arXiv:2603.05981v1 [math.DG] 6 Mar 2026

度量畸变、外微分与高斯引理

Stephan V¨ollinger

stephan.voellinger@web.de

摘要

通过指出双切空间与黎曼流形切空间之间的点集关联并非恒等映射，本文重新审视了高斯引理。后者的点集关联称为度量畸变，它是一种实际诱导几何的等距映射。本文具体阐述了外微分的定义：它通过协变梯度输运，将指向黎曼流形表面上的映射线性化；与内微分不同，这一过程包含微分滑移。微分滑移是一种标量规范理论，用于考察不同长度尺度的重新参数化。度量畸变由测地径向体积保持确定，而黎曼指数映射则由测地径向长度保持确定。本文以2-球面的外部几何为例说明这一理论。

目录

1 引言 2 外微分 3 度量畸变 4 外部体积 5 高斯引理 6 2-球面的外部几何 参考文献

关键词

一般全局微分同胚群、度量畸变、外微分、高斯引理、微分滑移、外部体积。

2020 年数学主题分类

58A05 可微流形，基础。

1 引言

$p \in M$ 中映射的线性化是什么

$$\Theta : \mathbb{R}^n \to (M, \langle ., . \rangle^g) \tag{1.1}$$

它将可微曲线映射为可微曲线，并将点映射到一个 n 维黎曼流形 [5] $(M, \langle ., . \rangle^g)$ 上?

提醒一下，黎曼流形的内在几何以及坐标变换的可微性

$$f := h \circ k^{-1} : \mathbb{R}^n|_{k(U \cap V)} \to \mathbb{R}^n$$

两个不同坐标图的 [5,6]

$$h : U \subset M \to \mathbb{R}^n$$

and

$$k : V \subset M \to \mathbb{R}^n$$

由曲线传输来处理。也就是说，如果

$$\begin{array}{c} v := [t \to c(t)],\, t \in \mathbb{R} \\ c(t) \in M,\, c(0) = p \end{array} \tag{1.2}$$

是切向量等价类 [5,6], ，也可定义为一个向量 n 元组

$$\begin{array}{c} v^i := \frac{d}{dt}|_{t=0} k^i \circ c(t),\, v = v^i \partial_i,\, i = 1, .., n, \\ \text{Sum convention! } v^i \partial_i = \sum\limits_i v^i \partial_i \end{array} \tag{1.3}$$

在开头的 k 像中，其中 ∂_i 表示坐标标架（参见注释 **1.1**，I），然后通过内曲线传输定义内微分 Df

$$Df[t \to k \circ c(t)] := [t \to f \circ k \circ c(t)] = [t \to h \circ c(t)] \tag{1.4}$$

流形上的 id 以及

$$Dfv = (Df)^j_i v^i \partial_j = v^j \partial_j \tag{1.5}$$

在像坐标图 h中，即坐标中的经典内雅可比矩阵。

在内在几何中，有三种定义切向量的方法：曲线等价类、坐标 n-元组和导子 [6]。导子 [5,6] 是作用于可微函数芽的微分算子 ∂_v

$$\varphi_p : U_p \to \mathbb{R}$$

这些可微函数芽定义在点 $p \in M$的邻域 U_p 内。在内在几何中，如果 v 给定为曲线等价类（1.2），则相应的导子为

$$\partial_v \varphi_p := \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi_p \circ c(t) \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

因此，导子的结果是流形上的一个标量函数。另一方面，若一开始给定一个抽象导子 ∂_v，则它与内层坐标图 h中的向量 n元组相关联，具体为

$$(\partial_v h^1, .., \partial_v h^n)^T \tag{1.7}$$

这进而定义了一个曲线等价类 [6]。式 (1.7) 中的转置 $(..)^T$ 将行 n元组变为列 n元组。

注释 1.1 (I)（坐标标架的定义与协变性。）全局向量 $v^i\partial_i$（其指标 i 属于一个坐标图 h）在坐标变换下保持不变。因此，必然有

$$\partial_j = (Df^{-1})^i_j \partial_i, \tag{1.8}$$

也就是说，标架按照逆变矩阵 $(Df)^{-1,T}$协变变换。若一个 n元组按照某个矩阵变换，则标架按照逆变矩阵变换，以确保不变性。由式 (1.8) 可知，带标架向量 n元组在全局上保持不变

$$v^i\partial_i = \delta^i_k v^k \partial_i = (Df)^j_k (Df^{-1})^i_j v^k \partial_i = v^j \partial_j. \tag{1.9}$$

该标架定义为坐标图 h的第i个分量函数 h^i 的水平集的梯度等价类

$$\partial_i := [h^i], \tag{1.10}$$

其中， $p \in M$中

$$[\varphi^1_p] = [\varphi^2_p]$$

两个函数芽 $\varphi^{1/2}_p$: $M \to \mathbb{R}$ 之间的等价关系，按定义当且仅当它们在任意坐标图 h 中的梯度作为协变行 n元组相等

$$\partial_i(\varphi^1_p \circ h^{-1}) = \partial_i(\varphi^2_p \circ h^{-1}),\ i = 1, .., n.$$

(II)（内微分的不足。）设 (1.1) 表示一个指向黎曼流形上点的映射，其中原像空间不受限制，取为平凡空间。若将函数 $h \circ \Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的外微分取为内微分，则背景中会自动设定一个平坦流形，即带有逆黎曼张量的流形

$$g^{ij} := \sum_k (D(h \circ \Theta))^i_k (D(h \circ \Theta))^j_k,$$
$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j, \ \langle v, w \rangle^g := g_{ij} v^i w^j.$$

后一种定义无法将指向曲流形上点的映射线性化，也未考虑由线元关联的长度参数所确定的显式重新参数化。微分作用于具有对偶变换行为的标架上。定义 2.2 中外在的协变性概念自然必须通过重新参数化来校准。■

在不同流形之间以及它们之间的全局可微映射中，必须从一开始就清楚地区分曲线参数。现在的问题是如何具体确定重新参数化。这通过度量畸变的微分滑移来实现。

主定理 1.2 向量相对于全局映射作协变变换。

黎曼流形 $(M, \ \langle ., \ . \rangle^g)$ 的度量畸变 Θ_g（原点为 p）是如下点集关联

$$\Theta_g|_{\Theta_g^{-1}(M \setminus cutlocus(p))} : T_0 T_p M \to M$$

双切空间与流形之间的映射，该映射是一个等距映射（定理 3.1）；其中，Θ_g^{-1} 的定义域限制为相对于 p [5] 的割迹补集。

Θ_g 的外微分（定义 2.2，I）的微分滑移（定义 2.2，II）由测地径向体积保持确定（定理 5.2）。

任意映射 (1.1) 的协变微分可分解为一个没有微分滑移的经典协变微分 $\mathbb{R}^n \to T_p M \simeq \mathbb{R}^n$，以及一个以 p 为原点的 Θ_g 的微分（引理 2.4）。■

2 外微分

切向量 $v = v^i \partial_i \in T_p M$ 可视为函数 φ_p 在 p邻域内的水平集等价类。坐标标架 $\partial_i = [h^i]$ 按注释 1.1 中的 I 作协变变换。类比于将内在逆变向量定义为列 n 元组、将曲线等价类与导子定义为抽象微分算子，可以定义全局协变向量，它们是带标架的内在坐标 n元组。

设 $\exp_p : \ T_p M \to M$ 表示黎曼正规坐标 [5]。$\exp_p$对任意$p \in M$在原点 p建立一个正交归一接触坐标系。

命题 2.1 切向量 $v = v^i \partial_i \in T_p M$ 的下列概念是等价的

(I)（水平集等价类。） $v = [\varphi^v_p]$ 是标量函数 φ^v_p： $M \to \mathbb{R}$ 在 p邻域内诸水平集的一个水平集等价类。

