arXiv:2603.05983v1 [math.AP] 6 Mar 2026

具有 Beltrami 电导率的平面 Coleman–Gurtin 模型

Francesco Di Plinio

摘要。本文研究有界区域上的平面Coleman–Gurtin带记忆热方程，其扩散具有粗糙的各向异性 A_μ，这是非均质介质或复合介质的典型特征，并由满足 $\|\mu\|_\infty < 1$的Beltrami系数 $\mu \in L^\infty(\Omega)$ 描述。首先，在不对 μ施加任何额外光滑性假设的情况下，以 $H^1_0(\Omega)$为基础的初始数据所对应的解会进入时间平均 $L^\infty(\Omega)$状态，并立即正则化到二阶图空间 $D(A_\mu)$。进一步假设 $\mu \in W^{1,2}(\Omega)$，则这种正则化可提升为 $W^{2,p}(\Omega)$，对每个 $1 < p < 2$均成立；我们还针对基于 $L^2(\Omega)$和 $H^1_0(\Omega)$的两种动力学，构造了具有有限分形维数的正则全局吸引子和指数吸引子。证明结合了 Chekroun、Di Plinio、Glatt-Holtz 和 Pata 的瞬时光滑化方法、具有可测系数的散度型算子的极大抛物正则性，以及 Green、Wick 与作者近期工作中获得的平面拟共形 Beltrami 估计。

1. 引言

本文研究二维介质中的遗传热传播。这类介质具有复杂、各向异性且内部结构不一定平滑变化的特征；其中，标准拉普拉斯算子被一个源自拟共形映射理论的散度型算子所取代。

1.1. 各向异性介质中的遗传热传导：模型。令

$$u = u(x,t) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

为介质占据开有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 时所对应的温度涨落场。介质的材料属性由可测的 *Beltrami*系数 $\mu \in L^\infty(\Omega)$表征，该系数满足一致椭圆性条件

$$\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \le k < 1.$$

通过经典的 Beltrami–电导率对应关系，该系数确定一个实对称电导率矩阵 $\sigma_\mu(x)$，

$$\sigma_\mu(x) := \frac{1}{1-|\mu(x)|^2}\begin{pmatrix} |1-\mu(x)|^2 & -2\,\Im\mu(x) \\ -2\,\Im\mu(x) & |1+\mu(x)|^2 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

为后文使用，我们引入这些常数

$$m(k) := \frac{1-k}{1+k}, \qquad M(k) := \frac{1+k}{1-k}.$$

2010 数学主题分类。 主要：35B41、35K05、30C62。次要：45K05、47H20。关键词和短语。 Coleman–Gurtin 方程，含记忆的热传导，Dafermos 历史空间；Beltrami 算子，各向异性扩散，极大抛物正则性；指数吸引子，全局吸引子。本研究部分由那不勒斯费德里科二世大学 FRA2022 计划资助，项目为 ReSinAPAS——分析、偏微分方程及应用科学中的正则性与奇异性。

于是σ_μ 在定量形式下是一致椭圆且有界的

$$m(k)|\xi|^2 \le \sigma_\mu(x)\xi\cdot\xi \le M(k)|\xi|^2 \qquad \text{a.e. } x\in\Omega,\ \forall \xi\in\mathbb{R}^2. \tag{1.2}$$

从物理上看，σ_μ 表示一种材料的热导率张量，该材料的微观结构会扭曲热流，使其按照复膨胀系数 μ所规定的方式发生旋转和拉伸。因此，将带有齐次狄利克雷边界条件的椭圆型贝尔特拉米算子 A_μ 定义为

$$A_\mu u \coloneqq -\operatorname{div}(\sigma_\mu \nabla u), \qquad u|_{\partial\Omega}=0.$$

在各向同性极限下， $\mu\equiv 0$矩阵退化为单位矩阵，从而得到经典算子 $A=-\Delta$。记 $\lambda_1(-\Delta;\Omega)$ 为 $-\Delta$的第一狄利克雷特征值，则由瑞利商和（1.2）可得一致下界

$$\lambda_1(A_\mu) \ge \underline{\lambda}(k,\Omega) \coloneqq m(k)\lambda_1(-\Delta;\Omega) \tag{1.3}$$

A_μ的第一特征值。

该材料的热流遵循 Coleman–Gurtin 型本构关系。也就是说，热流不仅取决于当前的温度梯度，还取决于该梯度过去历史的累积。这便导出了积分微分半线性方程

$$\partial_t u(\cdot,t) + A_\mu u(t) + \int_0^\infty \kappa(s) A_\mu u(\cdot,t-s)\,\mathrm{d}s + \phi(u(\cdot,t)) = f, \qquad t>0 \tag{1.4}$$

并补充初始条件

$$u(x,t)=u_0(x,t), \qquad x\in\Omega,\ t\le 0, \tag{1.5}$$

其中，给定函数 $u_0\colon \Omega\times(-\infty,\ 0]\to\mathbb{R}$ 描述了 u的初始过去历史。这里，κ 是一个非负可和的记忆核，用于刻画材料遗忘过去热状态的速率。非线性项 $\phi(u)$表示温度依赖反应或辐射损失。最后， f是外部热源，假设其与时间无关。

1.2. 关于非线性项和记忆核的假设。我们假设区域$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 有界，且 $\partial\Omega$ 属于 C^2类。关于参数和非线性项的结构性假设如下。

贝　尔特拉米系数。膨胀率 $\mu\colon \Omega\to\mathbb{C}$满足椭圆性条件　　n

$$\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \le k < 1. \tag{1.6}$$

假设（1.6）在全文中均成立。正则性假设　　s

$$\mu\in W^{1,p_0}(\Omega), \qquad p_0\ge 2 \tag{1.7}$$

仅在绝对必要时才会施加。

记忆核。 假设 $\kappa:\ [0,\infty) \to (0,\ \infty)$ 是绝对连续的，并引入记忆核生成元[1] h，其定义关系为

$$\kappa(s) = \kappa_0 - \int_0^s h(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

我们对 h施加以下条件。

(K1) 函数 $h:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 非负、单调不增，且可积，总质量为

$$\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}s = \kappa_0 > 0.$$

因此， κ 非负、单调不增且可积。我们固定归一化条件

$$\int_0^\infty \kappa(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty s h(s)\,\mathrm{d}s = 1. \tag{1.8}$$

(K2)（广义耗散）存在一个常数 $\Theta > 0$，使得

$$\kappa(s) \le \Theta h(s) \quad \text{for a.e. } s > 0.$$

因此， κ 具有指数衰减性质

$$\kappa(s) \le \kappa_0 \exp\left(-\frac{s}{\Theta}\right), \qquad s \ge 0.$$

外力与非线性项。

(F) 时间无关外力满足 $f \in L^2(\Omega)$。

(P1)（耗散性）设 $\phi \in C^3(\mathbb{R})$其中 $\phi(0) = 0$。然后，参照（1.3 ）

$$\liminf_{|u|\to\infty} \phi'(u) > -\underline{\lambda}(k,\Omega).$$

(P2)（多项式增长）存在 $C > 0$ 与 $m \ge 1$ 使得

$$\left|\phi^{(1+j)}(r)\right| \le C(1+|r|^{m-j}), \qquad \forall r \in \mathbb{R},\ j \in \{0,1,2\}.$$

1.3. **关于 Trudinger–Moser 替代条件的注记**。 虽然为简化起见，**(P2)** 中要求任意多项式增长，但后续的分析和椭圆估计均经过设计，只需作相当少的改动，便可改用较弱的 Trudinger–Moser 型假设。之所以可行，是因为命题 $\frac{1}{p_0-p}$ 的椭圆估计具有指数型 2.6 爆破速率，详见参考文献[15], ，这里留给感兴趣的读者。

[1]在以往关于该主题的文献中，记忆核生成元几乎总是用字母 μ 表示，例如参见 [4,8]。我们选择将符号 μ 保留给Beltrami系数，而改用 h。

1.4. **物理动机**。 具有记忆的热传播模型能够描述傅里叶定律未能涵盖的弛豫效应。通俗地说，时刻 t 的热流取决于对温度梯度历史的适当加权，从而体现衰减记忆热力学。这一观点源自 Coleman–Gurtin 的连续介质热力学研究计划；此后，Gurtin–Pipkin 等人发展了记忆热导体理论，参见例如 [6, 25, 33]。

在非均质或复合平面介质中，相关电导率通常具有各向异性，并可能在微观界面处发生突变。在二维情况下，这种各向异性具有一种尤为自然的几何参数化方式。具体而言，一致椭圆的平面电导率可通过一个*Beltrami*系数 μ来表征（只差一个归一化因子）；也就是说，它由一个校正流线的拟共形畸变映射的复伸缩率来表征。这种对应关系是连接散度型扩散、拟共形映射理论和平面电导率问题（包括 Calderón 型逆问题）的标准桥梁。系统论述请参见 [1, 2] 。从这一视角来看，（1.4）描述的是平面介质中的遗传热传导，其微观各向异性原则上只需满足一致椭圆性约束，便可为可测函数。此类情形的一个典型物理实例是对薄型纤维增强复合层合板和编织聚合物纳米复合材料进行热分析。在这些材料中，复杂的微观界面会导致高度各向异性且突变的平面热流。可测的 Beltrami系数能够完美地刻画这些热流，而聚合物基体本身具有衰减记忆热力学特性，因此需要采用遗传本构定律；更广泛的观点请参见 Milton [31] 。

1.5. **主要结果与技术创新**。 本文旨在证明，具有记忆的 Beltrami 热方程（1.4）尽管由一个仅可测的 Beltrami系数所编码的 粗糙的 各向异性电导率驱动，且该系数 μ 满足（1.6），仍然生成一个强耗散半群，其渐近行为可由有限维的正则吸引子刻画。关于数学物理中半群的全局吸引子的标准参考文献是专著 [5, 26, 36]。关于指数吸引子理论的经典论述可见于[17], 另请参阅综述 [32] 以及近期由 [37] Zelik 撰写的研究成果。带记忆方程的吸引子一直是耗散型偏微分方程分析的前沿课题：与本文主题相关但极不完整的成果列表包括 [7, 10, 11, 14, 21, 22, 23, 24, 28, 30, 35]。

在我们的情形中，其物理解释是，衰减记忆核 κ 实现了不可逆弛豫。在取决于初始过去历史（1.5）的过渡阶段之后，解进入一个受统一控制的状态，随后演化被限制在一个具有有限有效自由度的紧集内；该性质对扰动具有稳健性，并且该紧集具有指数吸引性。

在三维欧几里得情形中，文献 [4, 8] 利用了基于 H_0^1（Ω）的相空间上的部分瞬时正则化。具体而言，对于正时间，动力学进入 H^2（Ω）$\cap H_0^1$（Ω），从而可以使用 Agmon 型不等式处理半线性项 ϕ。这一机制可追溯至强阻尼波动方程 [34] 以及相关的积分微分模型 [12, 13, 16]。在当前的二维各向异性情形中，整体策略与 [4], 共享若干步骤，但粗糙的 Beltrami 电导率阻碍了对二阶导数范数的直接使用。

因此，首先需要创新的是采取不同的路径来实现一致控制。具体而言，我们通过结合最大

关于具有可测系数的散度型算子的抛物正则性 [27, 29] 与尖锐的平面 Beltrami $W^{1,q}$ 来自拟共形分析的理论 [1], 另见 [15]。该L^∞ 界随后给出瞬时光滑化到二阶图空间$\mathcal{V}$，参见定理3.4，且除 μ 满足（1.6）之外无需其他假设。

在温和的附加假设 $\mu \in W^{1,2}(\Omega)$ 下，可以对渐近动力学作更精细的描述。尽管相应的电导率 σ_μ 可能仍远非 Lipschitz 连续，但这种 Sobolev正则性使我们能够运用作者及其合作者在 [15] 中建立的拟共形椭圆估计。这些估计对于控制连续依赖估计和挤压估计中的非线性差项至关重要，而这两类估计是构造指数吸引子的基础，并由此得到定理3.8。特别地，这意味着在基于 L^2 的相空间和基于 H^1_0 的相空间上，半群均存在正则性适当的全局吸引子，参见推论 3.9。

1.6. 论文结构。第2节为 Beltrami扩散建立算子理论框架，引入过去历史表述和记忆空间，并汇集后文将用到的椭圆与抛物工具。第3节陈述主要结果，内容涵盖从仅具可测性的电导率下的适定性、耗散性和光滑化，到在 $\mu \in W^{1,2}(\Omega)$ 条件下正则有限维吸引子的存在性。第4节证明半群性质和耗散估计。第5节通过极大抛物正则性以及平面 Beltrami $W^{1,q}$ 估计，建立 H^1-动力学的 L^∞-吸收区域。基于这一界，第6节推导瞬时正则化至 V，并建立连续依赖估计。当满足 $\mu \in W^{1,2}(\Omega)$ 时，这些估计提供了指数吸引子所需的挤压机制。最后，第7节和第8节完成正则指数吸引集的构造，并证明定理 3.8，尤其得出全局吸引子的存在性与正则性，参见推论 3.9。

2. 函数空间框架与椭圆工具箱

本节为由1.5）生成的半群构建适当的相空间，并为其建立函数空间框架。本节还将回顾 Beltrami 算子的椭圆估计，并将其调整为适用于我们的情形 A_μ ；这些估计是我们正则化方案的主要结果之一 [15] ，由我们其中一人与合作者共同得到。

两点说明。若无特别说明，我们将对相关的动力学方程作某些乘法运算；先验地，只有当解具有足够正则性时，这些运算才在形式上成立。不过，由此得到的每个微分不等式，都可以在适当的标准伽辽金逼近格式下得到严格论证。

尽管 Beltrami系数 μ 一般为复值，但相应的电导率矩阵σ_μ 根据其显式定义（1.1）是实对称矩阵。特别地，算子$A_\mu = -$散度$(\sigma_\mu \nabla \cdot)$ 具有实系数。因此，若初始数据、过去历史和强迫项均为实值，则唯一解对所有 $t \geq 0$均保持实值。基于此，全文均在实 Hilbert空间中进行。

