arXiv:2603.05985v1 [math.RT] 6 Mar 2026

局部 theta 对应与伽罗瓦周期

CHONG ZHANG

摘要。我们研究伽罗瓦周期在偶正交群与辛群的局部 theta 对应下的行为。具体而言，我们比较它们的重数，并构造显式的传递映射。此外，我们还为这些周期建立了伴随关系和相对特征关系。

目录

1. 引言 1
2. 基变换加倍 6
3. 韦伊表示 14
4. 局部 theta 对应 21
5. 退化主系列 23
6. 重数 28
7. 局部周期的传递 33
参考文献 49

1. 引言

1.1. **概述**。 相对朗兰兹纲领的局部层面由 Sakellaridis 和 Venkatesh 系统性地开创 [SV17]，并由 Ben-Zvi、Sakellaridis 和 Venkatesh 进一步发展[BZSV]，，关注局部周期的性质。研究约化对偶对中某些成员之间周期关系的一种有力工具是局部 θ 对应；Gan 在 [Gan19，Gan25]中对此方法作了全面阐述。在各种周期中，伽罗瓦周期尤为重要。针对这一周期，Prasad [Pra15] 提出了一个具体猜想，将其重数与 L参数联系起来。Lu 在一系列关于低秩经典群的研究中探讨了 Prasad猜想（例如 [Lu20a、Lu20b]）。在这些进展的基础上，本文研究偶正交群与辛群之间的局部 θ 对应下伽罗瓦周期的行为。

1.2. 主要结果。设 F 为特征为 0 的非阿基米德局部域，E 为 F 的二次域扩张。用 Gal(E/F) 表示该扩张的伽罗瓦群，其非平凡元素记为 ι。取元素 $\tau \in E^\times$，使得 $\mathrm{tr}_{E/F}(\tau) = 0$，其中 $\mathrm{tr}_{E/F}$: E ! F 表示迹映射。设 ψ_F 为 F 的一个非平凡加性特征。定义 E 上的加性特征 ψ为 $\psi := \psi_F \circ \mathrm{tr}_{E/F}$，其 τ-扭曲定义为 $\psi_\tau(x) := \psi(\tau x)$，其中 $x \in E$。

设 G 是定义在 F 上的约化群。自同构 ι 因而自然地作用为 G(E) 上的一个对合，其不动点子群为 G(F)。对于 G(E) 的一个光滑表示 π，G(F)-不变线性形式的同态空间 $\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, \mathbb{C})$ 称为（局部）伽罗瓦周期空间。我们称 $\dim \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, \mathbb{C})$ 为 π 的重数。根据 Delorme [Del 10], 的一般定理，若 π 不可约，则其重数有限，但不一定是重数一。对于 $\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, \mathbb{C})$ 的伽罗瓦周期 α 和 α'，当 π 不可约时，可以定义相对特征 $\Phi_{\pi,\alpha,\alpha'}$（精确定义见第 7.6 节）。

设 V_F 是一个维数为 2m 的二次空间，W_F 是一个维数为 2n 的辛空间，二者均定义在 F 上。记 V 和 W 分别为 V_F 和 W_F 经基变换到 E 后得到的空间，并以 $O(V_F)$、O(V)、$Sp(W_F)$ 和 Sp(W) 表示相应的等距群。于是 O(V) 和 Sp(W) 构成一个约化对偶对。给定 Sp(W) 的一个不可约容许表示 π，记 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$ 为 π 到 O(V) 的（大）theta 提升；它是 O(V) 的一个有限长度光滑表示。

为了以更简洁的形式陈述我们的结果，我们聚焦于从 $\mathrm{Sp}(W)$ 到正交群(V) 的局部 theta 对应方向，并为简单起见假设 π 是超尖点的，且 $\Theta_{V,\ W,\ \psi_\tau}(\pi)$是首次出现。在此假设下，Kudla [Kud86]断言

$$\sigma := \Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$$

是不可约且超尖点的。我们还注意到，在此情形下，π 是酉的，且其逆步表示同构于其复共轭。

我们的第一个结果比较 π 与 σ 的重数。

定理 1.1（定理 6.1）。若 $m > n$，则 $\dim$ 同态空间$_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C}) = \dim$ 同态空间$_{O(V_F)}(\sigma, \mathbb{C})$.

第二个结果在伽罗瓦周期的空间之间建立一个显式转移映射。我们定义基变换倍增 ζ 积分，它诱导一个线性映射

$$T_{W_F} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{O(V_F)}(\sigma, \mathbb{C}).$$

定理1.2 (定理 7.9)。若 $m > n$，则映射 T_{W_F} 是一个同构。

反过来，我们可以定义一个方向相反的线性映射:

$$T_{V_F} : \mathrm{Hom}_{O(V_F)}(\sigma, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C}).$$

令 $\langle\text{-},\text{-}\rangle_{X_{W_F}}$ 和 $\langle\text{-},\text{-}\rangle_{X_{V_F}}$ 分别为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi,\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}(\sigma,\mathbb{C})$上的内积（定义见第 7.5节）。我们的第三个结果表明，T^{W_F} 和 T^{V_F} 互为伴随。

定理 1.3 (定理 7.11)。 对于任意 $\alpha\in$同态空间$_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi,\ \mathbb{C})$ 以及 $\beta\in$同态空间$_{\mathrm{O}(V_F)}(\sigma,\ \mathbb{C})$，我们有

$$\langle T_{W_F}(\alpha),\beta\rangle_{X_{V_F}}=\langle T_{V_F}(\beta),\alpha\rangle_{X_{W_F}}.$$

我们的最终结果是一个相对特征标恒等式，它将周期及其转移联系起来。

定理 *1.4*（定理 *7.17*）。对于所有 $\alpha\in$同态空间$_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi,\mathbb{C})$ 和 $\beta\in$同态空间$_{\mathrm{O}(V_F)}(\sigma,\mathbb{C})$，以及彼此对应的 $Sp(W_F)\backslash Sp(W)$ 上的测试函数 f 和 $O(V_F)\backslash O(V)$ 上的测试函数 f'，其中对应关系按定义 *7.4* 的意义理解，我们有

$$\Phi_{\pi,\alpha,T_{V_F}(\beta)}(f)=\Phi_{\sigma,\beta,T_{W_F}(\alpha)}(f').$$

1.3. **方法**。 证明上述结果的主要工具是 Piatetski-Shapiro 和 Rallis 的经典倍增法的一种变体 [PSR87], ，我们称之为基变换倍增法。Lu 已成功地将这种方法应用于研究伽罗瓦周期的重数，但该方法存在一定的局限性。本文进一步发展了这一方法，并克服了这些局限性，下面将对此进行说明。

1.3.1. 以正交群的情形为例。在基变换倍增法中，我们可以通过限制标量将V 视为F 上的向量空间；将此F-空间记为$\mathbf{V}$。设q_F 为V_F 上的二次型，q 为V上的二次型。则$\mathbf{q}:=\mathrm{tr}_{E/F}\circ q$定义了$\mathbf{V}$上的一个$F$-二次型。由于作为$F$-向量空间有$\mathbf{V}\ =V_F\oplus\tau V_F$，故$\mathbf{V}$ 是V_F 的“倍增空间”。这正是 Lu 所使用的基变换加倍空间。

在经典倍增法中，V_F 的倍增空间为$V_F^{\square}\ =V_F\oplus V_F^-$，其中$V_F^-$表示配备了型 $-q_F$的空间V_F。一个关键特征是$V^{\square}$ 是分裂的，并具有拉格朗日子空间$V_F^{\Delta}=\{(x,x)\mid x\ \in V_F\}$，它在应用中起着至关重要的作用。由此得到自然嵌入

$$\mathrm{O}(V_F)\hookrightarrow\mathrm{O}(V_F)\times\mathrm{O}(V_F)\hookrightarrow\mathrm{O}(V_F^{\square}).$$