(II)（行 n-元组。） v 由全局行 n-元组（ξ_1，..，ξ_n）表示

$$D_0 \exp_p^{-1}(v) = \sum_k \xi_k n_k \in \mathbb{R}^n_{synth} \tag{2.1}$$

使用合成坐标标架 n_k 和合成空间 [1]

$$\mathbb{R}^n_{synth} := T_0 T_p M.$$

此外，根据定义

$$d\varphi_p^v := (\partial_1(\varphi_p^v \circ \exp_p), .., \partial_n(\varphi_p^v \circ \exp_p)) = (\xi_1, .., \xi_n). \tag{2.2}$$

(III)（协变梯度。） v 是协变梯度

$$\begin{gathered} \varphi_p \to v(\varphi_p) := (\xi_1 \partial_1 \varphi_p, .., \xi_n \partial_n \varphi_p), \\ \varphi_p : M \to \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

也就是说，这是一个按分量作用的标量微分算子，其中 ∂_k、 $k \in \{1, .., n\}$表示相对于正规坐标 $\mathbf{exp}_p^{-1}$的坐标标架。

证明 "(I)⇔(II)"考虑注释 1.1 中的 I，可重新参数化无关的自然识别 [5]

$$D_0 \exp_p : T_0 T_p M \to T_p M$$

为了满足协变性，需要对其进行表述。在$T_0 T_p M$ （合成标架 [1]）中选择基的自由性，使得可以选择一个与重新参数化无关的初始基。然而，由于它是一个等距映射，音乐同构 $.^{\#}$分别 $.^{\flat}$ [6] 允许采用对偶版本。具体而言，这些同构是流形上的 id，并通过度量张量在坐标中利用升降指标来定义

$$(v^k)_i^{\flat} = g_{ik} v^k = v_i,\ g^{ik} \partial_k = d^i$$

其中 $v^{\#} = v^i \partial_i$ 分别 $v^{\flat} = v_i d^i$ 表示内部逆变表示和协变表示。

自然等同的协变形式为

$$D_0 \exp_p [x^k] = [x^k \circ \exp_p^{-1}],\ \forall k$$

其中 $x^k : T_p M \to \mathbb{R}$ 是相对于原点 p处所选标准正交基的第 k 个分量函数。如果 $\partial_k(p) \in T_p M$ 表示所选的原点标架，且 $v = v^k \partial_k$，那么原点附近的分量函数定义为

$$x^k(v) = \langle \Pi_{\partial_k} v, \partial_k \rangle^g,$$

其中 Π_{∂_k} 表示到一维子空间的正交投影。此外

$$[x^k] = n_k \in T_0 T_p M.$$

微分自然地通过水平集的输运来定义，如定义 2.2 所示，无需重新参数化。

由（2.2）可得 I 与 II 等价，且

$$\varphi_p^v := \sum_k \xi_k x^k \circ \exp_p^{-1}.$$

若 $\varkappa_k^i(p)$ 表示坐标变换 $h \circ \exp_p(0)$ 的雅可比矩阵，$\forall p \in domain(h) \subset M$，则

$$v^i(h(p)) = \sum_k \xi_k \varkappa_k^i(p). \tag{2.4}$$

”（II)⇔(III)” III 中的微分算子在任意坐标系中表示为

$$\xi_k \varkappa_k^i \partial_i = \xi_k \varkappa_k^j (Df^{-1})_j^i \partial_i = \xi_k \varkappa_k^j \partial_j$$

其中坐标变换为 $f: i \to j$，法坐标指标为k。后一个微分算子作用于 φ_p 后，在坐标中的任意分量都是标量，可通过链式法则直接计算。■

坐标变换的经典协变变换

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f : i \to j$$

定义为

$$\begin{gathered} Df[\varphi_p^v] := [\varphi_p^v \circ f^{-1}], \\ (Df^{-1})_j^i v_i = v_j,\ v = [\varphi_p^v] \in T_p\mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{2.5}$$

后一个操作是将逆变矩阵 $Df^{-1,T}$作用于余向量 v_i, $i = 1, .., n$，以获得像向量 v_j, $j = 1, .., n$。

指向弯曲流形的映射的广义微分包含重新参数化，以便考虑不同的长度参数。

定义 2.2 (I)（外微分。）设 (1.1) 表示一个双射映射 $\Theta(x) = p$，其指向一个黎曼流形。切空间上的外微分

$$D\Theta : T_x\mathbb{R}^n \to T_pM$$

定义为梯度传输

$$\begin{gathered} D\Theta[\varphi_x] := [\varphi_x \circ \Theta^{-1}], \\ \varphi_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ in a vicinity of } x. \end{gathered} \tag{2.6}$$

借助命题 2.1 中原像空间的概念

$$\begin{gathered} [\varphi_x] = d\varphi_x = (\partial_1\varphi_x, .., \partial_n\varphi_x), \\ \partial_k\varphi_q := \tfrac{d}{ds}|_{s=0}\varphi_q(q + se_k),\ e_k \text{ unit vector} \end{gathered}$$

以及像空间中的概念

$$\begin{gathered}[\varphi_x \circ \Theta^{-1}] = d(\varphi_x \circ \Theta^{-1}) \\ := (\partial_1(\varphi_x \circ \Theta^{-1} \circ \exp_p), .., \partial_n(\varphi_x \circ \Theta^{-1} \circ \exp_p)), \\ \partial_i(\varphi_x \circ \Theta^{-1} \circ \exp_p)(p) := \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_x \circ \Theta^{-1} \circ \exp_p(\exp_p^{-1}(p) + te_i).\end{gathered}$$

s 是原像空间中的长度参数， t 是流形上的长度参数。

（II）（微分滑移。）原像空间中的曲线参数 s 与像空间中的曲线参数t不同。沿一条曲线的微分 $\frac{dt}{ds}$ 称为沿该曲线的微分滑移 。¯微分滑移是诱导基点变换的等距映射

$$T_0T_pM \simeq T_0T_qM$$

如引理 2.3 所述。它是在 $\mathbb{R}^n_{synth}$ 中选择原点的规范因子（引理 2.4）。

（III）（时间变换。）设 M 为一个流形， $c_M:\ [0, t_{\max}] \to M$ 为以 t参数化的一条曲线。一个可微时间变换 $t \to s$ 是正的连续标量函数

$$a : M \to \mathbb{R},\ a > 0,$$

使得

$$t(s) := \int_0^s a(c_M(l))dl, \tag{2.7}$$

对于通过流形上一点的任意曲线成立。它是一种与曲线方向无关的标量规范理论。

■

微分的性质在额外的时间变换结构下保持不变。根据外微分的定义，微分滑移是一种时间变换。

引理 2.3 基点变换

$$\begin{gathered}D_q \exp_p : (T_qT_pM, \langle ., . \rangle^{eukl}_{T_qT_pM}) \to (T_qM, \langle ., . \rangle^{g}_{T_qM}) \\ \simeq (T_0T_qM, \langle ., . \rangle^{eukl}_{T_0T_qM})\end{gathered} \tag{2.8}$$

