arXiv:2603.05979v1 [math.AP] 6 Mar 2026

欧几里得空间的索伯列夫映射与乘积结构

BRUCE KLEINER

库朗数学科学研究所，纽约大学，美国

¨STEFAN MULLER

应用数学研究所，波恩大学，德国

´ ´ ´拉斯洛·塞凯伊希迪（小）

马克斯·普朗克数学科学研究所，莱比锡，德国

XIANGDONG XIE

数学与统计系，鲍灵格林州立大学，美国

Abstract. 我们考虑有界开连通集Ω_1,$\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ 以及索伯列夫映射 $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，使得对几乎每一个 $x \in \Omega_1 \times \Omega_2$，弱微分 $\nabla f(x)$可逆，并且保持或交换空间 $\mathbb{R}^n \times \{0\}$与 $\{0\} \times \mathbb{R}^n$。我们证明，若 $n \geq 2$ 且 $f \in W^{1,2}$，则 f 是分裂的，即$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1)\ f_2(x_2))$或 $f(x_1, x_2) = (f_2(x_2)\ f_1(x_1))$。

我们还证明，该结论对 $n = 1$一般不成立，即使我们另外假设 f 是双利普希茨且保面积的。这些结果补充了工作 [KMSX24], ，其中我们证明，对任意 $p < 2$, 若将索o6列夫空间 $W^{1,2}$替换为 $W^{1,p}$，则该结论对 $n \geq 2$不成立。

我们还讨论近似分裂映射的相关结果，即讨论映射序列 f_k，其中 ∇f_k 在适当的 L^p 空间中趋近于线性可逆分裂映射集合。

本工作部分源于这样一个问题：定义在嘉当群乘积上的索贝列夫映射是否为分裂映射，见 [KMX21b]。

BK 得到了美国国家科学基金会（NSF）项目 DMS-1405899 和 DMS-1711556 以及西蒙斯合作项目资助。SM 得到了德国研究联合会（DFG，即德国研究基金会）通过豪斯多夫数学中心（GZ EXC 59 和 2047/1，项目编号 390685813）以及合作研究中心 *The mathematics of emerging effects*（CRC 1060，项目编号 211504053）提供的资助。本研究始于 SM 在库朗研究所的休假期间。SM 谨向 R.V. Kohn 以及库朗研究所的成员和工作人员致谢，感谢他们的热情接待和极富启发性的氛围。LSz 衷心感谢德国研究联合会（DFG，即德国研究基金会）通过 GZ SZ 325/2-1 提供的资助。XX 得到了西蒙斯基金会项目 #315130 的资助。

Contents

1. 引言 2 1.1. 我们的结果 3 1.2. 背景 5 1.3. 结构安排 6 2. $n \geq 2$的分裂性证明 6 2.1. 分裂映射 6 2.2. 近似分裂映射 9 3. $n = 1$ 不存在全局分裂——论证概述 17 4. 凸积分 19 5. T_N构型 22 5.1. 2×2 矩阵中 T_N 构型的定义与判据 22 5.2. $L \cap \Sigma$ 24中的T_4 构型 5.3. T_5-构型与大 T_5 集 25 5.4. 命题 4.9 的证明 27 附录A. 推论 1.14 的证明 31 参考文献 34

1. Introduction

若 X_1、$X_2 \subset \mathbb{R}^n$ 为子集，我们称映射 $f\colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}^{2n}$ 是分裂的（或保持乘积结构），如果存在函数 $f_1\colon X_1 \to \mathbb{R}^n$ 和 $f_2\colon X_2 \to \mathbb{R}^n$，使得以下两种情况之一成立：对所有 $(x, y) \in X_1 \times X_2$，$f(x, y) = (f_1(x)\ f_2(y))$；或者对所有 $(x, y) \in X_1 \times X_2$，$f(x, y) = (f_2(y)\ f_1(x))$。如同我们先前的工作 [KMSX24]，我们关注关于映射 $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^{2n}$ 的以下问题，其中 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ 为连通开子集，并假设 f 是利普希茨、双利普希茨，或属于 $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$（对某个 $1 \leq p < \infty$）。

问题 1.1。如果（近似）微分 $\nabla f(x)$ 对几乎处处的 $x \in \Omega$ 都是分裂且可逆的，那么 f 是分裂的吗？更一般地，如果微分是“近似分裂”的，那么它自身是否必须是“近似分裂”的？

我们考虑这一问题的动机来自几何群论、几何映射理论和非线性偏微分方程理论；有关这一背景的讨论，请参见引言末尾。

从现在起，我们固定两个连通开子集 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$，并令 $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$。

请注意，对于 C^1 映射，问题 1.1 是平凡的：如果 $f : \Omega \to \mathbb{R}^{2n}$ 是 C^1，且微分 $\nabla f(x)$ 处处都是双射且分裂的，那么 f 显然是分裂的，因为$\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 是一个连续映射，其取值属于分裂且双射的线性映射集合；该集合由两个连通分支组成——可逆的块对角矩阵和块反对角矩阵。另一方面，如果 $f : \Omega \to \mathbb{R}^{2n}$ 是 Lipschitz 的，那么它的微分仅是可测的，因此原则上可能出现两种行为之间的振荡。事实上，对于 $n = 1$，很容易找到这样的 Lipschitz映射，使得 ∇f 几乎处处是双射且分裂的，但 f 却不是分裂的。例如，考虑“折叠映射”

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + y + h(x - y) \\ x + y - h(x - y) \end{pmatrix}$$

其中 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数，且 $h'=\pm1$ 几乎处处成立（一个具体例子是取 $h(t)=|t|$）。那么

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{or}\quad\nabla f(x)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

对于几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^2$，但除非 $h'\equiv1$ 或 $h'\equiv-1$，否则 f 不会分裂。这个例子反映了这样一个事实：对于 $n=1$，分裂且为双射的线性映射集合 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 中，存在连接对角矩阵与反对角矩阵的秩一连接；也就是说，存在一个对角矩阵和一个反对角矩阵，它们的差的秩为一。当 $n\geq2$ 时，分块对角可逆矩阵与分块反对角可逆矩阵之间不存在这样的秩一连接，因此不存在折叠例子的类似情形，故人们可能会预期，对于 Lipschitz映射，问题 1.1 的答案是肯定的。基于类似的理由，人们可能会预期，对于双 Lipschitz 映射 $f:\Omega\to\mathbb{R}^2$:，问题 1.1 的答案也是肯定的：$\det\nabla f(x)$ 的符号几乎处处为常数（因为它与 f 的局部度一致），而且行列式符号相同的对角矩阵与反对角矩阵之间不存在秩一连接。

1.1. **我们的结果**。我们的第一个结果证实了 $n\geq2$情形下刚性的预期，即使对于索伯列夫映射也是如此，正如 [KMSX24]所宣布的：

定理 1.2。设 $n\geq2$ 且 $f\in W^{1,2\,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$。若弱微分 $\nabla f(x)$在几乎处处的 $x\in\Omega$上是分裂且双射的，则 f 是分裂的。

索伯列夫指数 2 是尖锐的：对于每个 $p<2$，都存在一个 $W^{1,p\,\mathrm{loc}}$ 映射$f:\Omega\to\mathbb{R}^{2n}$，使得 $\nabla f(x)$ 是分裂的，且 $\det\nabla f(x)=1$对几乎处处的 $x\in\Omega$ 成立，但 f 不是分裂的，见 [KMSX24，定理 1.2]。这表明刚性/柔性对先验 正则性假设的微妙依赖；这一现象已在其他非线性偏微分方程中得到确立 [Nas54, Sch74, Tar79, Mur81, Gro86, Sch93, MˇS96, DM99, M¨ul99, MˇS03, KˇSM03, AFS08, DLS09, CDLS12, SJ14, DLS17, Ise18, R¨ul25, BV19a]。

不能去掉 ∇f 几乎处处为双射这一假设。例如，考虑由 $f_1(x)=x_1+x_{n+1}+|x_1-x_{n+1}|$,$f_2=\ldots=f_{2n}=0$ 给出的 Lipschitz映射。该映射几乎处处满足 $\nabla f\in\{2e_1\otimes e_1,2e_1\otimes e_{n+1}\}$，但并非全局分裂。

在引言的其余部分，我们还假设连通开子集 $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{R}^n$ 有界。

在 $n=1$ 情形下，问题 1.1 的答案是否定的，即使对于双利普希茨同胚也是如此。

定理 1.3. 若 $n=1$，则存在一个双 *Lipschitz* 同胚 $f:\Omega\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，满足：

(a) $\nabla f(x)$ 几乎处处是分裂且为双射的；*(b)* 存在一个零测集 N，使得 $\nabla f(x)$ 在 $x\notin N$ 上仅取五个值；*(c)* f 保面积：行列式$\nabla f=1$ 对几乎处处的 x 成立；*(d)* f 在 $\partial\Omega$ 上与一个非分裂仿射映射一致；特别地，f 并非分裂。

定理 1.3 蕴含：

推论1.4. 存在一个非分裂双利普希茨同胚 $f:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，满足定理 *1.3* 的断言 *(a)–(c)*。

现在我们考虑 $n \geq 2$ 情形下刚性断言的稳定性，并为近似分裂映射建立一个定量的无振荡结果。用 $L \subset \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 表示分裂矩阵的集合，并令 L_1 和 L_2 分别表示将 $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ 映射到自身或映射到 $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ 的矩阵子集。换言之，写成 $n \times n$ 分块矩阵形式时，我们有 $L = L_1 \cup L_2$，其中

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : A, D \in \mathbb{R}^{n\times n} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} : B, C \in \mathbb{R}^{n\times n} \right\}.$$

设 $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^{2n}$ 是一个映射序列，且在 $W^{1,2n}$ 中有界。我们证明，若 ∇f_j 收敛到 L，且 $\det \nabla f_j$ 有下界控制，则 ∇f_j 收敛到 L_1 或 L_2。特别地，任意弱极限 f 都是分裂的。在本文中

$$\text{we use the half-arrow } \rightharpoonup \text{ to denote weak convergence.}$$

定理 1.5。假设 $n \geq 2$ 和

$$f_j \rightharpoonup f \quad \text{in } W^{1,2n}(\Omega, \mathbb{R}^{2n}), \tag{1.6}$$

$$\operatorname{dist}(\nabla f_j, L) \to 0 \quad \text{in } L^1(\Omega), \tag{1.7}$$

and

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{j\to\infty} |\{x \in \Omega : \det \nabla f_j(x) < \delta\}| = 0. \tag{1.8}$$

于是几乎处处成立，因此 f 是全局分裂的。此外

$$\operatorname{dist}(\nabla f_j, L_i) \to 0 \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad \text{for } i = 1 \text{ or for } i = 2. \tag{1.9}$$

以及所有 $q < 2n$。

注 *1.10*。

(1) $W^{1,\,2n}$ 中的弱收敛不能替换为$W^{1,\,p}$ 中的弱收敛，对任意 $p < 2n$均如此，即使我们将 (1.7) 和 (1.8) 替换为更强的条件：对所有 $s < \infty$，dist(∇u_j, L) $\to 0$ 在 $L^s(\Omega)$ 中成立，且 $|\{\det \nabla u_j \neq 1\}| \to 0$，见 [KMSX24，定理 1.4]。

(2) 若 $\det \nabla f_j \geq \delta > 0$ 几乎处处成立，则条件 (1.8) 尤其成立。条件 (1.8) 不能替换为 $\det \nabla f_j > 0$ 或 $|\det \nabla f_j| \geq \delta > 0$这两个条件中的任意一个，见例 2.43 和 2.44。

(3) 证明表明，要得出 ∇f 是（整体）分裂的结论，实际上只需假设 $f_j \rightharpoonup f$（即弱收敛）于 $W^{1,\,2}(\Omega\ \mathbb{R}^{2n})$ 中，dist(∇f_j, L) $\to$在 $L^1(\Omega)$ 中为 0，且 $\det \nabla f \neq 0$ 几乎处处成立。然而，若缺少 $W^{1,\,2n}$ 中的弱收敛，一般而言，无法从 $\det \nabla f_j$获得关于 $\det \nabla f$ 的信息。

(4) 若 Ω_1 和 Ω_2 具有利普希茨边界，则由紧 Sobolev 嵌入可知，f_j 在 L^q 中对所有 $q < \infty$ 都接近分裂映射 f。人们可能会想知道，是否存在分裂映射 g_j，使其在 $W^{1,\,1}$ 中接近 f_j。下面的例子表明，一般情况下并非如此。设 $n = 2$，$\Omega_i = (0,\ 1)^2,$，令 $h \in C^1(\mathbb{R})$ 为 1-周期的，并令 $\varphi \in C^1([0, 1])$。考虑映射 $f_j :\ \Omega \to \mathbb{R}^4$

$$f_j(x) = \left(x_1 + \tfrac{1}{j} h(jx_2)\varphi(x_3), x_2, x_3, x_4 \right).$$

那么，行列式 $\nabla f_j = 1$ 和 dist(∇f_j, L) $\leq Cj^{-1}$。如果 g是一个全局分裂映射，那么 $\partial_2 g_1$ 与 x_3无关。利用估计式

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{L^1(0,1)} \leq 2\|\varphi - c\|_{L^1(0,1)} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

其中

$$\bar{\varphi} = \int_0^1 \varphi(t)\,dt,$$

我们看到

$$\begin{aligned}\|\nabla f_j - \nabla g\|_{L^1((0,1)^4)} &\geq \|h'\varphi - \partial_2 g_1\|_{L^1((0,1)^4)} \\ &\geq \frac{1}{2}\|h'\|_{L^1(0,1)}\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{L^1(0,1)}\end{aligned}$$

对所有分裂映射 g,

注 1.11。 顺便指出，定理 1.5 关于近似分裂映射的表述和证明，可以用梯度杨测度的语言非常简洁地给出。这些测度刻画了一列梯度的单点统计。更准确地说，从 Ω 到概率测度集合 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{2n\times 2n})$（定义在 $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$上的）的映射 ν，若存在一列 $W^{1,\,p}$映射 $f_j\colon \Omega \subset\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$，使得 $|\nabla f_j|^p \rightharpoonup g$ 在 $L^1(\Omega)$ 中成立，并且

$$\psi \circ \nabla f_j \rightharpoonup \bar{\psi} \quad \text{in } L^1(\Omega) \quad \text{with} \quad \bar{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n\times 2n}} \psi(X)\,d\nu_x(X)$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$ 以及每个满足以下条件的连续函数 $\psi\colon \mathbb{R}^{2n\times 2n} \to \mathbb{R}$

$$\psi(X) \leq C(1 + |X|^p)$$

对某个 $C > 0$。

我们称梯度杨测度 ν 支持在博雷尔集 $A \subset \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 中，如果对于几乎处处的 $x \in \Omega$，都有 $\nu(x)(\mathbb{R}^{2n\times 2n} \setminus A) = 0$。如果存在一个概率测度 μ，使得对于几乎处处的 $x \in \Omega$，都有 $\nu_x = \mu$，则称梯度杨测度 ν 为齐次的。在这种情况下，略去记号上的区别，也将 μ 称为齐次梯度杨测度。基于上述准备，我们可以将定理 1.5 重新表述为

定理 1.12。 设 $n \geq 2$，且设 $\Sigma_+ = \{X \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}\colon \text{行列式 } X > 0\}$。如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ 是有界、开且连通的，并且 $\nu\colon \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2n\times 2n})$ 是一个 $W^{1,\,2n}$ 支持在 $L\cap\Sigma_+$ 中的梯度杨测度，那么 ν 支持在 $L_1\cap\Sigma_+$ 或 $L_2\cap\Sigma_+$ 中。

与注 1.10(1)一致，我们可以将指数$2n$ 的尖锐性重新表述如下。设 $\Sigma_1 = \{X \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}\colon \text{行列式 } X = 1\} \subset \Sigma_+$。那么存在一个概率测度 μ，其支撑集包含于 $L\cap\Sigma_1$，使得 μ是一个 $W^{1,\,p}$梯度 Young 测度，并且对所有 $p < 2n$都满足

$$\mu(L_1) > 0 \quad \text{and} \quad \mu(L_2) > 0.$$

1.2. 背景。 问题 1.1 源于刚性问题，这些问题产生于几何群论和几何映射理论。我们在此简要说明二者之间的联系，只描述最简单的情形；更多细节和背景请参见 [KMX21b]。令 $\mathbb{H}$表示配备 Carnot–Carath´eodory 度量和通常双不变测度的海森堡群。回顾一下，$\mathbb{H}$的拓扑维数为 3，齐次维数为 4；特别地，半径为 r 的度量球的体积为 cr^4。关于乘积的最简单问题如下:

问题 1.13。 如果 $f\colon \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{H}\times\mathbb{H}$ 是双 Lipschitz 同胚，那么 f是否必须是分裂的? 这里 $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ 配备了乘积度量和乘积测度。

映射 f 几乎处处 Pansu 可微 [Pan89]；根据定义，Pansu 微分 $D_P f(x)$ 是 $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$的一个（分次）群自同构。通过一个简单的线性代数练习即可证明， $D_P f(x)$要么保持第一和第二个因子，要么交换它们。因此，Pansu 微分是分裂的，也就是说，它保持乘积结构；于是，问题1.13归结为一个在形式上与问题 1.1 完全相同的问题，唯一的区别是用海森堡群替换 $\mathbb{R}^n$ ，并用 Pansu 微分替换通常微分。 $D_P f$ 无法在这两种行为之间振荡，因此 f是分裂的，这一点已在[KMX21b] 中证明。该结论对索伯列夫映射也成立：如果 $f\colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}$是一个 W^{1}利普希茨 ^{p}局部-映射，且近似 Pansu 微分 $D_P f(x)$几乎处处可逆，那么 f 是分裂的 [KMX21a]。目前尚不清楚这一结论对 $p < 3$是否也成立。

上文已说明，问题 1.1 源于卡诺群背景下的一个刚性问题。事实证明，我们对问题 1.1 的讨论还给出了卡诺群之间的映射；这些映射与 Iwasawa 群的刚性有关，见注 A.8 和 [KMX25]。

令 $\mathfrak{h}$ 表示 $\mathbb{H}$ 的李代数，其标准基为 X_1、X_2、X_3，并令 $\mathfrak{h} = V_1 \oplus V_2$ 表示分次，其中 $V_1 =$ 张成$\{X_1, X_2\}$， $V_2 =$ 张成$\{X_3\}$。我们通过 $X_i \leftrightarrow e_i \in \mathbb{R}^2$将 V_1 与 $\mathbb{R}^2$ 等同。给定一个 Lipschitz映射 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$，我们也可以将 Pansu微分视为分次李代数同态 $Df(x) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$；将其限制在水平子空间 $V_1 \subset \mathfrak{h}$上，得到**水平微分** $d_H f(x) := Df(x)\big|_{V_1}\colon V_1 \to V_1$。结合推论1.4与提升论证，可得海森堡群的双Lipschitz映射，其水平微分可分裂，但具有振荡行为。

推论 1.14. 存在一个双 *Lipschitz* 同胚 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$，使得对几乎处处的 $x \in \mathbb{H}$，水平微分 $d_H f(x)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq V_1 \to V_1 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$是分裂的，但 f 并不保持 1-参数子群（由 X_1 和 X_2 生成）的左陪集叶状结构（即 $d_H f$ 表现出振荡行为）。

1.3. **结构安排**。 在第2节中，我们证明关于 $n \geq 2$ 的结果。在第3节中，我们利用凸积分理论构造一个非分裂映射。我们证明：存在五个行列式为一的分裂 2×2 矩阵 $X_1, \ldots, X_5$ 、一个非分裂 2×2 矩阵 A 以及一个 Lipschitz 映射 $f\colon \Omega \to \Omega$，使得 $\nabla f \in \{X_1, \ldots, X_5\}$几乎处处成立，并且 $f(x) = Ax$ 在 $\partial\Omega$ 上成立。根据 F¨orster 与第三位作者 [FS18],的一个结果，只要这五个矩阵 $X_1, \ldots, X_5$ 构成所谓的大 T_5 构型，这样的映射便存在。在附录A中，我们进一步提供 Heisenberg背景中相关背景的更多细节，并给出推论 1.14 的证明。

2. Proof of splitting for $n \geq 2$.

本节将证明关于 $n \geq 2$ 的结果：定理 1.2、定理 1.5 和定理 1.12。

2.1. **分裂映射**。 定理 1.2 的证明基于这样一个事实：映射 f 的梯度的子式（子行列式）： $U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ 满足某些相容关系。例如，映射 C^2 的微分的 1×1 子式满足 $\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f_i}{\partial x_m}$。对于高阶子式，相容条件可以用微分形式的语言非常高效地编码。回想一下，对于

一个 k-形式 $\alpha = \sum_{i_1,\dots,i_k} a_{i_1\dots i_k}(y)\, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上， f的拉回定义为 U 上的如下 k-形式

$$(f^*\alpha)(x) = \sum_{i_1,\dots,i_k} a_{i_1\dots i_k}(f(x)) \sum_{j_1,\dots,j_k} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_1}} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{j_k}} dx_{j_k}.$$

注意，由于楔积的反对称性，右端仅取决于 ∇f 的 $k \times k$ 子式。子式的相容条件由拉回与外微分可交换这一事实表达。具体而言，我们使用以下结果。

引理 2.1. 设 $U \subset \mathbb{R}^m$，设 α 是 $\mathbb{R}^d$ 上的光滑 k-形式，并设 $f \in W^{1,\,k}(U;\ \mathbb{R}^d)$。若 α 是闭的，则 $f^*\alpha$ 是弱闭的，即对于每个紧支撑于 U 中的光滑 $m-k-1$-形式 β，我们有

$$\int_U f^*\alpha \wedge d\beta = 0. \tag{2.2}$$

更一般地，若 α 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一般光滑 k-形式，且 $f \in W^{1,\,k+1}(U;\ \mathbb{R}^d)$，则（弱）外微分与拉回可交换，即

$$\int_U f^*\alpha \wedge d\beta = (-1)^{k+1} \int_U f^* d\alpha \wedge \beta. \tag{2.3}$$

证明。若 f 光滑，且 α 是 $\mathbb{R}^d$ 上的光滑 k-形式，则有 $df^*\alpha = f^* d\alpha$。事实上，这可通过归纳法轻易得到：从 $k=1$ 开始，并利用恒等式$f^*(\alpha \wedge \gamma) = f^*\alpha \wedge f^*\gamma$ 和 $d(\alpha \wedge \gamma) = d\alpha \wedge \gamma + (-1)^k \alpha \wedge d\gamma$，其中 α 是一个 k-形式， γ 是一个 ℓ-形式。因此，对于在 β 的支集上光滑的映射 f，由斯托克斯定理可得

$$\begin{aligned}
&\int_U f^*\alpha \wedge d\beta \\
=&(-1)^k \int_U d(f^*\alpha \wedge \beta) - (-1)^k \int df^*\alpha \wedge \beta \\
=&0 + (-1)^{k+1} \int f^* d\alpha \wedge \beta
\end{aligned}$$

现在， $f^*\alpha$仅取决于 ∇f的 $k \times k$子式，而 $f^* d\alpha$仅取决于 ∇f的$(k+1) \times (k+1)$子式。因此这些断言成立，因为 $W^{1,\,p}$映射可以用 $W^{1,\,p}{}_{\mathrm{loc}}$ 中的 C^∞ 映射来逼近。□

定理 *1.2* 的证明。回忆一下， $L \subset \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 表示分裂矩阵的集合，$L_1 \subset L$ 是保持 $\mathbb{R}^n \times \{0\}$的分裂矩阵集合，而 $L_2 \subset L$ 是将 $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ 映射到 $\{0\} \times \mathbb{R}^n$的分裂矩阵集合。由于 $\nabla f \neq 0$ 几乎处处成立，存在一个可测函数 $\chi : \Omega \to \{0,1\}$，使得

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \nabla f(x) \in L_1, \\ 0 & \text{if } \nabla f(x) \in L_2. \end{cases} \tag{2.4}$$

我们断言

$$\chi = 0 \quad \text{almost everywhere} \quad \text{or} \quad \chi = 1 \quad \text{almost everywhere.} \tag{2.5}$$

由此断言可轻易推出， f 是分裂的。

微分形式 $\alpha = dy_1 \wedge dy_2$ 的拉回为

$$f^*\alpha = df_1 \wedge df_2 = \sum_{1\le i<j\le 2n} M_{ij}(\nabla f) dx_i \wedge dx_j$$

其中

$$M_{ij} = \det \begin{pmatrix} \partial_i f_1 & \partial_j f_1 \\ \partial_i f_2 & \partial_j f_2 \end{pmatrix}.$$

由于 $\nabla f(x) \in L$ 几乎处处成立，含有 $i \le n$ 和 $j \ge n+1$ 的项几乎处处为零。因此

$$f^*\alpha = \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j + \sum_{n+1\le i<j\le 2n} b_{ij} dx_i \wedge dx_j \tag{2.6}$$

其中

$$\sum_{i<j} a_{ij}^2 = 0 \quad \text{if } \chi = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i<j} b_{ij}^2 = 0 \quad \text{if } \chi = 1. \tag{2.7}$$

现在我们断言

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} = 0 \quad \text{if } n+1 \le l \le 2n, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_l} = 0 \quad \text{if } 1 \le l \le n, \tag{2.9}$$

在分布的意义下。为证明 $i = 1$，$j = 2$ 和 $l = 2n$ 的结论，我们将引理 2.1 应用于 $k = 2$ 和

$$\beta = \varphi\omega \quad \text{where} \quad \omega = dx_3 \wedge \ldots \wedge dx_{2n-1}$$

以及 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$。于是

$$d\beta = \sum_{m\in\{1,2,2n\}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dx_m \wedge \omega.$$

为计算 $f^*\alpha \wedge d\beta$，我们首先注意到

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_m \wedge \omega = 0 \quad \text{if } n+1 \le i < j \le 2n$$

因为这个微分形式包含 $n+1$ 项 dx_l，且 $l \in \{n+1, \ldots, 2n\}$。类似地

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_m \wedge \omega = 0 \quad \text{if } 1 \le i < j \le n \text{ and } m \in \{1, 2\}.$$

Thus

$$f^*\alpha \wedge d\beta = f^*\alpha \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n}} dx_{2n} \wedge \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n}} a_{12}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge x_{2n}$$

而引理 2.1 得出

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n}} a_{12}\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

这表明 (2.8) 对 $i = 1$、$j = 2$ 和 $k = 2n$ 成立。其余断言可用同样的方法证明，只需取 ω 作为 $(2n-3)$-微分形式 $dx_{l_1} \wedge \ldots \wedge dx_{l_{2n-3}}$，其中省略了 dx_i、dx_j 和 dx_k。(2.9) 的证明类似。

容易看出，（2.7）、（2.8）和（2.9）蕴含了该断言。为方便读者，我们写出详细证明。回忆一下，$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$，其中 $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ 为开且连通。由（2.8）和（2.9）可知，存在可测函数 $A_{ij} : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ 和 $B_{ij} : \Omega_2 \to \mathbb{R}$，使得

$$a_{ij} = A_{ij} \quad \text{and} \quad b_{ij} = B_{ij} \quad \text{almost everywhere.}$$

Let

$$E_1 = \{x' \in \Omega_1 : \sum_{i<j} A_{ij}^2(x') \neq 0\}, \quad E_2 = \{x'' \in \Omega_2 : \sum_{i<j} B_{ij}^2(x'') \neq 0\}.$$

于是（2.7）蕴含

$$\chi = 1 \quad \text{a.e. on } E_1 \times \Omega_2, \quad \chi = 0 \quad \text{a.e. on } \Omega_1 \times E_2.$$

因此， $E_1 \times E_2 = (E_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times E_2)$是一个零测集。由此可得， E_1 或 E_2 是一个零测集。如果 E_1 是一个零测集，那么

$$f^*\alpha = \sum_{n+1 \leq i < j \leq 2n} b_{ij}\, dx_i \wedge dx_j \quad \text{almost everywhere.}$$

特别地

$$f^*\alpha = 0 \quad \text{almost everywhere in } \Omega_1 \times (\Omega_2 \setminus E_2).$$

因此，秩 $\nabla f \leq 2n-1$ 在 $\Omega_1 \times (\Omega_2 \setminus E_2)$中几乎处处成立。由于根据假设， ∇f几乎处处是双射，集合 $\Omega_2 \setminus E_2$ 必为零测集。因此， $\sum_{i<j} b_{ij}^2 \neq 0$ 几乎处处成立；结合 (2.7)，这意味着 $\chi = 0$ 几乎处处成立。

如果 E_2 是一个零测集，那么同理可证 $\chi = 1$ 几乎处处成立。至此，(2.5) 的证明完成。□

2.2. **近似分裂映射**。现在我们转而证明定理 1.5。我们将使用以下关于子行列式（或子式）弱连续性的结果

引理 2.10。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为开且有界。设 $M(F)$ 为矩阵 $d \times m$ F的一个 $k \times k$子行列式。假设

$$f_j \rightharpoonup f \quad in\ W^{1,k}(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

Then

$$M(\nabla f_j) \overset{*}{\rightharpoonup} M(\nabla f) \quad in\ measures,$$

i.e,

$$\int_\Omega M(\nabla f_j)\, \varphi\, dx \to \int_\Omega M(\nabla f)\, \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega).$$

等价地，对于每个光滑的 k微分形式 ω，拉回序列 $f_j^*\omega$ 在测度意义下弱*收敛到 $f^*\omega$。

证明。 由 k 归纳法即可轻易得出这一结论，因为 k阶子式由微分形式 $dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} = d(y^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k})$ 的拉回得到，并结合引理 2.1。关于不使用微分形式的证明，参见 [Dac08，第 8.20] 定理。 □

我们还整理了一些关于子式的简单事实，这些事实将在证明中用到。若 $I = (i_1, \ldots\ldots, i_r)$ 满足 $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq 2n$，且 $J = (j_1, \ldots\ldots, j_r)$ 满足 $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq 2n$，并且 $F \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$，我们用 F_{IJ}表示行 $i_1, \ldots\ldots, i_r$和列 $j_1, \ldots\ldots, j_r$对应的子矩阵，并定义 $M_{IJ}(F)$ =行列式 F_{IJ}。

引理 2.11。 *(1)* 设 $F \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$，并设 $F' \in L$ 满足 $|F - F'| = \operatorname{dist}(F, L)$。若 M 是一个 $r \times r$ 子式，则

$$|M(F) - M(F')| \leq c(|F|^{r-1} \operatorname{dist}(F, L) + \operatorname{dist}^r(F, L)); \tag{2.12}$$

(2) 若 M 是一个 $r\times r$ 子式，且它在 L, $p\geq r$ 上为零，并且 $F_j:\Omega\to\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 满足

$$\sup_j \|F_j\|_{L^p}<\infty \quad and \quad \operatorname{dist}(F_j,L)\to 0 \quad in\ L^p(\Omega)$$

then

$$M(F_j)\to 0 \quad in\ L^{p/r}(\Omega); \tag{2.13}$$

（*3*）假设 F 具有分块对角形式

$$F=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} \quad with\ A,B,C,D\in\mathbb{R}^{n\times n} \tag{2.14}$$

且 $\operatorname{dist}(F,\ L_2)<\operatorname{dist}(F,\ L_1)$。则

$$\begin{aligned}&|\det F-(-1)^n\det B\det C|\\ &\leq c'(|F|^{2n-1}\operatorname{dist}(F,L)+\operatorname{dist}^{2n}(F,L)).\end{aligned} \tag{2.15}$$

（*4*）考虑 $n\times 2n$ 矩阵 $G=\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}$。令

$$\begin{aligned}L'=\{G:\ &M_{IJ}(G)=0,\ whenever\ I=(i_1,i_2)\ with\ 1\leq i_1<i_2\leq n\\ &and\ J=(j_1,j_2)\ with\ 1\leq j_1\leq n<j_2\leq 2n\}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

当且仅当 $G\in L'$ 时

$$\operatorname{rank}G=1 \quad or \quad A=0 \quad or \quad B=0. \tag{2.17}$$

(5) 假设 $n\geq 2$。令 F 如(2.14) 所述，其中 $\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\in L'$、$\begin{pmatrix}C & D\end{pmatrix}\in L'$，且 行列式 $F\neq 0$。则 $F\in L$。特别地，若 $F\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 非奇异，且对于所有在 L 上消失的 2×2 子式，$M(F)=0$，则 $F\in L$。