然而，$\mathbf{V}$ 通常并非分裂的。因此，为确保$\mathbf{V}$ 分裂，Lu 不得不假设V 本身是分裂的。我们的关键思路是在应用倍增构造之前，先用 τ 扭曲V 上的二次型。具体而言，令V_τ 为底层空间是V 、二次型为$q_\tau:=\tau q$的二次空间。令$\mathbf{V}_\tau$ 为通过限制标量得到的相应F-空间，并赋予二次型$\mathbf{q}_\tau:=\mathrm{tr}_{E/F}\circ q_\tau$。容易验证$\mathbf{V}_\tau$ 是分裂的，且包含V_F 作为一个拉格朗日子空间。将正交群 $\mathrm{O}(V)$ 自然地与 $\mathrm{O}(V_\tau)$等同后，我们得到嵌入

$$\mathrm{O}(V_F)\hookrightarrow\mathrm{O}(V)\hookrightarrow\mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau).$$

我们指出，τ-扭曲有双重作用：它确保倍增空间是分裂的，而且与局部 θ对应中使用的数据相容——具体而言，采用提升Θ_{V,W,ψ_τ}，而非$\Theta_{V,W,\psi}$。

1.3.2. 借助基变换倍增法，我们应用基变换跷跷板恒等式，并分析退化主系列的结构，以比较 π 与 σ的重数。除了这一重数比较（Lu 也曾研究过）之外，我们的工作还在伽罗瓦周期的显式转移及其相对特征关系方面取得了新成果。我们的方法部分受到 Gan 演讲中相关思想的启发；Gan 在演讲中探讨了如何通过魏尔表示转移 Harish-Chandra特征。此外，我们也受到 Gan 和 Wan [GW21] 关于球簇 $\mathrm{SO}_{n-1}\backslash\mathrm{SO}_n$ 和 Whittaker 簇 $(N,\psi)\backslash\mathrm{SL}_2$ 上的相对特征标恒等式的研究启发。实现这些成果的一项关键技术工具是基变换倍增 ζ 积分，它是经典倍增 ζ 积分的一种变体。本文中，我们推导并证明了它的若干基本性质。

1.4. **几点说明**。最后，我们指出本文未涉及的一些局限与研究方向。

1.4.1. 我们的结果针对具有特殊性质的表示建立，例如 tempered、平方可积或超尖表示。将这些结果推广到更一般的表示，是未来工作中自然且值得追求的方向。

1.4.2. 本文不讨论奇正交群与元辛群之间的局部 theta 对应。对于这一情形，Lu 已得到重数之间的一种关系 [Lu20c]。我们预期，本文的结果在该情形下也有直接的对应结论，证明只需稍作调整即可沿用。

1.4.3. 经典倍增 ζ 积分属于 Rankin–Selberg积分这一类，可用于表示经典群的标准 L-函数。其基本解析性质，包括绝对收敛、亚纯延拓、函数方程及非分歧计算，已由 Piatetski-Shapiro 和 Rallis [PSR87], Lapid 和 Rallis [LR05],以及 Yamana [Yam14]建立。

相比之下，本文研究的基变换倍增 ζ 积分引入了一项关键的新特征：与经典情形不同，相关的线性泛函不一定满足重数一。这一根本差异为基变换倍增 ζ 积分建立一套平行且完备的解析理论带来了重大挑战。因此，本文尚未对我们的积分证明上述解析性质（收敛性、亚纯延拓等）。

尽管如此，我们相信基变换倍增 ζ 积分本身具有研究价值，而且很可能与某些L函数密切相关，类似于其经典对应物。

1.4.4. 经典的全局倍增 ζ 积分结合 Siegel–Weil 公式，为研究全局 theta 提升的非消失性提供了有力工具。对于一些小秩的特殊对偶对，Lu [Lu21] 证明了全局 theta 提升下自守伽罗瓦周期之间的关系。

本文发展的基变换倍增法理论很容易推广到数域情形。这一推广使我们能够定义全局基变换倍增 ζ 积分，其展开自然涉及全局伽罗瓦周期。借助 Siegel–Weil 公式，这一框架可用于建立关于全局伽罗瓦周期非消失性的关系，不仅适用于一般的偶正交-辛对偶对，也适用于奇正交-元辛对偶对。

1.5. **本文结构**。令G 表示 $\mathrm{Sp}(W)$ 或 $\mathrm{O}(V)$，并令$\mathbf{G}$ 分别表示 $\mathrm{Sp}(\mathbf{W})$ 或 $\mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau)$。本文组织如下。

第 2节系统地论述基变换倍增构造。我们详细分析 G 在旗簇 $\mathbf{P}\backslash\mathbf{G}$上的作用轨道及其稳定子，并为 Lu 的著作中零散出现的一些结果补充证明和细节。

第3节回顾韦伊表示和基变换跻跻板对偶对。我们特别关注分裂的选取，以确保它们彼此兼容，并讨论韦伊表示的具体模型及其相互转换；这些内容对后续论证至关重要。

第 4 节回顾局部 theta 对应理论的基础结果，并陈述基变换跻跻板恒等式。

第 5 节研究相关退化主系列的结构。我们分别考察它作为 $\mathbf{G}$-模时的结构——此时它与平凡表示的大 theta 提升相关——以及作为 G-模时的结构，此时它与某些诱导表示相关。

第 6 节利用基变换跻跻板恒等式以及前几节确立的退化主系列结构，比较局部 θ 对应所关联的表示的重数。

第7 节介绍基变换倍增 ζ 积分，并证明其对平方可积表示与温和表示的绝对收敛。随后我们定义测试函数，构造伽罗瓦周期的显式迁移算子，并最终建立由迁移算子相关联的伽罗瓦周期之间的伴随关系以及相应的相对特征关系。

1.6. **记号与约定**。 在全文中，F 表示一个特征为0、剩余特征为p的非阿基米德局部域，而E 是F的二次域扩张。我们将$\mathrm{N}_{E/F}(\text{-})$ 记为相对于$F \subset E$的限制标量。设 $\mathcal{O}_F$ 为F的赋值环。

设 $\vdash|_F$ 和 $\vdash|_E$ 分别是 F 和 E 上的标准化绝对值，使得 $|x|_E = |\mathrm{N}_{E/F}(x)|_F$ 对于 $x \in E$ 成立，其中 $\mathrm{N}_{E/F} : E \to F$ 是范映射。记 ι 为 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 的非平凡自同构。固定一个非零元素 $\tau \in E$，使得 $\mathrm{tr}_{E/F}(\tau) = 0$。

固定 F 的一个非平凡加性特征 ψ_F。定义 E 上的加性特征 ψ 为 $\psi := \psi_F \circ \mathrm{tr}_{E/F}$，并定义其 τ-扭曲为 $\psi_\tau(x) := \psi(\tau x)$，其中 $x \in E$。

设 G 是 F 上的一个 p-进约化群。本文考虑的所有表示均为光滑复表示。记 $\mathrm{Rep}(G)$ 为 G 的光滑表示范畴，$\mathrm{Irr}(G)$ 为不可约光滑表示的等价类集合，并用 $\mathbf{1}$ 或 $\mathbb{C}$ 表示平凡表示。对于 $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$，记 $\pi^\vee$ 为其对偶表示。对于子群 $H \subset G$，若表示 $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$ 满足 $\mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C}) \neq 0$，则称其为 H-区分的 。

令 $P = MN$ 为 G 的一个抛物子群，其幺幂根基为 N，莱维子群为M。记 δ_P 为 P 的模特征，记 Ind_P^G 为从 $\mathrm{Rep}(M)$ 到 $\mathrm{Rep}(G)$ 的标准化诱导函子，并记 R_P 为从 $\mathrm{Rep}(G)$ 到 $\mathrm{Rep}(M)$ 的标准化雅克特函子。与 P 相对的抛物子群记作$\overline{P}$。

对于局部仿紧空间X，令$C_c^\infty(X)$ 表示X上取值于 $\mathbb{C}$、局部常值且紧支撑的函数空间。

1.7. **致谢**。 本研究始于2018年参加浙江大学举办的“自守形式、几何与表示论”研讨会期间聆听 Wee Teck Gan 的报告，之后又受到他关于 Harish-Chandra特征和韦伊表示的系列报告（在线资源）的启发。在此，我感谢 Wee Teck Gan 慷慨地与我分享了他就这一主题写给 [Gan18a、 Gan18b] Atsushi Ichino 和 Yiannis Sakellaridis 的信。我也受益于 Hengfei Lu 关于 Prasad猜想的一系列研究成果。本研究部分获得国家自然科学基金委员会项目12022106和11971223的资助。