是线性坐标变换等距映射。

证明 令 $v \in T_pM$ 和 $\exp_p(v) = q \in M$。如引理 [1, lemma 3], 中所述，该映射的外微分

$$\begin{gathered}\tau_v : T_pM \to T_pM, \\ m \to m + v\end{gathered}$$

在仿射空间 TT_pM [1] 中充当平行移动 id_{pq}

$$D\tau_v = id_{pq} : T_pT_pM \to T_qT_pM.$$

T_qT_pM 中的原点是与流形中的 q 相关联的点，并且

$$D_v\Theta_q^p = D_v \exp_p \circ id_{pq} : T_pT_pM \to T_qT_pM \to T_qM$$

with

$$\Theta_q^p : w \to \exp_p(v+w).$$

这是因为 $\exp_q^{-1} \circ \exp_p$ 是流形上的一个坐标变换 id。详情见 [1, 引理 3 III] 。■

利用引理 2.3 TT_pM ，可以在流形 [1] 上构造一个自然的仿射空间。

引理 2.4 (I)（ $D_q\exp_p$ 的重新参数化梯度传输。）设 s 表示仿射空间 TT_pM 中的长度参数， t 表示流形 M 上的黎曼长度。

设 φ ： $T_pM \to \mathbb{R}$ 是 $q = \exp_p(v)$ 附近切空间上的一个标量函数，使得 $[\varphi] \in T_qT_pM$ ，并且

$$\varphi'((\exp_p^{-1})^1, .., (\exp_p^{-1})^n) := \varphi(\exp_p^{-1})$$

使得相应的函数定义在内部法坐标系中，且满足

$$[\varphi'((\exp_p^{-1})^1, .., (\exp_p^{-1})^n)] = [\varphi'] \in T_qM.$$

那么， $D_q\exp_p$ 是式 (2.8) 中的等距映射，当且仅当它是通过重新参数化的梯度传输计算得到的

$$D_q \exp_p[\varphi] \overset{\text{definition 2.2, I}}{=\!=} [\varphi \circ \exp_p^{-1}] \overset{\text{Isometry}}{=\!=} \tfrac{dt}{ds}[\varphi']. \tag{2.9}$$

(II)（ $D_q\exp_p$的重归一化曲线输运。）设 $c(t) \in M$ 表示一条满足 $c(0) = q$的曲线。重新参数化的梯度传输等价于重归一化曲线输运

$$D_q \exp_p[s \to \exp_p^{-1} \circ c(t(s))] = [t \to c(t)],$$
$$c(t) \in M,\ c(0) = q,$$

其中，由于$\exp_p$ 是等距映射，它与音乐同构$.^\#$ 分别 $.^\flat$ 对易，正如命题 2.1 的证明中那样，从而微分同胚在曲线等价类上的作用可以定义为

$$D \exp_p v^\# := (D \exp_p v)^\#.$$

(III)（将任意协变微分分解为经典微分与 $D_q\exp_p$ 的复合。）如果 Θ 是一个指向 (1.1) 中流形之上的微分同胚，那么 $\exp_p^{-1} \circ \Theta$ 是经典微分同胚 $\mathbb{R}^n \to T_pM \simeq \mathbb{R}^n$ ，并且

$$D_q\Theta = D_q \exp_p \circ D_q(\exp_p^{-1} \circ \Theta), \tag{2.10}$$

因此， Θ 的外微分可以通过计算经典协变变换 (2.5)，以及按照 I 中的方法计算等距映射 $\exp_p$ 的微分来求得。

证明 (I) 根据引理 2.3，由 $D_q\exp_p$ 诱导的基是正交规范的；若选取该基作为 $T_qM \simeq \mathbb{R}^n$ 的原点，则在协变行元组层面， $D_q\exp_p$ 就是 id 。

若 $[\varphi] \in T_qT_pM$，且 $domain(\varphi) \in T_pM$，则根据命题 2.1，取 TT_pM 为流形、 $[\varphi]$ 为原像行元组，可计算得

$$(\xi_1, .., \xi_n)_i = \tfrac{d}{ds}|_{s=0}\varphi \circ \exp_p^{-1} \circ \exp_q(\exp_q^{-1}(q) + se_i),$$

因为当法坐标变换 $\exp_q^{-1} \circ \exp_p$ 是到 T_qT_pM 原点的正交接触变换时，引理 2.3 恰好是一个等距映射。

与 $[\varphi']$ "在流形上"$(M、\langle .、 .\rangle^g)$ 相关联的行 n 元组，按定义在以 q 为原点的正规坐标系中计算如下:

$$(d(\varphi'((\exp_p^{-1})^1, .., (\exp_p^{-1})^n)))_i = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varphi \circ \exp_p^{-1} \circ \exp_q(\exp_q^{-1}(q) + te_i)).$$

经过时间变换 $\frac{dt}{ds}\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds}$，若将后一个行 n 元组乘以 $\frac{dt}{ds}$，则其恰好等于 $(\xi_1、 .., 、 \xi_n)$；也就是说,一式 (2.9) 成立。

（II）在 T_pM 上、 q 附近的分量函数 x_q^i 定义为

$$x_q^i(v + w) = \langle \Pi_{\partial_i} w, \partial_i \rangle^g_{T_pM},$$
$$\Pi_{\partial_i} \text{ orthonormal projection on } \partial_i$$

若 $\partial_i(p) \in T_pM$ 表示原点标架的选取，且 $v = v^i\partial_i$、 $w = w^i\partial_i$分别为 $\exp_p(v) = q$。

若 $v \in T_qM$ 满足

$$v^\# = (v^1, .., v^n)^T = [t \to c(t)]$$

且分量函数 $[x_q^i] \in T_qT_pM$ 满足 $domain(x_q^i) \in T_pM$，则

$$\begin{aligned}\left\langle D_q \exp_p [x_q^i], v^\# \right\rangle^g_{T_qM} &\overset{\text{isometry}}{=} \left\langle [x_q^i], D_q \exp_p^{-1} v^\# \right\rangle^{eukl}_{T_qT_pM} \\ &= (D_q \exp_p^{-1} v^\#)^i \in \mathbb{R}, \forall i\end{aligned}$$

并根据（2.9）

$$\begin{aligned}\left\langle D_q \exp_p [x_q^i], v^\# \right\rangle^g_{T_qM} &= \left\langle \tfrac{dt}{ds}\partial_i, [t \to c(t)] \right\rangle^g_{T_qM} \\ &= \tfrac{dt}{ds}[t \to (\exp_p^{-1} \circ c(t))^i] \in \mathbb{R}, \forall i.\end{aligned}$$

由此可得

$$D_q \exp_p^{-1} v^\# = \tfrac{dt}{ds}[t \to \exp_p^{-1} \circ c(t)] \in T_qT_pM.$$

但在逆变列 n 元组的层面上

$$\frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\exp_p^{-1}\circ c(t) = \frac{d}{ds}\exp_p^{-1}\circ c(t(s)),$$

使得

$$\frac{d}{ds}|_{s=0}\exp_p^{-1}\circ c(t(s))$$

是 $D_q\exp_p^{-1} v^{\#}$ 的像，在 T_qT_pM 中表示为列 n 元组（由于度量是平凡的，这等价于行 n 元组）。

(III) 映射

$$\exp_p^{-1}\circ\Theta : (\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle^{Eucl}) \to (T_pM, \langle .,. \rangle^g_{T_pM})$$

是一个经典协变映射 $\mathbb{R}^n \to T_pM \simeq \mathbb{R}^n$，因为在 T_pM 中选择了一个标准正交基作为原点。微分滑移是平凡的。经典协变微分同胚按 (2.5) 计算，而 $D_q\exp_p$ 则如 I 中所述，分别通过重新参数化的梯度传输或重归一化曲线输运计算。协变微分遵循链式法则。■

3 度量畸变

设 $\varkappa(q)$、$q \in M$ 在任意坐标图 h 中按 (2.4) 定义，即由内微分 $Dh \circ \exp_q(0)$ 定义，其中使用以 q 为原点的黎曼指数映射，$\forall q \in domain(h) \subset M$。由于在正规坐标的原点处度量是平凡的，因此可得

$$g^{ij} := \sum_k \varkappa^i_k \varkappa^j_k,\ g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j,$$

坐标图 h 中的度量。

现在可以提出如下问题：求方程的一个解

$$D\Theta(x)\partial_k = \varkappa^j_k(\Theta(x))\partial_j, \tag{3.1}$$

若将黎曼流形 $(M,\ \langle .,\ .\rangle^g)$ 作为偏微分方程的给定数据。也就是说，求一个点集关联 Θ，使其确实诱导出所给定的几何。

该问题在 [1] 中得到解决：通过流形与以 $p \in M$ 为原点的双切空间的自然点集关联来积分

$$\Theta_g|_{\Theta_g^{-1}(M\setminus cutlocus(p))} : T_0T_pM \to M. \tag{3.2}$$

$\exp_p$ 的微分最终在割迹处变得奇异，因此其像被限制在 $cutlocus(p) \subset M$ [5]的补集上，该集合是一个勒贝格零测集 [5]。