2.1. **Beltrami扩散的算子理论框架**。令 $V^0 := L^2(\Omega)$ 配备标准内积

$$\langle u, v\rangle_{V^0} := \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

并定义双线性型

$$a_\mu(u,v) \coloneqq \int_\Omega \sigma_\mu \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x, \qquad u,v \in H^1_0(\Omega), \tag{2.1}$$

其中σ_μ是　　在（1.2）中引入的电导率矩阵。定量椭圆性（1.2）给出

$$m(k)\|\nabla u\|^2_{L^2} \le a_\mu(u,u) \le M(k)\|\nabla u\|^2_{L^2}, \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega). \tag{2.2}$$

用 A_μ 表示与a_μ相关联的正狄利克雷实现，其中

$$D(A_\mu) \coloneqq \left\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists f \in V^0 \text{ s.t. } a_\mu(u,\varphi) = \langle f,\varphi\rangle_{V^0}\ \forall \varphi \in H^1_0(\Omega)\right\}, \quad A_\mu u \coloneqq f.$$

于是 A_μ 在 V^0 上自伴，$A_\mu \ge 0$，并且具有紧预解式。特别地，$-A_\mu$ 在V^0上生成一个强连续解析压缩半群。对于 $r \ge 0$，我们通过其内积定义希尔伯特空间 V^r，

$$V^r \coloneqq D\left(A_\mu^{\frac{r}{2}}\right), \quad \langle u,v\rangle_{V^r} \coloneqq \left\langle A_\mu^{\frac{r}{2}}u, A_\mu^{\frac{r}{2}}v\right\rangle_{V^0},$$

$_r$并令 $V^{-r}\colon = (V^r)'$，其对偶配对为$\cdot,\cdot_{-r,\,r}$。由谱演算，$A_\mu^{-\frac{r}{2}}\colon\ V^{-r} \to V^0$ 是$_r^{-}$一个等距同构，并且我们经由

$$\langle u,v\rangle_{-r,r} = \left\langle A_\mu^{-\frac{r}{2}}u, A_\mu^{\frac{r}{2}}v\right\rangle_{V^0}, \qquad u \in V^{-r},\ v \in V^r.$$

注意，由（2.2），$V^1 = D(A_\mu^{1/2})$与 $H^1_0(\Omega)$重合，且范数 $\|u\|_{V^1}$等价于$\|\nabla u\|_{L^2}$，其中常数仅依赖于 k。设 $\lambda_1(-\Delta;\Omega)$表示 $-\Delta$ 的第一 Dirichlet 特征值。由（2.2）及瑞利商，

$$\lambda_1(A_\mu) \ge \underline{\lambda}(k,\Omega) \coloneqq m(k)\,\lambda_1(-\Delta;\Omega), \tag{2.3}$$

这与（1.3）重合。特别地，

$$\|u\|_{V^0} \le \underline{\lambda}(k,\Omega)^{-1/2}\,\|u\|_{V^1}, \qquad \forall u \in V^1, \tag{2.4}$$

且（2.4）中的常数对所有 μ（满足 $\|\mu\|_\infty \le k < 1$）是一致的。

2.2. **记忆空间与过去历史表述。** 下文我们回顾被称为*Dafermos* 历史空间的函数空间框架，其源于开创性工作 [9]。该框架使得可将诸如（1.4）的积分微分系统表述为适当扩张的相空间上的自治系统。

注 2.1。 Fabrizio、Giorgi 和 Pata 最近提出了以记忆状态 为基础的强大替代框架 [20]。在 [20] 的框架下阐述本文的结果与证明，也会具有独立的研究价值，但本文不作探讨。

对于 $r \in \mathbb{R}$，定义加权记忆空间

$$\mathcal{M}^r \coloneqq L^2_h(\mathbb{R}^+;V^r) = \left\{\eta : \mathbb{R}^+ \to V^r : \|\eta\|^2_{\mathcal{M}^r} \coloneqq \int_0^\infty h(s)\|\eta(s)\|^2_{V^r}\,\mathrm{d}s < \infty\right\},$$

赋予希尔伯特内积

$$\langle \eta,\psi\rangle_{\mathcal{M}^r} = \int_0^\infty h(s)\langle \eta(s),\psi(s)\rangle_{V^r}\,\mathrm{d}s.$$

由**(K1)** 可得基本估计

$$\left\| \int_0^\infty h(s)\eta(s)\,\mathrm{d}s \right\|_{V^r} \le \kappa_0^{1/2}\,\|\eta\|_{\mathcal{M}^r}.$$

此外，由 **(K2)** 以及归一化（1.8），

$$\int_0^\infty \kappa(s)\|\eta(s)\|_{V^r}^2\,\mathrm{d}s \le \Theta \int_0^\infty h(s)\|\eta(s)\|_{V^r}^2\,\mathrm{d}s = \Theta\,\|\eta\|_{\mathcal{M}^r}^2.$$

定义算子

$$T_r\eta := -\partial_s\eta, \qquad D(T_r) := \{\eta \in \mathcal{M}^r :\ \partial_s\eta \in \mathcal{M}^r,\ \eta(0) = 0\}, \qquad r \in \mathbb{R}$$

其中，$\eta(0)$ 理解为 V^r 中的迹。为简洁起见，我们省略 T_r 中的下标 r，并在区域可由上下文明确时，简单记作 T。

引理 2.2。 假设 ***(K1)***。对于每个 $r \in \mathbb{R}$ 以及每个 $\eta \in D(T_r)$，

$$\langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}^r} = \frac{1}{2}\int_0^\infty h'(s)\|\eta(s)\|_{V^r}^2\,\mathrm{d}s \le 0. \tag{2.5}$$

因此，T 在 $\mathcal{M}^r$ 上生成一个强连续压缩半群，其由右平移显式给出

$$\left(\mathrm{e}^{tT}\eta\right)(s) = \begin{cases} 0, & 0 < s \le t, \\ \eta(s-t), & s > t. \end{cases}$$

证明。 令 $\eta \in D(T_r)$。利用 $\eta(0) = 0$ 并分部积分，

$$\begin{aligned}\langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}^r} &= -\int_0^\infty h(s)\langle \partial_s\eta(s), \eta(s)\rangle_{V^r}\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int_0^\infty h(s)\partial_s\|\eta(s)\|_{V^r}^2\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty h'(s)\|\eta(s)\|_{V^r}^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由于 h 根据 **(K1)** 单调不增，$h' \le 0$ 几乎处处成立，从而得到（2.5）。显式表示是右平移半群的标准公式。 □

给定 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty); V^r)$ 和 $\eta_0 \in \mathrm{M}^r$，线性问题

$$\partial_t\eta = T\eta + u, \qquad \eta(0) = \eta_0,$$

存在唯一的温和解 $\eta \in C([0,\infty); \mathrm{M}^r)$，其常数变易公式为

$$\eta^t = \mathrm{e}^{tT}\eta_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)T}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

等价地，可得显式表示，参见 [4, (3.3)]

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^s u(t-y)\ dy, & 0 \le s \le t, \\ \eta_0(s-t) + \displaystyle\int_0^t u(t-y)\ dy, & s > t. \end{cases}$$

给定一条足够正则的轨道 $u\colon \mathbb{R} \to V^r$，Dafermos 积分过去历史变量定义为

$$\eta^t(s) \coloneqq \int_0^s u(t-y)\,\mathrm{d}y, \qquad s \geq 0.$$

于是 $\partial_s \eta^t(s) = u(t-s)$，并且根据定义，$\kappa'(s) = -h(s)$，形式上的分部积分得到单位矩阵

$$\int_0^\infty \kappa(s) A_\mu u(t-s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \kappa(s) A_\mu \partial_s \eta^t(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty h(s) A_\mu \eta^t(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中边界项因 $\eta^t(0) = 0$ 以及 $\kappa(s) \to 0$ 而消失，因为 $s \to \infty$。因此，(1.4) 在适当的弱意义下等价地改写为 (u,η) 中的柯西问题：

$$\text{(CGB)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + A_\mu u + \displaystyle\int_0^\infty h(s) A_\mu \eta(s)\,\mathrm{d}s + \phi(u) = f \\ \partial_t \eta = T\eta + u, \\ (u(0), \eta^0) = (u_0, \eta_0). \end{cases}$$

通过取1.5，可确保与给定过去历史的一致性

$$u_0 = u(\cdot, 0), \qquad \eta_0(s) = \int_0^s u_0(\cdot, -y)\,\mathrm{d}y.$$

与第1节所采用的记号一致，令

$$\mathcal{H}^j \coloneqq V^j \times \mathcal{M}^{j+1}, \ j \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{V} \coloneqq V^2 \times \mathcal{M}^2. \tag{2.6}$$

我们主要使用指标 $j \in \{0,1\}$。下一个引理是处理带记忆积分微分系统时的标准结果。

引理 2.3 ([4])。设 $r \in \mathbb{Z}$，并假设 η 满足

$$\partial_t \eta = T\eta + u, \qquad \eta(0) = \eta_0 \in \mathcal{M}^{r+1},$$

其中 $u \in L^\infty_{\text{局部}}([0,\infty);\ V^r) \cap L^2_h([0,\infty);\ V^{r+1})$。定义

$$\mathcal{U}_{r+1}[\eta] \coloneqq \frac{1}{2}\int_0^\infty \kappa(s) \|\eta(s)\|^2_{V^{r+1}}\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leq \mathcal{U}_{r+1}[\eta] \leq \frac{\Theta}{2}\|\eta\|^2_{\mathcal{M}^{r+1}}.$$

于是，对几乎处处的 $t > 0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{U}_{r+1}[\eta^t] + \frac{1}{2}\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}^{r+1}} = \int_0^\infty \kappa(s) \langle u(t), \eta^t(s)\rangle_{V^{r+1}}\,\mathrm{d}s.$$

注 2.4。设 $r \geq 0$ 并固定 $\nu > 0$。定义

$$\mathcal{E}_{r,\nu}(u,\eta) \coloneqq \|u\|^2_{V^r} + \|\eta\|^2_{\mathcal{M}^{r+1}} + 2\nu\mathcal{U}_{r+1}[\eta].$$

那么，$\mathrm{E}_{r,\nu}$ 等价于 H^r-范数：

$$\|(u,\eta)\|^2_{\mathcal{H}^r} \leq \mathcal{E}_{r,\nu}(u,\eta) \leq (1 + 2\nu\Theta)\ \|(u,\eta)\|^2_{\mathcal{H}^r}, \qquad (u,\eta) \in \mathcal{H}^r. \tag{2.7}$$

Moreover，设 (u,η) 是 (u,η) 中柯西问题的一个充分正则解

$$\begin{cases} \partial_t u + A_\mu u + \displaystyle\int_0^\infty h(s) A_\mu \eta(s)\,\mathrm{d}s = g \\ \partial_t \eta = T\eta + u, \\ (u(0),\eta^0) = \xi \in \mathcal{H}^r \end{cases} \tag{2.8}$$

含强迫项 $g \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); V^r)$。于是，对于几乎处处的 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{r,\nu}\left(u(t),\eta^t\right) + \|u(t)\|^2_{V^{r+1}} + \nu\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}^{r+1}} \\ &= \langle g(t), u(t)\rangle_{V^r} + 2\nu\int_0^\infty \kappa(s)\langle u(t),\eta^t(s)\rangle_{V^{r+1}}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

特别地，结合使用赫尔德不等式和庞加莱不等式以及假设 **(K2)**，可知存在 $\nu_0 > 0$，其仅依赖于参数，且对所有 $0 < \nu < \nu_0$ 均成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{r,\nu}\left(u(t),\eta^t\right) + (1-\nu)\|u(t)\|^2_{V^{r+1}} + \nu^2\mathcal{E}_{r,\nu}\left(u(t),\eta^t\right) \leq 2\langle g(t), u(t)\rangle_{V^r}. \tag{2.9}$$

不等式（2. 9）将在全文中反复应用于不同的强迫项 g .

2.3. **Beltrami 椭圆工具箱**。下文中，常数 C 以及几乎不等号 $\lesssim$ 所隐含的常数 $\lesssim$ 可能会随行而变。除非另有说明，它们仅依赖于 (k,Ω) 和相关指数，必要时会以下标标明。以下两个结果恰好指出了何处用到了较强的假设（1.7）。

命题 2.5. 假设(1.6)成立，且

(i) 或者 $2 < q < q_*(k)$：$=-1+\frac{1}{k}$，或者(ii) μ 对某个

(1.7) 满足 $p_0 \geq 2$，且 $2 < q < \infty$ 是任意的。

令 $F \in L^q(\Omega;\ \mathbb{R}^2)$ 以及 $G \in L^q(\Omega)$。则 $\Psi =$散度$F + G \in V^{-1} \cap W^{-1,\ q}(\Omega)$，且方程

$$A_\mu u = \Psi \qquad in\ V^{-1} \tag{2.10}$$

有唯一解 $u \in V^1 \cap W^{1,\ }_{0}{}^{q}(\Omega)$ 并且

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{q,k,\Omega}\left(\|F\|_{L^q(\Omega)} + \|G\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.11}$$

证明。由 Lax–Milgram 定理应用于强制型（2.1），以及 $\Psi \in V^{-1}$ 这一事实，可得 $u \in V^1 \sim H^1_0(\Omega)$ 的存在性和唯一性。

为证明 $W^{1,\ q}$ 增益，首先将（2.10）化为纯散度型右端项。令 $w \in W^{2,\ q}(\Omega) \cap W^{1,\ }_{0}{}^{q}(\Omega)$ 是 $-\Delta w = G$ 在 Ω 中的唯一解。则 $\nabla w \in L^q(\Omega)$，其中 $\|\nabla w\|_{L^q} \leq C_{q,\ \Omega}\|G\|_{L^q}$ 且

$$\Psi = \mathrm{div}F + G = \mathrm{div}\,(F - \nabla w) \qquad \text{in } V^{-1} \cap W^{-1,q}(\Omega).$$

令 $\widetilde{F} := F - \nabla w$，于是我们有

$$A_\mu u = \mathrm{div}\widetilde{F} \qquad \text{in } V^{-1} \cap W^{-1,q}(\Omega) \tag{2.12}$$

