，则 $\mathbb{L}$ 容许唯一的 G-极化霍奇结构变分 结构。

证明。 这正是 [Sim92，引理 5。8]。 □

定理 3.2.1 的证明。我们首先证明满射性。即对任意 $\mathbb{C}^*$ 等变开态射$f\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$，我们将构造一个映射 $F\colon X \to Y$，使得 $\pi_1(F) = f$ 在共轭意义下成立。注意，通过过渡到有限 étale 覆盖，可以假定 f 是满射。考虑由表现 $Y \simeq \mathbb{D}^n/\pi_1(Y)$.诱导的表示 $\rho_Y\colon \pi_1(Y) \to \mathrm{PU}(n, 1) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^n)$。由例 2.1.4，对应于 ρ_Y的 $\mathrm{PU}(n, 1)$ 局部系统 $\mathbb{L}_Y$带有一个 $\mathrm{PU}(n, 1)$-极化霍奇结构变分结构，而且其单值化群是扎里斯基稠密的。由命题 3.2.4，我们看到这给出一个 $\mathbb{C}^*$-等变满射 $\rho_Y^{\mathrm{alg}}\colon \pi_1^{\mathrm{alg}}(Y) \twoheadrightarrow \mathrm{PU}(n, 1)$。
由于 f是 $\mathbb{C}^*$ 等变的，我们有 $\rho_Y^{\mathrm{alg}} \circ f^{\mathrm{alg}}$ 给出一个 $\mathbb{C}^*$ 等变满射 $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{PU}(n, 1)$。因此我们有 $\rho_Y \circ f$ 对应于 X上的一个$\mathrm{PU}(n, 1)$-极化霍奇结构变分。考虑其周期映射，给出如下全纯映射：

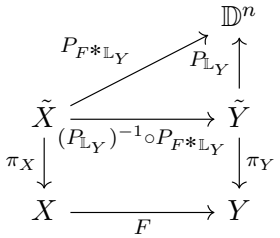
$$X \to \mathbb{D}^n/\rho_Y \circ f(\pi_1(X)).$$

再与自然投影复合 $\mathbb{D}^n/\rho_Y \circ f(\pi_1(X)) \to \mathbb{D}^n/\rho_Y(\pi_1(Y)) \simeq Y$即给出所需的态射 $F\colon X \to Y$. 注意，这样的构造是典范的，因为由 ρ_Y的不可约性以及 f的满射性， $\rho_Y \circ f$ 也是不可约的，从而由命题 3.2.4 存在唯一的$\mathrm{PU}(n, 1)$-极化霍奇结构变分结构与 $\rho_Y \circ f$相关联。

现在证明单射性。设 $F\colon X \to Y$ be 一个态射，且其诱导映射$\pi_1(F)\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 是开映射。由于其像的指标有限， G实际上可分解为经过 Y 的一个有限 étale 覆盖 Y'，使得其在基本群上的诱导映射 $\pi_1(X) \to \pi_1(Y')$ 是˜满射。通过这一化约，我们可以假设 $\pi_1(F)$ 是满射。设 F 是由 $\pi_1(G)$在上文构造的映射；由于这样的 F由 $\pi_1(F)$唯一确定，只需证明 $F = F$。为此，只需证明下图可交换

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{P_{F^*\mathbb{L}_Y}} & \mathbb{D}^n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[F]{} & Y \end{array}.$$

这里， $P_{F^*\mathbb{L}_Y}$是与 $\mathrm{PU}(n, 1)$-极化霍奇结构变分 $F^*\mathbb{L}_Y$相关联的周期映射，而 π_X是从 X 的万有覆盖 X 出发的自然˜投影。实际上，我们将展开该图表，以阐明映射$\mathbb{D}^n \to Y$。



其中， $P_{\mathbb{L}_Y}$ 是与 $\mathbb{L}$ 相关联的周期映射（根据 [Sim88，命题 9，1] 它是一个同构）。由于所有映射都是全纯的，只需证明该图表