证明。(1)：这是因为 M 是次数为 r 的齐次多项式，并且由杨氏不等式可得。

(2)：这直接由 (1) 得出。(3)：存在 $F'\in L_2$ 使得

$$|F-F'|=\operatorname{dist}(F,L_2)=\operatorname{dist}(F,L).$$

若将 F' 写成分块对角形式，其分块矩阵为 0，B'，C'，0，那么 $F'=$(−1) 的行列式等于 ^{n} 与 B'、C' 的行列式之积。现在

$$|B-B'|+|C-C'|\leq c|F-F'|=c\operatorname{dist}(F,L)$$

对某个常数 c 成立。因此，对行列式以及与子矩阵 B 和 C 的行列式相对应的子式应用 (1)，即可得出该断言。

(4)：若条件 (2.17) 成立，则显然 $G\in L'$。反过来，注意到，假设和结论在将 G 左乘非奇异 $n\times n$ 矩阵、右乘非奇异分块对角 $2n\times 2n$ 矩阵时保持不变。因此，若 $A\neq 0$，我们可以假设 A 是对角矩阵，且对角线上的元素为 1 或 0，即 $A=\sum_{i=1}^r e_i\otimes e_{i\circ}$ 利用含有$i_1=1$ 和 $j_1=1$ 的子式可知，若 $j\geq 2$ 且 $l'=l-n\geq 1$，则 $B_{jl'}=0$。若 $r=1$，则可得 $\operatorname{rank}G=1$。若 $r\geq 2$，则还可以利用含有 $i_1=2$ 和$j_2=2$ 的子式，从而推出 $B=0$。

（5）：首先，由（4）可得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}=1 \quad \text{or} \quad A=0 \quad \text{or} \quad B=0$$

同理可得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = 1 \quad \text{or} \quad C = 0 \quad \text{or} \quad D = 0.$$

此外，由于 $\det F \neq 0$，我们有 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = n$ 以及 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = n$。而且，我们不可能有 $A = C = 0$ 或 $B = D = 0$。因此，我们必然有$A = D = 0$ 或 $B = C = 0$。于是 $F \in L$。□

定理 *1.5* 的证明。 在这两个论证中，关键观察是：沿着满足 $\operatorname{dist}(\nabla f_j, L) \to 0$ in L^{2n} 的子序列，存在另一个弱连续表达式，它在 L_2 上与 det 一致，并在 L_1上为零；见证明的步骤 2 以及下面的引理 2.34。

我们首先在附加假设下证明该定理的断言

$$\text{the sequence } |\nabla f_j|^{2n} \text{ is equiintegrable.} \tag{2.18}$$

回顾一下， L^1 函数序列 h_j 称为一致可积的，是指对每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在一个 $\delta > 0$ ，使得 $|A| < \delta$ 蕴含 $\sup_j \int_A |h_j| < \varepsilon$。邓福德–佩蒂斯定理表明，如果 Ω 具有有限测度，并且序列 $h_j : \Omega \to \mathbb{R}^s$ 是一致可积的，那么 h_j 具有一个在 $L^1(\Omega)$中弱收敛的子序列。

步骤 1： 若附加假设 (2.18) 成立，则 f 是分裂的。我们首先声称 $\det \nabla f > 0$ 几乎处处成立。只需证明

$$\int_U \det \nabla f \, dx > 0 \quad \text{for all measurable } U \subset \Omega \text{ with } |U| > 0. \tag{2.19}$$

固定一个可测的 $U \subset \Omega$，使得 $|U| > 0$。由引理 2.10 可得 $\det \nabla f_j \overset{*}{\rightharpoonup} \det \nabla f$在测度意义下弱*收敛。根据 (2.18) 和邓福德–佩蒂斯定理，我们得到

$$\det \nabla f_j \rightharpoonup \det \nabla f \quad \text{in } L^1(\Omega) \tag{2.20}$$

尤其是

$$\lim_{j\to\infty} \int_U \det \nabla f_j \, dx = \int_U \det \nabla f \, dx. \tag{2.21}$$

令 $E_{j,\delta} = \{x \in \Omega : \det \nabla f_j < \delta\}$。由假设，$\lim^{\delta\downarrow 0} \operatorname{limsup}_{j\to\infty} |E_{j,\delta}| = 0$。因此，序列 $\det \nabla f_j$ 的一致可积性意味着

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \liminf_{j\to\infty} \int_{U\cap E_{j,\delta}} \det \nabla f_j \, dx = 0. \tag{2.22}$$

此外，存在一个 $\delta_0 > 0$，使得 $\limsup_{j\to\infty} |E_{j,\delta_0}| \leq |U|/2$。因此

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \liminf_{j\to\infty} \int_{U\setminus E_{j,\delta}} \det \nabla f_j \, dx \geq \liminf_{j\to\infty} \int_{U\setminus E_{j,\delta_0}} \det \nabla f_j \, dx \geq \frac{1}{2}\delta_0 |U|.$$

将 (2.22) 加到此不等式上，并利用 (2.21)，可知 $\int_U \det \nabla f \, dx > 0$。

我们现在证明 $\nabla f \in L$ 几乎处处成立。于是定理 1.2 蕴含 f 是分裂的。通过将 Ω 分解为集合 $\{|\nabla f_j| \leq M\}$与 $\{|\nabla f_j| > M\}$，我们容易看出，假设 $\operatorname{dist}(\nabla f_j, L) \to 0$ 属于 $L^1(\Omega)$，以及 $|\nabla f_j|^{2n}$ 的等可积性，蕴含

$$\operatorname{dist}(\nabla f_j, L) \to 0 \quad \text{in } L^{2n}(\Omega). \tag{2.23}$$

矩阵 $\nabla f(x)$ 的分块分解为

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{with } A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

由 (2.23) 和引理 2.11 (2) 可知，对于所有在 L 上为零的 2×2 子式， $M(\nabla f_j)\to 0$ 属于 $L^1(\Omega)$。结合子式的弱连续性，我们推出

$$M(\nabla f)=0 \quad \text{for all } 2\times 2 \text{ minors which vanish on } L.$$

又由于 $\det\nabla f\neq 0$ a.e.，由引理 2.11 (5) 可推得 $\nabla f\in L$ a.e. 因此，根据定理 1.2， f 可分裂。特别地，要么 $\nabla f\in L_1$ a.e.，要么 $\nabla f\in L_2$ a.e.

步骤 2： 若附加假设 (2.18) 成立，则 $\operatorname{dist}(\nabla f_j, L_i)\to 0$ 在$L^{2n}(\Omega)$ 中，对 $i=1$ 或 $i=2$成立。

为明确起见，假设 $\nabla f\in L_1$ a.e（ $\nabla f\in L_2$ a.e. 的情形类似）。记

$$\nabla f_j(x)=\begin{pmatrix} A_j & B_j\\ C_j & D_j\end{pmatrix} \quad \text{with } A_j,B_j,C_j,D_j\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

关键观察是，(2.23) 蕴含

$$\det B_j\det C_j \overset{*}{\rightharpoonup} \det B\det C=0 \quad \text{in } \mathcal{M}(\Omega), \tag{2.24}$$

见下文引理 2.34。由于 $|\nabla f_j|^{2n}$ 一致可积，$\det B_j\det C_j$ 也一致可积，因此我们得到

$$\det B_j\det C_j \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^1(\Omega). \tag{2.25}$$

定义

$$\chi_j(x):=\begin{cases}1 & \text{if } \operatorname{dist}(\nabla f_j(x),L_2)<\operatorname{dist}(\nabla f_j(x),L_1),\\ 0 & \text{if } \operatorname{dist}(\nabla f_j(x),L_2)\geq\operatorname{dist}(\nabla f_j(x),L_1).\end{cases}$$

注意，对于 $\chi_j(x)=0$，我们有 $\operatorname{dist}(\nabla f_j,L_1)=\operatorname{dist}(\nabla f_j,L)$。因此

$$(1-\chi_j)\operatorname{dist}(\nabla f_j,L_1)=(1-\chi_j)\operatorname{dist}(\nabla f_j,L)\to 0 \quad \text{in } L^{2n}(\Omega) \tag{2.26}$$

由 (2.23) 得。因此，只需证明

$$\chi_j\to 0 \quad \text{in } L^1(\Omega). \tag{2.27}$$

事实上，由于 χ_j 是一个示性函数，$\operatorname{dist}^{2n}(\nabla f_j,L_1)$ 的等可积性意味着

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega (1-\chi_j)\operatorname{dist}^{2n}(\nabla f_j,L_1)\,dx=0.$$

为了证明 $\chi_j\to 0$ 属于 $L^1(\Omega)$，注意到 (2.26) 蕴含

$$(1-\chi_j)\det B_j\det C_j\to 0 \quad \text{in } L^1(\Omega). \tag{2.28}$$

将此与 (2.25) 结合，我们得到

$$\chi_j\det B_j\det C_j\rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^1(\Omega). \tag{2.29}$$

由引理 2.11 (3)

$$\chi_j(\det\nabla f_j-(-1)^n\det B_j\det C_j)\to 0 \quad \text{in } L^1(\Omega). \tag{2.30}$$

因此

$$\chi_j\det\nabla f_j\rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^1(\Omega). \tag{2.31}$$

现在我们证明，这意味着 $\chi_j \to 0$ 属于 $L^1(\Omega)$。回想一下$E_{j,\delta}=\{$行列式 $\nabla f_j < \delta\}$。因此，对于任意 $\delta' > 0$,

$$\begin{aligned}
&\delta' \limsup_{j\to\infty} \int_{\Omega\setminus E_{j,\delta'}} \chi_j \, dx \\
&\le \limsup_{j\to\infty} \int_{\Omega\setminus E_{j,\delta'}} \chi_j \det \nabla f_j \, dx \\
&\le \lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_{j\to\infty} \int_{\Omega\setminus E_{j,\delta}} \chi_j \det \nabla f_j \, dx \\
&\underset{(2.22)}{\le} \limsup_{j\to\infty} \int_{\Omega} \chi_j \det \nabla f_j \, dx \underset{(2.31)}{=} 0.
\end{aligned}$$

两边除以 δ'，并利用假设 $\lim_{\delta'\downarrow 0} \limsup_{j\to\infty} |E_{j,\delta'}| = 0$，我们得到$\chi_j \to 0$ 属于 $L^1(\Omega)$。

步骤 3：去除附加假设(2.18)。现在我们仅假设定理 1.5 的条件成立，即

- $f_j \rightharpoonup f$ 在 $W^{1,2n}(\Omega)$,
- $\operatorname{dist}(\nabla f_j, L) \to 0$ 属于 $L^1(\Omega)$,
- $\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_{j\to\infty} |\{x\in\Omega\colon$ 行列式 $\nabla f_j(x) < \delta\}| = 0$。

我们首先指出，只需证明 f 是分裂的，且行列式 $\nabla f > 0$ 几乎处处成立，并且存在一个 $i\in\{1,2\}$，使得对于一个子序列

$$\lim_{k\to\infty} \| \operatorname{dist}(\nabla f_{j_k}, L_i)\|_{L^q(\Omega)} = 0.$$

事实上，这种收敛意味着 $\nabla f \in L_i$ 几乎处处成立。现在，若整个序列 $\operatorname{dist}(\nabla f_j, L_i)$ 在 $L^q(\Omega)$ 中不收敛于零，那么存在另一个子序列 m_k 以及一个 $\eta > 0$，使得 $\| \operatorname{dist}(\nabla f_{m_k}, L_i)\|_{L^q(\Omega)} \ge \eta$。由于子序列 $k \mapsto f_{m_k}$ 仍满足定理 1.5 的假设，因此存在一个$j\in\{1,2\}$以及一个更细的子序列，使得 $\operatorname{dist}(\nabla f_{m_{k_l}}, L_j) \to 0$在 $L^q(\Omega)$ 中成立。因此 $j\neq i$ 且 $\nabla f \in L_j$ 几乎处处成立。由此可得 $\nabla f \in L_i \cap L_j = \{0\}$ 几乎处处成立。这与行列式 $\nabla f > 0$ 几乎处处成立相矛盾。

我们使用以下结果，该结果保证（经过取子序列后），我们可以用序列 g_j 替换 f_j，使其满足 (2.18)，并且仅在一个测度随着 $j\to\infty$ 趋于零的集合上与 f_j 不同。

引理 2.32 ([FMP98], 引理 1.2)。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 有界且为开集，并设f_j是一个在 $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ 中有界的序列。存在一个子序列 f_{j_k}（不重新标记）和序列 g_k，使得 $|\nabla g_k|^p$ 一致可积，且

$$\lim_{k\to\infty} |\{g_k \neq f_{j_k} \quad or \quad \nabla g_k \neq \nabla f_{j_k}\}| = 0. \tag{2.33}$$

我们将此引理应用于 $p = 2n$。

设 $E_k := \{g_k \neq f_{j_k}$ 或 $\nabla g_k \neq Df_{j_k}\}$。由于 $|E_k| \to 0$ 在 $k\to\infty$ 下成立，且由于∇f_{j_k} 和 ∇g_k 在 L^{2n} 中有界，我们很容易看出

$$g_k \rightharpoonup f \quad \text{in } W^{1,2n}(\Omega;\mathbb{R}^{2n}) \quad \text{and} \quad \operatorname{dist}(\nabla g_k, L) \to 0 \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

此外，由于 $|E_k| \to 0$，根据假设 (1.8) 可得

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_{j\to\infty} |\{x\in\Omega : \det\nabla g_k < \delta\}| = 0.$$

因此，我们先前在步骤 1 和步骤 2 中的推理适用于序列 g_k，由此可推得弱极限 f 满足 $\det \nabla f > 0$，f 是全局分裂的，并且

$$\operatorname{dist}(\nabla g_k, L_i) \to 0 \quad \text{in } L^{2n}(\Omega)$$

对 $i = 1$ 或 $i = 2$。由于 $\operatorname{dist}(\nabla f_{j_k}, L_i)$ 在 L^{2n} 与 $|E_k| \to 0$ 中有界，我们得到 $\operatorname{dist}(\nabla f_{j_k}, L_i) \to 0$ 在 $L^q(\Omega)$ 中，对所有 $q < 2n$。至此完成定理 1.5 的证明。□

引理 2.34. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ 有界且开。假设 $f_j \rightharpoonup f$ 在 $W^{1,\,2n}(\Omega\ \mathbb{R}^{2n})$ 中，且 $\operatorname{dist}(\nabla f_j, L) \to 0$ 在 L^{2n} 中。将 ∇f_j 表示为块对角矩阵，

$$Df_j = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix}$$

对 ∇f 亦类似。则

$$\det A_j \det D_j \overset{*}{\rightharpoonup} \det A \det D \quad \text{in } \mathcal{M}(\Omega), \tag{2.35}$$

$$\det B_j \det C_j \overset{*}{\rightharpoonup} \det B \det C \quad \text{in } \mathcal{M}(\Omega). \tag{2.36}$$

证明。设 M 是一个在 L 上消失的 $n \times n$ 子式。则引理 2.11 (2) 蕴含 $M(Df_j) \to 0$ 在 $L^2(\Omega)$ 中。特别地，n-微分形式 $\alpha_1 = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$ 与 $\alpha_2 = dy_{n+1} \wedge \ldots \wedge dy_{2n}$ 的拉回满足

$$R_j^{(1)} := f_j^* \alpha_1 - \det A_j\, \alpha_1 - \det B_j\, \alpha_2 \to 0 \quad \text{in } L^2(\Omega),$$

$$R_j^{(2)} := f_j^* \alpha_2 - \det C_j\, \alpha_1 - \det D_j\, \alpha_2 \to 0 \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

我们按照定理 1.2 的证明进行论证。因此，对任意 $k \geq n+1$，我们定义 $(n-1)$-微分形式 $\omega^{(k)} = dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$（即缺少 dx_k），以及 $\beta^{(k)} = \varphi \omega^{(k)}$，其中 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$。于是

$$d\beta^{(k)} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i \wedge \omega^{(k)},$$

其中求和遍历 $i \in \{1, \ldots, n, k\}$。我们应用引理 2.1 推出

$$\int f_j^* \alpha_1 \wedge d\beta^{(k)} = 0,$$

因此

$$\int R_j^{(1)} \wedge d\beta^{(k)} = (-1)^k \int \det A_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx \to 0 \text{ as } j \to \infty$$

对任意 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$，从而由稠密性以及序列行列式 A_j 上的一致 L^2 界，对任意 $\varphi \in W^{1,2\,0}(\Omega)$。换言之

$$\frac{\partial \det A_j}{\partial x_k} \to 0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega) \quad \text{for } k \geq n+1. \tag{2.37}$$