2. 基变换倍增

2.1. **基变换加倍空间**。 设 $(V_F, \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{V_F})$ 为一个二次空间，$(W_F, \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{W_F})$ 为一个辛空间，二者均在 F 上。令

$$V = V_F \otimes_F E \quad \text{and} \quad W = W_F \otimes_F E,$$

通过纯量扩张配备 E-双线性形式；我们将这些形式分别记为 $\langle \text{-}, \text{-} \rangle_V$ 与 $\langle \text{-}, \text{-} \rangle_W$。由此得到自然嵌入

$$\mathrm{O}(V_F) \hookrightarrow \mathrm{O}(V) \quad \text{and} \quad \mathrm{Sp}(W_F) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(W).$$

固定一个完全极化

$$W_F = X_F \oplus Y_F$$

ofW_F，并令

$$X = X_F \otimes_F E \quad \text{and} \quad Y = Y_F \otimes_F E.$$

注 2.1. 在本节中，V_F 的维数可以是任意的，既可以是偶数，也可以是奇数。

对于辛空间W_F，其基变换加倍空间定义为

$$\mathbf{W} := \mathrm{R}_{E/F}(W).$$

具体而言，$\mathbf{W}$ 是视为<F>-向量空间的W，并赋予辛形式

$$\langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbf{W}} = \mathrm{tr}_{E/F} \circ \langle \text{-}, \text{-} \rangle_W.$$

这给出了一个自然嵌入

$$\mathrm{Sp}(W) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(\mathbf{W}).$$

对于二次空间 V_F，可以完全类似地定义其基变换加倍空间 $(\mathbf{V}, \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbf{V}})$。然而，就我们的目的而言，我们需要一个扭曲变体。

令 $(V_\tau, \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{V_\tau})$ 为定义在 E 上的二次空间，它将 $V_\tau = V$ 视为一个 E-向量空间，并赋予其双线性形式

$$\langle \text{-}, \text{-} \rangle_{V_\tau} = \tau \langle \text{-}, \text{-} \rangle_V.$$

我们有自然同一

$$\mathrm{O}(V_\tau) = \mathrm{O}(V),$$

因此得到自然嵌入

$$\mathrm{O}(V_F) \hookrightarrow \mathrm{O}(V) = \mathrm{O}(V_\tau).$$

The τ-扭曲基变换加倍空间 定义为

$$\mathbf{V}_\tau := \mathrm{R}_{E/F}(V_\tau),$$

配备了F-二次型

$$\langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbf{V}_\tau} = \mathrm{tr}_{E/F} \circ \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{V_\tau}.$$

这给出了一个自然嵌入

$$\mathrm{O}(V) = \mathrm{O}(V_\tau) \hookrightarrow \mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau).$$

为简洁起见，我们将$\mathbf{W}$ 和$\mathbf{V}_\tau$ 统称为加倍空间。

引理 2.2. 二次空间$\mathbf{V}_\tau$ 是分裂的。

证明。 根据构造，V_F 是$\mathbf{V}_\tau$ 的各向同性子空间，且满足 $\dim V_F = \frac{1}{2}\dim \mathbf{V}_\tau$。因此$\mathbf{V}_\tau$ 是分裂的。 □

注 2.3. 一般而言，非扭曲加倍空间$\mathbf{V}$ 并非分裂的。这就是我们采用扭曲变体$\mathbf{V}_\tau$的原因。

2.2. **双陪集的不变量**。在本小节中，我们设

$$G = \mathrm{Sp}(W) \quad \text{or} \quad G = \mathrm{O}(V) = \mathrm{O}(V_\tau),$$

相应地

$$\mathbf{G} = \mathrm{Sp}(\mathbf{W}) \quad \text{or} \quad \mathbf{G} = \mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau).$$

为简洁起见，我们记

$$q = \langle \text{-}, \text{-} \rangle_W \text{ or } \langle \text{-}, \text{-} \rangle_V, \quad \mathbf{q} = \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbf{W}} \text{ or } \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbf{V}_\tau}.$$

设 $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{W}$ 中的一个固定拉格朗日子空间（分别地，$\mathbf{V}_\tau$），并令 $\mathbf{P} = \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ 为稳定 $\mathbf{L}$ 的 Siegel抛物子群。我们旨在理解双陪集空间

$$\mathbf{P}\backslash\mathbf{G}/G.$$

记

$$\mathcal{X} := \mathbf{P}\backslash\mathbf{G},$$

它参数化了 $\mathbf{W}$ （分别地，$\mathbf{V}_\tau$）中的拉格朗日子空间。我们如下固定拉格朗日子空间 $\mathbf{L}$ 。

- 对于 $\mathbf{W}$，令

$$\mathbf{L} = X_F \oplus \tau Y_F. \tag{2.1}$$

- 对于 $\mathbf{V}_\tau$，令

$$\mathbf{L} = \tau V_F. \tag{2.2}$$

对于 $L \in \mathcal{X}$，定义

$$L_{\mathrm{an}} := \{x \in L \mid q(x,y) = 0, \forall\, y \in L\} \quad \text{and} \quad \overline{L} := L/L_{\mathrm{an}}. \tag{2.3}$$

若 G = 正交群(V)，由于 $\mathbf{q}$ 在 L上恒为零，q 在 L 上的限制取值于 F。因此，q 诱导出一个二次型

$$q_{\overline{L}} : \overline{L} \times \overline{L} \longrightarrow F.$$

命题 2.4. 设 $L \in \mathcal{X}$。

(1) 若 $G = \mathrm{Sp}(W)$，则$\dim(\bar{L})$ 是 $\mathcal{X}$ 中 L 的 G-轨道的唯一不变量。(2) 若 $G =$ 正交群(V)，则二次空间(L,q_L) 的同构类是 $\mathcal{X}$ 中 L 的 G-轨道的唯一不变量。

命题 2.4 是 [PSR87 引理 2 的一个变体。1] 并推广了 [Lu20b 引理 4.3。3]。

例 2.5。 (1) 若 $L = \mathbf{L}$，其中 $\mathbf{L}$ 由 (2.1) 对 $\mathbf{W}$ 给出，并由 (2.2) 对 $\mathbf{V}_\tau$ 给出，则 $L_{\mathrm{an}} = 0$。 (2) 若 $G = \mathrm{Sp}(W)$ 且 $L = X_F \oplus \tau X_F$，则 $L_{\mathrm{an}} = L$。

在本小节余下部分中，我们假设 $G =$ 正交群(V)，并在此情形下证明命题 2.4。对于 $G = \mathrm{Sp}(W)$ 的证明思路相同，但更简单。

引理 2.6。 对于 $L \in \mathcal{X}$，我们有

$$L_{\mathrm{an}} = L \cap \tau L,$$

等价地，

$$L_{\mathrm{an}} = \{x \in V \mid q(x,y) = 0, \forall\, y \in L\}.$$

特别地，L_{an} 是 V 的一个各向同性 E-子空间。

证明。我们首先证明 $\mathrm{L} \cap \tau\mathrm{L} \subset \mathrm{L_{an}}$。若 $\mathrm{x} \in \mathrm{L} \cap \tau\mathrm{L}$，则对所有 $\mathrm{y} \in \mathrm{L}$，都有 $\mathrm{q(x,\,y)} \in \mathrm{F}$。设 $\mathrm{x} = \tau\mathrm{x}_0$，其中 $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{L}$。则对所有 $\mathrm{y} \in \mathrm{L}$，都有 $\mathrm{q(x,\,y)} = \tau\mathrm{q(x}_0\mathrm{,y)} \in \tau\mathrm{F}$。因此 $\mathrm{q(x,\,y)} \in \mathrm{F} \cap \tau\mathrm{F} = \{0\}$，故 $\mathrm{x} \in \mathrm{L_{an}}$。