在集合论层面上是可交换的。也就是说，对于任意点 $\tilde{x} \in \tilde{X}$，
$y \coloneqq F(\pi_X(\tilde{x})) = \pi_Y \circ (P_{\mathbb{L}_Y})^{-1} \circ P_{F^*\mathbb{L}_Y}(\tilde{x})$.~或者等价地，任取 y 的一个提升 $\tilde{y} \in Y$，我们需要证明在 $\pi_1(X)$ 作用下， $P_{F^*\mathbb{L}_Y}(\tilde{x}) = P_{\mathbb{L}_Y}(\tilde{y})$.
将 $\mathbb{D}^n$ 嵌入旗簇 $\mathbb{P}^n$，只需证明 $\pi_X^*(F^*\mathbb{L}_Y \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_X)$ 上限制到$\tilde{x}$ 的旗在 $\pi_1(X)$ 作用之下与 $\pi_Y^*(\mathbb{L}_Y \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_Y)$ 上限制到 $\tilde{y}$的旗相同。但由函子性， $\tilde{x}$ 上的旗与PU$(n,1)$-PHS $\mathbb{L}_Y|_y$所关联的旗相同。类似地，由函子性， $\pi_Y^*(\mathbb{L}_Y \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_Y)$ 上限制到 $\tilde{y}$ 的旗在平凡化上的 $\pi_1(Y)$ 作用之下与PU$(n,1)$-PHS $\mathbb{L}_Y|_y$上的旗相同。这就完成了第一部分的证明。

对于第二部分，注意 X 与 Y 都是$K(\pi,1)$ 空间，因此由怀特海德定理，诱导基本群同构的映射 f: $X \to Y$ 诱导上同调的同构，特别地，诱导同构$\mathrm{H}^{2n}(f)$: $\mathbb{Z} \simeq \mathrm{H}^{2n}(Y,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2n}(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$。因此 f 的度为1，这意味着 f 是双有理的。因此我们有

$$K_X \sim f^*K_Y + \sum_i a_i E_i$$

因为 $a_i \geqslant 0$ 和 E_i 是例外除子。但现在对于任意收缩曲线 $C \subset X$ （即 $f(C) =$ 点），我们有

$$0 < K_X \cdot C = f^*K_Y \cdot C + = (\sum_i a_i E_i) \cdot C \leqslant 0$$

这与此矛盾，除非 f 是同构。

□

3.3. **同伦型的绝对现象**。 最后，我们对非-$K(\pi,1)$ 空间的高维霍奇理论的类算术几何作一些推测。

在 [SS 16], 以下 Hom 猜想的高维版本已被证明 d.

定理 3.3.1. 设 $K/\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$的有限生成扩张。设 X 和 Y 是 K 上的光滑几何连通簇，且可嵌入 K 上的双曲曲线乘积的局部闭子概形中。那么

$$\mathrm{Isom}_K(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Isom}_{(\mathrm{Spec}\, K)^\sim_{\text{ét}}}\left((X_{\text{ét}})^\sim, (Y_{\text{ét}})^\sim\right)$$

容许一个截面。此处， $(-)^\sim_{\text{ét}}$ 表示概形的*étale*同伦型。

在霍奇理论的语境中，我们对于这个“算术étale同伦型”有一个自然的候选对象。

回想，对于光滑适当概形 S 在 $\mathbb{C}$之上，由 [KPT08] ，可以函子性地把同伦型 $S(\mathbb{C})^\sim$ 关联为一个 ∞-栈 $(S(\mathbb{C})^\sim)^{\mathrm{sh}} \otimes \mathbb{C}$。在 [KPT08], 中证明了 $(S(\mathbb{C})^\sim)^{\mathrm{sh}} \otimes \mathbb{C}$容许一个 $\mathbb{C}^*$-作用（其中 $\mathbb{C}^*$ 为离散）。特别地，栈 $(S(\mathbb{C})^\sim)^{\mathrm{sh}} \otimes \mathbb{C}$ 的上同调同构于 $H^*(S(\mathbb{C})^\sim, \mathbb{C})$ 即 S的复系数贝蒂上同调，其中 $\mathbb{C}^*$ 作用实现霍奇分解。此外，由 [KPT08，命题 1.1.8] 存在一个典范同构

$$\tau_{\leqslant 1}{}^{2}((S(\mathbb{C})^\sim)^{\mathrm{sh}} \otimes \mathbb{C}) \simeq B\pi_1^{\mathrm{alg}}(X).$$