这里 $H^{-1}(\Omega)$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间：$= W^{1,2\,0}(\Omega)$，即 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的闭包。类似地，我们得到

$$\frac{\partial \det C_j}{\partial x_k} \to 0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega) \quad \text{for } k \geq n+1, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial \det B_j}{\partial x_k} \to 0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega) \quad \text{for } k \leq n, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial \det D_j}{\partial x_k} \to 0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega) \quad \text{for } k \leq n. \tag{2.40}$$

此外，由引理 2.10

$$\det A_j \rightharpoonup \det A, \quad \det B_j \rightharpoonup \det B \quad \text{in } L^2(\Omega), \tag{2.41}$$

$$\det C_j \rightharpoonup \det C, \quad \det D_j \rightharpoonup \det D \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{2.42}$$

由此，根据（2.37）–（2.42）以及 Murat 和 Tartar 建立的补偿紧性理论，即可得出该断言；例如参见 [Mur77, Mur78, Tar79, Tar15]。

为此，考虑映射 $g : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 以及一阶常系数微分算子 $\mathcal{A} : L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \to H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^{2n})$，其定义如下:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}g)_k &= \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \quad \text{for } 1 \le k \le n,\\ (\mathcal{A}g)_k &= \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \quad \text{for } n+1 \le k \le 2n.\end{aligned}$$

与 $\mathcal{A}$相关联的是由“危险振幅”构成的波锥 Λ，其定义为

$$\Lambda := \{a \in \mathbb{R}^2 : \exists \xi \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \quad \mathcal{A}(ae^{ix\cdot\xi}) = 0\}.$$

容易验证，对于上述算子 $\mathcal{A}$

$$\Lambda := \{(a_1, 0) : a_1 \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, a_2) : a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

设 Q 是一个在 Λ上取零的二次型。补偿紧性理论蕴含 [Tar79，定理 11]

$$\begin{aligned} & g_j \rightharpoonup g \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad \text{and} \quad \mathcal{A}g_j \to 0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega)\\ \Longrightarrow \quad & Q(g_j) \overset{*}{\rightharpoonup} Q(g) \quad \text{in } \mathcal{M}(\Omega).\end{aligned}$$

将此应用于 $Q(a) = a_1a_2$和 $g_j =$(行列式 A_j，行列式D_j) 或 $g_j =$(行列式 B_j，行列式C_j)，我们得到 (2.35) 和 (2.36) □

现在我们讨论两个例子，它们表明条件

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_{j\to\infty} |\{x \in \Omega : \det \nabla f_j(x) < \delta\}| = 0$$

在定理 1.5 中不能替换为条件 行列式$\nabla f_j > 0$ 或条件| 行列式$\nabla f_j| \ge \delta > 0$。

例 2.43. 为了说明条件 行列式$\nabla f_j > 0$ 并不充分，考虑情形 $n = 2$。根据定理 1.3，存在一个映射 $F : (0,\ 1)^2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ，使得

$$\nabla F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

是分裂的，且几乎处处满足行列式 $\nabla F = 1$。对于任意 $\varepsilon \ge 0$，定义 $f^{(\varepsilon)}$: $(0,\ 1)^4 \to \mathbb{R}^4$如下:

$$\begin{aligned} f_1^{(\varepsilon)}(x) &= F_1(x_1, x_3), \quad f_3^{(\varepsilon)}(x) = F_2(x_1, x_3),\\ f_2^{(\varepsilon)}(x) &= \varepsilon x_2 - \varepsilon x_4, \quad f_4^{(\varepsilon)}(x) = \varepsilon x_2 + \varepsilon x_4.\end{aligned}$$

Then

$$\nabla f^{(\varepsilon)}(x) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & -\varepsilon \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

通过交换第 2 列和第 3 列，我们看到，对于几乎处处的 x

$$\det \nabla f^{(\varepsilon)} = \det \begin{pmatrix} \nabla F & 0 \\ 0 & \varepsilon X \end{pmatrix} = \det \nabla F \det(\varepsilon X) = 2\varepsilon^2,$$

其中 $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 并且我们将 4×4 矩阵写成了分块矩阵的形式。此外，由于 ∇F 作为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$上的线性映射几乎处处分裂，因此 $\nabla f^{(0)}$ 作为 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$上的线性映射也几乎处处分裂，故

$$\operatorname{dist}(\nabla f^{(\varepsilon)}(x), L) \leq \operatorname{dist}(\nabla f^{(0)}(x), L) + c\varepsilon$$

于是我们有

$$f^{(\varepsilon)} \to f^{(0)} \quad \text{in } W^{1,\infty},$$

但极限映射 $f^{(0)}$ 并非全局分裂，因为 F 并非全局分裂。

例 2.44. 设 $\Sigma_{\pm} = \{X \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} : |\text{行列式 } X| = 1\}$。令 $\Omega = (0,1)^{2n}$。我们证明存在一个有限集 $E \subset L \cap \Sigma_{\pm}$ 以及一个一致有界的利普希茨映射序列，使得

$$f_j \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{in } W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^{2n}), \quad \operatorname{dist}(\nabla f_j, E) \to 0 \in L^{\infty}(\Omega) \tag{2.45}$$

and

$$\nabla f \equiv \frac{1}{4} e_1 \otimes e_1 + \frac{1}{4} e_{n+1} \otimes e_1 \notin L. \tag{2.46}$$

该构造基于所谓的有限阶层合，其定义如下。设 ν 是定义在 $\mathbb{R}^{d\times m}$ 上的概率测度，且其支撑集为有限集，$\nu = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \delta_{A_i}$ 满足 $A_i \neq A_j$，其中 $i \neq j$。如果存在 $j \in \{1, \dots, r\}$、$s \in [0, \lambda_j]$ 和矩阵 B', B''，使得 ν' 可由 ν 通过分裂得到，则称 ν' 由 ν 通过分裂得到。

$$\nu' = \nu + s\left(\lambda \delta_{B'} + (1-\lambda)\delta_{B''} - \delta_{A_j}\right),$$

其中

$$A_j = \lambda B' + (1-\lambda)B'', \quad \operatorname{rank}(B'' - B') = 1.$$

注意，ν 和 ν' 具有相同的质心 $\nu = \nu' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A_i$。如果定义在 $\mathbb{R}^{d\times m}$ 上的概率测度可以通过有限次分裂由一个狄拉克质量得到，则称其为有限阶层合。

我们将证明存在一个有限阶层合 ν，满足 $\bar{\nu} = A := \frac{1}{4} e_1 \otimes e_1 + \frac{1}{4} e_{n+1} \otimes e_1$，它由 $\nu = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \delta_{A_i}$ 给出，其中 $A_i \neq A_j$ 对 $i \neq j$和 $A_i \in L \cap \Sigma_{\pm}$成立。令 $E = \{A_1, \dots A_r\}$。

于是，根据 [MˇS03 引理 3.2]，存在分片仿射 Lipschitz 映射 $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^{2n}$，使得

- $f_j(x) = Ax$ 在 $\partial\Omega$ 上，
- $|f_j(x) - \bar{A}x| < 2^{-j}$ 在 Ω 中，
- $\operatorname{dist}(\nabla f_j, E) < 2^{-j}$ 几乎处处在 Ω 中。

于是，由于该序列一致利普希茨且在 $W^{1,\infty}(\Omega)$ 中有界，根据巴拿赫-阿劳格鲁定理，我们还可以假设（必要时取一个子序列）且不失一般性地有 $f_j \overset{*}{\rightharpoonup} f$ 在 $W^{1,\infty}(\Omega)$ 中，并且 $f(x) \equiv Ax$，如 (2.45)-(2.45) 所述

为了构造 ν，我们首先构造一个有限阶层状测度 ν_1，其满足 $\bar{\nu}_1 = \frac{1}{2} e_\Gamma \otimes e_1$，并且支撑在由对角矩阵组成的集合 $E_1 = \{\sum_{i=1}^{2n} \sigma_i e_i \otimes e_i : \sigma_i \in \{-1, 1\}\}$ 上

其矩阵元素为 ± 1。为此，我们写作 $(a_1, \ldots, a_{2n}) := \sum_{i=1}^{2n} a_i e_i \otimes e_i$，并使用这些分裂

$$\begin{aligned}
\delta_{(\frac{1}{2},0,\ldots,0)} &\longrightarrow \frac{1}{4}\delta_{(-1,0,\ldots,0)} + \frac{3}{4}\delta_{(1,0,\ldots,0)},\\
\delta_{(\pm 1,0,\ldots,0)} &\longrightarrow \frac{1}{2}\delta_{(\pm 1,-1,0,\ldots,0)} + \frac{1}{2}\delta_{(\pm 1,1,0,\ldots,0)},\\
&\cdots,\\
\delta_{(\pm 1,\ldots,\pm 1,0)} &\longrightarrow \frac{1}{2}\delta_{(\pm 1,\ldots,\pm 1,-1)} + \frac{1}{2}\delta_{(\pm 1,\ldots,\pm 1,1)}.
\end{aligned}$$

类似地，我们得到一个有限阶层状测度 ν_2，其满足 $\bar{\nu}_2 = \frac{1}{2} e_{n+1} \otimes e_1$。具体而言，我们可以考虑线性映射 $P\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$，定义为 $P\binom{x'}{x''} = \binom{x''}{x'}$，其中 x'，$x'' \in \mathbb{R}^n$。令 ℓ_P 表示 P 通过矩阵左乘作用于 $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 。于是 ℓ_P 保持集合 $L \cap \Sigma_{\pm}$不变。此外，由于 ℓ_P 保持秩一线， ℓ_P 的推前将有限阶层合映射为有限阶层合。因此，推前测度 $\nu_2 = \ell_P^* \nu_1$ 是一个有限阶层状测度，其支撑在 $L \cap \Sigma_{\pm}$ 上并满足 $\bar{\nu}_2 = \frac{1}{2} e_{n+1} \otimes e_1$。最后，利用分裂

$$\delta_{\frac{1}{4}e_1\otimes e_1 + \frac{1}{4}e_{n+1}\otimes e_1} \longrightarrow \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}e_1\otimes e_1} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}e_{n+1}\otimes e_1}$$

这表明 $\nu = \frac{1}{2}\nu_1 + \frac{1}{2}\nu_2$是一个有限阶层状测度，其支撑在 $L \cap \Sigma_{\pm}$上，并满足 $\bar{\nu} = \frac{1}{4} e_1 \otimes e_1 + \frac{1}{4} e_{n+1} \otimes e_1$。

3. No global splitting for $n = 1$ – overview of the argument

本节简要概述证明定理 1.3 的论证。首先注意，定理是下面命题 3.3 的直接推论。在接下来的两节中，我们将详细推导证明命题 3.3 所需的辅助结果。事实上，我们将该结果更精确地表述为命题 4.9。随后在第 5 节中证明这个命题。

回顾一下，分裂矩阵的集合由 $L = L_1 \cup L_2$ 给出，其中

$$L_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R} \right\}, \quad L_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.1}$$

我们定义

$$\Sigma := \{ Y \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det Y = 1 \}. \tag{3.2}$$

设 Ω_1, Ω_2 是 $\mathbb{R}$ 中的有界开区间，并令 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$。我们的目标是证明以下命题：

命题 3.3。存在一个紧集 $K \subset L \cap \Sigma$、一个矩阵 $A \in \Sigma \setminus L$ 以及一个 *Lipschitz*映射 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$，使得

$$\nabla f(x) \in K \quad \textit{for a.e. } x \in \Omega \textit{ and} \tag{3.4}$$

$$f(x) = Ax \quad \textit{for all } x \in \partial\Omega. \tag{3.5}$$

此外， K 可以选为由 *5* 个元素组成。

事实上，定理 1.3 可由此命题立即得出。

定理 *1.3* 的证明。设 f 如命题 3.3 中所述。那么，对于几乎处处的 $x \in \Omega$， $\nabla f($ $x)$ 是分裂的，且其行列式 $\nabla f(x) = 1$，但 f并非全局分裂，因为 A并非分裂。

注意， f 到 $\partial\Omega$的限制是仿射的。要证明 f 在Ω上是双利普希茨映射，可以使用 [Bal81] 中的定理 2，也可以使用[Ahl66] 的拟正则映射理论，如下所示。首先，令 $\mathcal{K} = \|\nabla f\|_{L^\infty}^2$，可得 $|\nabla f|^2 \leq K$在几乎处处成立，因此 f 是 $\mathcal{K}$-拟正则映射（或者说，是一个有界畸变映射）。由于它在边界上是仿射的，由 [LN97 定理 5] 或 [BDIS05 定理 6.1] 可知， f 是一个同胚，因此是 $\mathcal{K}$-拟共形映射。

那么 f^{-1} 也是 $\mathcal{K}$-拟共形映射（例如参见 [Ahl66，第 2]章），尤其属于索об列夫空间 $W^{1,1}(A\Omega)$（该空间等价于绝对连续直线空间 ACL($A\Omega$)）。特别地， $\nabla f^{-1} =(\nabla f)^{-1} \circ f^{-1}$ 几乎处处成立，因此 ∇f^{-1}属于 $L^\infty(A\Omega)$。由于 $A\Omega$是 Lipschitz 区域（实际上是平行四边形）， f^{-1} 在 $A\Omega$上是利普希茨的，因此可以将其利普希茨延拓到闭包。□

命题 3.3 的证明将在接下来的两节中给出。简而言之，为了构造满足 (3.4) 和 (3.5) 的映射，我们使用 Lipschitz映射的凸积分理论。在第 4 节简要回顾该理论之后，我们将该命题更精确地重述为命题 4.9。证明随后将在第 5 节中给出。

在我们的设定中，关键难点在于集合$L \cap \Sigma$中缺乏秩一连接；也就是说，对任意 $A, B \in L \cap \Sigma$，若 $A \neq B$，则有秩$(A - B) = 2$。这一性质的意义在于如下标准构造（参见引言中所述的“折叠映射”例子）：

例 3.6. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{d\times m}$ 满足秩$(A - B) = 1$。这样的矩阵对称为秩一连接。于是，对某些 $a \in \mathbb{R}^d$、 $\xi \in \mathbb{R}^m$，我们可以写成 $A - B = a \otimes \xi$；进一步，令 $C = \frac{1}{2}(A+B)$。给定任意 Lipschitz 函数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $h'(t) \in \{+1, -1\}$几乎处处成立，令 $f(x) := Cx + \frac{1}{2}ah($ $x \cdot \xi)$。则 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$是 Lipschitz 的，且 $\nabla f(x) \in \{A, B\}$几乎处处成立。

换句话说，此类秩一连接 A， $B \in K$ 使相应微分包含（3.4）的利普希茨解能够将两个梯度 A， B“组合”起来。尽管这一构造极其简单，但任意给定集合 $K \subset \mathbb{R}^{d\times m}$中是否存在秩一连接这一问题，在（3.4）这类微分包含理论中一直发挥着关键作用，并产生了深远影响。例如，如果 K 是 $\mathbb{R}^{d\times m}$中的一个 C^1 子流形，那么切空间 T_AK 中不存在秩一连接，可视为 Legendre-Hadamard 意义下某种（线性化）椭圆性的表现（参见[Sch74、Bal80、ˇSve93、MˇS03、M¨ul99、Sz´e04、LP19]）。特别是在我们的 2×2 设定中， K 及其切空间中都不存在秩一连接，这会带来高阶正则性；正如 ˇSver´ak [ˇSve93], 所示，只要 K 是连通的：此时，（3.4）的每个利普希茨解 f 实际上都属于 $C^{1,\alpha}$ 而且如果 K是光滑的，那么 f也是光滑的。此处值得指出，我们的集合 $E := L \cap \Sigma \subset \mathbb{R}^{2\times2}$满足以下两项性质，且两者都很容易验证：

- 集合 E 是两个光滑“椭圆”集合 $E = E_1 \cup E_2$的不交并，且满足 $E_i = L_i \cap \Sigma_i$。也就是说，对于每个 $i = 1,2$，集合 E_i 是一条光滑曲线，其切方向由秩二矩阵给出；

• 集合 E 不包含秩一连接。也就是说，对于任意 $A, B \in E$且满足 $A \neq B$, $\operatorname{rank}(A-B) = 2$。

尽管椭圆性会使 C^1 解具有更高的正则性，但它并不能排除 ∇f 利普希茨解的梯度出现大幅跳变的可能性，即使不存在秩一连接。为对此作一些详细说明，我们先来考察近似分裂映射的构造（参见定理 1.5）：