反过来，我们证明 $L_{\mathrm{an}} \subset L \cap \tau L$。由于 L 是一个拉格朗日子空间，若 $x \notin L$，则存在 $y \in L$，使得 $\mathbf{q}(x,y) \neq 0$，从而 $q(x,y) \neq 0$。这表明 L_{an} 与.....重合

$$\{x \in V \mid q(x,y) = 0, \forall\, y \in L\}.$$

由此描述显然可知，L_{an} 是 V 的一个 E-子空间。显然，$L \cap \tau L$ 是 V 中包含于 L 的最大 E-子空间。因此，$L_{\mathrm{an}} \subset L \cap \tau L$。□

对$\mathbf{V}_\tau$的任意F-子空间U，令$E \cdot U$ 表示由U张成的V 的E-子空间；即，

$$E \cdot U = U + \tau U.$$

对每个$L \in \mathcal{X}$，我们固定一个满足下列条件的F-子空间$L_{\mathrm{ra}} \subset L$

$$L = L_{\mathrm{an}} \oplus L_{\mathrm{ra}}. \tag{2.4}$$

下标“ra”表示“F-有理”。

引理 2.7. 设 $L \in \mathcal{X}$。则下列结论成立。

(1) 作为 F 上的二次空间，有 $(L, q_L) \cong (L_{\mathrm{ra}}, q|_{L_{\mathrm{ra}}})$。

(2) 子空间 $E\cdot L_{\mathrm{ra}}$ 是 V 的一个二次 E-子空间，并且存在一个同构 $E\cdot L_{\mathrm{ra}}\cong \overline{E}$ 上二次空间的 $L\otimes_F E$。(3) </style}子空间 L是 V 中正交补 $(E\cdot L_{\mathrm{ra}})^{\perp}$ 的拉格朗日子空间。

证明。 (1) 根据 L 和 L_{ra} 的定义，第一个断言显然成立。

(2) 由引理 2.6，显然有

$$E\cdot L = L_{\mathrm{an}}\oplus E\cdot L_{\mathrm{ra}} \quad \text{and} \quad E\cdot L_{\mathrm{ra}}\cong L_{\mathrm{ra}}\otimes_F E.$$

于是，第二个断言由第一个断言推出。

(3) 设 $k = \dim_E L_{\mathrm{an}}$。由短正合列

$$0\longrightarrow L_{\mathrm{an}}\longrightarrow L\oplus \tau L \xrightarrow{(x,y)\mapsto x-y} E\cdot L\longrightarrow 0,$$

我们看到

$$\dim_E(E\cdot L) = \dim_E V - k,$$

and

$$\dim_E(E\cdot L_{\mathrm{ra}}) = \dim_E V - 2k.$$

由于 L_{an} 是各向同性的，且 $\dim_E L_{\mathrm{an}} = k = \frac{1}{2}\dim_E(E\cdot L_{\mathrm{ra}})^{\perp}$，子空间 L_{an} 是$(E\cdot L_{\mathrm{ra}})^{\perp}$ 的拉格朗日子空间。□

命题 2.4 的证明。 设 $L_1, L_2\in\mathcal{X}$。

若 $gL_1 = L_2$，其中某个 $g\in G$ 满足该式，则显然 $gL1,_{\mathrm{an}} = L2,_{\mathrm{an}}$。因此，$(L_1, q^{L_1})\simeq(L_2, q^{L_2})$。

假设$(L_1,\overline{q}^{L_1})\simeq(L_2,\overline{q}^{L_2})$。–由引理2.7，二次空间$L1,_{\mathrm{ra}}$和$L2,_{\mathrm{ra}}$在$F$上同构。取一个$F$-等距变换 $g_{\mathrm{ra}}: L1,_{\mathrm{ra}}\to L2,_{\mathrm{ra}}$，并将其E-线性延拓为一个$E$-等距变换

$$g_{\mathrm{ra}}: E\cdot L_{1,\mathrm{ra}}\longrightarrow E\cdot L_{2,\mathrm{ra}}.$$

引理 2.7 还进一步说明存在一个 E-等距变换

$$g_{\mathrm{an}}: (E\cdot L_{1,\mathrm{ra}})^{\perp}\longrightarrow (E\cdot L_{2,\mathrm{ra}})^{\perp}$$

使得 $g_{\mathrm{an}}L1,_{\mathrm{an}} = L2,_{\mathrm{an}}$。设 $g = g_{\mathrm{an}}\oplus g_{\mathrm{ra}}$。则 $g\in G$ 且 $gL_1 = L_2$。证明至此完成。□

2.3. **开轨道及其稳定子**。 下面的刻画是标准的 d.

引理 2.8。 对于 $L\in\mathcal{X}$，L 的 G-轨道在 $\mathcal{X}$ 中是开集，当且仅当 $L_{\mathrm{an}} = \{0\}$。

在本小节中，我们始终假设 $L_{\mathrm{an}} = \{0\}$ 并分析稳定子 $\mathrm{Stab}_G(L)$。这类轨道称为 主轨道在 [PSR87]。

当 $L = \mathbf{L}$ 如（2.1）和（2.2）时，我们有 $L_{\mathrm{an}} = \{0\}$ 且

$$\mathrm{Stab}_G(\mathbf{L}) = \mathbf{P}\cap G.$$

如果 $G = \mathrm{Sp}(W)$，命题 2.4 表明 $\mathbf{L}$ 的 G-轨道是满足 $L_{\mathrm{an}} = \{0\}$ 的唯一轨道。

对于 $G = \mathrm{Sp}(W)$，我们固定相似群中的一个元素

$$c_\tau \in \mathrm{GSp}(W) \tag{2.5}$$

该元素在 X 上的作用是乘以标量 τ，而在 Y 上的作用是恒等作用。

下一个引理是显然的。

引理 *2.9*。（*1*）如果 $G = Sp(W)$，则 $Stab(L) = Sp(W_F)^\tau$，其中 $Sp(W_F)^\tau := c_\tau Sp(W_F) c_\tau^{-1}$。（*2*）如果 $G = O(V)$，则 $Stab(L) = O(V_F)$。

在本小节的其余部分中，我们假设 $G = \mathrm{O}(V)$。

Lemma 2.10. 若 $L_{\mathrm{an}} = \{0\}$，则 L 是一个二次 F-空间，并且作为二次空间在 E，

$$L \otimes_F E \cong V.$$

在此情形下，$\mathrm{Stab}_G(L) = \mathrm{O}(L)$。

证明。条件 $\mathrm{L_{an}} = \{0\}$ 蕴含 $\mathrm{V} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{L}$，从而由引理 2.7 得到同构 $\mathrm{L} \otimes_F \mathrm{E} \cong \mathrm{V}$。自然包含 $\mathrm{O(L)} \hookrightarrow \mathrm{O(V)} = \mathrm{G}$ 表明 $\mathrm{O(L)} \subset \mathrm{Stab}_G\mathrm{(L)}$。反之，任一 $\mathrm{g} \in \mathrm{Stab}_G\mathrm{(L)}$ 都是 V 的等距变换且保持 L。因此 $\mathrm{g} \in \mathrm{O(L)}$。故 $\mathrm{Stab}_G\mathrm{(L)} = \mathrm{O(L)}$。□

设 $\mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V))$ 为 $\mathrm{O}(V)$ 的第一伽罗瓦上同调集，其 F-有理结构由 $\mathrm{O}(V_F)$ 诱导，且 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 在其上自然作用。具体地，

$$\mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V)) = \{g \in \mathrm{O}(V) \mid g\iota(g) = 1\} / \sim,$$

其中 $g \sim g'$ 当且仅当存在 $h \in \mathrm{O}(V)$ 使得 $g' = hg\iota(h)^{-1}$。该集合对二次空间 V'_F 在 F 上的同构类进行分类，其基变换 $V' = V'_F \otimes_F E$ 同构于 V。

引理 2.11。具有 $L_{\mathrm{an}} = \{0\}$ 的 L 的 G-轨道与 $\mathrm{H}^1(E/F, \text{正交群}(V))$ 一一对应。

证明。显式参数化如下。设一个上同调类由上闭链 $g \in \text{正交群}(V)$ 表示，且 $g\iota(g) = 1$。令

$$L^g := \{v \in V \mid g \cdot \iota(v) = v\}.$$

容易验证，$L^g \in \mathcal{X}$ 且 $L^g_{\mathrm{an}} = \{0\}$。若对某个 $h \in \mathrm{O}(V)$，有 $g' = hg\iota(h)^{-1}$，则 $L^{g'} = hL^g$。因此，对应关系 $g \mapsto L^g$ 诱导出一个良定义映射，从 $\mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V))$ 到这类拉格朗日子空间的 G-轨道集合。