以及$\|\widetilde{F}\|_{L^q} \leq \|F\|_{L^q} + C_{q,\ \Omega}\|G\|_{L^q}$。接下来，回顾一下，狄利克雷问题（2.12）可以改写为关于复势的一阶非齐次 Beltrami系统 $f = u + iv$,

其复导数 $g := \partial f$ 满足如下形式的预解方程

$$(I-\mu S_\Omega)g = \Phi =: \frac{1}{2}\left((\widetilde{F_1}-i\widetilde{F_2})+\mu(\widetilde{F_1}+i\widetilde{F_2})\right) \qquad \text{in } L^q(\Omega) \tag{2.13}$$

其中 S_Ω 是 Ω上的压缩 Beurling 变换。注意 Φ 线性依赖于 F，特别地$\|\Phi\|_{L^q(\Omega)} \lesssim_{q,\ \Omega} \|F\|_{L^q(\Omega)}$；例如参见 [1, 第 16] 章或 [15, §3.2] 以了解更多细节。由于 ∇u 是 ∂f与 $\bar\partial f$的实线性组合，故

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{q,k,\Omega}\left(\|g\|_{L^q(\Omega)} + \|\widetilde{F}\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.14}$$

因此，尚需通过 (2.13) 在 L^q 中给出 g 的界。在情形 (i) 中，Beltrami 预解算子在临界区间上的经典 L^q 可逆性蕴含 $I-\mu S$，从而 $I-\mu S_\Omega$在 L^q 上对 $2<q<q_*(k)$ 可逆，其范数界仅依赖于 (q,k)；参见 [1, 定理 14.0.4]或更精确的形式 [15, 引理 2.3]。在情形 (ii) 中，由于 $\mu \in W^{1,p_0}(\Omega)$ 且带有 $p_0 \geq 2$，故有$\mu \in \mathrm{VMO}(\Omega)$，因而 $I-\mu S$ 在 L^q 上对一切 $1<q<\infty$ 可逆，这由 [1, 定理 14.5.2]得到。另请注意，形如 $\|(I-\mu S_\Omega)^{-1}\|_{L^q\to L^q} \leq C_{q,k,\Omega}E_q(\|\mu\|_{W^{1,p_0}(\Omega)})$的定量界可由 [15, 引理 2.3 与定理 A] 中的预解估计及其所讨论的区域约化得到，其中 E_q 为指数型。将$(I-\mu S_\Omega)^{-1}$ 应用于 (2.13) 得到 $\|g\|_{L^q} \lesssim C_{q,k,\Omega}\|\Phi\|_{L^q}$，再与 (2.14) 以及对 F的估计相结合，即得 (2.11)。□

命题 2.6。 假设 (1.6) 成立。另假设 (1.7) 对某个 $p_0 \geq 2$. 令 $p \in (1,p_0)$、$g \in L^p(\Omega)$ 且令 $u \in H^1_0(\Omega)$ 为下列方程的（唯一）弱解

$$A_\mu u = g \qquad in\ H^{-1}(\Omega).$$

那么 $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ 并且

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\left(\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

常数 C取决于 p、Ω、k和 $\|\mu\|_{W^{1,p_0}(\Omega)}$。

证明。 所有情形都可直接由预解式估计 [15, (3.3)] 与 Beltrami 电导率对应关系结合得出。□

2.4. **抛物型最大正则性与一阶平滑**。 固定 $q \in (2,\infty)$ 并令

$$X_q := W^{-1,q}(\Omega) = (W^{1,q'}_0(\Omega))'.$$

全文中我们使用等价范数

$$\|\Phi\|_{X_q} := \inf\left\{\|F\|_{L^q(\Omega)} + \|G\|_{L^q(\Omega)} :\ \Phi = \mathrm{div}F + G \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)\right\}. \tag{2.15}$$

与标准对偶范数的等价性源于 Ω 和 $\partial\Omega \in \mathrm{C}^2$的有界性；例如参见 [3, 定理 III.2.43]。定义算子 $A_{\mu,q}$：$D(A_{\mu,q}) \subset X_q \to X_q$ 为

$$D(A_{\mu,q}) := W^{1,q}_0(\Omega) \subset X_q, \qquad \langle A_{\mu,q}u,\varphi\rangle_{X_q,W^{1,q'}_0} := \int_\Omega \sigma_\mu \nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

对所有 $u \in W^{1,q}_0(\Omega)$和 $\varphi \in W^{1,q'}_0(\Omega)$。等价地，$A_{\mu,q}u = -\mathrm{div}(\sigma_\mu\nabla u)$属于$\mathrm{D}'(\Omega)$，且右端项属于 $W^{-1,q}(\Omega)$，因为 $\sigma_\mu\nabla u \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^2)$。我们现在回顾抽象柯西问题的一个经典最大正则性结果

$$\partial_t z + A_{\mu,q}z = \Phi, \qquad z(0) = z_0 \in X_q, \qquad \Phi \in L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;X_q). \tag{2.17}$$

关于最大正则性一般理论的标准参考文献是这部专著 [29]。我们转而引用分布空间上的一个精确结果，见 [27]。

命题 2.7。 [27, 定理 5。4] 假设 (1.6) 且令 $r \in (1,\infty)$。则 $A_{\mu,q}$ 在 X_q 上具有最大抛物正则性。也就是说，对于任意 $T>0$ 以及任意 $\Phi \in L^r(0,T;X_q)$，存在唯一的

$$z \in W^{1,r}(0,T;X_q) \cap L^r(0,T;D(A_{\mu,q}))$$

满足 (2.17) 在 $(0,T)$上几乎处处成立，并且满足估计式

$$\|z\|_{W^{1,r}(0,T;X_q)} + \|z\|_{L^r(0,T;D(A_{\mu,q}))} \le C_{\mathrm{MR}} \left(\|z_0\|_{X_q} + \|\Phi\|_{L^r(0,T;X_q)} \right), \tag{2.18}$$

其中 $C_{\mathrm{MR}} = C_{\mathrm{MR}}(r,q,k,\Omega,T)$。

下一个命题将 $D(A_{\mu,q})$ 的*Beltrami* 特有识别与 $W^1_{,0}{}^q(\Omega)$ 以及由此产生的 L^∞ 光滑化联系起来。

命题 2.8。 假设 (1.6) 成立，并固定 $2<q<q_*(k)$。令 $r\in(1,\infty)$, $T>0$，并令 z 为由命题 (2.17) 给出的唯一解，其存在性由命题 *2.7*保证。于是对任意 $0<T_1<T_2$

$$\|z\|_{L^r(T_1,T_2;W^{1,q})} \le C \left(\|A_{\mu,q} z\|_{L^r(T_1,T_2;X_q)} + \|z\|_{L^r(T_1,T_2;L^2)} \right), \tag{2.19}$$

注 2.9. 注意，对于解 z，它满足（2.17），

$$\|A_{\mu,q} z\|_{L^r(T_1,T_2;X_q)} = \|\Phi - \partial_t z\|_{L^r(T_1,T_2;X_q)} \le \|z\|_{W^{1,r}(0,T;X_q)} + \|\Phi\|_{L^r(T_1,T_2;X_q)},$$
$$\|z\|_{L^r(T_1,T_2;L^2)} \le C\|z\|_{L^r(T_1,T_2;D(A_{\mu,q}))} = C\|z\|_{L^r(T_1,T_2;W^{1,q}_0(\Omega))}.$$

将最后一个公式代入（2.19），并结合（2.18）以及索伯列夫嵌入$W^{1,}{}_0{}^q(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$可得解（的先验估计2.17）

$$\|z\|_{L^r(T_1,T_2;L^\infty(\Omega))} \le C\|z\|_{L^r(T_1,T_2;W^{1,q}_0(\Omega))} \le C \left(\|z_0\|_{X_q} + \|\Phi\|_{L^r(0,T;X_q)} \right).$$

命题*2.8*的证明。 由命题 2.7，我们有 $z \in W^{1,}{}^r(0, T_2; X_q) \cap L^r(0, T_2; D(A_{\mu,}{}_q))$, 因此 $A_{\mu,}{}_q z \in L^r(0, T_2; X_q)$，特别地，对几乎处处的 $t \in [0,T_2]$,

$$A_{\mu,q} z(t) \in X_q, \qquad \text{and } A_{\mu,q} z(t) = \mathrm{div} F(t) + G(t)$$

对于某个 $F(t)$ $G(t) \in L^q$满足 $\|F(t)\|_{L^q} + \|G(t)$，且$\|_{L^q}$可任意接近$\|A_{\mu,}{}_q z(t)\|_{X_q}$根据定义（2.15）。将命题 2.5逐点应用于 t，其中 $u = z(t)$，可得

$$\|\nabla z(t)\|_{L^q} \le C(q,k,\Omega)\, C_{q,\mu} \left(\|A_{\mu,q} z(t)\|_{X_q} + \|z(t)\|_{V^0} \right) \quad \text{for a.e. } t,$$

这意味着（2.19）对 (T_1,T_2) 上积分后成立。 □

3. 主要结果

本节介绍 Coleman–Gurtin-Beltrami 模型（CGB）的主要动力学结果。在很大程度上，我们得到的结果确实与 [4,8] 针对三维齐次情形的动力学方案相对应。另一方面，正如 §1.5中所解释的，为了处理更精细的 Beltrami 特有的一阶和二阶椭圆估计，正则化机制必须有所不同

3.1. **常设假设与基本耗散结构。** 下文中， $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个满足 $\partial\Omega \in C^2$ 的有界区域。我们假设 Beltrami 系数 μ 满足一致椭圆性条件（1.6），核假设 **(K1)–(K2)** 满足归一化条件（1.8），强迫项满足外力假设 **(F)**，非线性满足假设 **(P1)–(P2)**。下文中的结构常数$C > 1$、$0 < c < 1$以及结构性正递增函数$\mathcal{I}$ 均可在不同情形下取不同值，且仅依赖于上述常设假设中涉及的物理参数，或必要时另行指定的参数。下文中， B_X（R）表示 Banach 范数 X 中以原点为中心、半径为 R 的球。

本节相关的相空间为 $\mathcal{H}_0$，$\mathcal{H}^1$和 $\mathcal{V}$，在（2.6）中引入。我们首先陈述以下两个背景结果，其证明大体上仿照欧几里得情形。

命题 3.1. 问题 (CGB) 生成一个强连续半群 $S(t):\mathcal{H}^0 \to \mathcal{H}^0$容许一个吸收球 $\mathbb{B}_0 \subset \mathcal{H}^0$。此外，对每个 $R > 0$

$$\sup_{\xi \in B_{\mathcal{H}^0}(R)} \left[\|S(t)\xi\|_{\mathcal{H}^0}^2 + \int_t^{t+1} \|u_\xi(\tau)\|_{V^1}^2 \, \mathrm{d}\tau \right] \leq \mathcal{I}(R)\mathrm{e}^{-ct} + C, \qquad t > 0 \tag{3.1}$$

命题 3.2. 由问题 $\mathcal{H}^0$-半群 $S(t)$所对应的问题 (CGB) 生成，并限制为 $\mathcal{H}^1$上的一个强连续半群，容许一个吸收球 $\mathbb{B}_1 \subset \mathcal{H}^1$。此外，关于吸收球 $\mathbb{B}_0 \subset \mathcal{H}^0$，

$$\sup_{z \in \mathbb{B}_0} \operatorname{dist}_{\mathcal{H}^0}(S(t)z, \mathbb{B}_1) \leq C\mathrm{e}^{-ct}, \qquad t > 0.$$

注记 3.3. 此处不需要超出（1.6）的Beltrami正则性，因为该论证仅依赖于一致椭圆性、记忆耗散机制以及 ϕ的耗散性。

3.2. **时间平均与 $\mathcal{V}$-瞬时光滑化。** 我们采用的策略旨在对解进行部分瞬时正则化，要求其具有 $\mathcal{H}^1$ 初值。更准确地说，方程（CGB）在 $\mathcal{H}^1$ 上的解的 V^2 分量在演化开始后立即进入该空间。

定理 3.4。 对每个 $R > 0$ 和 $z \in B_{\mathcal{H}^1}(R)$，有

$$\|S(t)z\|_{\mathcal{V}} \leq \mathcal{I}(R)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right), \qquad t > 0.$$

我们得到了摘要中提到的部分瞬时一阶导数增益，但这要求 μ具有额外正则性。通过结合定理3.4 与命题 2.6以及$\mathcal{V}$的定义，即可立即得到该结果。

推论 3.5。 假设 (1.7) 在 $p_0 = 2$下成立。对每个 $1 < p < 2$， $R > 0$ 以及 $z \in B_{\mathcal{H}^1}(R)$，记 $u(t)$为解 $S(t)z$的第一分量，则有

$$\|u(t)\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \mathcal{I}(R,p)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right), \qquad t > 0.$$

注 3.6. 定理 3.4 证明的关键在于实现对非线性项的 L^∞型控制。在 [4], 的欧几里得拉普拉斯算子情形下，这通过 Agmon 不等式实现，该不等式由其空间 $V^2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$所支持。另一方面，在本文的情形下， $V^2 = D(A_\mu)$ 是粗糙散度型算子的一个抽象图空间，

且它并不提供 Agmon 型逐点控制。这里的 L^∞ 控制则通过极大 L^r、$1 < r < \infty$ 抛物正则性获得，这得益于 $W^{1,q}(\Omega)$ Beltrami 预解理论，参见命题 2.8。

备注3.6 中描述的思想将在下述结果中形式化，这是本文的主要创新之一。

定理 3.7. 参见命题 *3.2*，令 $z_0 \in \mathcal{H}^1$ 和 $u = u(t)$ 表示 $S(t)z_0, t \geq 0$ 的第一分量。那么，对每个 $1 < r < \infty$,

$$\sup_{t_0 \geq 0} \|u\|_{L^r(t_0, t_0+1; L^\infty(\Omega))} \leq \mathcal{I}\left(\|z_0\|_{\mathcal{H}^1}, r\right).$$