而且，该 $\mathbb{C}^*$ 作用恰好给出了（2.3）中的 Simpson 构造。

[2]对任意∞-层 $X \in \mathrm{Shv}_{\mathrm{fpqc}}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 与 $i \in \mathbb{N}$， $\tau_{\leqslant i}(X)$ 是将任意仿射概形Spec$R$ 映至 i-截断空间 $\tau_{\leqslant i}X(R)$的预层的层化。

定义3.3.2。设 X、 Y 为 $\mathbb{C}$上的光滑射影概形。我们通过空间中的笛卡儿图定义空间 $\mathbb{C}^*$-同伦型的等变同构$\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}^*}\left(X(\mathbb{C})^{\sim},\ Y(\mathbb{C})^{\sim}\right)$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}^*}\left(X(\mathbb{C})^{\sim}, Y(\mathbb{C})^{\sim}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Isom}_{\mathrm{Stacks}/\mathbb{C}}\left((X(\mathbb{C})^{\sim})^{\mathrm{sh}} \otimes \mathbb{C}, (Y(\mathbb{C})^{\sim})^{\mathrm{sh}} \otimes \mathbb{C}\right)^{\mathbb{C}^*} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Isom}\left(X(\mathbb{C})^{\sim}, Y(\mathbb{C})^{\sim}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Isom}_{\mathrm{Stacks}/\mathbb{C}}\left((X(\mathbb{C})^{\sim})^{\mathrm{sh}} \otimes \mathbb{C}, (Y(\mathbb{C})^{\sim})^{\mathrm{sh}} \otimes \mathbb{C}\right) \end{array}$$

其中右上角的 $(-)^{\mathbb{C}^*}$ 表示关于 $\mathbb{C}^*$的不动同伦点。

我们提出以下猜想 [3]:

猜想 3.3.3。设 X 和 Y 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑几何连通簇，且可嵌入为定义在 $\mathbb{C}$上的双曲曲线的乘积中的闭子概形。那么

$$\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}^*}\left(X(\mathbb{C})^{\sim}, Y(\mathbb{C})^{\sim}\right)$$

存在一个截面。

参考文献

[Heu25] Ben Heuer，《光滑真刚性簇的 p-adic Simpson 对应》（2025年），参见 https: // arxiv.org/abs/2307.01303。[KM08] Vincent Koziarz 和 莫毅明，《与格等变的复单位球之间不存在全纯淹没及其推广》（2008年），参见 https://arxiv.org/abs/ 0804.2122。[KPT08] L. Katzarkov、T. Pantev 和 B. Toën，《概形同伦型与非阿贝尔霍奇理论》，Compositio Mathematica 144（2008年5月），第3期，582–632，参见 http://dx.doi.org/10.1112/ S0010437X07003351。[Mil07] J. S. Milne，《Tannaka范畴的商》（2007年），参见 https://arxiv.org/abs/math/0508479。[Mil11] ，《志村簇与模》（2011年），参见 1105.0887。[Moc99] 望月新一，《曲线的局部pro-p远阿贝尔几何》，Inventiones mathematicae 138（1999年11月1日），第2期，319–423，参见 https://doi.org/10.1007/s002220050381。[Sim88] Carlos Simpson，《利用杨–米尔斯理论构造霍奇结构变分及其在一致化中的应用》（1988年），参见 https://math.mit.edu/events/talbot/2011/library/simpson_ variations_ of_hodge_using_yang-mills.pdf。[Sim92] Carlos T. Simpson，《希格斯丛与局部系统》，《法国高等科学研究所数学出版物》75（1992年），5–95，参见 https://www.numdam.org/item/PMIHES_1992__75__5_0/ (en)。MR94d:32027[Siu80] 萧荫堂，《调和映射的复解析性与紧凯勒流形的强刚性》（1980年）。[SS16] Alexander Schmidt 和 Jakob Stix，《利用 étale同伦型的绝对几何》，《数学年刊》184（2016年11月），第3期，817–868，参见 http://dx.doi.org/10.4007/annals.2016.184.3.5。

[3]我们感谢 Emanuel Reinecke 提出的建议。