命题 3.7。 存在一个紧集 $K \subset L \cap \Sigma$、一个矩阵 $A \in \Sigma \setminus L$ 以及一个一致利普希茨映射序列 $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^2$，使得

$$\operatorname{dist}(\nabla f_j, K) \to 0 \quad in\ L^\infty(\Omega) \tag{3.8}$$

$$f_j(x) = Ax \quad for\ all\ x \in \partial\Omega. \tag{3.9}$$

命题 3.7 的证明基于这样一个观察：可以找到特殊的四元素集合 $K = \{X_1, \dots, X_4\} \subset L \cap \Sigma$，它们构成所谓的 T_4-构型——见下文第 5 节中的定义 5.1。这类构型由多位作者在不同背景下独立发现， [Sch74、AH86、NM91、CT93、Tar93], ，在理解例 3.6 的恰当推广方面发挥了核心作用；特别是在 Scheffer [Sch74] 以及后来的 [M˘S03、Sz´e04]的工作中，它们被用于构造椭圆系统正则性的反例。在我们的情形下，具体结果如下，其证明将在第 5.2 节给出：

引理 3.10。设 $c > 1$ 且

$$X_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$
$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1/c \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

使得 X_1、$X_2 \in L_1 \cap \Sigma$ 以及 X_3、$X_4 \in L_2 \cap \Sigma$。那么，$(X_1$、X_2、X_3、$X_4)$ 是一个 T_4构型，当且仅当 $c > 1 + \sqrt{2}$。

因此，这样的 T_4-构型 $K = \{X_1, \dots, X_4\}$ 满足命题 3.7 的结论（见第 5 节）。尽管这样的四元素集合无法用于命题 3.3（见 [CK02]），但可以改造 [M˘S03] 的稳定性论证，证明当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，该集合

$$K' := \{X \in L \cap \Sigma : \operatorname{dist}(X, K) \leq \varepsilon\}$$

满足命题 3.3 的结论。另一种基于[FS18], 的方法是，在 $L \cap \Sigma$ 中寻找合适的 T_5 构型（X_1，.....， X_5）。据我们所知，后一种方法迄今尚未用于具体的微分包含，因此可能具有独立的研究价值。本文选择在接下来的几节中详细介绍这种替代方法。精确结果陈述于命题 4.9。

4. Convex integration

本节回顾凸积分理论中的一些结果，这些结果是证明命题 3.3 所必需的。令 E 为 $d \times m$ 矩阵 $\mathbb{R}^{d\times m}$ 的一个子集，并令 $A \in \mathbb{R}^{d\times m}$。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 有界且开。凸积分

为存在 Lipschitz映射 $f:\Omega \to \mathbb{R}^d$ 提供了充分条件，使得

$$\nabla f(x) \in E \quad \text{for a.e. } x \in \Omega \text{ and} \tag{4.1}$$

$$f(x) = Ax \quad \text{for } x \in \partial\Omega. \tag{4.2}$$

事实上，凸积分能做到更多。它表明，将仿射函数$x \mapsto Ax$视为 Ω 上的函数时，可以用具有 $\nabla f \in E$ 几乎处处成立的函数 f对其作精细的 C^0逼近；也就是说，对于每个连续函数 $\varepsilon : \Omega \to (0, \infty)$，都存在一个映射 f，使得 $\nabla f \in E$几乎处处成立，且 $|f(x) - Ax| < \varepsilon(x)$。取 $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$，即可得到（4.2）。更一般地，任何满足 ∇g 且取值于某个适当集合 E' 的 C^1 函数 $g : \Omega \to \mathbb{R}^d$，都可以用几乎处处满足 $\nabla f \in E$ 的函数 f 对其作精细的 C^0 逼近。就我们的目的而言，满足（4.1）和（4.2）的函数已经足够，因此我们将重点讨论这一情形。

粗略地说，如果 A 位于 E 的某个合适的凸包中，那么凸积分断言问题 (4.1)、(4.2) 可以得到解决。凸积分的关键思想是，通过不断添加越来越快的一维振荡（其形式如例 3.6 所示），来“变形”仿射函数，从而使梯度“移动”得更接近集合 E。然后，利用细致的极限论证，确保在这一过程中梯度强收敛。

这一总体策略源自纳什关于 C^1 等距嵌入 [Nas54]，的开创性工作，随后格罗莫夫[Gro86] 将其进一步拓展和发展，形成了影响深远且强有力的凸积分技术。尽管这项技术最初旨在处理几何和拓扑中的欠定问题，近年来，同样的思想已被拓展到连续介质力学中的各种偏微分方程组，尤其是非线性弹性 [KˇSM03] 和流体动力学 [SJ14, DLS17, BV19b]。

对于许多应用，只需考虑层合凸包 E^{lc}（这本质上对应于格罗莫夫的 P-凸包 [Gro86]）。简要回顾一下：若对于任意秩一连接 A，$B \in E$（即 $\operatorname{rank}(A-B) = 1$ 整个线段 $[A, B]$ 都包含在 E中；而且，包含 E的最小层合凸集就是层合凸包），一个集合就称为层合凸。在我们的情形中，集合 E 不含秩一连接，因此自动是层合凸的。关键在于，在这种情形下，我们可以使用可能大得多的秩一凸包，它是通过秩一凸函数的对偶性定义的。

定义 4.3。若函数 $g : \mathbb{R}^{d\times m} \to \mathbb{R}$ 沿着方向由秩为一的矩阵给出的任意直线都是凸的，则称其为秩一凸函数。对于紧集$K \subset \mathbb{R}^{d\times m}$，秩一凸包定义为无法用秩一凸函数与 K 分离的点所构成的集合，即：

$$K^{rc} := \{F \in \mathbb{R}^{d\times m} : g(F) \le 0 \text{ whenever } g|_K \le 0 \text{ and } g \text{ is rank-one convex.}\} \tag{4.4}$$

对于开集 $U \subset \mathbb{R}^{d\times m}$，我们定义

$$U^{rc} = \bigcup_{K \subset U \text{ compact}} K^{rc}. \tag{4.5}$$

我们注意到，对于普通凸性，通过凸函数分离来定义凸包，与通过考察凸组合来定义凸包是等价的。但秩一凸性并非如此。事实上，下面的分析很大程度上依赖于某些有限集（“T_N 构形”，见第 5 节），这些集合的秩一凸包非平凡，却不包含任何秩一连接。

凸积分理论中的第一个关键结果依赖于基于例 3.6 的迭代构造：对于开集 E，问题 (4.1)、(4.2) 可以得到解决，条件是 $A \in E^{rc}$；参见例如 [MˇS03，第 3.1] 定理。对于许多应用，包括分裂矩阵 L 的情形，这还不够，因为在这些情况下，集合 E 是一个闭的低维子集。此外，在我们的 $E = L \cap \Sigma$ 设定中，不仅 E，E^{rc} 也是低维的；事实上，注意到函数 $X \mapsto \pm \det X$ 秩一凸的（实际上是秩一仿射的），因此 $(L \cap \Sigma)^{rc} \subset \Sigma$。从开集过渡到闭的（低维）集合有若干种方法，例如参见 [MˇS96、DM99、Syc01、Kir03、MˇS03] 。特别地，约束 $(L \cap \Sigma)^{rc} \subset \Sigma$ 已在 [MˇS99] 中得到处理。将 [MˇS99], 的主要结果专门应用于我们的设定 (3.4)-(3.5)，可表述如下。

定义 4.6 ([MˇS99],定义 1.2.)。 设

$$\Sigma := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det X = 1\}. \tag{4.7}$$

且设 $K \subset \Sigma$ 为紧集。我们称集合序列 $U_i \subset \Sigma$ 是相对于 Σ 的内逼近，如果集合 U_i 在 Σ中是开集，并且满足以下两个条件

(1) $U_i \subset U_{i+1}^{rc}$; (2) $\lim_{i\to\infty} \sup_{X\in U_i} \operatorname{dist}(X, K) = 0$.

回顾一下，若存在一个开集 $V \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$使得 $U = \Sigma \cap V$，则称集合 $U \subset \Sigma$ 在 Σ 中是开集。在 [MˇS99，定义 1.2] 中，附加假设 U_i一致有界。若 K 有界，则这由定义 4.6 中的性质 (2) 得出。

定理 4.8 ([MˇS99], 定理 1.3)。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为开、有界且连通的。设 Σ 由(4.7) 给出，并设 $K \subset \Sigma$ 为紧集。设 U_i 是 K 相对于 Σ 的内逼近，并假设

$$A \in U_1.$$

那么存在一个*Lipschitz*映射 $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$，使得

$$\nabla f(x) \in K \quad \textit{for a.e. } x \in \Omega$$

and

$$f(x) = Ax \quad \textit{for all } x \in \partial\Omega.$$

关于分裂矩阵的主要结果将在下一节证明，内容如下

命题 4.9。 令 $c \geq 3$ 并定义矩阵

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \\ X_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1/c \\ c & 0 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

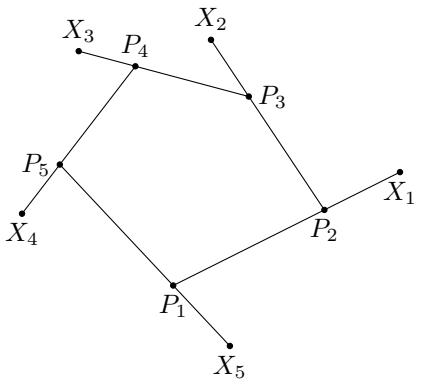

FIGURE 1. A T_5 构型。图中所画的线是秩一线

使得 X_1、X_2、$X_5 \in L_1 \cap \Sigma$ 以及 X_3、$X_4 \in L_2 \cap \Sigma$。则集合 $K = \{X_1, \dots, X_5\}$相对于 Σ 具有内逼近性质。因此，存在 $A \in \Sigma \setminus L$，使得对于任意有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，都存在 *Lipschitz*映射 $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$，满足

$$\nabla f(x) \in K \quad \textit{for a.e. } x \in \Omega,$$
$$f(x) = Ax \quad \textit{for all } x \in \partial\Omega.$$

该命题的证明将在第 5.4 节给出，遵循 [FS18] 提出的内逼近构造策略，其依据是证明集合 $\{X_1, \dots, X_5\}$ 是一个大的 T_5 集合，见定义 5.24。

5. T_N CONFIGURATIONS

5.1. 矩阵 2×2 中 T_N 构型的定义及判据。

定义 5.1。令 $N \geq 4$。由 $X_1, \dots, X_N$ 组成的矩阵 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中的一个 N 元组称为 T_N 配置，如果 rank$(X_i - X_j) > 1$ 对于 $i \neq j$ 成立，并且存在矩阵$P, C_1, \dots, C_N \in \mathbb{R}^{m\times n}$和实数 $\kappa_1, \dots, \kappa_N > 1$，使得 and

$$\begin{aligned} X_1 &= P + \kappa_1 C_1, \\ X_2 &= P + C_1 + \kappa_2 C_2, \\ &\vdots \\ X_N &= P + C_1 + \ldots + C_{N-1} + \kappa_N C_N \end{aligned}$$

and

$$\operatorname{rank} C_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{N} C_i = 0.$$

我们将这些点称为

$$P_i := P + \sum_{j=1}^{i-1} C_j, \quad i \in \{1, \dots, N\} \tag{5.2}$$

（其中 $P_1 = P$ 是 T_N 配置的内点。）

为方便读者，我们回顾一下： T_N配置 X 的一个基本性质是，内点 P_i 属于 $\{X_1,\dots,X_N\}$的秩一凸包。

引理5.3. 假设$(X_1,\dots,X_N)$ 是一个 T_N 构型。则由(5.2)给出的内点 P_i, $i=1,\dots,N$ 以及线段 $[P_i,X_i]$ 都包含在秩一凸包 $\{X_1,\dots,X_N\}^{rc}$中。

证明. 否则存在一个秩一凸函数 $g:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}$ ，使得$g(X_i)\le 0$ 且 $M:=\max_i g(P_i)>0$。设 j 满足 $g(P_j)=M$. 点P_j 位于线段 $[P_{j-1},X_{j-1}]$ 的内部（这里我们对 j 取模N，即令 $P_0=P_N$且 $X_0=X_N$）。此外 $X_{j-1}-P_{j-1}=\kappa_{j-1}C_{j-1}$是一个秩一矩阵。因此 g 在该线段上是凸的。由于 $g(P_{j-1})\le M$、$g(X_{j-1})\le 0$ 且 $M>0$，故得 $g(P_j)<M$。这与假设$M=g(P_j)$矛盾。因此$P_i\in\{X_1,\dots,X_N\}^{rc}$. 此外秩$(X_i-P_i)$ =秩 $\kappa_iC_i=1$。因此 $[P_i,X_i]\subset\{X_1,\dots,X_N\}^{rc}$。

□

一般而言，要验证给定的 N 个矩阵组是否构成 T_N 配置并不容易。对于 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中的矩阵，第三位作者提出了一个判据，我们在此回顾如下。因此，设 $(X_1,\ .....,\ X_N)$ 为一个有序矩阵集。令

$$A^\mu_{ij}=\begin{cases}\det(X_i-X_j) & i<j,\\ 0 & i=j,\\ \mu\det(X_i-X_j) & i>j.\end{cases}\tag{5.4}$$

命题 5.5 ([Sz´e05], 命题 2)。 设 $X_1,\dots,X_N\in\mathbb{R}^{2\times2}$ 满足 行列式$(X_i-X_j)\ne0$，其中 $i\ne j$，并按 (5.4) 定义 A^μ。那么，$(X_1,\dots,X_N)$ 是一个 T_N 配置，当且仅当存在 $\lambda_1,\dots,\lambda_N>0$ 和 $\mu>1$，使得

$$A^\mu\lambda=0.\tag{5.6}$$

此外，若 (5.6) 对 $\lambda_1,\dots,\lambda_N>0$ 和 $\mu>1$ 成立，则 T_N 配置的内点 P_k 可以选为

$$P_k=\sum_{i=1}^N\xi_i^{(k)}X_i\tag{5.7}$$

其中

$$\xi^{(k)}=\frac{1}{c_k}v^{(k)}\quad with\ c_k=\sum_i v_i^{(k)}\tag{5.8}$$

and

$$v_i^{(k)}=\begin{cases}\lambda_i & i\ge k\\ \mu\lambda_i & i<k.\end{cases}\tag{5.9}$$

反过来，如果$(X_1,\dots,X_N)$ 是一个具有内点 P_i的 T_N构型，那么存在 $\lambda_i>0$ 和 $\mu>1$ ，使得点 P_i 可以写成(5.7)–(5.9) 的形式，并且 $A^\mu\lambda=0$。

在命题 5.5 的设定下，我们还有

$$\det P_k=\sum_{i=1}^N\xi_i^{(k)}\det X_i,\tag{5.10}$$

参见 [Sz´e05], 引理 3 及方程 (7)。

5.2. T_4 **配置于** $L\cap\Sigma$。 作为命题 5.5 的第一个应用，我们证明引理 3.10。

引理 *3.10* 的证明。 回顾一下，我们将 $(X_1, \ldots, X_4)$ 定义为

$$X_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$
$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1/c \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $c > 0$，我们的目标是证明，对于某些 c 的取值，集合 $(X_1, \ldots, X_4)$ 是一个 T_4-配置。于是，(5.4) 中的矩阵 A^μ 为

$$A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -a & 2 & 2 \\ -a\mu & 0 & 2 & 2 \\ 2\mu & 2\mu & 0 & -a \\ 2\mu & 2\mu & -a\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

其中 $a = (c - \frac{1}{c})^2$。鉴于命题 5.5，我们需要证明存在 $\mu > 1$ 和 $\lambda \in (0, \infty)^4$，使得

$$A^\mu\lambda = 0.$$

对于 $\mu \neq 0$ 和 $\lambda_1 \neq 0$，方程 $A^\mu\lambda = 0$ 等价于

$$\lambda^T = (1, \mu, \alpha, \mu\alpha) \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} -a\mu & 2(1+\mu) \\ 2\mu(1+\mu) & -a\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = 0 \tag{5.13}$$

我们要寻找满足 $\mu > 1$ 和 $\alpha > 0$的解。对于 $\mu \neq 0$，关于$\binom{1}{\alpha}$ 的方程有非平凡解，当且仅当

$$0 = \mu^{-1} \det \begin{pmatrix} -a\mu & 2(1+\mu) \\ 2\mu(1+\mu) & -\mu a \end{pmatrix} = a^2\mu - 4(1+\mu)^2. \tag{5.14}$$