3.3. **正则吸引子**。 最后，借助定理3.4和3.7，我们研究问题（CGB）的渐近动力学。以下结果基于粗糙系数算子的 Beltrami 二阶正则性理论，因此我们假设 $\mu \in W^{1,2}(\Omega)$，即（1.7）在 $p_0 = 2$ 的条件下成立，从而

$$V^2 = \mathcal{D}(A_\mu) \hookrightarrow W^{2,p}(\Omega), \qquad 1 < p < 2$$

由命题 2.6 可知。因此，从现在起直到本节结束，$\|\mu\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ 均视为一个容许的结构参数。与时间无关外力 f 相关联的向量为，参见 [4, (4.1)]

$$u_f := \frac{1}{2} A_\mu^{-1} f, \qquad \eta_f(s) := s\, u_f, \qquad z_f := (u_f, \eta_f) \tag{3.2}$$

它是CGB（在 $\phi = 0$时的稳态。

定理 3.8。假设（1.7）在 $p_0 = 2$下成立。那么，命题 S（t）中的半群*3.1*可压缩为相空间 $\mathcal{V}$ 上的强连续半群，并且具有正则指数吸引子。具体而言，存在集合 $\mathfrak{E} \subset \mathcal{V}$ 满足以下性质：

(i) $\mathfrak{E}$ 在$\mathcal{V}$中紧致且具有有限分形维数；(ii) $\mathfrak{E} - z_f$在空间$\mathcal{H}^3$和 $W^{2,p}(\Omega) \times L^2_h(\mathbb{R}^+; W^{2,p}(\Omega))$ 中有界且具有有限分形维数，对所有 $1 < p < 2$均成立；(iii) $\mathfrak{E}$ 正向不变，即 $S(t)\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}$对所有 $t \geq 0$均成立；(iv) $\mathfrak{E}$ 指数吸引$\mathcal{V}$的有界子集，即

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{V}}\left(S(t)B_{\mathcal{V}}(R), \mathfrak{E}\right) \leq \mathcal{I}(R)\mathrm{e}^{-ct}, \qquad \forall t \geq 0;$$

(v) $\mathfrak{E}$在 $\mathcal{H}^1$, 的 $\mathcal{H}^1$-度量以及更强的$\mathcal{V}$-度量下指数吸引有界子集；一旦脱离初始时刻，即

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}^1}\left(S(t)B_{\mathcal{H}^1}(R), \mathfrak{E}\right) + \sqrt{t}\operatorname{dist}_{\mathcal{V}}\left(S(t)B_{\mathcal{H}^1}(R), \mathfrak{E}\right) \leq \mathcal{I}(R)\mathrm{e}^{-ct}, \quad \forall t \geq 0;$$

(vi) $\mathfrak{E}$在 $\mathcal{H}^0$, 的 $\mathcal{H}^0$-度量下指数吸引有界子集，即

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}^0}\left(S(t)B_{\mathcal{H}^0}(R), \mathfrak{E}\right) \leq \mathcal{I}(R)\mathrm{e}^{-ct}, \qquad \forall t \geq 0.$$

下一个推论涉及半群在两个相空间 $\mathrm{H}^0, \mathrm{H}^1$. 上存在正则全局吸引子

推论 3.9。 假设 (1.7) 在 $p_0 = 2$的条件下成立。参见定理 3.8，存在一个紧子集 $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{E}$，具有以下性质。

(i) $\mathfrak{A}$ 在 $S(t)$下完全不变，即 $S(t)\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$，且 $S(t)$在 $\mathfrak{A}$上的限制是一个算子群；
(ii) $\mathfrak{A}$按以下意义吸引 $\mathcal{H}^0,\mathcal{H}^1$中的有界集：对于每个 $R>0$,

$$\lim_{t\to\infty}\operatorname{dist}_{\mathcal{H}^0}\left(S(t)B_{\mathcal{H}^0}(R),\mathfrak{A}\right)=0,\qquad \lim_{t\to\infty}\operatorname{dist}_{\mathcal{V}}\left(S(t)B_{\mathcal{H}^1}(R),\mathfrak{A}\right)=0.$$

注 3.10。 在定理的证明过程中3.8，必须在V^2 阶上界定非线性差。这正是命题2.6 中二阶 Beltrami 理论的应用之处。

4. Dissipativity in $\mathcal{H}^j$, $j=0,1$

本节概述命题3.1和3.2的证明。我们仅指出与此前常系数情形处理方法的相关差异，其主要参考文献为 [4, 8]。

4.1. **命题3.1的证明**。 首先，得到耗散估计（3.1）后，适定性可由标准的伽辽金格式推出，此处略去证明。为证明（3.1），先注意到假设**(P1)-(P2)**蕴含强制性

$$\phi(r)\,r\geq-(\underline{\lambda}(k,\Omega)-\delta)\,r^2-C_\delta,\qquad \forall r\in\mathbb{R},$$

其中 $\delta>0$ 将在稍后选定，而 $\lambda(k,\underline{\Omega})$ 定义见（2.3）。将系统写成（2.8）的形式，其中 $r=0$ 且强迫项为 $g(t)=f-\phi(u(t))$。应用注 2.4并取 $r=0$，可得对于 $\nu\in(0,\nu_0)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{0,\nu}(u(t),\eta^t)+\nu^2\mathcal{E}_{0,\nu}(u(t),\eta^t)+(1-\nu)\|u(t)\|_{V^1}^2\leq 2|\langle f-\phi(u(t)),u(t)\rangle_{V^0}|.$$

强制性（2.3）、标准的赫尔德不等式和庞加莱不等式，以及适当地选取 δ（仅取决于 ν_0），可得微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{0,\nu}(u(t),\eta^t)+\nu^2\mathcal{E}_{0,\nu}(u(t),\eta^t)+\nu\|u(t)\|_{V^1}^2\leq C(1+\|f\|_{V^0}^2),$$

由格朗沃尔引理可得（3.1）。

4.2. **命题 3.2 中耗散性的证明**。 首先，我们证明问题（CGB）同样生成一个强连续半群

$$S(t):\mathcal{H}^1\to\mathcal{H}^1,\qquad S(t)(u_0,\eta_0)=(u(t),\eta^t)$$

满足吸收估计和耗散积分

$$\sup_{\xi=(u,\eta)\in B_R(\mathcal{H}^1)}\left[\|S(t)\xi\|_{\mathcal{H}^1}^2+\int_t^{t+1}\|u_\xi(\tau)\|_{V^2}^2\,\mathrm{d}\tau\right]\leq\mathcal{I}(R)\mathrm{e}^{-ct}+C,\qquad t\geq 0.\tag{4.1}$$

其中 $S(t)\xi=(u_\xi(t)\ \eta_\xi^t)$。特别地，球 $\mathbb{B}_1:=B_{2C}$（H^1），参照（C**4.1**）中出现的常数C，是半群 $S(\cdot)$ 在 $\mathcal{H}^1$ 上的吸收集。

设 $\xi\in B_R(\mathcal{H}^1)$并设 $(u,\eta)=S(\cdot)\xi$。根据命题 3.1，轨道进入 $\mathcal{H}^0$ 的一个有界吸收集。特别地，存在 $t_0=\mathcal{I}(R)$使得

$$\sup_{t\geq t_0}\|u(t)\|_{V^0}+\sup_{t\geq t_0}\int_t^{t+1}\|u(\tau)\|_{V^1}^2\,\mathrm{d}\tau\leq C.\tag{4.2}$$

现在将注记 2.4 应用于 $r = 1$ 与 (2.8) 以及强迫项 $g(t) = f - \phi(u(t))$。由此可得，对于 $\nu \in (0, \nu_0)$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{1,\nu}(u(t), \eta^t) + \nu^2 \mathcal{E}_{1,\nu}(u(t), \eta^t) + (1-\nu)\|u(t)\|_{V^2}^2 \le 2\langle f - \phi(u(t)), u(t)\rangle_{V^1}, \tag{4.3}$$

采用简记 $\mathrm{E}(t) := \mathrm{E}_{1,\nu}(u(t)\ \eta^t)$。首先，

$$2\langle f, u\rangle_{V^1} \le 2\|f\|_{V^0}\|u\|_{V^2} \le \nu\|u\|_{V^2}^2 + C\|f\|_{V^0}^2.$$

此外，分部积分并利用下界 (P1)，再结合椭圆性，

$$-\langle \phi(u), u\rangle_{V^1} = \int_\Omega \phi'(u)\, \sigma_\mu \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x \le C\|u\|_{V^1}^2.$$

将 (4.3) 与前面最后两个公式结合，得到微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) + \nu^2 \mathcal{E}(t) + (1-2\nu)\|u(t)\|_{V^2}^2 \le C(1 + \|u(t)\|_{V^1}^2) \tag{4.4}$$

对 (4.4) 的粗略形式进行第一次格朗沃尔积分，即 $\mathcal{E}' \le C\mathcal{E} + C$，可得 $\mathcal{E}(t_0) \le \mathcal{I}(t_0,\ R)$。因此最终有 $\mathcal{E}(t_0) \le \mathcal{I}(R)$。在区间 (4.4) 中对 $(t_0,\ t)$，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &\le \mathrm{e}^{-\nu^2(t-t_0)}\mathcal{E}(t_0) + C\left(1 - \mathrm{e}^{-\nu^2(t-t_0)}\right) + \int_{t_0}^{t} e^{-\nu^2(t-s)}\|u(s)\|_{V^1}^2 \, \mathrm{d}s \\ &\le \mathcal{I}(R)\mathrm{e}^{-\nu^2(t-t_0)} + C \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中，积分项利用 (4.2) 中的平移有界性和指数衰减进行了估计。回顾范数等价性 (2.7)，(4.5) 得到所声称的吸收性质。

4.3. **证明（3.2）（见命题 3.2）**。此处的关键在于证明：存在 $R_1 > 0$，其仅依赖于结构参数，使得对每一个 $z \in \mathbb{B}_0$ 以及每一个 $t \ge 0$，

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}^0}(S(t)z,\ B_{\mathcal{H}^1}(R_1)) \le C\mathrm{e}^{-ct}. \tag{4.6}$$

特别地，球 $B_{\mathcal{H}^1}(R_1)$ 在 H^0–度量下指数吸引 $\mathbb{B}_0$。必要时将 $\mathbb{B}_1$ 重新定义为大于 $B_{\mathcal{H}^1}(R_1)$，我们便得到一个 H^1-吸收球的存在性，它同样指数吸引 H^0 的有界集，正如所断言的那样。

正式开始证明：固定 $z = (u_0,\ \eta_0) \in \mathbb{B}_0$，并记 $S(t)z = (u(t)\ \eta^t)$。依据 (P1)，选取一个结构 $\ell \ge 0$，使得平移后的非线性项 $\phi_0(r) = \phi(r) + \ell r$ 是单调的，即对所有 $r \in \mathbb{R}$ 有 $\phi_0'(r) \ge 0$。分解

$$u = v + w, \qquad \eta = \xi + \zeta,$$

其中 (v, ξ) 与 (w, ζ) 为耦合系统的解

$$\begin{cases} \partial_t v + A_\mu v + \displaystyle\int_0^\infty h(s) A_\mu \xi(s)\, \mathrm{d}s = \phi_0(w) - \phi_0(u) \\ \partial_t \xi = T\xi + v, \\ (v(0), \xi^0) = (u_0, \eta_0), \end{cases} \tag{4.7}$$

and

$$\begin{cases} \partial_t w + A_\mu w + \displaystyle\int_0^\infty h(s) A_\mu \zeta(s)\,\mathrm{d}s = f - (\phi_0(w) - \ell u), \\ \partial_t \zeta = T\zeta + w, \\ (w(0), \zeta^0) = (0,0). \end{cases} \tag{4.8}$$

将 (4.7) 与 (4.8) 相加即得原系统，因此

$$S(t)z = L(t)z + K(t)z, \qquad L(t)z \coloneqq (v(t), \xi^t), \quad K(t)z \coloneqq (w(t), \zeta^t).$$

我们先处理（4.7）。将备注 2.4应用于 $r=0$，将 $g_L(t) := -(\phi_0(u(t)) - \phi_0(w(t)))$ 视为（2.8）中的强迫项。对于 $\nu \in (0, \nu_0)$，我们得到阻尼不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{0,\nu}\left(v(t), \xi^t\right) + \nu^2 \mathcal{E}_{0,\nu}\left(v(t), \xi^t\right) \leq 2\langle g_L(t), v(t)\rangle_{V^0}. \tag{4.9}$$

由于 ϕ_0 是单调的，$\langle g_L(t)\ v(t)\rangle_{V^0} \leq 0$，且（4.9）的右端为负定。因此，

$$\mathcal{E}_{0,\nu}\left(v(t), \xi^t\right) \leq \mathrm{e}^{-\nu^2 t}\mathcal{E}_{0,\nu}(u_0, \eta_0).$$

利用 2.7）在 $r=0$ 层面的范数等价性，我们得出，对于某个 $C \geq 1$,

$$\|L(t)z\|_{\mathcal{H}^0} = \|(v(t), \xi^t)\|_{\mathcal{H}^0} \leq C\mathrm{e}^{-\frac{\nu^2}{2}t}\|z\|_{\mathcal{H}^0} \leq C\mathrm{e}^{-\frac{\nu^2}{2}t},$$

因为 $z \in \mathbb{B}_0$ 因此存在 $C \geq 1$, $c > 0$ 使得

$$\|L(t)z\|_{\mathcal{H}^0} \leq C\mathrm{e}^{-ct} \qquad \forall t \geq 0,\ \forall z \in \mathbb{B}_0. \tag{4.10}$$

转到（4.8），并将备注 2.4 应用于 $r=1$，从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{1,\nu}\left(w(t), \zeta^t\right) + \nu^2 \mathcal{E}_{1,\nu}\left(w(t), \zeta^t\right) + (1-\nu)\|w\|_{V^2}^2 \leq 2\langle f + \ell u(t) - \phi_0(w(t)),\ w(t)\rangle_{V^1}. \tag{4.11}$$

我们估计

$$2|\langle f + \ell u(t), w\rangle_{V^1}| \leq \nu\|w\|_{V^2}^2 + C\|f\|_{V^0}^2 + C\|u(t)\|_{V^0}^2 \leq \nu\|w\|_{V^2}^2 + C,$$