定理 3.1 (I)（等距性质。）根据构造，列维-奇维塔度量畸变 Θ_g 是一个外微分同胚，并满足 (3.1)，即几何偏微分方程 [1, 定理 14]。(3.1) 是偏微分方程，它实际上诱导出几何，因为它是一个等距映射

$$\langle D\Theta_g(x)v, D\Theta_g(x)w\rangle^g = \langle v, w\rangle^{T_qT_pM}, \quad v, w \in T_qT_pM \tag{3.3}$$

根据构造，在仿射空间 TT_pM中，若以 x 为原点，且 $\Theta_g(x) = q$，则配备平凡的欧几里得度量。

（II）（测地径向映射。）令 exp_p 表示黎曼指数函数 [5]。点集关联 (3.2) 是一个测地映射，也就是说，原点为 0 的欧几里得测地线被映射为流形中以 p 为原点的测地线

$$\Theta_g(exp_0^{\mathbb{R}^n_{synth}}(rv)) = exp_p(r'(r, v)v) \tag{3.4}$$

其中

$$v \in T_pM \simeq \mathbb{R}^n_{synth}, \|v\| = 1$$

是原点处的一个单位向量 n 元组，而 $r'(r, v)$ 是沿初始向量为 v 的测地线进行的径向收缩。

Θ_g 由一个点集关联确定

$$(r, v) \to (r'(r, v), v) \tag{3.5}$$

该关联将综合坐标中的球极坐标映射为流形中正规坐标的球极坐标，其中向量

$$v = v(\varphi_1, .., \varphi_{n-1})$$

是球极坐标的原像，其球面角为 φ_i、$i = 1$、..、 $n - 1$，半径为 1。

任意坐标下的映射称为以原点p为中心的测地径向映射。

(III)（径向收缩与微分滑移的等价性。）径向收缩 $\frac{dr'}{dr}$ 等于微分滑移 $\frac{dt}{ds}$。

证明 (I) 令 $w \in T_pM$ 和 $\exp_p(w) = q \in M$。如 [1, 引理 3], 所述，该映射的外微分

$$\tau_w : T_pM \to T_pM, \quad m \to m + w$$

在仿射空间 TT_pM中充当平行移动 id_{pq}

$$D\tau_w = id_{pq} : T_pT_pM \to T_qT_pM,$$

其中， T_qT_pM 中的原点 x 是流形中由 $\Theta_g(x) = q$ 所对应的点。

法向坐标原点处切向量的自然等同 [5]

$$D_0 \exp_p : \mathbb{R}^n_{synth} = T_0T_pM = T_pT_pM \to T_pM$$

对于任意 $p \in M$，都可以像命题 2.1 中那样以协变形式表述。

Θ_g 的外微分自然类似于黎曼指数函数的微分；根据引理 2.3，该函数是等距映射。分别参见[1, 引理 3]，了解更多详情。

(II) TT_pM 中的点集构成一个仿射空间，如 [1], 流形上的仿射空间所示。TT_pM 中坐标的选取是综合诱导的。根据引理 2.3，流形上的仿射空间与流形正交。通过切向量的平行移动可知，与 p 到 T_pM 的一条直线相对应的曲线，在仿射空间中也是一条直线；并且 $\frac{w}{\|w\|_{\mathbb{R}^n}} = v$ 相对于正规坐标正交标架的初始角度，在仿射空间中保持不变。 ——

(III) 由于微分滑移是时间变换，因此它与经过任意一点的曲线方向无关。经过该点存在一条径向曲线，其收缩为 $\frac{dr'}{dr}$。■

因此，要完全确定 Θ_g ，只需给出 $r'(r, v)$，它决定了径向收缩。这将通过体积保持来实现。

注 3.2 （湍流 [1,2,3]。）如果 $\varkappa$ 与 Levi-Civita测地线系统相关联，那么任何满足矩阵乘法 O 的正交矩阵对应的 $\varkappa \circ O$

$$(g^{ij})_{ij} = (\sum_k \varkappa_k^i \varkappa_k^j)_{ij} = \varkappa \circ \varkappa^T = (\varkappa \circ O) \circ (\varkappa \circ O)^T \tag{3.6}$$

若保持不变，则与自平行测地线和自平行指数函数相关联。

几何偏微分方程（3.1）的理论可推广到任意满足（3.6）的 $\varkappa \circ O$，并可得到自平行度量畸变 $\Theta_{\varkappa \circ O}$ [1,2,3] 。

该映射

$$\Theta_{\varkappa \circ O}^{-1} \circ \Theta_g : \mathbb{R}^n_{synth} \to \mathbb{R}^n_{O-synth} \tag{3.7}$$

称为湍流。

湍流是具有正交微分的经典协变映射。■

4 外部体积

若 $(M, \langle ., . \rangle^g)$ 是 n 维黎曼流形，且 $h: U \to \mathbb{R}^n$,$U \subset M$ 为坐标图，则

$$Vol_{int}(U) := \int\limits_{h(U)} dvol^g_{int}(z) = \int\limits_{h(U)} \det(g_{ij})^{ij} dz \tag{4.1}$$

称为内部体积。内部体积与坐标图[5] 无关，因此定义了流形上的一个测度，其对应的 Borel测度空间为 [7]。

定义 4.1（外部体积。）设 $(M, \langle .,. \rangle^g)$ 表示一个维数为 n 的黎曼流形。选取以 $q \in M$ 为原点、由 z参数化的正规坐标。令

$$\varphi'(z) \in C_0^0(\mathbb{R}^n) \text{ (continuous compact support)},$$
$$\int \varphi'(z)dz = 1$$

and

$$\varphi'_\varepsilon(z) := \tfrac{1}{\varepsilon^n}\varphi'(\tfrac{z}{\varepsilon})$$

使得

$$\int \varphi'_\varepsilon(z)dz = 1$$

and

$$\varphi'_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \delta'_0,$$

其中包含位于 0 处的狄拉克分布。于是

$$\varphi_{\varepsilon,q} := \varphi'_\varepsilon \circ \exp_q^{-1}$$

收敛为 $\varepsilon \to 0$ 流形上的 δ-分布。

在 Borel测度空间 [7] 上，关于抽象点集 M的任意测度 vol^g_{ext}，若其相对于内部测度 [7] 绝对连续，则称为外部体积，如果对任意 $q \in M$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_M \varphi_{\varepsilon,q} dvol^g_{ext} = 1. \tag{4.2}$$

任意映射 Θ: $\mathbb{R}^n \to M$，若勒贝格测度的像测度满足 (4.2)，则称为无穷小保体积。■

对于任意点 $q \in M$，外部体积在无穷小意义下等于以 q 为原点的正规坐标中相应集合的勒贝格体积。

注 4.2（外部体积和内部体积。）外部体积与内部体积并无必然等价的理由。如果存在一种无穷小穷竭，能够在流形上用平行六面体线性化，那么这些平行六面体的镶嵌也没有理由能相对于某个坐标图，无穷小地适配内部穷竭。这种线性化相差一个微分滑移，它是完整坐标网格的一种标量规范理论，并不适配内部穷竭。■