为证明满射性，任取$\mathrm{L} \in \mathcal{X}$ 满足 $L_{\mathrm{an}} = \{0\}$。根据引理2.7，存在一个E-等距变换$\phi : L \otimes_F E \to V$。定义$g = \phi \circ \iota(\phi)^{-1} \in \mathrm{O}(V)$。于是$g\iota(g) = 1$，且对应的拉格朗日子空间$L^g$ 等于L。单射性的验证是例行的。因此，我们得到所需的双射。□

2.4. **可忽略轨道及其稳定子**。 在本小节中，我们始终假设 $L_{\mathrm{an}} \neq \{0\}$。我们的目标是证明 L 是可忽略的 （按 [PSR87] 的术语）；也就是说，$\mathrm{Stab}_G(L)$包含G 的某个真抛物子群的幺幂根基 N 作为正规子群。

记

$$R := \mathrm{Stab}_G(L) \quad \text{and} \quad P := \mathrm{Stab}_G(L_{\mathrm{an}}).$$

引理2.7 表明 P 是 G 的真抛物子群。设 N 为 P 的幺幂根基。

引理 2.12. 若 $L_{\mathrm{an}} \neq \{0\}$，则 N 是 R 的正规子群。

证明。我们对 $G = \mathrm{O}(V)$ 证明该引理；$G = \mathrm{Sp}(W)$ 的情形类似，故略去。

显然 $R \subset P$。因此只需证明 $N \subset R$。幺幂根基 N 可明确写为

$$N = \left\{ g \in G \mid g|_{L_{\mathrm{an}}} = \mathrm{id},\ g|_{L_{\mathrm{an}}^{\perp}/L_{\mathrm{an}}} = \mathrm{id} \right\}.$$

取 $\mathrm{g} \in \mathrm{N}$。由于 $\mathrm{L} \in \mathcal{X}$ 是一个拉格朗日子空间，要证明 $\mathrm{g} \in \mathrm{R}$，只需验证 $\mathrm{q(gL, L)} = 0$，即 $\mathrm{q(gL, L)} \subset \mathrm{F}$。由引理 2.7，$\mathrm{L}_{\mathrm{an}}^{\perp} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{L}$，且 $\mathrm{L/L_{an}} \subset \mathrm{L}_{\mathrm{an}}^{\perp}/\mathrm{L_{an}}$。由于 g 在 $\mathrm{L}_{\mathrm{an}}^{\perp}/\mathrm{L_{an}}$ 上作用平凡，它在子空间 $\mathrm{L/L_{an}}$ 上也作用平凡。因此对任意 $\mathrm{x} \in \mathrm{L}$，都可以写成 $\mathrm{gx} = \mathrm{x} + \mathrm{a}$，其中 $\mathrm{a} \in \mathrm{L_{an}}$。对任意 $\mathrm{x, y} \in \mathrm{L}$，由 $\mathrm{a} \in \mathrm{L_{an}}$ 可知 $\mathrm{q(a, y)} = 0$。因此

$$q(gx, y) = q(x + a, y) = q(x, y) \in F.$$

这就确立了 $N \subset R$。 □

2.5. **显式轨道与稳定子**。 令r 为G 的分裂秩（等价地，是W 或V的维特指标）。对于 $0 \leq k \leq r$，令

$$\mathcal{X}_k := \{ L \in \mathcal{X} \mid \dim_E L_{\mathrm{an}} = k \}. \tag{2.6}$$

每个 $\mathcal{X}_k$ 都是G-稳定的，而 $\mathcal{X}$ 可分解为互不相交的G-轨道

$$\mathcal{X} = \bigsqcup_{k=0}^{r} \mathcal{X}_k. \tag{2.7}$$

2.5.1. 辛情形。 假设$G = \mathrm{Sp}(W)$ 且 $\dim(W) = 2n$。由命题2.4可知，每个$\mathcal{X}_k$ 都是一个G-轨道。现在我们构造一个显式代表元$L_k \in \mathcal{X}_k$，并确定其稳定子$R = \mathrm{Stab}_G(L_k)$。

令

$$X_F = Fe_1 \oplus \cdots \oplus Fe_n, \quad Y_F = Fe_1' \oplus \cdots \oplus Fe_n',$$

其中 $\{e'_1、\ldots、e'_n\}$ 是在辛形式 q 下与 $\{e_1,\ldots、e_n\}$ 对偶的基。定义以下子空间：

$$\begin{aligned} X_{F,k} &:= Fe_1 \oplus \cdots \oplus Fe_k, \quad X_k := X_{F,k} \otimes_F E, \\ X'_{F,n-k} &:= Fe_{k+1} \oplus \cdots \oplus Fe_n, \quad Y'_{F,n-k} := Fe'_{k+1} \oplus \cdots \oplus Fe'_n, \\ W_{2n-2k,F} &:= X'_{F,n-k} \oplus Y'_{F,n-k}, \quad W_{2n-2k} := W_{F,2n-2k} \otimes_F E. \end{aligned}$$

现令

$$L_k := X_k \oplus X'_{F,n-k} \oplus \tau Y'_{F,n-k}. \tag{2.8}$$

直接验证表明$L_k \in \mathcal{X}$与$L_{k,\mathrm{an}} = X_k$，因此确实$L_k \in \mathcal{X}_k$。就上述分解而言，抛物子群$P = \mathrm{Stab}_G(L_{k,\mathrm{an}})$ 为

$$P = (\mathrm{GL}(X_k) \times \mathrm{Sp}(W_{2n-2k})) \ltimes N.$$

引理 2.13. 对于 L_k 如（2.8）中所述，其稳定子为

$$R = (\mathrm{GL}(X_k) \times \mathrm{Sp}(W_{2n-2k,F})^{\tau}) \ltimes N.$$

证明. 该证明与下文引理 2.14 的证明相同，故略去。 □

2.5.2. 正交情形。现设 $G = O(V)$，且 $\dim V = m$。设 r 为 V 的维特指标。选取极大各向同性 E- 子空间 $X_r \subset V$，其基为 $e_1,\ldots, e_r$，并设 $e'_1, \ldots, e'_r$ 为关于二次型 q 的对偶基。令 $Y_r = Ee'_1 \oplus \cdots \oplus Ee'_r$。存在 $L \in \mathcal{X}$使得 $X_r \subset L$。显然 $L_{\mathrm{an}} = X_r$ 且 $E \cdot L_{\mathrm{ra}}$ 是各向异性的。对 $0 \le k \le r$，定义

$$X_k := Ee_1 \oplus \cdots \oplus Ee_k$$

and

$$V_{m-2k,F} := (Fe_{k+1} \oplus \cdots \oplus Fe_r) \bigoplus L_{\mathrm{ra}} \bigoplus (Fe'_{k+1} \oplus \cdots \oplus Fe'_r).$$

现在令

$$L_k := X_k \oplus \tau V_{m-2k,F}. \tag{2.9}$$

直接计算可得

$$L_{k,\mathrm{an}} = X_k, \quad L_{k,\mathrm{ra}} = \tau V_{m-2k,F},$$

因此 $L_k \in \mathcal{X}_k$。抛物子群 $P = \mathrm{Stab}_G(L_{k,\mathrm{an}})$ 为

$$P = (\mathrm{GL}(X_k) \times \mathrm{O}(V_{m-2k})) \ltimes N,$$

其中$V_{m-2k} := V_{m-2k,F} \otimes_F E$。

引理 2.14。 对于 L_k 如（2.9）所示，其稳定子为

$$R = (\mathrm{GL}(X_k) \times \mathrm{O}(V_{m-2k,F})) \ltimes N.$$

证明。 由于 $R \subset P = MN$，其中 $M =$ 一般线性群$(X_k) \times$正交群(V_{m-2k})，且我们已经证明 $N \subset R$，因此

$$R = (R \cap M) \ltimes N.$$

取 $m = (m_{\mathrm{an}}, m_{\mathrm{ra}}) \in M$，其中 $m_{\mathrm{an}} \in$ 一般线性群(X_k) 且 $m_{\mathrm{ra}} \in$ 正交群(V_{m-2k})。于是

$$mL_k = m_{\mathrm{an}} X_k \oplus m_{\mathrm{ra}} L_{k,\mathrm{ra}} = X_k \oplus m_{\mathrm{ra}} \cdot \tau V_{m-2k,F}.$$