其中，最后一个不等式源于 H^0. 中的吸收估计。另一方面，由于对于所有 r，$\phi_0'(r) \geq 0$，分部积分可得

$$-\langle \phi_0(w), w\rangle_{V^1} = \int_\Omega \phi_0'(w)\,\sigma_\mu \nabla w \cdot \nabla w\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

因此 $-\phi_0(w)$ 在 (4.11) 中的贡献是耗散的，可以略去。完全按照备注 2.4中的方法，特别是将 $\nu\|w\|_{V^2}^2$ 项吸收到左端，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{1,\nu}\left(w(t), \zeta^t\right) + \nu^2 \mathcal{E}_{1,\nu}\left(w(t), \zeta^t\right) + (1-2\nu)\|w\|_{V^2}^2 \leq C. \tag{4.12}$$

利用 $\mathcal{E}_{1,\nu}(w(0)\ \zeta^0) = 0$，对 (4.12) 积分，并考虑范数等价性 (2.7，可知存在 $R_1 > 0$ 使得

$$\|K(t)z\|_{\mathcal{H}^1} \leq R_1 \qquad \forall\, t \geq 0,\ \forall\, z \in \mathbb{B}_0,$$

且 R_1 仅取决于结构参数。利用（4.10），我们已经证明

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}^0}(S(t)z,\ B_{\mathcal{H}^1}(R_1)) \leq C\mathrm{e}^{-ct},$$

这就是（4.6）。

5. 定理 3.7 的证明

设 $r \in (1,\infty)$，并对每个 $z_0 = (u_0, \eta_0) \in \mathrm{H}^1,$，将相应的轨道记为$S(t)z_0 := (u(t)\ \eta^t)$。回顾一下，我们需要证明

$$\|u\|_{L^r(t_0,t_0+1;L^\infty(\Omega))} \le \mathcal{I}(\|z_0\|_{V^1}, r), \qquad t_0 \ge 0. \tag{5.1}$$

为简便起见，从现在起记 $R = \|z_0\|_{\mathcal{H}^1}$。对于 $t \ge 0$，将 u-方程（CGB）改写为

$$\partial_t u(t) + A_\mu u(t) = \Phi(t) := f - \phi(u(t)) + \int_0^\infty h(s) A_\mu \eta^t(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{5.2}$$

固定 $t_0 \ge 0$，并在时间区间（t_0, t_0+1）上考察 (5.2)。固定 $q = q(k) := \frac{4(k+1)}{3k+1}$，使得 $\frac{1}{q}$是（ $\frac{1}{q_*}(k)$,1 2 ）的中点，这显然满足命题 2.7 的假设。回顾$X_q = W^{-1,q}(\Omega) = (W^1_{0,q'}(\Omega))'$ 以及记号 $A_{\mu,q}$，它们表示 X_q 上的实现 (2.16)。由于 $q > 2$，二维索伯列夫嵌入 $W^1_{0,q'}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = V^0$ 可写为

$$\|g\|_{X_q} \le C\,\|g\|_{V^0} \qquad \forall g \in V^0 \tag{5.3}$$

耗散估计（3.1）和（5.3）结合起来，特别可以得出

$$\|u(t_0)\|_{X_q} \le C \sup_{t\ge 0} \|u(t)\|_{V^0} \le \mathcal{I}(R).$$

我们也估计 Φ（t） 在 V^0 中的三个贡献，然后再次使用（5.3）。显然$\|f\|_{X_q} \le C\|f\|_{V^0}$。此外，由柯西–施瓦茨不等式及记忆核假设可得，

$$\left\|\int_0^\infty h(s)A_\mu\eta^t(s)\,\mathrm{d}s\right\|_{V^0} \le \int_0^\infty h(s)\|A_\mu\eta^t(s)\|_{V^0}\,\mathrm{d}s \le \kappa_0^{\frac12}\left(\int_0^\infty h(s)\|\eta^t(s)\|_{V^2}^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac12}$$
$$= \kappa_0^{\frac12}\,\|\eta^t\|_{\mathcal{M}^2}.$$

此外，估计式（4.1）给出

$$\sup_{t\ge0}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}^2} \le \mathcal{I}(R).$$

因此，记忆项在 $L^\infty(t_0, t_0+1; V^0)$ 中有界，因而在 $L^r(t_0, t_0+1; X_q)$ 中也有界。对于非线性项，由 **(P2)**及 $\phi(0) = 0$，存在 $C > 0$，使得对于所有 $s \in \mathbb{R}$， $|\phi(s)| \le C(1+|s|^{m+1})$。因此

$$\|\phi(u(t))\|_{V^0} \le C\left(|\Omega|^{1/2} + \|u(t)\|_{L^{2(m+1)}}^{m+1}\right) \le C\left(1 + \|u(t)\|_{V^1}^{m+1}\right) \le \mathcal{I}(R), \qquad t \ge t_0$$

利用索伯列夫嵌入 H_0^1（Ω） $\sim V^1 \hookrightarrow L^p$（$\Omega$） 对每个 $1 < p < \infty$，并再次使用（4.1）。综上可得

$$\|\Phi\|_{L^\infty(t_0,t_0+1;X_q)} \le \mathcal{I}(R).$$

抽象方程 (5.2) 正是 2.17) 在 (t_0, t_0+1) 上的方程，即

$$\partial_t u + A_{\mu,q} u = \Phi \quad \text{in } X_q.$$

根据命题 2.8 和注释 2.9，极大 L^r 正则性对于每个 $1 < r < \infty$ 特别推出

$$\|u\|_{L^r(t_0,t_0+1;L^\infty(\Omega))} \leq \mathcal{I}(r)\left(\|u(t_0)\|_{X_q} + \|\Phi\|_{L^r(t_0,t_0+1;X_q)}\right) \leq \mathcal{I}(R,r),$$

即（5.1）。

6. 瞬时光滑化与连续依赖

本节中，我们利用定理 3.7 来证明半群 $S(t)$ 由（CGB）生成，并具有到空间 $\mathcal{V}$ 的瞬时正则化性质。与此同时，我们得到 $S(t)$ 也是一个 $\mathcal{V}$-半群，并且当 $\mathcal{V}$ 支持椭圆正则性时具有强类型局部连续依赖。这些动力学结果将用于构造正则指数吸引子，因而可在 $\mathcal{V}$ 层面进行。第一个严格陈述如下。

命题 6.1. 设 $R > 0$，并设 $z \in B_{\mathcal{H}^1}(R)$。则对每个 $t > 0$，有 $S(t)z \in \mathcal{V}$ 且

$$\|S(t)z\|_{\mathcal{V}} \leq \mathcal{I}(R)\left(1 + t^{-1/2}\right). \tag{6.1}$$

若此外 $z \in \mathcal{V}$，则

$$\|S(t)z\|_{\mathcal{V}} \leq \mathcal{I}(R)\,\|z\|_{\mathcal{V}} e^{-t} + \mathcal{I}(R), \qquad t \geq 0. \tag{6.2}$$

因此，$S(t)$ 存在一个$(\mathcal{H}_1, \mathcal{V})$-吸收球 $\mathbb{B}_{\mathcal{V}} := B_{\mathcal{V}}(R_{\mathcal{V}})$；也就是说，对于每个 $R > 0$，都存在 $t_{\mathcal{V}} = \mathcal{I}(R) > 0$，使得

$$S(t)B_{\mathcal{H}^1}(R) \subset \mathbb{B}_{\mathcal{V}}, \qquad \forall t \geq t_{\mathcal{V}}.$$

除构造 V-吸收集之外，分析仅依赖于抽象希尔伯特尺度 $V^r = D(A_\mu^{r/2})$ 以及 $W^{-1,q}$ 上的最大正则性，因此椭圆性界 (1.6) 已足够。然而，半群在空间 V 中的连续依赖估计要求对非线性差 V^1 进行逐时控制，以满足下文引理 6.3(B) 的条件。这需要在固定时刻估计涉及 $\|u_2(t) - u_1(t)\|_\infty$ 的乘积。由于对于粗糙系数，$V^2 = D(A_\mu)$ 仅是一个抽象图空间，因此无法仅凭希尔伯特尺度获得这类L^∞ 界。为此，我们必须调用 Beltrami 椭圆正则性命题 2.6；该命题在 $\mu \in W^{1,2}$ 条件下，给出关键的嵌入 $V^2 \hookrightarrow W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$，适用于二维情形，其中 $1 < p < 2$.

命题 6.2 (在 $\mathcal{V}$ 中的连续依赖性)。 除 (1.6) 外，进一步假设 (1.7) 在 $p_0 = 2$ 下成立。令 $R > 0$，并令 $z_1, z_2 \in B_{\mathcal{V}}(R)$。记

$$S(t)z_i = (u_i(t), \eta_i^t), \qquad w(t) := u_2(t) - u_1(t), \qquad \bar{\eta}^t := \eta_2^t - \eta_1^t, \qquad W(t) := (w(t), \bar{\eta}^t).$$

Then

$$\|W(t)\|_{\mathcal{V}} \leq \mathcal{I}(R)\|W(0)\|_{\mathcal{V}}\, e^{\mathcal{I}(R)t} \qquad \forall t \geq 0. \tag{6.3}$$

本节余下部分将用于证明命题 6.1 和 6.2。我们先将两者共有的步骤汇总起来，对下文的辅助问题（6.4）作出估计，这样更为方便。正式证明将在最后两个小节中给出。

6.1. H 中的辅助问题 H ^{1}。 给定 $z \in \mathrm{H}^1$, $f \in V^0$，以及一个强迫项 $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; V^1)$，考虑柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t z + A_\mu z + \displaystyle\int_0^\infty h(s) A_\mu \xi(s)\, \mathrm{d}s = f + g(t), \\ \partial_t \xi = T\xi + z, \\ (z(0), \xi^0) = (z_0, \xi_0) \in \mathcal{H}^1. \end{cases} \tag{6.4}$$

如第 2 节所述，算子 $-A_\mu$ 在V^0上生成解析压缩半群，而 T在每个 $\mathcal{M}^r$（引理 2.2）上生成右平移半群。因此，(6.4) 是$\mathcal{H}^1$ 上的抽象演化方程，并且在标准的温和意义下是适定的。

引理 6.3. 设 (z, ξ)是定义在 $[0, \infty)$上的 (6.4)的一个解，其初始数据为 $Z_0 = (z(0)\ \xi^0) \in \mathcal{H}_1$，并令 $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; V^1)$。
(A) 假设存在常数 $\beta, \gamma \geq 0$ 使得

$$\sup_{t\geq 0} \int_t^{t+1} \|(z(\tau), \xi^\tau)\|_{\mathcal{V}}^2\, \mathrm{d}\tau \leq \beta, \qquad \sup_{t\geq 0} \int_t^{t+1} \|g(\tau)\|_{V^1}^2\, \mathrm{d}\tau \leq \gamma. \tag{6.5}$$

那么存在常数 $D = D(\beta, \gamma, \|f\|_{V^0}) > 0$使得

$$\|(z(t), \xi^t)\|_{\mathcal{V}} \leq D\left(1 + t^{-1/2}\right) \qquad \forall\, t > 0.$$

此外，若 $Z_0 \in \mathcal{V}$，则

$$\|(z(t), \xi^t)\|_{\mathcal{V}} \leq D\|Z_0\|_{\mathcal{V}} \mathrm{e}^{-t} + D \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{6.6}$$

(B) 假设 $f = 0$ 与 $Z_0 \in \mathcal{V}$，且存在 $v \geq 0$ 使得

$$\|g(t)\|_{V^1} \leq v\|(z(t), \xi^t)\|_{\mathcal{V}} \qquad a.e.\ t \geq 0. \tag{6.7}$$

则存在常数 $D_j = D_j(v) > 0$、 $j = 1$、2使得

$$\|(z(t), \xi^t)\|_{\mathcal{V}} \leq D_1\|Z_0\|_{\mathcal{V}}\, e^{D_2 t} \qquad \forall\, t \geq 0.$$

证明。 (B) 的证明与 [4, 引理 5.6] 完全相同，只是将 $A = -\Delta$ 替换为A_μ，因为它仅使用了正性、自伴性与紧预解式（对象为 A_μ），以及希尔伯特尺度$V^r = D(A_\mu^{r/2})$，还有 T在 $\mathcal{M}^r$上的耗散性（见引理 2.2），以及来自引理 2.3的记忆尾部恒等式。

对于 (A)，我们沿用 [4, 引理 5.5]，并单独处理关于 g 的不同假设被用到的唯一之处。如同 [4, 第 5], 节，在水平 $r = 1$上引入一个李雅普诺夫型泛函，即取 V^1-内积，作用于（6.4）中的第一个方程与 $\partial_t z$，再结合 ξ方程以及尾部泛函 $\mathcal{U}_2[\xi]$（来自引理 2.3，并取 $r = 1$），同时利用 **(K1)–(K2)**吸收低阶项。由此得到绝对连续泛函$\mathcal{Y}$：$[0, \infty) \to \mathbb{R}$，满足如下两个性质
(i) 等价性。存在结构常数 $c_0, C_0 > 0$，使得对所有 $t \geq 0$,

$$c_0\|(z(t), \xi^t)\|_{\mathcal{V}}^2 - C_0(1 + \|f\|_{V^0}^2) \leq \mathcal{Y}(t) \leq C_0\left(\|(z(t), \xi^t)\|_{\mathcal{V}}^2 + 1 + \|f\|_{V^0}^2\right).$$

（ii）可微 代数不等式。存在结构常数 $c_1, C_1 > 0$，使得对几乎处处的 $t \geq 0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{Y}(t) + c_1\|(z(t), \xi^t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq C_1\left(1 + \|f\|_{V^0}^2\right) + C_1\|g(t)\|_{V^1}^2. \tag{6.8}$$