外部体积不过是对黎曼流形体积的另一种表述。

定理 4.3（外部体积的确定。）根据定义 4.1，任意外部测度均由度量畸变 Θ_g 的像测度唯一确定，因此该度量畸变是无穷小保体积的。对于 Θ_g中相对于原点的割迹补集内的任意连通开集 $O \subset \mathbb{R}^n_{synth}$，变换公式

$$\int_O dvol^{eucl} = \int_{\Theta_g(O)} dvol^g_{ext} \tag{4.3}$$

成立。

证明 令 $(\Theta_g)_\# \lambda$ 表示综合坐标下勒贝格测度的像测度，使得 $\Theta_g(0) = q \in M$。$(\Theta_g)_\# \lambda$ 关于内部体积 [7]绝对连续。令

$$\varphi^{synth} \in C_0^0(\mathbb{R}^n_{synth}) \text{ (continuous compact support)}, \quad \int \varphi^{synth}(x)dz = 1$$

and

$$\varphi^{synth}_\varepsilon(x) := \tfrac{1}{\varepsilon^n}\varphi^{synth}(\tfrac{x}{\varepsilon})$$

使得

$$\int \varphi^{synth}_\varepsilon(z)dz = 1.$$

那么，利用综合坐标下的 δ-分布和像测度定理

$$1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n_{synth}} \varphi^{synth}_\varepsilon(\Theta_g^{-1}(y))d(\Theta_g)_\#\lambda(y),$$

使得，由于 q 是任意的，只需证明 $\varphi^{synth}_\varepsilon \circ \Theta_g^{-1}$按照定义 4.1 在流形上的 q 中收敛到 δ-分布。利用 q中的测地偏离 $\overrightarrow{\Theta}_g^{-1}$

$$\Theta_g^{-1} \circ \exp_q(y) =: id(y) + \overrightarrow{\Theta}_g^{-1}(y),$$

这里使用了自然等同 $T_0T_qM = T_qM$。由此可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} \int \varphi^{synth}_\varepsilon \circ \Theta_g^{-1} \circ \exp_q(y) f(y)dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \varphi^{synth}_\varepsilon(y + \overrightarrow{\Theta}_g^{-1}(y)) f(y)d(y) \\
&\overset{\text{Substitution}}{=\!=\!=}_{y=\varepsilon z} \lim_{\varepsilon\to 0} \int \varphi^{synth}(z + O(\varepsilon)) f(\varepsilon z)dz \\
&\overset{\text{Maj. convergence [5]}}{=\!=\!=} f(0), \forall f \in C_0^0,
\end{aligned}$$

这就证明了在 q中收敛到 δ-分布。朗道符号

$$\lim_{\varepsilon\to 0} O(\varepsilon) = 0$$

之所以引入，是因为测地偏离的导数由以下方式计算：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\overrightarrow{\Theta}_g^{-1}(\varepsilon z)=0.$$

测地线在正规坐标的原点处与切向方向一致。 ■

外部体积由度量畸变“自举”而来。

例4.4 （径向映射。）令 $(M,\ \langle .,\ .\rangle^g)$ 表示一个流形。一个测地径向映射

$$f_{r'}(x)=r'(|x|)\tfrac{x}{|x|},$$

其像位于正规坐标中，并且

$$\tfrac{dr'(s)}{ds}=a$$

其像具有经典可微的体积元

$$\det(Df_{r'}^{-1})=\tfrac{1}{(\frac{r'(|x|)}{|x|})^{n-1}a}.$$

径向映射的全局积分方程

$$\int\varphi_p\circ f_{r'}(x)dx=\int\varphi_p(z)dvol_{int}^g(z),\ \forall\varphi_p,\ p\in M$$

仅当维数为 2 且 $a=\frac{|x|}{r'g}$ 时才可解，如定理5.2 所述，其中 g 是正规坐标中的二维限制体积元。

若将 $f_{r'}$ 的像视为抽象点集 M，则外部体积等价于 $f_{r'}$ 的像体积。 $f_{r'}$ 在正规坐标中的经典像体积等价于外部体积，这里的等价是指由于微分滑移而仅相差一个标量规范因子。然而，体积度量近似有所不同，因为流形上的全局网格不同。■

5 高斯引理

经典高斯引理 [5] 可表述为以下定理。

定理5.1 （经典高斯引理 [5]。）设 exp_p 表示黎曼指数函数 [5], ，并在原点处选取一组标准正交基，使得 $T_pM\simeq\mathbb{R}^n$。设 $q\ (t):=\exp_p(tv)$ ，$\|v\|=1$。设 h 表示黎曼流形 $(M,\ \langle .,\ .\rangle^g)$ 中的一个坐标图，使得

$$h\circ\exp_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

是在 p 附近的经典可微坐标变换微分同胚。

那么，在 p 附近

$$D_{tv}h\circ\exp_p:(T_{tv}\mathbb{R}^n,\langle .,.\rangle^g)\to(T_{h(q(t))}\mathbb{R}^n,\langle .,.\rangle^g),\tag{5.1}$$

是赋有度量 g_{ij} 的坐标度量空间之间的线性等距映射，其中 $\exp_p(tv) = q(t)$ 是以弧长为参数的测地线，其初始单位切向量为 v。参数 t 是黎曼长度参数，与坐标的选择无关。特别地

$$D_{tv}h \circ \exp_p(v) = \frac{d}{dt}h(q(t)). \tag{5.2}$$

$h \circ \exp_p$ 是测地径向保长映射，其中“径向”指的是对原点 p 的选择。■

正规坐标之间的坐标变换必须通过求解内部几何中的测地线问题来计算。后者必须与映射的外微分区分开来

$$\exp_p : T_p\mathbb{R}^n \to (M, \langle ., . \rangle^g)$$

其中包含微分滑移。

与第 4 章一样，流形上的测度与积分理论（M，$\langle .,\ . \rangle^g$）

$$\int_M f(m) dvol^g(m),\ m \in M,\ f : M \to \mathbb{R} \text{ measurable}$$

是在正规坐标中针对平行六面体局部线性化定义的，以局部原点处的平凡体积元 $dvol^g$ 为基础，然后再作全局汇总。

测地径向保体积映射的唯一性决定了广义高斯引理。

定理 5.2（广义高斯引理。）在 p 附近，或者更准确地说，在相对于 p 的割迹补集内，典范点集对应

$$\Theta_g : T_0T_pM \to M, \tag{5.3}$$

Levy-Civita 度量畸变（不含湍流 [1,2,3]）是沿测地线径向的无穷小保体积映射（定义 4.1），并且是 (3.3) 中的等距映射。

等距性质（定理 3.1，I）可限制在二维情形中。当维数为 $n = 2$ 时，度量畸变在整体上保体积，它将综合坐标中的勒贝格测度变换为黎曼流形的内体积。

证明 Θ_g 由定理 3.1 可知是沿测地线径向的。根据等距性质 (3.3)，度量畸变是无穷小保体积映射（定理 4.3）。

在这种情形下，$r'(r,\ v)$ 是唯一确定的，这一点可以明确看出：由于欧几里得测地平面在正规坐标下仍映射为欧几里得测地平面，因此问题可以缩减为二维问题。几何偏微分方程 (3.1) 限制在二维子流形上。接着，考虑径向映射

$$f_{r'}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\frac{r'(r,v)}{r}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=r'(r,v)v,$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ v=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

在二维情形下，(3.5) 中的 $r'(r,\ v)$ 确实由以下（无穷小保体积的）全局方程唯一确定

$$Vol_{\mathbb{R}^n}(f_{r'}^{-1}(seg_{\triangle\varphi,\triangle r}(B_{r'})))=Vol_g(seg_{\triangle\varphi,\triangle r}(B_{r'}))\tag{5.4}$$

其中 $B_{r'}\subset\mathbb{R}^n$ 是正规坐标中的欧几里得测地球，而$seg_{\triangle\varphi,\ \triangle r'}(B_{r'})\subset B_{r'}$ 表示具有给定角度和半径的球面片段

$$\triangle\varphi=\varphi_2-\varphi_1\in[0,2\pi],\ \triangle r'=r_2'-r_1'>0.$$

利用极坐标，可将（5.4）简化表述为

$$f_{polar}^{-1}(r,\varphi)=\begin{pmatrix}r\cos(\varphi)\\r\sin(\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ r>0,\ \varphi\in[0,2\pi),$$