Set

$$\gamma = \frac{a^2}{4}.$$

于是，(5.14) 等价于

$$(1+\mu)^2 - \gamma\mu = 0. \tag{5.15}$$

该方程的解为

$$\mu = \frac{\gamma - 2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma-2)^2 - 4}.$$

由于 $\gamma \geq 0$，仅当 $\gamma \geq 4$ 时才存在实数解；仅当 $\gamma > 4$时，才存在满足 $\mu > 1$ 的解。事实上，对于 $\gamma > 4$，存在唯一一个满足 $\mu > 1$的解，即

$$\mu = \bar{\mu} := \frac{\gamma - 2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma-2)^2 - 4}. \tag{5.16}$$

最后，我们需要验证，对于 $\gamma > 4$ 和 $\mu = \bar{\mu}$，存在满足$\alpha > 0$的解。但由 $a > 0$这一事实可轻易得出这一结论。

总之，我们已经证明，对于 $c > 0$，(5.11) 中的矩阵 $(X_1, \ldots, X_4)$ 构成一个 T_4 配置，当且仅当 $a^2 > 16$，或者等价地， $a > 4$。这又等价于 $|c - \frac{1}{c}| > 2$。假设 $c > 1$，则这等价于 $c^2 - 2c - 1 > 0$，从而得到 $c > 1 + \sqrt{2}$。 □

5.3. T_5**-配置与大** T_5 **集**。从现在起，我们专门讨论 $N = 5$ 的情形。以下引理基于 [FS18] 中的引理 2.4，为命题 5.5 中 $\mu > 1$ 的存在性给出了一个简单的判据：

引理 5.17. 设 $(X_1, \dots, X_5)$ 是由 2×2 个矩阵组成的有序集，满足 行列式$(X_i - X_j) \neq 0$，其中 $i \neq j$，并令 A^μ 如 (5.4) 中所定义。此外，设

$$\alpha = A_{12}A_{23}A_{34}A_{45}A_{51}, \quad \beta = -\frac{\det A}{2\alpha}. \tag{5.18}$$

那么，存在 $\mu_* > 1$，使得 行列式 $A^{\mu_*} = 0$，当且仅当 $\beta > 0$，此时

$$\mu_* = 1 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 4\beta}. \tag{5.19}$$

此外，若 $\beta > 0$，则 核 A^{μ^*} 是一维的，因此命题 *5.5* 中的向量 $\xi^{(k)}$ 是唯一确定的。

我不确定这是否确实有必要，但它无疑有助于讨论排列以及识别 $\xi^{\sigma,\ k}$。

Note that $\alpha \neq 0$ since $a_{ij} = \det(X_i - X_j) \neq 0$ for $i \neq j$.

证明。首先注意，$\mu \mapsto p(\mu) :=$ 行列式 A^μ 是一个四次多项式，在 $\mu = 0$ 处有一个平凡零点。此外，由于 $(A^\mu)^T = \mu A^{(\mu^{-1})}$，我们有恒等式 行列式 $A^\mu = \mu^5$ 行列式 $A^{(\mu^{-1})}$。因此，$p(-1) = 0$，从而 $p(\mu) = \mu(\mu + 1)(a\mu^2 + b\mu + c)$。恒等式 行列式 $A^\mu = \mu^5$ 行列式 $A^{(\mu^{-1})}$ 意味着 $c = a$。我们断言：

$$a = \lim_{\mu \to 0} \frac{p(\mu)}{\mu} = \alpha$$

事实上，将 A^μ 的第一列除以 μ，令$\mu = 0$，再直接观察即可求得余下的行列式极限

$$\begin{aligned} a &= \det \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{13} & 0 & 0 & A_{34} & A_{35} \\ A_{14} & 0 & 0 & 0 & A_{45} \\ A_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & 0 \\ 0 & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{12} \\ 0 & 0 & A_{34} & A_{35} & A_{13} \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{15} \end{pmatrix} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

现在，多项式 $\alpha\mu^2 + b\mu + \alpha$ 有一个零点 $\mu_* > 1$，当且仅当 $\alpha \neq 0$ 且 $\frac{b}{\alpha} < -2$。在这种情况下，另一个零点为 $1/\mu^*$。我们有 $\det A = p(1) = 2(2\alpha + b)$，而对于 $\alpha \neq 0$，得到 $-\beta = 2 + \frac{b}{\alpha}$。因此，存在零点 $\neg\mu^* > 1$ 当且仅当 $\beta > 0$，并且很容易推出表达式 (5.19)。此外，μ^* 是一个单零点，因此

$$0 \neq \frac{d}{d\mu}|_{\mu=\mu^*} \det A^\mu = \operatorname{cof} A^{\mu^*} \cdot \frac{d}{d\mu}|_{\mu=\mu^*} A^\mu.$$

因此 $\operatorname{cof}\ A^{\mu^*} \neq 0$，从而 $\operatorname{rank} A^{\mu^*} = 4$ 且 $\dim \ker\ A^{\mu^*} = 1$。 □

注意，在定义 5.1 中，成为 T_N 构型这一性质不仅取决于集合 $\{X_1, \dots, X_N\}$，还取决于具体的排序（X_1，……，X_N）。因此，人们可以问：同一组 N 矩阵是否对若干不同的排序都是 T_N 构型。事实上，作为一个例子，不难验证引理 3.10 中的集合 $\{X_1, \dots, X_4\}$（见 (5.11)）对全部 6 种可能的排序都是 T_4 构型。接下来，我们考虑不同排序对五元素集的影响。为固定记号，我们用 S_5 表示 5 个元素的置换群。对于我们

的目的而言，跟踪由排列所诱导的排序会有所帮助，从而对任意 $\sigma \in S_5$ ，我们记

$$\sigma = \big[\sigma(1)\,\sigma(2)\,\sigma(3)\,\sigma(4)\,\sigma(5)\big].$$

令 $\sigma \in S_5$。对有序集应用命题 5.5 中的一般判据以及引理 5.17,

$$\left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}, X_{\sigma(5)}\right),$$

我们得到以下结果。

命题 5.20。 *(i)* 元组 $X^\sigma := \left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}, X_{\sigma(5)}\right)$ 是一个 T_5 配置，当且仅当存在 $\mu^\sigma > 1$ 和 $\lambda_1^\sigma, \dots, \lambda_5^\sigma > 0$ 使得

$$A^{\sigma,\mu^\sigma}\lambda^\sigma = 0,$$

其中

$$A_{ij}^{\sigma,\mu} = \begin{cases} \det(X_i - X_j) & \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \\ 0 & i = j, \\ \mu \det(X_i - X_j) & \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j). \end{cases}$$

这里， σ^{-1} 表示 σ的逆置换。

(ii) 若 X^σ 是一个 T_5 构形，则内点集由 $\{P_1^\sigma, \dots P_5^\sigma\}$给出，其中

$$P_k^\sigma = \sum_{i=1}^5 \xi_i^{(\sigma,k)} X_i \tag{5.21}$$

其中 $\xi^{(\sigma,k)} = \left(\sum_i v_i^{(\sigma,k)}\right)^{-1} v^{(\sigma,k)}$,

$$v_i^{(\sigma,k)} = \begin{cases} \lambda_i^\sigma & \sigma^{-1}(i) \geq \sigma^{-1}(k) \\ \mu^\sigma \lambda_i^\sigma & \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(k), \end{cases} \tag{5.22}$$

且 $v^{(\sigma,k)} = \sum_{i=1}^5 v_i^{(\sigma,k)}$ 。特别地， X_k 与 P_k^σ秩一相连。*(iii)* 令 $A = A^{\sigma,}$ $_1$ 并且

$$\alpha^\sigma := A_{\sigma(1)\sigma(2)} A_{\sigma(2)\sigma(3)} A_{\sigma(3)\sigma(4)} A_{\sigma(4)\sigma(5)} A_{\sigma(5)\sigma(1)}. \tag{5.23}$$

那么 $\mu \mapsto$ 行列式 $A^{\sigma,\ \mu}$ 有一个零点 $\mu^* > 1$ 当且仅当

$$\beta^\sigma := -\frac{\det A}{\alpha^\sigma} > 0.$$

若此条件成立，则 μ^* 由(5.19) 给出，其中 β 替换为 β^σ。

证明。 (i) 固定一个置换 $\sigma \in S_5$。对于一个元组 $Y = (Y_1, \dots, Y_5)$，按照（5.4）定义 $A^\mu(Y)$，其中用 Y_i替换 X_i 。对于 $\lambda \in \mathbb{R}^5$ ，定义 λ^σ 为 $\lambda_i^\sigma = \lambda_{\sigma^{-1}(i)}$。由定义可直接得到 $A^\mu(X^\sigma)_{ij} = A^{\sigma,\ \sigma\ \mu}_{\ i\ \ ()\sigma(j)}$。特别地

$$A^\mu(X^\sigma)\lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A^{\sigma,\mu}\lambda^\sigma = 0.$$

因此，将命题 5.5 应用于 X^σ 而非 X，即可得到断言 (i)。

(ii) 设 $\mu^\sigma > 1$和 $\lambda \in (0, \infty)^5$ 满足 $A^{\mu^\sigma}(X^\sigma)\lambda = 0$。按命题 5.5 中的定义，定义 $\xi^{(k)}$和P_k 。那么 X^σ 是一个带有内部点 $P_k = \sum_{i=1}^5 \xi_i^{(k)} X_{\sigma(i)}$的 T_5 构型。此外， P_k 与 $(X^\sigma)_k = X_{\sigma(k)}$秩一相连。展开定义可知， $\xi_i^{(k)} = \xi_{\sigma\ i}^{(\sigma,\sigma(k))}$ $()$ 。因此 $P_k = P_{\sigma(k)}^\sigma$。于是，对所有 k， $X_{\sigma(k)}$ 都与 $P_{\sigma(k)}^\sigma$ 秩一相连。

(iii) 令 $A(X^\sigma) = A^1(X^\sigma)$。注意，$A = A^{\sigma,\ 1}$ 与 σ 和$A_{\sigma(i)\sigma(j)} = A(X^\sigma)$ $_{ij}$无关。由于 $A(X^\sigma)$ 是由 A 通过对行和列施加相同的置换得到的，因此 det $A =$det $A(X^\sigma)$。将引理 5.17 应用于 X^σ即可得到所述结论。□

接下来，我们回顾 [FS18] 中的以下定义：

定义 5.24. 如果一个五点集 $\{X_1, \dots, X_5\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是大 T_5集，那么存在至少三个排列 σ_1、σ_2、σ_3，使得对每个 $j = 1$、2、3，($X_{\sigma_j(1)}$ $\cdots$， $X_{\sigma_j(5)}$) 都是一个T_5-构型；此外，对于所有 $i = 1$、.....、5，相应的秩一矩阵$\{P_i^{\sigma_j} - X_i$： $j = 1$、2、 3$\}$ 线性无关。

这个定义的意义如下

定理 5.25 (定理 2.8 [FS18])。 设 $\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} :$ 行列式 $X = 1\}$。如果 $K = \{X_1, \dots, X_5\} \subset \Sigma$ 是一个大 T_5 集，那么 K 存在一个相对于 Σ的内逼近。

鉴于这一结果，一旦我们证明 (4.10) 中的集合 $\{X_1, \dots X_5\}$ 是一个大 T_5 集，命题 4.9 的证明便随之得出。这正是下面命题 5.28 的内容。我们将使用以下判据来验证大 T_5 性质。

命题 5.26. 假设 $\{X_1, \dots, X_5\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是仿射非退化的，即由这 5 个矩阵所张成的 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的仿射子空间是 4 维的。则大 T_5 性质等价于如下条件：存在 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 T_5$-构形，并且

$$rank\ B^{(k)} = 3\ for\ all\ k = 1, \dots, 5, \tag{5.27}$$

其中

$$B_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \lambda_j^{\sigma_i} & \sigma_i^{-1}(k) < \sigma_i^{-1}(j), \\ 0 & k = j, \\ \mu^{\sigma_i}\lambda_j^{\sigma_i} & \sigma_i^{-1}(k) > \sigma_i^{-1}(j). \end{cases}$$

证明. 固定 k。利用表示式 (5.21)，我们有

$$P_k^\sigma - X_k = \sum_{j=1}^{5} \xi_i^{(\sigma,k)}(X_j - X_k).$$

由于对 $j \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{k\}$ 而言的四个矩阵 $X_j - X_k$ 是线性无关的，线性无关条件等价于如下条件：以 $\xi^{(\sigma_i,k)}{}_j$ 为元素的 3×4 矩阵的秩为 3。将此矩阵的第 i 行乘以 $v^{\sigma_i,k} > 0$，即得所述断言。□

5.4. **命题 4.9 的证明**。 回想一下，我们考察的矩阵为

$$X_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$
$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1/c & 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1/c \\ c & 0 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

其中 $c > 1$。

命题 4.9 可由定理 5.25 和以下结果推出。

命题 5.28. 设 $a=(c-\frac{1}{c})^2>0$， $b=c+\frac{1}{c}-2>0$ 并且

$$\sigma_1=[1\,2\,3\,5\,4],\quad \sigma_2=[1\,2\,4\,5\,3],\quad \sigma_3=[1\,2\,5\,3\,4].$$

如果 $ab>8$，那么集合 $\{X_1,\dots,X_5\}$ 是一个大的 T_5 集。更准确地说，在这种情况下，排列 σ_j、 $j=1$、2、3 对应于 T_5-构型，且对每个 $i=1$，秩一方向 $\{P_i^{\sigma_j}-X_i:\ j=1$、2、$3\}$ 线性无关，.....，5。

初等计算表明，例如当 $c\geq 3$ 时， $ab>8$ 成立。

命题 *5.28* 的证明。设 $X^\sigma=(X_{\sigma(1)},\ .....,\ X_{\sigma(5)})$。我们首先利用命题 5.20 中的判据证明 X^{σ_1}、X^{σ_2} 和 X^{σ_3} 是 T_5 构型。

为计算 $A=A^{\sigma,1}$，我们注意到对所有 i，行列式 $X_i=1$。因此

$$A=\begin{pmatrix}0&-a&2&2&-b\\-a&0&2&2&-b\\2&2&0&-a&2\\2&2&-a&0&2\\-b&-b&2&2&0\end{pmatrix}$$

其中 $a=(c-\frac{1}{c})^2>0$，且 $b=c+\frac{1}{c}-2>0$。直接计算给出

$$\det A=2a^2(ab^2+4a-16b).$$

由于 $a=b(c^{1/2}+c^{-1/2})^2>4b$，我们看到行列式 $A>0$。此外，采用(5.23)中的记号，

$$\begin{aligned}\alpha^{\sigma_1}&=A_{12}A_{23}A_{35}A_{54}A_{41}=-16a,\\ \alpha^{\sigma_2}&=A_{12}A_{24}A_{45}A_{53}A_{31}=-16a,\\ \alpha^{\sigma_3}&=A_{12}A_{25}A_{53}A_{34}A_{41}=-4a^2b.\end{aligned}$$

因此$\beta^{\sigma_i}>0$，从而将公式 (5.19) 中的 β 替换为β^{σ_i} 后所定义的 $\mu^{(i)}$ 满足 $\mu^{(i)}>1$。还要注意，由于 $ab>8$， $\beta^{\sigma_1}=\beta^{\sigma_2}>\beta^{\sigma_3}$，从而$\mu^{(1)}=\mu^{(2)}>\mu^{(3)}$。下文中，我们记

$$\eta=\mu^{(1)}=\mu^{(2)},\quad \nu=\mu^{(3)}.$$

尚需验证矩阵 $A^{\sigma_i,\mu^{(i)}}$ 的核与第一卦限$(0,\infty)^5$相交。我们首先考虑置换 $\sigma_1=[12354]$。于是

$$A^{\sigma_1,\eta}=\begin{pmatrix}0&-a&2&2&-b\\-a\eta&0&2&2&-b\\2\eta&2\eta&0&-a&2\\2\eta&2\eta&-a\eta&0&2\eta\\-b\eta&-b\eta&2\eta&2&0\end{pmatrix}.$$

将第一行减去第二行，随后从其余各行中减去第二行的适当倍数，我们得到

$$\tilde{A}^{\sigma_1,\eta}=\begin{pmatrix}0&-a&2&2&-b\\\eta&-1&0&0&0\\2\eta(1+\eta)&0&0&-a&2\\2\eta(1+\eta)&0&-a\eta&0&2\eta\\-b\eta(1+\eta)&0&2\eta&2&0\end{pmatrix},$$