见 [4, (5.14)–(5.20)]。推导完全基于泛函方法，只用到上述性质，因此只需用 A_μ 替换 $-\Delta$即可原样沿用。

在此阶段，[4, 引理 5.5] 通过对 g的逐点增长假设来估计强迫项贡献。然而，后续论证仅在对单位区间 6.8 积分 $(t, t+1)$ 并应用柯西–施瓦茨不等式和杨氏不等式后才使用（$\sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\|g(\tau)\|_{V^1}^2\mathrm{d}\tau < \infty$这一较弱的平移有界假设已足够。事实上，对 6.8在区间 $(t, t+1)$ 上积分，并利用（6.5），可得

$$\mathcal{Y}(t+1) - \mathcal{Y}(t) + c_1\int_t^{t+1}\|(z(\tau), \xi^\tau)\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}\tau \leq C\left(1 + \|f\|_{V^0}^2\right) + C\int_t^{t+1}\|g(\tau)\|_{V^1}^2\,\mathrm{d}\tau$$
$$\leq C(\beta, \gamma, \|f\|_{V^0}),$$

从这里开始，证明的其余部分与 [4, 引理 5.5] 完全相同。 □

6.2. **命题 6.1 的证明。** 令 $Z(t) = (u(t)\,\eta^t) = S(t)z$。由（4.1），存在 $\beta = \beta(R) \geq 0$ 使得

$$\sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\|Z(\tau)\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}\tau = \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\left(\|u(\tau)\|_{V^2}^2 + \|\eta^\tau\|_{\mathcal{M}^2}^2\right)\mathrm{d}\tau \leq \beta. \tag{6.9}$$

我们将引理 6.3 应用于原系统 (CGB)，将其视为以强迫项 $g(t) = -\phi(u(t))$ 为条件的辅助问题 (6.4)。因此，只需验证关于 g 的相应增长假设。令 $m \geq 1$ 为 (P2) 中的指数。固定 $t \geq 0$。由于 $q > 2$ 且 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，索伯列夫嵌入$W^{1,q}_0(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$成立。取定理 3.7 中的 $r = 2m$，得到平移有界估计

$$\sup_{t\geq 0}\|u\|_{L^{2m}(t,t+1;L^\infty(\Omega))} \leq \mathcal{I}(R). \tag{6.10}$$

另一方面，由于椭圆性和链式法则，几乎处处于时 e

$$\|\phi(u(\tau))\|_{V^1}^2 \lesssim_{k,\Omega} \|\nabla\phi(u(\tau))\|_{V^0}^2 = \|\phi'(u(\tau))\nabla u(\tau)\|_{V^0}^2 \leq \|\phi'(u(\tau))\|_\infty^2\|\nabla u(\tau)\|_{V^0}^2.$$

由 **(P2)**，$|\phi'(s)| \leq C(1 + |s|^m)$，因此

$$\|\phi'(u(\tau))\|_\infty^2 \leq C\left(1 + \|u(\tau)\|_\infty^{2m}\right).$$

此外，命题 3.2蕴含 $\sup_{\tau\geq 0}\|u(\tau)\|_{V^1} \leq \mathcal{I}(R)$，因此 $\sup_{\tau\geq 0}\|\nabla u(\tau)\|_{V^0}^2 \leq \mathcal{I}(R)$由 (2.2) 得出。对 $(t, t+1)$ 积分，并利用 (6.10) 可得

$$\int_t^{t+1}\|\phi(u(\tau))\|_{V^1}^2\,\mathrm{d}\tau \leq \mathcal{I}(R)\int_t^{t+1}\left(1 + \|u(\tau)\|_\infty^{2m}\right)\mathrm{d}\tau \leq \mathcal{I}(R), \qquad \forall t \geq 0.$$

因此引理 6.3(A) 适用于 $g = -\phi(u)$，并结合 (6.9)，从而得到 (6.1)。若 $z \in \mathcal{V}$，则改进估计 (6.2) 由第二个结论 (6.6)（即引理6.3(A)）得出。所声称的 $(\mathcal{H}^1, \mathcal{V})$-吸收球的存在性是 (6.1)、(6.2) 以及半群性质的直接推论。

6.3. **命题 6.2 的证明**。证明遵循 [4, 命题 6.3] 的思路。必要的改动仅在于非线性差项 $\phi(u_2) - \phi(u_1)$在 V^1-范数中的估计，以便验证假设 (6.7)（引理 6.3 关于差分系统）。即只需证明存在 $\upsilon = \upsilon(R)$，使得对几乎处处的 $t \geq 0$,

$$\|\phi(u_2(t)) - \phi(u_1(t))\|_{V^1} \leq \mathcal{I}(R)\|W(t)\|_{\mathcal{V}}. \tag{6.11}$$

固定 $p \in (1, p_0)$。由于 $u_j(t) \in V^2 = D(A_\mu)$且 $\|u_j(t)\|_{V^2} \leq \mathcal{I}(R)$对于 $z_i \in B_{\mathcal{V}}(R)$由 (6.2)，命题 2.6 的椭圆估计给出，对于 $j = 1,2$

$$\|u_j(t)\|_{W^{2,p}} \leq C\|u_j(t)\|_{V^2} \leq \mathcal{I}(R), \qquad \|w(t)\|_{W^{2,p}} \leq C\|w(t)\|_{V^2} \leq C\|W(t)\|_{\mathcal{V}}.$$

回顾嵌入 $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$，我们还可以得到

$$\|u_j(t)\|_\infty \leq \mathcal{I}(R), \qquad \|w(t)\|_\infty \leq C\|W(t)\|_{\mathcal{V}}.$$

根据链式法则，

$$\|\phi(u_2) - \phi(u_1)\|_{V^1} \leq C\|\phi(u_2) - \phi(u_1)\|_{V^0} + C\|\nabla(\phi(u_2) - \phi(u_1))\|_{V^0}.$$

逐点应用中值定理，

$$\phi(u_2) - \phi(u_1) = \phi'(\theta)w, \qquad \phi'(u_2) - \phi'(u_1) = \phi''(\beta)w,$$

对于介于 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 之间的中间函数 $\theta(x,t)$ $\beta(x,t)$。因此，依据 **(P2)**

$$\|\phi(u_2) - \phi(u_1)\|_{V^0} \leq \|\phi'(\theta)\|_\infty \|w\|_{V^0} \leq C\left(1 + \|u_1\|_\infty^m + \|u_2\|_\infty^m\right)\|w\|_{V^0} \leq \mathcal{I}(R)\|W\|_{\mathcal{V}}.$$

同理

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(\phi(u_2) - \phi(u_1))\|_{V^0} \leq \|\phi''(\beta)\|_\infty \|w\|_\infty \|\nabla u_2\|_{V^0} + \|\phi'(u_1)\|_\infty \|\nabla w\|_{V^0} \\
&\leq C\left(1 + \|u_1\|_\infty^{m-1} + \|u_2\|_\infty^{m-1}\right)\|w\|_\infty \|\nabla u_2\|_{V^0} + C\left(1 + \|u_1\|_\infty^m\right)\|\nabla w\|_{V^0} \\
&\leq \mathcal{I}(R)\|W\|_{\mathcal{V}}.
\end{aligned}$$

结合前两个显示的不等式，得到（6.11），因此引理 6.3 （B）适用于差分系统，从而得到（6.3）。

7. 正则的指数吸引集

本节旨在说明，由问题（CGB）在正则空间 $\mathcal{V}$ 上生成的半群，在减去线性定常问题的解后，会指数趋近于一个更正则空间中的球；该空间紧嵌入 $\mathcal{V}$。我们将在下文给出该空间的定义。

全文中，我们将使用命题 6.1中的 $\mathbb{B}_{\mathcal{V}} = B_{\mathcal{V}}$（$R_{\mathcal{V}}$）吸收球。回忆一下，向量 z_f定义于（3.2）中。由于 $f \in V^0$，我们有 $u_f \in V^2 = D$（A_μ），因此 $z_f \in \mathcal{V}$。此外，归一化（1.8）给出

$$\int_0^\infty h(s)A_\mu \eta_f(s)\,\mathrm{d}s = A_\mu u_f,$$

因此z_f是问题（CGB）的一个平稳解。为了实现记忆分量的紧性，引入泛函 $\Xi\colon \mathcal{M}^2 \to \mathbb{R}$

$$\Xi[\eta] := \|T\eta\|_{\mathcal{M}^2}^2 + \sup_{x \geq 1} x \int_{(0,x^{-1})\cup(x,\infty)} h(s)\|\eta(s)\|_{V^2}^2\,\mathrm{d}s,$$

并定义

$$\mathcal{W} \coloneqq \left\{\eta \in \mathcal{M}^4 \cap \mathcal{D}(T_2) : \Xi[\eta] < \infty\right\}, \qquad \|\eta\|_{\mathcal{W}}^2 \coloneqq \|\eta\|_{\mathcal{M}^4}^2 + \Xi[\eta].$$

于是，我们所需的紧化相空间为

$$\mathcal{Z} \coloneqq V^3 \times \mathcal{W}, \qquad \|(u,\eta)\|_{\mathcal{Z}}^2 \coloneqq \|u\|_{V^3}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{W}}^2.$$

注 7.1. 事实上，嵌入 $V^3 \Subset V^2$ 依谱理论是紧的，这依赖于 A_μ的紧预解式。选取 Ξ 旨在使 $\mathcal{W}$ 的有界集在 $\mathcal{M}^2$ 中相对紧。因此，$\mathcal{Z} \Subset \mathcal{V}$。证明与 [4, 注 7.1], 相同，只是以 h 代替 μ，故略去。

有了这些定义，我们陈述本节的主要结果。

命题 7.2（正则指数吸引集）。存在 $R_\star > 0$ 与 $t_\star > 0$，它们仅依赖于结构参数，使得该集合

$$\mathbb{S}_{\mathcal{Z}} \coloneqq z_f + \mathbb{B}_{\mathcal{Z}}(R_\star)$$

满足：

(i) $S(t)\mathbb{S}_{\mathcal{Z}} \subset \mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$对所有 $t \geq t_\star$，(ii) 存在结构常数 $C \geq 1$ 和 $\varepsilon > 0$，使得

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{V}}\left(S(t)\mathbb{B}_{\mathcal{V}}, \mathbb{S}_{\mathcal{Z}}\right) \leq Ce^{-\varepsilon t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

证明依赖于对 V 上半群 $S(t)$ 的一种专门分解，类似于第[4, 节 7]中的分解。我们将其证明推迟到讨论主要差异之后；主要差异在于如何在正则空间 V^2中恰当地估计非线性项。我们所处的 Beltrami 算子变系数非光滑情形对这一估计有很大影响。

引理 7.3 (图范数层次的非线性估计 V^2)。假设 (1.6)成立，此外还假设 (1.7)对某个 $p_0 \geq 2$ 成立。则有

$$\|\phi(u)\|_{V^2} \leq C\left(1 + \|u\|_{V^2}^{m+1}\right). \tag{7.1}$$

证明。取 $p \in (4, p_0)$。利用命题 2.6 并取 $g = A_\mu u$，再结合谱演算、(2.3)以及有界区域上的标准嵌入，

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C\left(\|A_\mu u\|_{L^p} + \|u\|_{V^0}\right) \leq C\|u\|_{V^2}.$$

二维中的索伯列夫嵌入由此得出

$$\|u\|_\infty + \|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{2,p}} \leq C\|u\|_{V^2}. \tag{7.2}$$

结合（7.2）与假设 (P2),

$$\|\phi'(u)\|_\infty \leq C\left(1 + \|u\|_{V^2}^m\right), \qquad \|\phi''(u)\|_\infty \leq C\left(1 + \|u\|_{V^2}^{m-1}\right). \tag{7.3}$$

我们现在在 A_μ的层面上使用链式法则。即，设

$$F \coloneqq \sigma_\mu \nabla u.$$

由于 $u \in V^2$，我们有 $F \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$以及$\mathrm{div}F = -A_\mu u \in L^2(\Omega)$，故 $F \in H(\mathrm{div};\Omega)$。此外，由步骤1和步骤2，$\phi'(u) \in L^\infty$ 以及 $\nabla(\phi'(u)) = \phi''(u)\nabla u \in L^4$，因此 $\phi''(u)\,(\sigma_\mu\nabla u)\cdot\nabla u \in L^2$。分布意义下的标准乘积法则可由伽辽金近似加以论证，从而得到

$$A_\mu(\phi(u)) = -\mathrm{div}\left(\sigma_\mu\nabla(\phi(u))\right) = -\mathrm{div}\left(\phi'(u)F\right) = -\phi'(u)\mathrm{div}F - \nabla(\phi'(u))\cdot F,$$

因此，利用 $\mathrm{div}F = -A_\mu u$ and $\nabla(\phi'(u)) = \phi''(u)\nabla u$,

$$A_\mu(\phi(u)) = \phi'(u)\,A_\mu u - \phi''(u)\,(\sigma_\mu\nabla u)\cdot\nabla u.$$

因此，根据（1.2），

$$\|\phi(u)\|_{V^2} = \|A_\mu(\phi(u))\|_{V^0} \le \|\phi'(u)\|_\infty\|A_\mu u\|_{V^0} + C(k)\|\phi''(u)\|_\infty\|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)}. \tag{7.4}$$

将（7.3）和（7.2）代入（7.4）可得

$$\|\phi(u)\|_{V^2} \le C\left[(1+\|u\|^m_{V^2})\|u\|_{V^2} + (1+\|u\|^{m-1}_{V^2})\|u\|^2_{V^2}\right] \le C\left(1+\|u\|^{m+1}_{V^2}\right),$$

即（7.1）。 □

现在我们转而证明命题 7.2。令 $R>0$，固定 $z \in \mathbb{B}_{\mathcal{V}}(R)$并记 $S(t)z = (u(t)\ \eta^t)$。最终得到如下分解

$$S(t)z = z_f + \ell_1(t;z) + \ell_2(t;z), \qquad \ell_1(\cdot;z):[0,\infty)\to\mathcal{V}, \quad \ell_2(\cdot;z):[0,\infty)\to\mathcal{Z},$$