分别在原像和像空间中如下

$$\int\limits_{f_{r'}^{-1}(seg_{\triangle\varphi,\triangle r}(B^g_{r'}))}ldld\phi=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{r_1'}^{r_2'}l'g(l',\phi')dl'd\phi',\tag{5.5}$$

其中 $g=\sqrt{\det(g_{ij})^{ij}}$ 是正规坐标中的二维限制体积元，而 $\det(Df_{polar}^{-1})=r$。（5.5）的解可唯一地由下式得到

$$\frac{dr'}{dr}=\frac{r}{r'g}\tag{5.6}$$

因为

$$\det(Df_{r'}^{-1})=\frac{dr}{dr'}\frac{r}{r'}\overset{(5.6)}{=}g,$$

当且仅当满足（5.6）时，等式才严格成立；其中第一个等号可通过对满足以下条件的二维径向映射进行初等分析得出

$$\det(Df_{polar}\circ Df_{r'}^{-1}\circ Df_{polar}^{-1})=\det(D(f_{polar}\circ f_{r'}^{-1}\circ f_{polar}^{-1}))=\frac{dr}{dr'}.$$

径向映射诱导 (5.5) 中的体积元。

积分方程 (5.4) 确定 $r'(r,v)$，其中二维单位向量 $\|v\|=1$ 具有极坐标 φ。

此外，由此可知，在二维情形中，综合坐标的勒贝格测度的像测度是黎曼流形的内体积。■

由于 Θ_g 是等距映射，它分别与音乐同构 $.^{\#}$ 和 $.^{\flat}$ 可交换，并且微分同胚 $D\Theta_g$ 在曲线等价类上的作用可如引理 2.4, II 中那样定义。

定义 5.3（重归一化曲线输运。）令 Θ_g 表示列维-奇维塔度量畸变（不含湍流 [1,2,3]），它被定义为 $cutlocus(p)$的补集的像。令

$$c(s) \in \mathbb{R}^n_{synth}$$

表示一条具有 $s \in [0, s_{\max}]$的曲线。
称可逆重参数化 $s \to t$ 满足

$$\left\langle \tfrac{d}{dt}\Theta_g(c(s(t))), \tfrac{d}{dt}\Theta_g(c(s(t))) \right\rangle^g \overset{!}{=} 1 \tag{5.7}$$

为重归一化曲线输运，如果 c 是 $\mathbb{R}^n_{synth}$ 中的欧氏单位速度曲线。■

由于 Θ_g 是等距映射，协变微分有一个逆变曲线运输版本。流形上的曲线的欧拉格式在“综合坐标中提升”。每个曲线段都被变换到以该段起点为原点的法坐标中，并将时间变换为 $\mathbb{R}^n_{synth}$ 的长度参数。

注记5.4 (I)（计算 Θ_g 的径向等距性质。）令 r 表示 $\mathbb{R}^n_{synth}$ 中的径向参数， r' 表示 T_pM 上的径向参数，$r'' = r' \circ ((\exp_p^{-1})^1, .., (\exp_p^{-1})^n)$ 表示流形上的径向参数。若 e_r 表示径向行 n 元组，则

$$e_r = dr = dr' = dr''$$

在行 n 元组的层面上，根据命题 2.1。
为了计算径向等距性质

$$D\Theta_g[r] = [r'']$$

利用引理 2.4 的 III 中的分解，径向映射的经典微分

$$\exp_p^{-1} \circ \Theta_g : \mathbb{R}^n_{synth} \to \mathbb{R}^n$$

通过 (2.5) 中的经典协变矩阵变换计算如下

$$D(\exp_p^{-1} \circ \Theta_g)dr = \tfrac{dr}{dr'}dr'.$$

根据引理 2.4 的 I

$$D\exp_p[r'] = \tfrac{dt}{ds}\partial r'$$

并根据定理 3.1 的 III

$$\tfrac{dt}{ds} = (\tfrac{dr}{dr'})^{-1}.$$

使得

$$D\Theta_g[r] = D\exp_p \circ D(\exp_p^{-1} \circ \Theta_g) = \tfrac{dr}{dr'}(\tfrac{dr}{dr'})^{-1}\partial r' = \partial r' = [r''].$$

（II）（径向对称流形上外微分的等距性质的计算。）设流形 M 关于原点 p径向对称，即

$$r'(r,v) = r'(r), \forall v.$$

为了根据定义 2.2 在初等层面上计算外微分 $D\Theta_g$ 是一个等距映射，必须考虑到 $D\Theta_g$ 是一个经典的协变内变换，并根据引理 2.4进行重新参数化。如果能够证明 $\exp_p^{-1} \circ \Theta_g$的内雅可比（包括全局重新参数化） $s \to t$ 将综合坐标中的正交归一标架变换为黎曼坐标中的正交归一标架，那么可知 Θ_g 关于外微分是一个等距映射。

下面将使用以下事实

-测地径向压缩为 $\frac{d}{dr} r'(r)$。 —

-情形可以简化为二维情形。

-度量互补压缩由（3.1）中的 $\varkappa$确定。

第一条断言根据 I 的构造即可得到。第二条断言成立，是因为欧几里得测地平面被映射为原点为 p的坐标中的测地平面。最后一条断言通过考察特殊坐标系即可得到。测地极坐标（r'， φ）可以在坐标中引入，而余向量（$\partial_{r'}$， ∂_φ）具有余向量二元组表示。 $\partial_{r'}$和 ∂_φ 可以在（x， y）坐标系中作为余向量二元组计算，其中 f_{polar}：（x， y）$\to$（r'， φ) 通过

$$dr'(x,y) = \tfrac{1}{|(x,y)|}(x,y)$$

分别

$$d\varphi(x,y) = (-r'\sin(\varphi), r'\cos(\varphi))(x,y).$$

在正规坐标 $\exp_p^{-1}$中， $\varkappa$ 作用于向量 $v = v_1\partial_{r'} + v_2\partial_\varphi$具有如下形式

$$\varkappa(v) = \tfrac{\langle \partial_{r'}, v\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|\partial_{r'}\|^2_{\mathbb{R}^2}}\partial_{r'} + \tfrac{1}{g}\tfrac{\langle \partial_\varphi, v\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|\partial_\varphi\|^2_{\mathbb{R}^2}}\partial_\varphi, \tag{5.8}$$

因为正规坐标是径向保长的，流形一开始就是径向对称的，并且 $\det(\varkappa) = \frac{1}{g}$，其中 g 是正规坐标中的二维限制体积元，从而相应的特征值必然可由等距性质 (3.3) 得出。

因为在（5.5）的二维情形中，径向映射的内微分必然导出相同的体积形式，而且参数 φ没有改变

$$f_{polar} \circ \exp_p^{-1} \circ \Theta_g \circ f_{polar}^{-1}(r,\varphi) = (r',\varphi),$$

它的雅可比矩阵为

$$D(f_{polar} \circ \exp_p^{-1} \circ \Theta_g \circ f_{polar}^{-1})(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{r}{r'g} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因为 $\det(Df_{polar}^{-1}) = r$。由此可知，映射 $r'(r)$ 满足

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{r}{r'g}.$$

$\frac{1}{r}\partial\varphi$ 是一个单位余向量，在 Θ_g 的原像空间中，它是一个欧氏单位余向量，即综合坐标。类似地，$\frac{1}{r'}\partial\varphi$ 是法坐标 $\mathbb{R}^n$ 中的欧氏单位余向量，并且由于 (5.8) 中 $\varkappa$ 的形式，向量 $\frac{1}{r'g}\partial\varphi$ 相对于黎曼度量是一个单位向量。径向映射的协变内雅可比矩阵将标架 $\partial\varphi(r, \varphi)$ 变换为 $\partial\varphi(r', \varphi)$，其中角度 φ 在像空间和原像空间中相同，即对于余向量组，内雅可比 $D(\exp_p^{-1} \circ \Theta_g)$ 在 φ 分量上为 id。根据引理 2.4，微分为

$$D\Theta_g \tfrac{1}{r}[\varphi] = \tfrac{1}{r'g}\partial\varphi = \tfrac{1}{r'g}[\varphi((\exp_p^{-1})^1, .., (\exp_p^{-1})^n)],$$