因此 $mL_k = L_k$ 当且仅当 $m_{\mathrm{ra}} V_{m-2k,F} = V_{m-2k,F}$，这等价于 $m_{\mathrm{ra}} \in$ 正交群$(V_{m-2k,F})$。证明完毕。 □

下面的引理是引理 2.11 的推广。

引理 2.15。 对每个 k，$\mathcal{X}_k$ 中的 G-轨道由 $\mathrm{H}^1(E/F,$ 正交群$(V_{m-2k}))$参数化，其中正交群(V_{m-2k})上的 F- 结构继承自正交群 $(V_{m-2k,F})$。

3. 威尔表示

3.1. 对偶对。 从现在起，我们固定

$$\dim V_F = 2m, \quad \dim W_F = 2n.$$

设 $\mathbb{W} := V \otimes_E W$，并赋予其辛形式

$$\langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbb{W}} = \langle \text{-}, \text{-} \rangle_V \otimes \langle \text{-}, \text{-} \rangle_W.$$

那么 (正交群(V),$\mathrm{Sp}(W)$) 是 $\mathrm{Sp}(\mathbb{W})$中的一个约化对偶对。令 $\mathbb{W}^\square := \mathrm{R}_{E/F}(\mathbb{W})$，并将其辛形式定义为

$$\langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbb{W}^\square} := \mathrm{tr}_{E/F} \circ \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbb{W}}.$$

这给出了一个自然嵌入

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(\mathbb{W}^\square).$$

空间 $\mathbb{W}^\square$ 可以通过两种方式作典范识别:

$$\mathbb{W}^\square = \mathbf{V} \otimes_F W_F = V_F \otimes_F \mathbf{W},$$

在这些识别下，辛形式变为

$$\langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbb{W}^\square} = \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbf{V}} \otimes \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{W_F} = \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{V_F} \otimes \langle \text{-}, \text{-} \rangle_{\mathbf{W}}.$$

因此，(正交群$(\mathbf{V})$, $\mathrm{Sp}(W_F)$) 和(正交群(V_F), $\mathrm{Sp}(\mathbf{W})$) 是 $\mathrm{Sp}(\mathbb{W}^\square)$中的对偶对。

对偶对 $(\text{正交群}(V), \mathrm{Sp}(W))$ 和 $(\text{正交群}(V_F), \mathrm{Sp}(\mathbf{W}))$ 构成 基变换跷跷板对 (参见 [GKT25, 第 15.1 节.4])，位于 $\mathrm{Sp}(\mathbb{W}^{\square})$中。相应的参差图如下：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(V) & & \mathrm{Sp}(\mathbf{W}) \\ | & \times & | \\ \mathrm{O}(V_F) & & \mathrm{Sp}(W). \end{array} \tag{3.1}$$

类似地，我们定义辛空间

$$\mathbb{W}_\tau = V_\tau \otimes_E W, \quad \mathbb{W}_\tau^{\square} = \mathrm{R}_{E/F}(\mathbb{W}_\tau).$$

那么，$(\mathrm{O}(V_\tau), \mathrm{Sp}(W))$ 和$(\mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau), \mathrm{Sp}(W_F))$ 是 $\mathrm{Sp}(\mathbb{W}_\tau)$中的基变换跷跷板对，其跷跷板图为

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau) & & \mathrm{Sp}(W) \\ | & \times & | \\ \mathrm{O}(V_\tau) & & \mathrm{Sp}(W_F). \end{array} \tag{3.2}$$

3.2. 元辛群与分裂。

3.2.1. 我们用 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ 表示 $\mathrm{Sp}\,\mathbb{C}^1$的元辛$(\mathbb{W})$覆盖，并用 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W}^{\square})$ 表示 $\mathrm{Sp}\,\mathbb{C}^1$的元辛$(\mathbb{W}^{\square})$ 覆盖（参见 [GKT25，第2节。1]）；其显式实现（通过薛定谔模型）将在下文给出。这里 $\mathbb{C}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$。

回忆一下，$W_F = X_F \oplus Y_F$ 是辛空间W_F的一个完全极化。我们将此极化扩展到以下各个辛空间：

$$\begin{aligned} X &:= X_F \otimes_F E, \quad Y := Y_F \otimes_F E, \\ \mathbf{X} &:= \mathrm{R}_{E/F}(X), \quad \mathbf{Y} := \mathrm{R}_{E/F}(Y), \\ \mathbb{X} &:= X \otimes_E V, \quad \mathbb{Y} := Y \otimes_E V, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^{\square} &:= \mathrm{R}_{E/F}(\mathbb{X}) = X_F \otimes_F \mathbf{V} = \mathbf{X} \otimes_F V_F, \\ \mathbb{Y}^{\square} &:= \mathrm{R}_{E/F}(\mathbb{Y}) = Y_F \otimes_F \mathbf{V} = \mathbf{Y} \otimes_F V_F. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} W &= X \oplus Y, \quad \mathbf{W} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}, \\ \mathbb{W} &= \mathbb{X} \oplus \mathbb{Y}, \quad \mathbb{W}^{\square} = \mathbb{X}^{\square} \oplus \mathbb{Y}^{\square} \end{aligned}$$

分别是W、$\mathbf{W}$、$\mathbb{W}$ 和 $\mathbb{W}^{\square}$的完全极化。

我们使用 Leray 余循环$c_{\mathbb{X}}^{\psi}$ （参见 [GKT25，定义 2.7]）将元辛覆盖 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ 实现为集合 $\mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \times \mathbb{C}^1$。$\mathrm{Mp}(\mathbb{W}) = \mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \times \mathbb{C}^1$ 上的群法则定义为

$$(g_1, z_1) \cdot (g_2, z_2) = \left(g_1 g_2, c_{\mathbb{X}}^{\psi}(g_1, g_2) z_1 z_2\right).$$

同样地，我们使用 Leray 余循环 $c^{\psi_F}_{\mathbb{X}^\square}$ 将 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square)$ 实现为 $\mathrm{Sp}(\mathbb{W}^\square) \times \mathbb{C}^1$。这两个余循环满足一个关键的相容性性质（参见 [GKT25，命题 6.26]）：对于每个$g_1, g_2 \in \mathrm{Sp}(\mathbb{W})$，

$$c^{\psi}_{\mathbb{X}}(g_1, g_2) = c^{\psi_F}_{\mathbb{X}^\square}(g_1, g_2).$$

这种相容性给出了基变嵌入（参见 [GKT25，定义 6。27]）

$$\mathrm{bc} : \mathrm{Mp}(\mathbb{W}) \hookrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square), \quad (g, z) \mapsto (g, z), \tag{3.3}$$

它是自然嵌入 $\mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(\mathbb{W}^\square)$ 的唯一提升。

结合上述固定的完全极化和加性特征 ψ_F，ψ，我们得到两个分裂（参见 [GKT25，推论 11。7]）：

$$s^{V}_{\psi,X} : \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W}) \xrightarrow{\mathrm{bc}} \mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square), \quad s^{V_F}_{\psi_F,\mathbf{X}} : \mathrm{Sp}(\mathbf{W}) \longrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square).$$

由于给定的辛群对应的分裂是唯一的，因此这两个分裂相容；也就是说，

$$s^{V_F}_{\psi_F,\mathbf{X}}|_{\mathrm{Sp}(W)} = s^{V}_{\psi,X}.$$

对于正交群，我们使用典范分裂

$$s^{W}_{\psi,X} : \mathrm{O}(V) \longrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W}) \xrightarrow{\mathrm{bc}} \mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square), \quad h \mapsto (h \otimes 1_W, 1),$$

and

$$s^{\mathbf{W}}_{\psi_F,\mathbf{X}} : \mathrm{O}(V_F) \longrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square), \quad h \mapsto (h \otimes 1_{\mathbf{W}}, 1).$$