具有如下性质

$$\|\ell_1(t;z)\|_{\mathcal{V}} \le \mathcal{I}(R)\mathrm{e}^{-ct}, \qquad t\ge 0,$$

and

$$\sup_{t\ge0}\|\ell_2(t;z)\|_{\mathcal{Z}} \le \mathcal{I}(R). \tag{7.5}$$

此外，根据（3.2），若 $z - z_f \in \mathbb{B}_{\mathcal{Z}}(\varrho)$对某个 $\varrho>0$成立，则

$$\|\ell_1(t;z)\|_{\mathcal{Z}} \le \mathcal{I}(\varrho)\mathrm{e}^{-ct} + \mathcal{I}(\varrho), \qquad t\ge0. \tag{7.6}$$

首先，我们定义 ℓ_1，ℓ_2。令 $L(t)$表示与（CGB）相关的线性齐次半群，其中 $\phi\equiv0$ 且 $f\equiv0$。设

$$\ell_1(t;z) \coloneqq L(t)\left(z - z_f\right).$$

取差后，$\ell_2(t;z)$ 与受迫线性系统的唯一解 $W(t) = (w(t)\ \xi^t)$ 一致

$$\begin{cases} \partial_t w + A_\mu w + \displaystyle\int_0^\infty h(s)A_\mu\xi(s)\,\mathrm{d}s = -\phi(u(t)), \\ \partial_t\xi = T\xi + w, \\ W(0) = (0,0), \end{cases} \tag{7.7}$$

线性齐次半群 $L(t)$ 在 V 上的指数衰减可直接由 [4, 命题 6.5]，得出，因为它基于希尔伯特尺度 V^r 的抽象性质以及记忆核假设，而这些假设与所引命题中的假设等价。

下面转而讨论 ℓ_2的正则性。Z–层面的能量重构以及相应历史泛函 Ξ的控制，与 [4, 引理 7.3 的步骤 2 完全相同，结合

引理 7。4]一旦验证了强迫项 $g(t) = -\phi(u(t))$ 在 V^2 上的 $\mathcal{V}$–吸收集得到验证后，将不再重复。回顾命题 3.2，由于 $z \in \mathbb{B}_{\mathcal{V}}(R)$ 我们有

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{V^2} \leq \mathcal{I}(R).$$

逐时应用引理7.3 即可得到

$$\sup_{t\geq 0} \|\phi(u(t))\|_{V^2} \leq \mathcal{I}(R). \tag{7.8}$$

有了（7.8）后，[4, 引理 7.3] 中的论证可原样应用于（7.7），从而得到（7.5）。精细估计（7.6）可由同样的泛函界推出，该界作用于 Ξ，与 [4, 引理 7.4]中的情形相同。命题7.2的证明至此完成。

8. 定理3.8的证明

本节完成定理3.8 和推论 3.9的证明。

8.1. **定理3.8，点 (i)–(iv)**。证明的前四步实际构造了集合 $\mathfrak{E}$，使其成为由（CGB）在 $\mathcal{V}$上生成的半群的正则指数吸引子，参见命题6.1。

回顾一下，我们在定理 $\mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$ 7.2 中构造了一个正则指数吸引集，并且紧嵌入 $\mathcal{Z} \Subset \mathcal{V}$，见注 7.1。由指数吸引的传递性[19], ，由于吸收球 $\mathbb{B}_{\mathcal{V}}$ 在 $\mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$ 中被指数吸引 $\mathcal{V}$，参见定理 7.2，只需为动力学在集合 $\mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$上的限制构造一个指数吸引子，其中

$$\mathbb{S}_{\mathcal{Z}} = z_f + \mathbb{B}_{\mathcal{Z}}(R_\star)$$

对于某个 $R_\star > 0$ 仅取决于结构参数的量。定理 7.2 还蕴含存在一个结构 $t_\star > 0$，具有如下性质

$$S(t)\mathbb{S}_{\mathcal{Z}} \subset \mathbb{S}_{\mathcal{Z}}, \qquad t \geq t_\star, \tag{8.1}$$

结合 [18] 关于离散半群指数吸引子的主要结果与标准的离散到连续论证，参见例如 [4, 第 8], ，存在一个集合 $\mathfrak{E}$，满足定理 3.8 中的 (i)、(iii) 和 (iv)，可由验证以下两个性质 **(S)** 和 **(T)** 得到。**(S) 挤压性质** 存在结构常数 $\vartheta \in (0,1)$ 以及 $C > 0$，使得对所有 z_1, $z_2 \in \mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$，均存在分解

$$\begin{aligned} &S(t_\star)z_1 - S(t_\star)z_2 = \ell_1 + \ell_2, \\ &\|\ell_1\|_{\mathcal{V}} \leq \vartheta\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{V}}, \qquad \|\ell_2\|_{\mathcal{Z}} \leq C\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

(T) Lipschitz **关于时间的 Lipschitz 连续性** 存在 $C > 0$，使得对于所有 t, $\tau \in [t_\star, 2t_\star]$,

$$\sup_{z\in\mathbb{S}_{\mathcal{Z}}} \|S(t)z - S(\tau)z\|_{\mathcal{V}} \leq C|t - \tau|. \tag{8.3}$$

有了 (S) 和 (T)，即可为离散映射 $S(t_\star) : \mathbb{S}_{\mathcal{Z}} \to \mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$ 构造一个指数吸引子 $\mathfrak{E}_d \subset \mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$，然后令

$$\mathfrak{E} \coloneqq \bigcup_{t\in[t_\star,2t_\star]} S(t)\mathfrak{E}_d. \tag{8.4}$$

性质 (T) 保证映射 $(t,z)\mapsto S(t)z$是从 $[t_\star,2t_\star]\times B$到 $\mathcal{V}$ 的利普希茨映射，因此$\mathfrak{E}$ 在 $\mathcal{V}$ 中是紧的，并且具有有限的 $\mathcal{V}$-分形维数。正不变性继承自 $\mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$ 的正不变性以及 (8.4)。随后，由传递性可得其在$\mathcal{V}$ 中的指数吸引性。

只要将其中出现的非线性项之差的估计替换为与二维及粗糙系数情形相容的适当界，就可以按照 [4, §8] 的思路证明 (S)-(T)。

引理 8.1 (ϕ在 V^2中的局部利普希茨性)。 假设 (1.7) 对某个 $p_0\geq 2$成立。那么

$$\|\phi(u_2)-\phi(u_1)\|_{V^2}\leq \mathcal{I}\left(\|u_1\|_{V^2}+\|u_2\|_{V^2}\right)\|u_2-u_1\|_{V^2}. \tag{8.5}$$

证明。 令 $w:=u_2-u_1$，并固定 $p\in(4\,3,p_0)$。与前面一样，索伯列夫嵌入和命题 2.6 的估计给出以下估计

$$\|u\|_\infty+\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)}\leq C\|u\|_{W^{2,p}}\leq C\|u\|_{V^2} \tag{8.6}$$

利用 **(P2)**，以及 (8.6)，可得

$$\|\phi^{(1+j)}(\theta)\|_\infty\leq \mathcal{I}\left(\|u_1\|_{V^2}+\|u_2\|_{V^2}\right),\qquad j=0,1,2 \tag{8.7}$$

对于任意介于 u_1 和 u_2 之间的中间函数 θ。链式法则为

$$A_\mu(\phi(u))=\phi'(u)A_\mu u-\phi''(u)(\sigma_\mu\nabla u)\cdot\nabla u\qquad \text{in } L^2(\Omega). \tag{8.8}$$

将（8.8）应用于 u_2 和 u_1 并相减，得到

$$A_\mu(\phi(u_2)-\phi(u_1))=\mathrm{I}+\mathrm{II}-\mathrm{III},$$

其中

$$\mathrm{I}:=\phi'(u_2)A_\mu w,\qquad \mathrm{II}:=\left(\phi'(u_2)-\phi'(u_1)\right)A_\mu u_1,$$
$$\mathrm{III}:=\phi''(u_2)(\sigma_\mu\nabla u_2)\cdot\nabla u_2-\phi''(u_1)(\sigma_\mu\nabla u_1)\cdot\nabla u_1.$$

我们在 L^2中估计这些项。

项I。 利用（8.7），

$$\|\mathrm{I}\|_{V^0}\leq\|\phi'(u_2)\|_\infty\|A_\mu w\|_{V^0}\leq\mathcal{I}\left(\|u_1\|_{V^2}+\|u_2\|_{V^2}\right)\|w\|_{V^2}.$$

项 II。 由中值定理，$\phi'(u_2)-\phi'(u_1)=\phi''(\theta)w$对于某个中间函数 θ，因此结合（8.6）和（8.7）可得

$$\|\mathrm{II}\|_{V^0}\leq\|\phi''(\theta)\|_\infty\|w\|_\infty\|A_\mu u_1\|_{V^0}\leq\mathcal{I}\left(\|u_1\|_{V^2}+\|u_2\|_{V^2}\right)\|w\|_{V^2}.$$

项III。 改写

$$\mathrm{III}=\phi''(u_2)\left(Q_2-Q_1\right)+\left(\phi''(u_2)-\phi''(u_1)\right)Q_1,\qquad Q_j:=(\sigma_\mu\nabla u_j)\cdot\nabla u_j,\quad j=1,2.$$

对于第一部分，注意到

$$Q_2-Q_1=(\sigma_\mu\nabla w)\cdot\nabla u_2+(\sigma_\mu\nabla u_1)\cdot\nabla w,$$

因此，由椭圆性（1.2）和霍尔德不等式

$$\|\phi''(u_2)\left(Q_2-Q_1\right)\|_{V^0}\leq\|\phi''(u_2)\|_\infty\|\nabla w\|_{L^4(\Omega)}\left(\|\nabla u_2\|_{L^4(\Omega)}+\|\nabla u_1\|_{L^4(\Omega)}\right)\leq\mathrm{I}\left(\|u_1\|_{V^2}+\|u_2\|_{V^2}\right)\|w\|_{V^2},$$

利用了 (8.6) 和 (8.7)。对于第二部分，再次根据中值定理，$\phi''(u_2)-\phi''(u_1)=\phi'''(\zeta)w$对于某个中间值 ζ，因此

$$\|(\phi''(u_2)-\phi''(u_1))Q_1\|_{V^0}\leq\|\phi'''(\theta)\|_\infty\|w\|_\infty\|Q_1\|_{V^0}.$$

最后，$\|Q_1\|_{V^0}\leq C\|\nabla u_1\|^2_{L^4(\Omega)}\leq\mathcal{I}(\|u_1\|_{V^2})$由 (8.6) 得出，因此最后一个公式也可写为$\leq\mathcal{I}(\|u_1\|_{V^2}+\|u_2\|_{V^2})\|w\|_{V^2}$。汇总 I、II、III的估计，最终得到 (8.5)。□

引理 8.2。 任取 $z\in\mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$，并记 $S(t)z=(u(t)\ \eta^t)$。对每个 $v\in V^2$,

$$\|\phi'(u(t))v\|_{V^1}\leq C\|v\|_{V^2},\qquad t\geq t_\star. \tag{8.9}$$

证明。 回顾 $\mathcal{V}$-有界性结构常数 $\mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$、正不变性性质 (8.1)、估计式 (8.6) 以及假设 (P2)，注意到

$$\|\phi'(u(t))\|_\infty+\|\phi''(u(t))\|_\infty+\|\nabla u(t)\|_{L^4(\Omega)}\leq C,\qquad t\geq t_\star. \tag{8.10}$$

设 $v\in V^2$。椭圆性意味着 $V^1\simeq H^1_0(\Omega)$,

$$\|\phi'(u)v\|_{V^1}\leq C\|\phi'(u)v\|_{V^0}+C\|\nabla(\phi'(u)v)\|_{V^0}.$$

我们估计

$$\|\phi'(u)v\|_{V^0}\leq\|\phi'(u)\|_\infty\|v\|_{V^0}\leq C\|v\|_{V^2}.$$

此外,

$$\nabla(\phi'(u)v)=v\phi''(u)\nabla u+\phi'(u)\nabla v,$$

因此，由赫尔德不等式和（8.10），

$$\|\nabla(\phi'(u)v)\|_{V^0}\leq\|\phi''(u)\|_\infty\|v\|_\infty\|\nabla u\|_{V^0}+\|\phi'(u)\|_\infty\|\nabla v\|_{V^0}\leq C\left(\|v\|_\infty+\|\nabla v\|_{V^0}\right).$$

最后，由命题 2.6和索伯列夫嵌入，同前 $\|v\|_\infty+\|\nabla v\|_{V^0}\leq C\|v\|_{V^2}$，并可得（8.9）。□

现在说明引理 8.1–8.2如何用于验证 **(S)**–**(T)**。

验证**(S)**。固定 $z_1,z_2\in\mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$ 并令

$$S(t)z_i=(u_i(t),\eta_i^t),\qquad W(t)\coloneqq S(t)z_2-S(t)z_1=(w(t),\bar{\eta}^t).$$

如 [4, §8], 所述，将$W(t_\star)$ 按照（8.2）进行分解，方法是对差分系统写出常数变易公式，并将其贡献拆分为衰减的线性部分和正则部分。更确切地说，令 $L(t)$表示由（2.8）生成的线性齐次半群，其中 $g\equiv 0$。设

$$\ell_1\coloneqq L(t_\star)\left(z_2-z_1\right),\qquad \ell_2\coloneqq W(t_\star)-\ell_1.$$

估计式 $\|\ell_1\|_{\mathcal{V}}\leq\vartheta\|z_2-z_1\|_{\mathcal{V}}$对某个 $\vartheta\in(0,\ 1)$成立，这是由 $L(t)$ 在 V 上的指数稳定性得到的，参见 [4,命题 6.5],，其中仅使用了与 A_μ相关的抽象希尔伯特尺度和记忆假设。

剩下的问题是估计 ℓ_2 在$\mathcal{Z}$中的值。元素 ℓ_2 对应于在时刻 $t_\star$，方程（2.8）在 $g=\phi(u_1)-\phi(u_2)$ 下的解。$\mathcal{Z}$-界

$$\|\ell_2\|_{\mathcal{Z}}\leq C\|z_2-z_1\|_{\mathcal{V}}$$

可按 [4, §8], ， 使用引理8.1 即可推得

$$\|\phi(u_2(t))-\phi(u_1(t))\|_{V^2}\leq C\|w(t)\|_{V^2}\leq C\|W(t)\|_{\mathcal{V}},\qquad t\geq t_\star$$