其中角度参数相同，但余向量对应于不同的定义域。也就是说，$D\Theta_g$ 在 φ 分量上是一个等距映射。根据 I 的构造，$D\Theta_g$ 在径向上是等距的。由于 $\partial_{r'}$ 和 ∂_φ 在度量意义下正交，因此 $D\Theta_g$ 满足等距性质。■

6 二维球面的外部几何

作为径向对称投影的度量畸变的一个自然例子，是二维球面 S^2 在 $\mathbb{R}^3$中的嵌入

$$\begin{gathered} S^2 \subset \mathbb{R}^3, \\ S^2 := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 |\ \left\|(x,y,z)^T\right\|_{\mathbb{R}^3} = 1\}. \end{gathered} \tag{6.1}$$

北极处的双切空间 $n := (0, 0, 1)^T$

$$\mathbb{R}^n_{synth} = T_0 T_n S^2,\ T_n S^2 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 |\ z = 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

充当以 n 为原点的综合坐标系。
一个自然的内坐标系是到 $\mathbb{R}^3|_{z=0}$上的正交投影。**注 6.1** 正交投影

$$\begin{gathered} \Pi_{S^2} : S^2 \to \mathbb{R}^3|_{z=0} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 |\ z = 0\}, \\ (x,y,z)^T \to (x,y,0)^T \end{gathered} \tag{6.2}$$

作为流形 S^2 上的坐标图 $(\mathbb{R}^3|_{z=0}, \langle ., . \rangle^g)$，它提供了一个自然的内坐标系，其像为

$$image(\Pi_{S^2}) = \{(x,y,0)^T \in \mathbb{R}^3|_{z=0} |\ \left\|(x,y)^T\right\|_{\mathbb{R}^2} < 1\}$$

以及开半球

$$S^{2,\uparrow} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3|\ z = \sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y)^T \in image(\Pi_{S^2})\}$$

作为原像。

$\langle .,\ . \rangle_{\mathbb{R}^3}$ 限制在半球面 $S^{2,\uparrow}$ 上的诱导度量张量，在正交投影坐标中为

$$D\Pi_{S^2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

计算得

$$\begin{aligned}(g_{ij})^{ij}(x,y) &= D\Pi_{S^2}^{-1,T} \circ D\Pi_{S^2}^{-1}(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2} & \frac{xy}{1-x^2-y^2} \\ \frac{xy}{1-x^2-y^2} & 1+\frac{y^2}{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

映射

$$(x,y)^T \to (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})^T$$

在 $image(\Pi_{S^2})$ 上是经典可微的。 ■

通过对三角函数进行初等计算可知，在正交投影坐标系的极坐标 f_{polar}: $(x,\ y) \to (\widehat{r},\ \varphi)$ 中

$$\begin{aligned}(g_{ij})^{ij}(\widehat{r},\varphi) &= (Df_{polar}^{-1})^T \circ (g_{ij})^{ij}(f_{polar}^{-1}(\widehat{r},\varphi)) \circ Df_{polar}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\widehat{r}^2} & 0 \\ 0 & \widehat{r}^2 \end{pmatrix},\ \widehat{r} = \sqrt{x^2+y^2},\end{aligned} \tag{6.4}$$

with

$$g_{\widehat{r}\widehat{r}}(\widehat{r},\varphi) = \tfrac{1}{1-\widehat{r}^2},\ \forall \varphi, \tag{6.5}$$

其中欧几里得极坐标定义为

$$\begin{aligned}f_{polar}^{-1}(\widehat{r},\varphi) = \begin{pmatrix} \widehat{r}\cos(\varphi) \\ \widehat{r}\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \widehat{r} > 0,\ \varphi \in [0,2\pi), \\ ((g_{polar})_{ij})^{ij} = (Df_{polar}^{-1})^T \circ Df_{polar}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{r}^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 6.2 （黎曼指数映射是球面上的径向保长的径向对称投影。）现在，黎曼指数映射 $\exp_n$ （其像为 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ）由径向保长的径向对称投影确定

$$\begin{array}{c}\exp_n : B_{r'<\pi/2} \subset \mathbb{R}^2 \to S^2 \overset{\Pi_{S^2}}{\to} image(\Pi_{S^2}) \\ (r',\varphi) \underset{\text{projection}}{\overset{\text{radial}}{\to}} (\widehat{r},\varphi),\end{array} \tag{6.6}$$

其中， r' 表示正规坐标中的长度参数， $B_{r'<\pi/2}$表示半径为 $\pi/2$ 的二维球。

显式函数 $\widehat{r}(r')$ 由坐标系中任意径向单位速度曲线 $c(t)$ 的端点决定。单位速度参数 t 等于r' 决定了该函数。也就是说

$$\sqrt{\left\langle \tfrac{d}{dt}c(t), \tfrac{d}{dt}c(t)\right\rangle^g} = \sqrt{g_{\widehat{r}\widehat{r}}(c(t))(\tfrac{d}{dt}c(t))^2} \overset{!}{=} 1, \forall t,$$

with

$$\tfrac{1}{1-\widehat{r}(r')^2} = g_{\widehat{r}\widehat{r}}(\widehat{r}(r')), \forall \varphi.$$

后一个条件等价于常微分方程

$$\tfrac{d}{dr'}\widehat{r}(r') = \sqrt{1-\widehat{r}(r')^2}, \widehat{r}(0) = 0, \widehat{r} > 0.$$

该常微分方程有经典闭式解

$$\widehat{r}(r') = \sin(r'), r(\pi/2) = 1, \tag{6.7}$$

w这一点很容易由 $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 \equiv 1$ 看出 ， $\forall \alpha$。

根据高斯引理（定理5.1），由径向对称的保长度映射的唯一性可知, (6.6) 是以北极 n 为原点的指数映射。■

注 6.3 (I)（确定球面度量畸变中的 $\varkappa$ 。）若 $(\widehat{r},\varphi)$ 是投影坐标系的极坐标, 则投影坐标中的 $\varkappa$ 由投影坐标 $\mathbb{R}^n$ 中的矩阵确定；该矩阵的特征向量为 $\partial_{\widehat{r}}$ 和 ∂_φ，对应的特征值分别为 $\sqrt{1-\widehat{r}^2}$ 和 1。由径向长度保持和径向对称性可知这一点：将球面上 z-轴水平集圆正交投影到投影坐标系中的距离圆时，沿圆的长度保持不变，因此可得 ∂_φ 的特征值为 1。具体而言，其显式解析表达式 $\varkappa$ 定义为

$$\begin{array}{c}\varkappa(v) = \sqrt{1-\widehat{r}^2}\frac{\langle \partial_{\widehat{r}}, v\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|\partial_{\widehat{r}}\|^2_{\mathbb{R}^2}}\partial_{\widehat{r}} + \frac{\langle \partial_\varphi, v\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|\partial_\varphi\|^2_{\mathbb{R}^2}}\partial_\varphi, \\ v = v_1\partial_{\widehat{r}} + v_2\partial_\varphi\end{array} \tag{6.8}$$

因为该表达式是线性的，并且实现了唯一的特征值理论。

或者，也可以按照 [1, 注 7] ，沿径向测地线通过数值求解坐标中的平行移动常微分方程，来确定度量畸变中的 $\varkappa$ 。

检视 $\varkappa$ 在极坐标中表明

$$\varkappa \circ \varkappa^T = (g^{ij})_{ij}$$

在(6.4)中并不是对角解。

(II)（收缩因子的确定。）若度量张量在投影坐标中由 (6.4) 给出，则在正规坐标中

$$g_{ks} = (Df_{r'}^{-1})_k^i (Df_{r'}^{-1})_s^j g_{ij}$$

其中

$$\begin{array}{c} f_{r'} : image(\Pi_{S^2}) \to T_0 image(\Pi_{S^2}) \\ f_{r'}(x) = r'(|x|)\frac{x}{|x|} \end{array}$$