这两个分裂的相容性可直接由其定义得出。

因此，我们得到基变换跻跻板对（3.1）的相容分裂，如下列交换图所示：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \xrightarrow{\left(s^{V_F}_{\psi_F,\mathbf{X}},\, s^{\mathbf{W}}_{\psi_F,\mathbf{X}}\right)} & \\
\mathrm{Sp}(\mathbf{W}) & \times & \text{正交群}_{(V_F)} & \longrightarrow & \mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square) \\
\uparrow & & \downarrow & & \| \\
\mathrm{Sp}(W) & \times & \mathrm{O}(V) & \xrightarrow{(s^{V}_{\psi,X},\, s^{W}_{\psi,X})} \mathrm{Mp}(\mathbb{W}) \xrightarrow{\mathrm{bc}} & \mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square).
\end{array} \tag{3.4}$$

3.2.2. 现在考虑基变换参差对（3.2）的类似分裂。定义

$$\begin{aligned}
\mathbb{X}_\tau &:= X \otimes_E V_\tau, \quad \mathbb{Y}_\tau := Y \otimes_E V_\tau, \\
\mathbb{X}^\square_\tau &:= \mathrm{R}_{E/F}(\mathbb{X}_\tau) = X_F \otimes_F \mathbf{V}_\tau, \\
\mathbb{Y}^\square_\tau &:= \mathrm{R}_{E/F}(\mathbb{Y}_\tau) = Y_F \otimes_F \mathbf{V}_\tau.
\end{aligned}$$

Then

$$\mathbb{W}_\tau = \mathbb{X}_\tau \oplus \mathbb{Y}_\tau, \quad \mathbb{W}^\square_\tau = \mathbb{X}^\square_\tau \oplus \mathbb{Y}^\square_\tau$$

分别是 $\mathbb{W}_\tau$ 和 $\mathbb{W}_\tau^\square$ 的完全极化。

存在自然同一

$$\mathbb{X}_\tau = \mathbb{X}, \quad \mathbb{Y}_\tau = \mathbb{Y}, \quad \mathbb{X}_\tau^\square = \mathbb{X}^\square, \quad \mathbb{Y}_\tau^\square = \mathbb{Y}^\square,$$

由自然同一 $V = V_\tau$ 诱导。

我们通过 Leray 余循环 $(\mathbb{W}_\tau)$ (分别地，$\mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau^\square)$) 将 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau) \times \mathbb{C}^1$ (分别地，$\mathrm{Sp}(\mathbb{W}_\tau^\square) \times \mathbb{C}^1$) 明确表示为 $\mathrm{Sp}c^{\psi}_{\mathbb{X}_\tau}$ (分别地，$c^{\psi_F}_{\mathbb{X}_\tau^\square}$)。如（3.3）所示，我们有基变嵌入

$$\mathrm{bc} : \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau) \hookrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau^\square), \quad (g,z) \mapsto (g,z). \tag{3.5}$$

对于辛群，我们有相容分裂

$$s^{V_\tau}_{\psi,X} : \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau) \xhookrightarrow{\mathrm{bc}} \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau^\square), \quad s^{\mathbf{V}_\tau}_{\psi_F,X_F} : \mathrm{Sp}(W_F) \longrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau^\square),$$

对于正交群，则有相容的典范分裂

$$s^{W}_{\psi,X} : \mathrm{O}(V) \longrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau) \xrightarrow{\mathrm{bc}} \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau^\square), \quad s^{W_F}_{\psi_F,X_F} : \mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau) \longrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau^\square).$$

总之，基变换跷跷板对（3.2）的相容分裂由以下交换图编码：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Sp}(W_F) & \times & \mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau) & \xrightarrow{\left(s^{\mathbf{V}_\tau}_{\psi_F,X_F},\, s^{W_F}_{\psi_F,X_F}\right)} & \mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square) \\
\big\downarrow & & \big\uparrow & & \big\| \\
\mathrm{Sp}(W) & \times & \mathrm{O}(V_\tau) & \xrightarrow{\left(s^{V_\tau}_{\psi,X},\, s^{W}_{\psi,X}\right)} \mathrm{Mp}(\mathbb{W}) \xhookrightarrow{\mathrm{bc}} & \mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square).
\end{array} \tag{3.6}$$

3.2.3. 现在我们回顾 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ 与 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau)$之间的关系，以及对偶对$(\text{正交群}(V), \mathrm{Sp}(W))$ 与$(\text{正交群}(V_\tau), \mathrm{Sp}(W))$的分裂之间的关系。

令 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})^{\psi_\tau} = \mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \times \mathbb{C}^1$ 为由 Leray 余循环$c^{\psi_\tau}_{\mathbb{X}}$ 定义的元辛群实现。自然同一 $\mathrm{Sp}(\mathbb{W}_\tau) = \mathrm{Sp}(\mathbb{W})$ 唯一地提升为元辛群之间的同构

$$\mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\psi_\tau} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau), \quad (g,z) \mapsto (g,z). \tag{3.7}$$

此外，这些分裂以下述交换图的意义相容（参见 [GKT25，命题12。10]）

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sp}(W) & \xrightarrow{s^{V}_{\psi_\tau,X}} & \mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\psi_\tau} = \mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \times \mathbb{C}^1 \\
\| & & \| \\
\mathrm{Sp}(W) & \xrightarrow{s^{V_\tau}_{\psi,X}} & \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau) = \mathrm{Sp}(\mathbb{W}_\tau) \times \mathbb{C}^1,
\end{array} \tag{3.8}$$

其中$s^{V}_{\psi_\tau,X}$ 是 th 与加性特征 ψ_τ 和各向同性子空间 X相关联的分裂 .

Let

$$s^W_{\psi_\tau,X} : \mathrm{O}(V) \longrightarrow \mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\psi_\tau}, \quad h \mapsto (h \otimes 1_W, 1),$$

为典范分裂。在自然同一 $\mathrm{O}(V_\tau) = \mathrm{O}(V)$下，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(V) & \xrightarrow{s^W_{\psi_\tau,X}} & \mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\psi_\tau} = \mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \times \mathbb{C}^1 \\ \| & & \| \\ \mathrm{O}(V_\tau) & \xrightarrow{s^W_{\psi,X}} & \mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau) = \mathrm{Sp}(\mathbb{W}_\tau) \times \mathbb{C}^1. \end{array} \tag{3.9}$$

3.3. **韦伊表示**。

3.3.1. 令$\omega_{\psi,\ \mathbb{W}}$ （分别为$\omega_{\psi_F,\ \mathbb{W}^\square}$）是与加性特征 ψ （分别与 ψ_F）相关联的 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$（分别是 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square)$）的魏尔表示。这些表示实现在相对于第3.2.1节中固定的完全极化的薛定谔模型上：

$$\omega_{\psi,\mathbb{W}} \ \text{ on } \ C_c^\infty(\mathbb{Y}), \qquad \omega_{\psi_F,\mathbb{W}^\square} \ \text{ on } \ C_c^\infty(\mathbb{Y}^\square).$$

自然同一 $\mathbb{Y}^\square = \mathbb{Y}$诱导出一个同一$C_c^\infty(\mathbb{Y}^\square) = C_c^\infty(\mathbb{Y})$。在此同一之下，我们有（参见 [GKT25，命题 9。21]）

$$\omega_{\psi_F,\mathbb{W}^\square}|_{\mathrm{Mp}(\mathbb{W})} = \omega_{\psi,\mathbb{W}}. \tag{3.10}$$

现在，通过跻跻板对（3.4）的相容分裂，令

$$\omega_{V,W,\psi} := \omega_{\psi,\mathbb{W}}|_{\mathrm{Sp}(W)\times\mathrm{O}(V)}, \quad \omega_{V_F,\mathbf{W},\psi_F} := \omega_{\psi_F,\mathbb{W}^\square}|_{\mathrm{Sp}(\mathbf{W})\times\mathrm{O}(V_F)}.$$

于是我们得到以下相容关系：

$$\omega_{V,W,\psi}|_{\mathrm{O}(V_F)} = \omega_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}|_{\mathrm{O}(V_F)}, \quad \omega_{V,W,\psi}|_{\mathrm{Sp}(W)} = \omega_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}|_{\mathrm{Sp}(W)}. \tag{3.11}$$