进一步进行行约简后，得到矩阵

$$\tilde{\tilde{A}}^{\sigma_1,\eta}=\begin{pmatrix}0&-a&2&2&-b\\ \eta&-1&0&0&0\\ \lambda_3^{(1)}&0&-1&0&0\\ \lambda_4^{(1)}&0&0&-1&0\\ \lambda_5^{(1)}&0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda^{(1)}\in\mathbb{R}^5$ 由下式给出

$$\lambda^{(1)}=\begin{pmatrix}1&\eta&\frac{2}{a}\left(\left(\frac{ab}{4}-1\right)\eta+1\right)&\frac{2\eta}{a}\left(\frac{ab}{4}-1+\eta\right)&\left(\frac{ab}{4}-2\right)\eta\end{pmatrix}^T$$

~特别地，$(\tilde{A}^{\sigma_1,\eta}\lambda^{(1)})_i=0$ 对 $i=2,\ \ldots\ldots,\ 5.$

显然，~$A^{\sigma_1,\eta}$ 的最后四行线性无关。由于 $\det\tilde{A}^{\sigma_1,\eta}=0$，可知 $A^{\sigma_1,\eta}$ 的第一行是最后四行的线性组合。因此 $\tilde{A}^{\sigma_1,\eta}\lambda^{(1)}=0$，从而 $A^{\sigma_1,\eta}\lambda^{(1)}=0$。由于秩 $\operatorname{rank}A^{\sigma_1,\eta}=4$，可知$\lambda^{(1)}$ 是生成 $A^{\sigma_1,\eta}$ 的核的向量。由于 $a,\ b>0$、$\eta>1$ 和$ab>8$，我们看到对于所有 i，$\lambda_i^{(1)}>0$，因此 σ_1 确实对应于一个 T_5-构型。

关于情形 $\sigma_2=[12453]$，我们注意到

$$A^{\sigma_2,\eta}=\begin{pmatrix}0&-a&2&2&-b\\ -a\eta&0&2&2&-b\\ 2\eta&2\eta&0&-a\eta&2\eta\\ 2\eta&2\eta&-a&0&2\\ -b\eta&-b\eta&2&2\eta&0\end{pmatrix}.$$

将此表达式与

$$A^{\sigma_1,\eta}=\begin{pmatrix}0&-a&2&2&-b\\ -a\eta&0&2&2&-b\\ 2\eta&2\eta&0&-a&2\\ 2\eta&2\eta&-a\eta&0&2\eta\\ -b\eta&-b\eta&2\eta&2&0\end{pmatrix}.$$

我们看到 $A^{\sigma_2,\eta}$ 是通过交换 $A^{\sigma_1,\eta}$ 的第 3 行和第 4 行，以及第 3 列和第 4 列得到的。

因此

$$\lambda^{(2)}=\begin{pmatrix}1&\eta&\frac{2\eta}{a}\left(\frac{ab}{4}-1+\eta\right)&\frac{2}{a}\left(\left(\frac{ab}{4}-1\right)\eta+1\right)&\left(\frac{ab}{4}-2\right)\eta\end{pmatrix}^T$$

是生成 $A^{\sigma_2,\eta}$ 的一维核的向量，并且如上所述，我们看到在命题的条件下，对于所有 i，$\lambda_i^{(2)}>0$。

最后，让我们来看一下 $\sigma_3=[12534]$。这里

$$A^{\sigma_3,\nu}=\begin{pmatrix}0&-a&2&2&-b\\ -a\nu&0&2&2&-b\\ 2\nu&2\nu&0&-a&2\nu\\ 2\nu&2\nu&-a\nu&0&2\nu\\ -b\nu&-b\nu&2&2&0\end{pmatrix}.$$

按照上述方法进行行化简，首先得到

$$\tilde{A}^{\sigma_3,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 2 & 2 & -b \\ \nu & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\nu(1+\nu) & 0 & 0 & -a & 2\nu \\ 2\nu(1+\nu) & 0 & -a\nu & 0 & 2\nu \\ -b\nu(1+\nu) & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

再进行一次行约简，得到矩阵

$$\tilde{\tilde{A}}^{\sigma_3,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 2 & 2 & -b \\ \nu & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3^{(3)} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda_4^{(3)} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda_5^{(3)} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\lambda^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & \nu & \frac{b}{2}\nu & \frac{b}{2}\nu^2 & \left(\frac{ab}{4}-1\right)\nu - 1 \end{pmatrix}^T.$$

像之前那样推理，我们可得 $A^{\sigma_3,\nu}\lambda^{(3)} = 0$，此外，对于所有 i，都有 $\lambda_i^{(3)} > 0$，因为 $a, b > 0$、$\nu > 1$ 和 $ab > 8$。因此，σ_3 也对应于一个 T_5 配置。

鉴于命题 5.26，只需检验 (5.27) 中的秩条件。为此，只需证明对于每个 3×5 矩阵 $B^{(k)}$，都存在一个非零的 3×3 子式。通过巧妙地选择每个 $B^{(k)}$ 中相关的列，我们只需考察

$$B^{(1)}_{[245]},\ B^{(2)}_{[145]},\ B^{(3)}_{[124]},\ B^{(4)}_{[123]},\ B^{(5)}_{[123]},$$

其中，$B^{(k)}_{[lmn]}$ 表示将 $B^{(k)}$ 限制到 $[lmn]$列后得到的 3×3 矩阵。经过初等计算可得

$$\begin{aligned}
\det B^{(1)}_{[245]} &= \det \begin{pmatrix} \lambda_2^{(1)} & \lambda_4^{(1)} & \lambda_5^{(1)} \\ \lambda_2^{(2)} & \lambda_4^{(2)} & \lambda_5^{(2)} \\ \lambda_2^{(3)} & \lambda_4^{(3)} & \lambda_5^{(3)} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \eta & \frac{2\eta}{a}\left(\frac{ab}{4}-1+\eta\right) & \left(\frac{ab}{4}-2\right)\eta \\ \eta & \frac{2}{a}\left(\left(\frac{ab}{4}-1\right)\eta+1\right) & \left(\frac{ab}{4}-2\right)\eta \\ \nu & \frac{b}{2}\nu^2 & \left(\frac{ab}{4}-1\right)\nu-1 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \eta & \frac{2\eta}{a}\left(\frac{ab}{4}-1+\eta\right) & \left(\frac{ab}{4}-2\right)\eta \\ 0 & \frac{2}{a}\left(1-\eta^2\right) & 0 \\ \nu & \frac{b}{2}\nu^2 & \left(\frac{ab}{4}-1\right)\nu-1 \end{pmatrix} \\
&= -\tfrac{2}{a}(\eta^2-1)\eta(\nu-1), \\
B^{(2)}_{[145]} &= \begin{pmatrix} \eta\lambda_1^{(1)} & \lambda_4^{(1)} & \lambda_5^{(1)} \\ \eta\lambda_1^{(2)} & \lambda_4^{(2)} & \lambda_5^{(2)} \\ \nu\lambda_1^{(3)} & \lambda_4^{(3)} & \lambda_5^{(3)} \end{pmatrix} = B^{(1)}_{[245]}, \quad \text{and thus} \\
\det B^{(2)}_{[145]} &= \det B^{(1)}_{[245]}.
\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}
\det B^{(3)}_{[124]} &= \det \begin{pmatrix} \eta\lambda_1^{(1)} & \eta\lambda_2^{(1)} & \lambda_4^{(1)} \\ \eta\lambda_1^{(2)} & \eta\lambda_2^{(2)} & \eta\lambda_4^{(2)} \\ \nu\lambda_1^{(3)} & \nu\lambda_2^{(3)} & \lambda_4^{(3)} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \eta & \eta^2 & \frac{2\eta}{a}\left(\frac{ab}{4}-1+\eta\right) \\ \eta & \eta^2 & \frac{2\eta}{a}\left((\frac{ab}{4}-1)\eta+1\right) \\ \nu & \nu^2 & \frac{b}{2}\nu^2 \end{pmatrix} \\
&= \eta^2\nu \det \begin{pmatrix} 1 & \eta & \frac{2}{a}\left(\frac{ab}{4}-1+\eta\right) \\ 1 & \eta & \frac{2}{a}\left((\frac{ab}{4}-1)\eta+1\right) \\ 1 & \nu & \frac{b}{2}\nu \end{pmatrix} \\
&= \eta^2\nu \det \begin{pmatrix} 1 & \eta & \frac{2}{a}\left(\frac{ab}{4}-1+\eta\right) \\ 0 & 0 & \frac{2}{a}\left((\frac{ab}{4}-1)\eta+1-\frac{ab}{4}+1-\eta\right)\right) \\ 1 & \nu & \frac{b}{2}\nu \end{pmatrix} \\
&= -\frac{2}{a}\eta^2\nu(\tfrac{ab}{4}-2)(\eta-1)(\nu-\eta)
\end{aligned}$$

特别是，这一计算表明，三阶矩阵 $B^{(3)}_{[124]}$ 的行列式与该矩阵的 33 个元素无关。利用这一事实，我们以同样的方式得到

$$\begin{aligned}
\det B^{(4)}_{[123]} &= \det \begin{pmatrix} \eta\lambda_1^{(1)} & \eta\lambda_2^{(1)} & \eta\lambda_3^{(1)} \\ \eta\lambda_1^{(2)} & \eta\lambda_2^{(2)} & \lambda_3^{(2)} \\ \nu\lambda_1^{(3)} & \nu\lambda_2^{(3)} & \nu\lambda_3^{(3)} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \eta & \eta^2 & \frac{2\eta}{a}\left((\frac{ab}{4}-1)\eta+1\right) \\ \eta & \eta^2 & \frac{2\eta}{a}\left(\frac{ab}{4}-1+\eta\right) \\ \nu & \nu^2 & \frac{b}{2}\nu^2 \end{pmatrix} \\
&= -\det B^{(3)}_{[124]} \\
\det B^{(5)}_{[123]} &= \det \begin{pmatrix} \eta\lambda_1^{(1)} & \eta\lambda_2^{(1)} & \eta\lambda_3^{(1)} \\ \eta\lambda_1^{(2)} & \eta\lambda_2^{(2)} & \lambda_3^{(2)} \\ \nu\lambda_1^{(3)} & \nu\lambda_2^{(3)} & \lambda_3^{(3)} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \eta & \eta^2 & \frac{2\eta}{a}\left((\frac{ab}{4}-1)\eta+1\right) \\ \eta & \eta^2 & \frac{2\eta}{a}\left(\frac{ab}{4}-1+\eta\right) \\ \nu & \nu^2 & \frac{b}{2}\nu \end{pmatrix} \\
&= \det B^{(3)}_{[124]}.
\end{aligned}$$

由于根据假设我们已经知道 $\eta > \nu$、 $\eta,\ \nu > 1$ 以及 $ab > 8$ ，我们推出上述5个行列式均不为零，从而表明秩条件(5.27)成立。至此证明结束。□

Appendix A. Proof of Corollary 1.14

我们首先回顾一些记号。海森堡群是

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

我们令

$$X_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为李代数 $\mathfrak{h}$ 的标准基，故 $[X_1, X_2] = X_3$ 与 $[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$。我们令 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 为对偶基，故 $d\theta_3 = -\theta_1 \wedge \theta_2$。设 $Z(\mathbb{H}) := \exp \mathbb{R}X_3$ 为 $\mathbb{H}$ 的中心，且 $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$ 为阿贝尔化同态。我们将把 $\mathbb{R}^3$ 与 $\mathbb{H}$ 等同，其方式为

$$(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

并将阿贝尔化 $\mathbb{H}/[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$ 与 $\mathbb{R}^2$ 通过 $[(x_1, x_2, x_3)] \leftrightarrow (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$等同；在这些等同之下，阿贝尔化同态成为投影 $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$。

注意，在海森堡群的这一表示中，群作用由 $x * y = (x_1 + y_1, \ x_2 + y_2, \ x_3 + y_3 + x_1 y_2)$ 明确给出，相应的左不变向量场和对偶形式则由下式给出

$$X_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_3(x) = \frac{\partial}{\partial x_3}$$
$$\theta_1 = dx_1, \quad \theta_2 = dx_2, \quad \theta_3 = dx_3 - x_1 dx_2.$$

引理 A.1. 设 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是一个利普希茨映射，并且对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^2$，有行列式 $\nabla f(x) = 1$。那么存在一个映射 $\hat{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$，使得：

(1) $\hat{f}$ 是 f的提升，即 $\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi$。*(2)* $\hat{f}$ 是局部欧几里得利普希茨的，即在上述识别下，它定义了一个局部利普希茨映射$(\mathbb{R}^3, d_{\mathbb{R}^3}) \to (\mathbb{R}^3, d_{\mathbb{R}^3})$ $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}$。*(3)* $\hat{f}$ 保持 1-形式 θ_3，即 $\hat{f}^* \theta_3 = \theta_3$。

此外：

(4) 任何满足 *(1)–(3)* 的映射 $\hat{f}'$ 都与作用 $\mathbb{H} \curvearrowleft Z(\mathbb{H})$ 交换，$\hat{\ }\hat{\ }$即对每个 $g \in Z(\mathbb{H})$，都有 $r_g \circ \hat{f}' = \hat{f}' \circ r_g$。*(5)* 满足 *(1)–(3)* 的映射在与 $Z(\mathbb{H})$ 中元素平移复合的意义下唯一。*(6)* $f : (\mathbb{H}, d_{CC}) \to (\mathbb{H}, d_{CC})$ 是利普希茨的。*(7)* 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^2$，映射 $\hat{f}$ 可微，并且在每个点 $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$ 处 *Pansu* 可微；此外，$\hat{f}$ 的 *Pansu* 微分是 f 的微分的一个提升，即 $\pi \circ D_P \hat{f}(\hat{x}) = Df \circ \pi(\hat{x})$。

证明。令 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为一个光滑映射。定义 $\hat{h} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 如下

$$\hat{h}(x_1, x_2, x_3) := (h(x_1, x_2), x_3). \tag{A.2}$$

经计算可得

$$\hat{h}^* \theta_3 = \theta_3 + \pi^* \alpha \tag{A.3}$$

其中存在某个光滑1-形式 $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$。

对于 $u:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 光滑，我们令 $S_u:\ \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 为由$S_u(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3+u(x_1,x_2))$给出的垂直剪切，因此 $\pi \circ S_u = \pi$，从而得到

$$S_u^*\theta_3 = \theta_3 + \pi^* du\,. \tag{A.4}$$

$\hat{}$ 将初始提升 h 与剪切 S_u复合后，我们令

$$\hat{h}_1 := \hat{h} \circ S_u\,. \tag{A.5}$$

Now

$$\begin{aligned} \hat{h}_1^*\theta_3 &= S_u^*(\hat{h}^*\theta_3) \\ &= \theta_3 + \pi^* du + S_u^*(\pi^*\alpha) \\ &= \theta_3 + \pi^*(du+\alpha)\,. \end{aligned} \tag{A.6}$$

现在假设 h 保面积，即 $h^*(dx_1\wedge dx_2) = dx_1\wedge dx_2$。那么

$$\begin{aligned} d(\hat{h}^*\theta_3) &= \hat{h}^*(d\theta_3) \\ &= -\hat{h}^*\pi^*(dx_1\wedge dx_2) \\ &= -(h\circ\pi)^*(dx_1\wedge dx_2) \\ &= -\pi^*(dx_1\wedge dx_2) \\ &= d\theta_3\,. \end{aligned} \tag{A.7}$$

结合 (A.3) 和 (A.7)，得到 $d\alpha = 0$。因此，我们可以选择 u 使得$\hat{}du = -\alpha$，于是由 (A.6) 得到$h_1^*\theta_3 = \theta_3$。

$\hat{}\hat{}$ 取 $h = f$, $f := h_1$，当 f 光滑时，即得引理的断言 (1)–(3)。当 f 仅为利普希茨时，同样的论证仍然适用，但需注意，这些映射是局部欧几里得利普希茨的，外微分应解释为分布意义下的外微分，并且需要用到以下事实：当 f为局部欧几里得利普希茨且 β和 $d\beta$均为 L^∞_{loc}时，$f^*d\beta = df^*\beta$。

(4). 假设 $\hat{}\, f'\colon \mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 满足 (1)-(3)。由 (1) 可知，对每个 $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$，映射 $\hat{}\, f'$ 将纤维 $\pi^{-1}((x_1,x_2))$ 映射到纤维 $\pi^{-1}(f(x_1,x_2))$；并且根据 (3)，对于某个函数 $w\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，有 $\hat{}f'(x_1,x_2,x_3) = (f(x_1,x_2),\ x_3 + w(x_1,x_2))$。现在，给定 $g\in Z(\mathbb{H})$ $x\in\mathbb{H}$，存在 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $g*x = (x_1,x_2,x_3+c)$。于是 $\hat{}\hat{}g*f(x) = (f(x_1,x_2),\ x_3 + w(x_1,x_2) + c) = f(g*x)$，由此得到 (4)。