其余的$\mathcal{Z}$–能量重构以及记忆紧性泛函估计与 [4, §8]完全相同，故省略。因此**(S)**成立。

验证 **(T)**。 固定 $z \in \mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$，并记 $S(t)z = (u(t)\ \eta^t)$。只需证明

$$\sup_{t\in[t_\star,2t_\star]} \left\|(\partial_t u(t), \partial_t \eta^t)\right\|_{\mathcal{V}} \le C, \tag{8.11}$$

因为 Lipschitz 估计（8.3）可通过对时间积分得到。对（CGB）关于时间求导后，我们注意到，经过时间平移 $t \mapsto t_\star + t$后，这一对

$$U(t) := \partial_t u(t + t_\star), \qquad \zeta(t) := \partial_t \eta^{t+t_\star}$$

满足（6.4），其中 $f = 0$ 且强迫项为

$$g(t) = -\phi'(u(t_\star + t))U(t).$$

由于 $S(t)\mathbb{S}_{\mathcal{Z}} \subset \mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$对于 $t \ge t_\star$成立，定义 $\mathbb{S}_{\mathcal{Z}}$的界以及引理 8.2可推出

$$\|g(t)\|_{V^1} \le C\|U(t)\|_{V^2} \qquad \forall\, t \ge t_\star.$$

在层级 2.9处将能量不等式（2.9）应用于 $r = 1$上的 (U, ζ)可得到如下形式的平移有界估计

$$\sup_{t\ge t_\star} \int_t^{t+1} \|(U(\tau), \zeta^\tau)\|_{\mathcal{V}}^2 \, \mathrm{d}\tau \le C,$$

与 C 仅依赖于结构参数和 $R_\star$。因此，将引理6.3**(A)** 应用于$(U,\ \zeta)$可得（8.11），从而完成定理 3.8中 (i)、(iii) 和 (iv) 的证明。

容易看出，性质 (ii) 是其他性质的推论。事实上，注意到 $\mathfrak{E}$满足

$$\mathfrak{E} \subset \mathbb{S}_{\mathcal{Z}} = z_f + \mathbb{B}_{\mathcal{Z}}(R_\star),$$

因此，$\mathfrak{E} - z_f$在 $\mathrm{Z} = V^3 \times \mathrm{W}$ 中有界，特别证明了 V^3有界性。此外，在满足（1.7）且 $p_0 = 2$的条件下，命题2.6 给出连续嵌入 $V^2 = D(A_\mu) \hookrightarrow W^{2,\,p}(\Omega)$，对每个 $1 < p < 2$均成立；因此，恒等映射

$$\mathcal{V} = V^2 \times \mathcal{M}^2 \longrightarrow W^{2,p}(\Omega) \times \mathcal{H}^2$$

是连续的；又由 (i) 可知，$\mathfrak{E}$ 在 V 中具有有限分形维数，因此它在 $W^{2,\,p}(\Omega) \times \mathrm{H}^2$中也具有有限分形维数。这就证明了 (ii)。

8.2. **定理 3.8的证明，第 (v)、(vi) 点。** 令 $R > 0$ 并记 $B_R := B_{\mathcal{H}^1}(R)$。由命题 6.1，

$$S(1)B_R \subset B_{\mathcal{V}}(R_1), \qquad R_1 = \mathcal{I}(R).$$

因此，对 $t \ge 1$，利用第 (iv) 点以及 $\mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{H}^1$, 的连续嵌入

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{V}}(S(t)B_R, \mathfrak{E}) = \operatorname{dist}_{\mathcal{V}}(S(t-1)S(1)B_R, \mathfrak{E}) \le C \operatorname{dist}_{\mathcal{V}}(S(t-1)B_{\mathcal{V}}(R_1), \mathfrak{E}) \le \mathcal{I}(R)\mathrm{e}^{-ct}.$$

另一方面，对 $t \le 1$，命题 3.2 和 6.1 恰好表明

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}^1}(S(t)B_R, \mathfrak{E}) + \sqrt{t}\operatorname{dist}_{\mathcal{V}}(S(t)B_R, \mathfrak{E}) \le \mathcal{I}(R)$$

结合前两个显示式可得结论 (v)。对于结论 (vi)，令 $R > 0$ 并设 $B_R^0 := B_{\mathcal{H}^0}(R)$。由命题3.2，

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}^0}(S(t)B_R^0, \mathbb{B}_1) \le \mathcal{I}(R)\mathrm{e}^{-ct}, \qquad t \ge 0,$$

对于 $\mathcal{H}^1$-吸收球 $\mathbb{B}_1$。由于 $\mathbb{B}_1 \subset \mathcal{H}_1$，将结论 (v) 应用于 $\mathbb{B}_1$，并利用 $\mathcal{H}^0$ 指数吸引的传递性 [18], ，这可通过对（CGB）在 $\mathcal{H}^0$-范数下使用标准的关于时间的指数型连续依赖估计来证明。后者源于 **(P1)**中的强制性/单调性结构，无需额外的椭圆正则性。此论证与 [8] 中欧几里得类比的论证相同，故略去。

8.3. 推论 3.9 的证明。令 $\mathfrak{E} \subset \mathrm{V}$ 为定理 3.8 给出的指数吸引子。特别地， $\mathfrak{E}$ 在 V 中是紧致且正向不变的。于是，$\mathrm{A}j$，即 $\mathfrak{E}$ 在 H^j中当 $j = 0$，1 时的 ω极限集，是 $S(t)$ 的 H^j全局吸引子。由于 A_0 包含于 $\mathfrak{E}$，而后者在 H^1, 中有界，因此它必被 A_1吸引。不变性进而迫使 $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}_1$。显然的反向包含关系给出等式 $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_1 =: \mathrm{A}$，并完成了证明的这一部分。$S(t)$ 在 A 上限制为一个算子群，这是带记忆微分系统所具有的反向唯一性性质的标准推论。欧几里得类比中已在[8] 观察到这一点，而由 (CGB) 生成的半群也保留了这一性质。至此，推论的证明完成。

参考文献

[1] K. Astala、T. Iwaniec 和 G. Martin，《平面上的椭圆偏微分方程与拟共形映射》，Princeton Mathematical Series，第48卷，Princeton University Press，普林斯顿，新泽西州，2009年。MR2472875↑4, 5, 10[2] K. Astala 和 L. Päivärinta，《平面上的Calderón逆电导率问题》，Ann. of Math. (2) 163(2006), no. 1, 265–299。MR2195135 ↑4[3] F. Boyer 和 P. Fabrie，《不可压Navier-Stokes方程及相关模型研究的数学工具》，Applied Mathematical Sciences，第183卷，Springer，纽约，2013年。MR2986590 ↑10[4] M. D. Chekroun、F. Di Plinio、N. E. Glatt-Holtz 和 V. Pata，《Coleman-Gurtin模型的渐近行为》，Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 4 (2011), no. 2, 351–369。MR2746378 ↑3, 4, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27[5] V. V. Chepyzhov 和 M. I. Vishik，《数学物理方程的吸引子》，American Mathematical Society Colloquium Publications，第49卷，American Mathematical Society，普罗维登斯，罗得岛州，2002年。MR1868930↑4[6] B. D. Coleman 和 M. E. Gurtin，《刚性导热体的等在性与本构方程》，Z. Angew. Math. Phys. 18 (1967), 199–208。MR214334 ↑4[7] M. Conti、V. Danese 和 V. Pata，《具有时变记忆核的黏弹性，II：解的渐近行为》，Amer. J. Math. 140 (2018), no. 6, 1687–1729。MR3884641 ↑4[8] M. Conti、V. Pata 和 M. Squassina，《带记忆微分系统的奇异极限》，Indiana Univ. Math. J. 55 (2006), no. 1, 169–215。MR2207550 ↑3, 4, 11, 14, 28[9] C. M. Dafermos，《黏弹性的渐近稳定性》，Arch. Rational Mech. Anal. 37 (1970), 297–308。MR281400 ↑6[10] V. Danese、P. G. Geredeli 和 V. Pata，《带记忆抽象方程的指数吸引子及其在黏弹性中的应用》，Discrete and Continuous Dynamical Systems 35 (2015), no. 7, 2881–2904。 ↑4[11] F. Dell'Oro 和 Y. Mammeri，《具有耗散记忆和Rayleigh摩擦的Benjamin–Bona–Mahony方程：存在性与长期行为》，Applied Mathematics & Optimization 83 (2021), 813–847。 ↑4[12] F. Di Plinio 和 V. Pata，《具有记忆的强阻尼波动方程的鲁棒指数吸引子。I》，Russ. J. Math. Phys. 15 (2008), no. 3, 301–315。MR2448344 ↑4[13] F. Di Plinio 和 V. Pata，《具有记忆的强阻尼波动方程的鲁棒指数吸引子。II 》，Russ. J. Math. Phys. 16 (2009), no. 1, 61–73。MR2486806 ↑4[14] F. Di Plinio、A. Giorgini、V. Pata 和 R. Temam，《缺少瞬时运动黏度的三维带记忆Navier–Stokes–Voigt方程》，Journal of Nonlinear Science 28 (2018), no. 2, 653–686。 ↑4

[15] F. Di Plinio、A. W. Green 和 B. D. Wick，《拟正则映射的定量Sobolev正则性》，Ann. Fenn. Math. 50 (2025), no. 1, 3–28。MR4850196 ↑3, 5, 10[16] F. Di Plinio、V. Pata 和 S. Zelik，《具有记忆的强阻尼波动方程》，Indiana Univ. Math. J. 57 (2008), no. 2, 757–780。MR2414334 ↑4[17] A. Eden、C. Foias、B. Nicolaenko 和 R. Temam，《耗散演化方程的指数吸引子》，RAM: Research in Applied Mathematics，第37卷，Masson，巴黎；John Wiley & Sons, Ltd.，奇切斯特，1994年。MR1335230 ↑4[18] M. Efendiev、A. Miranville 和 S. Zelik，《R中非线性反应-扩散系统的指数吸引子》，C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000), no. 8, 713–718。MR^{3}, , 281763916 ↑24P. Fabrie、C. Galusinski、A. Miranville 和 S. Zelik，《奇异摄动阻尼波动方程的一致指数吸引子》，2004年，第211–238页。《偏微分方程及其应用》。MR[19] 2026192 ↑24M. Fabrizio、C. Giorgi 和 V. Pata，《研究带记忆方程的新方法》，Arch. Ration. Mech. Anal. 198 (2010), no. 1, 189–232。MR[20] 2679371 ↑6S. Gatti、M. Grasselli、A. Miranville、V. Pata 和 M. Squassina，《一族非守恒带记忆相场系统的鲁棒指数吸引子》，Discrete and Continuous Dynamical Systems 12 (2005), no. 5, 1019–1029。[21] ↑4 S. Gatti、M. Grasselli、A. Miranville、V. Pata 和 S. Zelik，《具有记忆的奇异摄动方程的连续指数吸引子族》，Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics 140 (2010), no. 2, 329–366。[22] ↑4S. Gatti、M. Grasselli 和 V. Pata，《带记忆的守恒相场系统的指数吸引子》，Physica D: Nonlinear Phenomena 189 (2004), no. 1-2, 31–48。[23] ↑4M. Grasselli 和 V. Pata，《带记忆相场系统的鲁棒指数吸引子》，Journal of Evolution Equations 5 (2005), 465–483。[24] ↑4M. E. Gurtin 和 A. C. Pipkin，《具有有限波速的热传导一般理论》，Arch. Rational Mech. Anal. 31 (1968), no. 2, 113–126。MR[25] 1553521 ↑4J. K. Hale，《耗散系统的渐近行为》，Mathematical Surveys and Monographs，第25卷，American Mathematical Society，普罗维登斯，罗得岛州，1988年。MR[26] 941371 ↑4R. Haller-Dintelmann 和 J. Rehberg，《包含混合边界条件的散度型算子的极大抛物正则性》，J. Differential Equations 247 (2009), no. 5, 1354–1396。MR[27] , 112541414 ↑5 P. E. Kloeden、J. Real 和 C. Sun，《带记忆非自治方程的鲁棒指数吸引子》，Communications on Pure and Applied Analysis 10 (2011), no. 3, 885–915。[28] ↑4P. C. Kunstmann 和 L. Weis，《抛物方程的极大[29] 正则性、Fourier乘子定理与 L_p函数演算》，《演化方程的泛函分析方法》，2004年，第65–311页。MR2108959H^{∞}, 11↑5G. Li 和 Z. Yang，《具有时变记忆核的黏弹性波动模型的指数吸引子》，Journal of Dynamics and Differential Equations 35 (2023), 679–707。[30] ↑4G. W. Milton，《复合材料理论》，Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics，第6卷，Cambridge University Press，剑桥，2002年。MR[31] 1899805 ↑4A. Miranville 和 S. Zelik，《有界与无界区域中耗散偏微分方程的吸引子》，《微分方程手册：演化方程》第IV卷，2008年，第103–200页。MR2508165[32] ↑4J. W. Nunziato，《具有记忆材料中的热传导》，Quart. Appl. Math. 29 (1971), 187–204。MR[33] 295683 ↑4V. Pata 和 S. Zelik，《强阻尼波动方程的光滑吸引子》，Nonlinearity 19 (2006), no. 7, 1495–1506。MR[34] 2229785 ↑4I. Shomberg，《具有不同记忆核和动态边界条件的Coleman–Gurtin方程的弱指数吸引子》，Topological Methods in Nonlinear Analysis 55 (2020), no. 1, 281–315。[35] ↑4R. Temam，《力学与物理学中的无穷维动力系统》，第二版，Applied Mathematical Sciences，第68卷，Springer-Verlag，纽约，1997年。MR[36] 1441312 ↑4S. V. Zelik，《吸引子：过去与现在》，Uspekhi Mat. Nauk 78 (2023), no. 4(472), 53–198。MR[37]

(F. Di Plinio) 那不勒斯“费德里科二世”大学“R. Caccioppoli”数学与应用系，辛蒂娅街，Monte S.Angelo 80126，那不勒斯，意大利电子邮箱： francesco.diplinio@unina.it