是从投影坐标到正规坐标的坐标变换，它是一个径向映射。 $r' \circ \exp_n^{-1}$是S^2的长度参数。经过初等计算可得

$$g_{normal} = \det(g_{ks})^{ks} = \frac{\sin(r')}{r'}.$$

根据 (5.6)，微分滑移为

$$\frac{r}{r'g} = \frac{r}{\sin(r')}, \tag{6.9}$$

其中， r 表示综合坐标中相应的长度参数， $g = g_{normal}$ 为全局标量。■

例6.4 （球面上的径向保体积的径向对称投影所产生的度量畸变。）在情形 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 中，列维-奇维塔度量畸变现由径向保体积的径向对称投影确定

$$\begin{array}{c} \Theta_{S^2} : T_0 T_n S^2|_{B_{r<r_{\max}}} \to S^2 \overset{\Pi_{S^2}}{\to} image(\Pi_{S^2}) \\ (r,\varphi) \underset{\text{projection}}{\overset{\text{radial}}{\to}} (\widehat{r},\varphi), \end{array} \tag{6.10}$$

其中， r 表示 $\mathbb{R}^2_{synth} = T_n S^2$ 中的长度参数， $.|_{B_{r<r_{\max}}}$ 表示对二维球内部的限制。

若 $\triangle\varphi$ 表示 S^1在 $\mathbb{R}^2_{synth}$中的径向圆弧段的（归一化）弧长，则

$$r\triangle\varphi$$

是 $\mathbb{R}^2_{synth}$中半径为$r > 0$ 的径向投影圆弧段的欧几里得长度。

类似地

$$\widehat{r}\triangle\varphi$$

是射影坐标系中径向对称圆弧的黎曼长度，这可由对 S^2的正交投影得出。这些圆弧在 S^2 和 $image$（Π_{S^2}）中的长度在正交投影下保持不变。

显式函数 $\widehat{r}(r)$ 由合成坐标的极坐标与投影坐标的极坐标中的体积保持确定，如式 (5.5) 所示，并采用式 (6.4) 中相应的黎曼体积元

$$\int_{r}^{r+\triangle r} sds\triangle\varphi \stackrel{!}{=} \int_{\widehat{r}(r)}^{\widehat{r}(r+\triangle r)} \frac{s'}{\sqrt{1-(s')^2}} ds'\triangle\varphi.$$

由此得到

$$\frac{1}{2}\frac{(r+\triangle r)^2-r^2}{\triangle r} \stackrel{!}{=} \frac{-\sqrt{1-\widehat{r}(r+\triangle r)^2}+\sqrt{1-\widehat{r}(r)^2}}{\triangle r}.$$

应用 $\lim_{\triangle r\to 0}$ 是一种微分，这表明

$$\frac{d}{dr}(-\sqrt{1-\widehat{r}(r)^2}) \stackrel{!}{=} r.$$

积分后得到

$$\sqrt{1-\widehat{r}(0)^2}-\sqrt{1-\widehat{r}(r)^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}r^2.$$

由于 $\widehat{r}(0)=0$ ，解为

$$\widehat{r}(r)=r\sqrt{1-\frac{1}{4}r^2}. \tag{6.11}$$

其反函数为

$$r(\widehat{r})=\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-r^2}}. \tag{6.12}$$

尤其是

$$r_{\max}=r(1)=\sqrt{2}.$$

为了检验总体积保持，半球 $S^{2,\uparrow}$ 的表面积体积为

$$Vol(S^{2,\uparrow})=\frac{1}{2}(4\pi(\widehat{r})^2) \stackrel{\widehat{r}\equiv 1}{=} 2\pi.$$

Θ_{S^2}的原像体积等于半径为$r_{\max}=\sqrt{2}$的二维球的体积

$$Vol(\Theta_{S^2}^{-1}(S^{2,\uparrow}))=\pi r^2 \stackrel{r=\sqrt{2}}{=} 2\pi.$$

也就是说，总体积保持成立。

与注记5.4中一样， Θ_{S^2} 在圆弧角方向上是一个等距映射，对于每个$r>0$ ，欧几里得单位速率圆弧

$$s \to r \begin{pmatrix} \cos(\varphi(s)+\varphi_0) \\ \sin(\varphi(s)+\varphi_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_{synth},$$

其中

$$\varphi(s) = \tfrac{s}{r},\ s \in \mathbb{R}$$

通过定义 5.3 中的重归一化曲线输运，将其映射为 g单位速圆弧段

$$t \to \widehat{r}(r) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)+\varphi_0) \\ \sin(\varphi(t)+\varphi_0) \end{pmatrix} \in image(\Pi_{S^2}),$$

其中

$$\varphi(t) = \tfrac{t}{\widehat{r}},\ t \in \mathbb{R}.$$

根据构造，Θ_{S^2} 在正交径向方向上是一个等距映射。

根据广义高斯引理（定理 5.2），由径向对称保体积映射的唯一性可知，Θ_{S^2} 是以北极 n 为原点的度量畸变。■

注 6.5 (I)（外部可微性。） Θ_{S^2} 是从欧几里得空间到具有非零曲率张量的空间的等距映射，因此 Θ_{S^2} 不可能是经典可微的。也就是说，内部可微性无法解决这个问题。

(II)（几乎全局存在性。）度量畸变的原像受到例6.4构造中正交坐标投影定义域的限制。然而，正规坐标几乎处处都可以定义。若选择（径向对称）正规坐标作为像定义域，那么度量畸变的径向对称构造便可以几乎全局地延续至割迹，即南极。

(III)（李群 S^3。） [4, 定理 11] 指出，三维球面 S^3作为一个李群，其度量畸变是矩阵指数函数。此断言需要考虑微分滑移，并像 [4,5] 中那样修订高斯引理。根据定理 5.2 和子流形性质 $S^2 \subset S^3$，度量畸变 Θ_{S^2} 是其限制，因为等距性质 (3.3) 必然会受到限制。由于重新归一化后的度量畸变

$$\Theta_{S^3}(rv) = \exp_{id}(r'(r)v),$$
$$\|v\| = 1,\ v \in T_{id}S^3 \simeq T_0T_{id}S^3$$

分别是指数函数和积分曲线，它们是左乘映射的自微分同胚微分下的左不变论证

$$L_x : S^3 \to S^3,\ x \in S^3$$

指流形中由 r' 给出的参数化，定理中的陈述应指出黎曼指数映射与李群矩阵指数映射相等。然而，对于如引理 2.4 中的映射 $\exp_{id}: T_{id}S^3 \to S^3$ 的等距性质，因度量畸变而产生的重新参数化对李群的微分拓扑至关重要 [4,定理 15]。■

参考文献

[1] S. V¨ollinger, 《度量畸变与几何偏微分方程》, *JP J. Geom. Top.* **14**, (2013), 61-86.[2]S. V¨ollinger, 《湍流理论》, *JP J. Geom. Top.* **15**, (2014), 35-64.[3]S. V¨ollinger, 《度量畸变与不变流体力学》, *Far East J. Appl. Math.* **94**, (2016), 377-394.[4] S. V¨ollinger, 《度量畸变与李群》, *JP J. Geom.Top.* **15**, (2018), 35-64.[5] M. do Carmo, 《黎曼几何》, Birkh¨auser, 巴塞尔, (1992).[6] K. J¨anich, 《向量分析》, Springer, 柏林 (1993), 第二版。[7] J. Elstrodt, 《测度与积分理论》, Springer, 柏林 (1996)。