$\hat{}$**(5).** 假设 $f'\colon \mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 满足 (1)-(3)。由 (4) 可得

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_1,x_2,x_3) &= (f(x_1,x_2), x_3 + w(x_1,x_2))\,, \\ \hat{f}'(x_1,x_2,x_3) &= (f(x_1,x_2), x_3 + w'(x_1,x_2)) \end{aligned}$$

存在某些函数 $w,\ w'\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$；因此，对于 $u = w' - w$，有 $\hat{}\, f' = \hat{}f\circ S_u$。注意，根据 (2)，$u$ 必须是利普希茨函数，因此由 (A.4) 和 (3) 可得 $du = 0$，进而对于某个 $g\in Z(\mathbb{H})$，有 $\hat{}\hat{}h'(x) = g*h(x)$。

(6) 和 (7)。鉴于 $\hat{}\, f$ 的构造（见 (A.2)、(A.5)），对于几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^2$，我们得到 $\hat{}\, f$ 在每个 $\hat{}x\in\pi^{-1}(x)$ 处均可微。由 (1) 和 (3) 可知，微分分别保持 V_2 和 V_1；此外，限制映射 $D\hat{}f(\hat{}x)\big|_{V_1}\colon V_1\to V_1$与 $Df(x)$ 在我们的识别 $V_1\simeq\mathbb{R}^2$ 下相一致，且其算子范数为 $\le L$，其中 f 是 L-利普希茨的。

令 $W_1 \subset \mathbb{H}$ 为满测度子集

$$\{\hat{x} \in \mathbb{H} \mid D\hat{f}(\hat{x}) \text{ is defined and } \|D\hat{f}(\hat{x})\big|_{V_1}\| \leq L\}.$$

设 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{H}$ 为一条利普希茨曲线，并设 $\ell_g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 表示由$g \in \mathbb{H}$进行的左平移。由富比尼定理可知，对于一个满测度子集 $W_2 \subset \mathbb{H}$，若$g \in W_2$，则对几乎处处的 $t \in [0,1]$，有 $\ell_g \circ \gamma(t) \in W_1$；特别地， $\ell_g \circ \gamma$ 是一条水平曲线。因此，对于 $g \in W_2$，利用链式法则以及水平 Lipschitz 曲线的长度公式，我们得到

$$\begin{aligned} d(\hat{f} \circ \ell_g \circ \gamma(0), \hat{f} \circ \ell_g \circ \gamma(1)) &\leq \int_0^1 \|(\hat{f} \circ \ell_g \circ \gamma)'(t)\|\, dt \\ &= \int_0^1 \|(D\hat{f}(\ell_g \circ \gamma)(t))(\gamma'(t))\|\, dt \\ &\leq \int_0^1 L\|\gamma'(t)\| dt \\ &= L \cdot \operatorname{length}(\gamma). \end{aligned}$$

选取一个满足 $g_k \to e$ 的序列 $g_k \in W_2$，得到

$$d(f(\gamma(0)), f(\gamma(1))) \leq L \cdot \operatorname{length}(\gamma).$$

由于 γ 是任意的，这就得到 (6)。

设 Z 为点集 $x \in \mathbb{R}^2$，其中 Df 在 x 处可微，且存在 $\hat{x} \in \pi^{-1}(x) \subset \mathbb{H}$，使得 $\hat{f}$ 在 $\hat{x}$处 Pansu 可微。由 (4) 可知，当 $x \in Z$时，$\hat{f}$ 在 $\pi^{-1}(x)$中的每一点处均 Pansu 可微。现在，(7) 可由 Pansu 微分的链式法则推出。□

推论 *1.14* 的证明。设 $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 如推论 1.4 中所述。我们可以对 f 和 f^{-1}应用引理 A.1，得到 d_{CC}-利普希茨提升 $\hat{f}$，$\widehat{f^{-1}}$。根据引理 A.1(5)，我们可以选择这些提升，使得 $\widehat{f^{-1}} = (\hat{f})^{-1}$；因此，$\hat{f}$和 $(\hat{f})^{-1}$ 都是 d_{CC}-双利普希茨的。推论 1.14 中其余断言由引理 A.1 以及推论 1.4 中 f 的性质得出。□

注 A.8。对于 $i \in \{1,2\}$，设 $\mathcal{F}_i$ 是由左不变向量场 X_i定义的 $\mathbb{H}$ 的叶状结构，因此 $\mathcal{F}_i$的叶是 1 参数子群 $\exp \mathbb{R}X_i$的左陪集 $g \exp \mathbb{R}X_i$。假设 $F\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是保叶状结构 $\mathcal{F}_i$的双 Lipschitz 同胚，其中 $i \in \{1,2\}$，也就是说，对于 $i \in \{1,2\}$和任意 $g \in \mathbb{H}$，左陪集 $g \exp \mathbb{R}X_i$的像是左陪集 $g' \exp \mathbb{R}X_i$，其中 $g' = g'(g)$。由此可知，F 源自一个射影变换，见 [KMX25]；特别地，若 F 是双 Lipschitz 同胚 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的一个提升，如引理 A.1 中所述，则 f 是分裂且仿射的。

References

[AFS08] Kari Astala、Daniel Faraco 和 L ´ ´ ´ *Convex integration and the* aszlo Szekelyhidi, Jr.，， *L^p theory of elliptic equations* 5 **7** 2008 《比萨高等师范学校科学 ჯლას》 ( ) ( )，第 1 期，1 50 2413671 – . MR [AH86] Robert J. Aumann 和 Sergiu Hart, *Bi-convexity and bi-martingales*，《以色列数学杂志》 **54** 1986 2, 159 180 852476 ( )，第 – 期。[66] MR Ahl Lars V. Ahlfors， *Lectures on quasiconformal mappings*，范诺斯特兰德数学研究丛书，第 10 卷，D. Van Nostrand Co., Inc.，多伦多，安大略省—纽约—伦敦，1966 年，手稿由 Clifford J. Earle, Jr. 协助编写。MR 200442

[Bal80] John M Ball, *Strict convexity strong ellipticity and regularity in the calculus of variations*, , , 《Math. Proc. Camb. Phil. Soc.》 ( ), 第 3 期, 501–。[Bal81] J. M. Ball, *Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter*, 《Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A》 88 (1981), 第 3-4 期, 315–328。MR 616782[BDIS05] Bogdan Bojarski、Luigi D'Onofrio、Tadeusz Iwaniec 和 Carlo Sbordone, *classes of elliptic operators in the complex plane* **54** 2005 , 《Ricerche Mat.》 ( ), 第 2 期, 403 432 2289490 , MR[BV19a] T. Buckmaster 和 V. Vicol, *Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equation* 2 **189** 2019 1, 101 144 3898708 , 《Ann. of Math.》 ( ) ( ), 第 – 期。MR [BV19b] Tristan Buckmaster 和 Vlad Vicol, *Convex integration and phenomenologies in turbulence* **6** 2019 1, 173 263 , 《EMS Surv. Math. Sci.》 ( ), 第 – 期。[CDLS12] Sergio Conti、Camillo De Lellis 和 L´aszlo Sz´ekelyhidi, Jr., *h-principle and rigidity for $C^{1,\alpha}$ isometric embeddings* 《非线性偏微分方程》, Abel Symp., 第 7, 2012, 83 116 3289360 卷, Springer, 海德堡, 第 – 页。MR CK Miroslav Chlebík 和 Bernd Kirchheim, *Rigidity for the four gradient problem*, 《J. Reine Angew. Math.》2002 (2002), 第 551 期, 1–9。[CT93] Enrico Casadio Tarabusi, *An algebraic characterization of quasi-convex functions*, 《Ricerche Mat.》 **42** 1993 1, 11 24 1283802 ( ), 第 – 期。MR Dac Bernard Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*, 第二版, 应用数学科学, 第 78 卷, Springer, 纽约, 2008 年。MR 2361288[DLS09] C. De Lellis 和 L. Sz´ekelyhidi, Jr., *The Euler equations as a differential inclusion*, 《Ann. of Math.》(2 **170** 2009 3, 1417 1436 2600877) ( ), 第 – 期。MR DLS, , , *High dimensionality and h-principle in PDE* 《Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)》 **54** 2017 2, 247 282 3619726 ( ), 第 – 期。MR DM B. Dacorogna 和 P. Marcellini, *Implicit partial differential equations*, 《非线性微分方程及其应用进展》, 第 37 卷, Birkhäuser Boston, Inc., 波士顿, 马萨诸塞州, 1999 年。MR 1702252[FMP98] Irene Fonseca、Stefan Müller 和 Pablo Pedregal, *Analysis of concentration and oscillation effects generated by gradients* **29** 1998 3, 736 756 《SIAM J. Math. Anal.》 ( ), 第 – 期。MR 1617712[FS18] Clemens Förster 和 Laszlo Szekelyhidi, Jr., , *T_5-configurations and non-rigid sets of matrices* **57** 2018 《Calc. Var. Partial Differential Equations》 ( ), 第 1 期, 论文编号 19, 12。MR 3740399[Gro86] 格罗莫夫, *Partial differential relations*, 《Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)》 [数学成果及相关领域 (3)], 第 9 卷, Springer-Verlag, 柏林, 1986 年。MR 864505[Ise18] P. Isett, *A proof of Onsager's conjecture*, 《Ann. of Math.》(2) 188 (2018), 第 3 期, 871–963。MR 3866888[Kir03] Bernd Kirchheim, *Analysis and geometry of microstructure*, 授课资格论文, 莱比锡大学, https://www.mis.mpg.de/preprints/ln/lecturenote-1603.pdf, 2003 年。[KMSX24] Bruce Kleiner、Stefan Müller、Laszlo Szekelyhidi, Jr. 和 Xiangdong Xie, *Rigidity of Euclidean product structure: breakdown for low Sobolev exponents* 《Commun. Pure Appl. Anal.》 **23** 2024 10, 1569 1607 4799456 ( ), 第 – 期。MR KMX a B. Kleiner、S. Müller 和 X. Xie, *Sobolev maps on Carnot groups* 2007 06694, 2021 , [21] *Pansu pullback and exterior differentiation for* https://arxiv.org/abs/ 。。[KMX21b] , *Pansu pullback and rigidity of mappings between carnot groups*, https://arxiv.org/abs/2004.09271, 2021 年。[KMX25] B. Kleiner、S. Müller 和 X. Xie, *Rigidity of flag manifolds*, 《Indiana Univ. Math. J.》74 (2025), 第 1 期, 195–224。MR 4883589[KŠSM03] Bernd Kirchheim、Vladimír Šverák 和 Stefan Müller, *Studying nonlinear pde bygeometry in matrix space*, 《几何分析与非线性偏微分方程》, Springer, 柏林, 2003 年, 第 347–395 页。[LN97] F. Leonetti 和 V. Nesi, *Quasiconformal solutions to certain first order systems and the proof of a conjecture of G. W. Milton* 9 **76** 1997 , 《J. Math. Pures Appl.》 ( ) ( ), 第 2 期, 109 124 1432370 –。MR [LP19] Andrew Lorent 和 Guanying Peng, *Null Lagrangian measures in subspaces, compensated compactness and conservation laws* **234** 2019 , 《Arch. Rational Mech. Anal.》 ( ), 第 2 期, 857–910。

[MˇS96] Stefan M ¨ ´ *Attainment results for the two-well problem by* uller 和 *convex integration* Vladimir ˇSverak, ,《几何分析与变分法》, Int. Press, Cam- bridge, MA, 1996, 第 239–251 页。MR 1449410[MˇS99] S. M ¨ ´ *Convex integration with constraints and applications to phase* uller 和 V. ˇ *transitions and partial differential equations* **1** 1999 Sverak, ,《J. Eur. Math. Soc. (JEMS)》 (), 第 4 期, 393–422。MR 1728376[MˇS03] , *Convex integration for Lipschitz mappings and counterexamples to regularity*,《Ann. of Math. (2 **157** 2003 3, 715 742 1983780)》 (), 第 – 期。MR Mul S. [¨ 99] ¨ *Variational models for microstructure and phase transitions* Muller, ,《变分法与几何演化问题》(Cetraro, 1996), 《数学讲义》, 第 1713, 1999, 85 210 1731640 卷, Springer, 柏林, 第 – 页。MR Mur F. [77] *H-convergence* Murat, , *Séminaire d'analyse fonctionelle et numérique Université* , , 英文译本: *d'Alger 1977–78. H-convergence* Murat, F. & Tartar, L.,《复合材料数学建模专题》, 21–43, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 31, Birkh¨auser, 波士顿, MA, 1997。MR 1493039, 1977。[Mur78] Fran¸cois Murat, *Compacité par compensation*,《Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4 **5** 1978 3, 489 507 506997)》 (), 第 – 期。[81] *Compacité par compensation: condition nécessaire et suffisante de conti-* MR Mur F. Murat, *nuité faible sous une hypothèse de rang constant* , 《 Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4 **8** 1981 1, 69 102 616901)》 (), 第 – 期。[54] *C^1 isometric imbeddings* MR Nas J. Nash, ,《Ann. of Math. (2 **60** 1954 383 396 65993)》 (), –。[91] MR NM Vincenzo Nesi 和 Graeme W. Milton, *Polycrystalline configurations that maximize electrical resistivity* **39** 1991 4, 525 542 , 《J. Mech. Phys. Solids》 1106125 (), 第 – 期。MR[89] *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces* Pan P. Pansu, *symétriques de rang un* 2 **129** 1989 1, 1 60 979599 , 《Ann. of Math. () ({ })》, 第 – 期。MR[R¨ul25] Angkana R¨uland, *Microstructures in the modelling of shape-memory alloys: rigidity, flexibility and scaling*,《非线性科学中的变分法与偏微分方程方法》,《数学讲义》, 第 2366, [2025] 2025, 83 144 4944781 卷, Springer, [74] *Regularity and irregularity of solutions to nonlinear second–order* Cham, © 第 – 页。MR Sch Vladimir Scheffer, *elliptic systems of partial differential equations and inequalities*, ProQuest LLC, 安娜堡, MI, 1974, 2624766 博士 [93] *An inviscid flow with compact support in space-time* 学位论文——普林斯顿大学。MR Sch V. Scheffer, ,《J. Geom. Anal.》3 (1993), 第 4 期, 343–401。MR 1231007[SJ14] L´aszl´o Sz´ekelyhidi Jr, *From Isometric Embeddings to Turbulence*,《HCDTE Lecture Notes. Part II. 非线性双曲型偏微分方程、色散方程与输运方程》, 美国数学科学研究所, 2014, 第 1–66 页。[ˇSve93] Vladimir ˇSver´ak, *On Tartar's conjecture*,《Annales de l'Institut Henri Poincare/Analyse non lineaire》10 (1993), 第 4 期, 405–412。[Syc01] M. A. Sychev, *Comparing two methods of resolving homogeneous differential inclu-* *sions* **13** 2001 229 , 《Calc. Var. Partial Differential Equations》 (), 第 2, 213 1861098 – 期。MR Sze [´04] ´ ´ *The regularity of critical points of polyconvex functionals* Laszlo Szekelyhidi, Jr., ,《Arch. Ration. Mech. Anal.》 **172** 2004 1, 133 152 2048569 (), 第 – 期。MR Sze, ,《 [´05] *Rank-one convex hulls in $\mathbb{R}^{2\times 2}$* Calc. Var. Partial Differential Equations》22 (2005 3, 253 281 2118899), 第 – 期。MR [79] Tar L. Tartar, ,《非线性分析与力学: 赫瑞瓦特研讨会, 第 IV 卷》, Res. Notes in Math., 第 39 卷, Pitman, 波士顿, Mass.—伦敦, 1979, 第 136–212 页。MR 584398[Tar93] Luc Tartar, *Some remarks on separately convex functions*,《微结构与相变》, IMA Vol. Math. Appl., 第 54 卷, Springer, 纽约, 1993, 第 191–204 页。MR 1320538[Tar15] , *Compensated compactness with more geometry*,《微分几何与连续介质力学》, Springer Proc. Math. Stat., 第 137 卷, Springer, Cham, 2015, 第 3–26 页。MR 3447482