3.3.2. 类似地，设 $\omega_{\psi,\ \mathbb{W}_\tau}$（相应地 $\omega_{\psi_F,\ \mathbb{W}_\tau^\square}$）为 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau)$（相应地 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau^\square)$）的魏尔表示，二者均在薛定谔模型 $C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau) = C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau^\square)$ 上实现。利用跻跻板对（3.6）的相容分裂，设

$$\omega_{V_\tau,W,\psi} := \omega_{\psi,\mathbb{W}_\tau}|_{\mathrm{Sp}(W)\times\mathrm{O}(V_\tau)}, \quad \omega_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F} := \omega_{\psi_F,\mathbb{W}_\tau^\square}|_{\mathrm{Sp}(W_F)\times\mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau)}.$$

于是我们得到如下相容关系：

$$\omega_{V_\tau,W,\psi}|_{\mathrm{Sp}(W_F)} = \omega_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}|_{\mathrm{Sp}(W_F)}, \quad \omega_{V_\tau,W,\psi}|_{\mathrm{O}(V_\tau)} = \omega_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}|_{\mathrm{O}(V_\tau)}. \tag{3.12}$$

3.3.3. 回顾一下，$\mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\psi_\tau}$ 表示由 Leray 余循环 具体实现的 $\mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \times \mathbb{C}^1$ $c_{\mathbb{X}}^{\psi_\tau}$。设 $\omega_{\psi_\tau,\ \mathbb{W}}$ 为 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\psi_\tau}$在薛定谔模型 $C_c^\infty(\mathbb{Y})$上实现的魏尔表示 。在 $_c^\infty(\mathbb{Y}) = C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau)$ 的自然同一以及 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\psi_\tau} =$

$\mathrm{Mp}(\mathbb{W}_\tau)$ 通过（3.7），我们有

$$\omega_{\psi_\tau,\mathbb{W}} = \omega_{\psi,\mathbb{W}_\tau}. \tag{3.13}$$

Let

$$\omega_{V,W,\psi_\tau} := \omega_{\psi_\tau,\mathbb{W}}|_{\mathrm{Sp}(W)\times\mathrm{O}(V)},$$

利用分裂 $(\overset{V}{s}_{\psi_\tau,X},\overset{W}{s}_{\psi_\tau,X})$。于是，由 (3.13)、(3.8) 和 (3.9)，我们得到

$$\omega_{V,W,\psi_\tau} = \omega_{V_\tau,W,\psi}. \tag{3.14}$$

特别地，结合 (3.12) 可得

$$\omega_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}|_{\mathrm{O}(V_\tau)} = \omega_{V_\tau,W,\psi}|_{\mathrm{O}(V_\tau)} = \omega_{V,W,\psi_\tau}|_{\mathrm{O}(V)}. \tag{3.15}$$

回忆一下，在 (2.5) 中定义的元素 $c_\tau \in \mathrm{GSp}(W)$。令

$$\varphi_\tau : \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow \mathrm{Sp}(W), \quad g \mapsto c_\tau g c_\tau^{-1}.$$

对于一个表示 $\Pi \in \mathrm{Rep}(\mathrm{Sp}(W))$，定义

$$\Pi_\tau := \Pi \circ \varphi_\tau^{-1}, \quad \Pi^\tau := \Pi \circ \varphi_\tau.$$

一条基本的相容性（参见 [GKT25，命题 9。18]）为

$$\omega_{V,W,\psi_\tau}|_{\mathrm{Sp}(W)} = \omega_{V,W,\psi}|_{\mathrm{Sp}(W)} \circ \varphi_\tau. \tag{3.16}$$

结合（3.11）和（3.14），可得

$$\omega_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}|_{\mathrm{Sp}(W)} \circ \varphi_\tau = \omega_{V,W,\psi}|_{\mathrm{Sp}(W)} \circ \varphi_\tau = \omega_{V,W,\psi_\tau}|_{\mathrm{Sp}(W)} = \omega_{V_\tau,W,\psi}|_{\mathrm{Sp}(W)}. \tag{3.17}$$

3.4. **模型间的转换**。之后还需要用到韦伊表示的其他模型；这些模型间的转换对我们的工作至关重要。

考虑魏尔表示 $\omega_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}$。我们引入另一种完全极化

$$\mathbf{W} = \mathbf{X}' \oplus \mathbf{Y}',$$

其中

$$\mathbf{X}' := X_F \oplus \tau Y_F, \quad \mathbf{Y}' := Y_F \oplus \tau X_F.$$

由此得到完全极化

$$\mathbb{W}^\square = \mathbb{X}^{\square'} \oplus \mathbb{Y}^{\square'}, \tag{3.18}$$

with

$$\mathbb{X}^{\square'} := \mathbf{X}' \otimes_F V_F = (X_F \otimes V_F) \bigoplus (\tau Y_F \otimes V_F),$$
$$\mathbb{Y}^{\square'} := \mathbf{Y}' \otimes_F V_F = (Y_F \otimes V_F) \bigoplus (\tau X_F \otimes V_F).$$

作为比较，原始极化为 $\mathbb{W}^{\square} = \mathbb{X}^{\square} \oplus \mathbb{Y}^{\square}$，其中

$$\mathbb{X}^{\square} = \mathbf{X} \otimes_F V_F = (X_F \otimes V_F) \bigoplus (\tau X_F \otimes V_F),$$
$$\mathbb{Y}^{\square} = \mathbf{Y} \otimes_F V_F = (Y_F \otimes V_F) \bigoplus (\tau Y_F \otimes V_F).$$

若现在将 $\omega_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}$ 实现为薛定谔模型 $C_c^\infty(\mathbb{Y}^{\square'})$ 相对于另一种极化（3.18），交织算子

$$\mathcal{I}_{\mathbf{W}} : C_c^\infty(\mathbb{Y}^{\square}) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{Y}^{\square'})$$

两个薛定谔模型之间的交织算子由下式给出（参见 [GKT25，第 9.2 节。3]）

$$\mathcal{I}_{\mathbf{W}}(\phi)(x+y) = \int_{\tau Y_F \otimes V_F} \phi(y+y')\psi_F\left(\langle y', x\rangle_{\mathbb{W}^{\square}}\right)\, \mathrm{d}y', \tag{3.19}$$

其中 $x \in \tau X_F \otimes V_F$ 且 $y \in Y_F \otimes V_F$。特别地，在零点处取值可得

$$\mathcal{I}_{\mathbf{W}}(\phi)(0) = \int_{\tau Y_F \otimes V_F} \phi(y')\, \mathrm{d}y'. \tag{3.20}$$

对于魏尔表示 $\omega_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}$，完全极化

$$\mathbf{V}_\tau = \tau V_F \oplus V_F$$

给出 $\mathbb{W}_\tau^{\square}$ 的另一种完全极化：

$$\mathbb{W}_\tau^{\square} = \mathbb{X}_\tau^{\square'} \oplus \mathbb{Y}_\tau^{\square'}, \tag{3.21}$$

其中

$$\mathbb{X}_\tau^{\square'} := W_F \otimes \tau V_F = (X_F \otimes \tau V_F) \bigoplus (Y_F \otimes \tau V_F),$$
$$\mathbb{Y}_\tau^{\square'} := W_F \otimes V_F = (X_F \otimes V_F) \bigoplus (Y_F \otimes V_F).$$

作为比较，原来的极化是 $\mathbb{W}_\tau^{\square} = \mathbb{X}_\tau^{\square} \oplus \mathbb{Y}_\tau^{\square}$，其中

$$\mathbb{X}_\tau^{\square} = X_F \otimes_F \mathbf{V}_\tau = (X_F \otimes V_F) \bigoplus (X_F \otimes \tau V_F),$$
$$\mathbb{Y}_\tau^{\square} = Y_F \otimes_F \mathbf{V}_\tau = (Y_F \otimes V_F) \bigoplus (Y_F \otimes \tau V_F).$$

如果我们现在实现 $\omega_{\mathbf{V}_\tau,\ W_F,\ \psi_F}$ 于薛定谔模型 $C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau^{\square'})$ 上，相对于另一种极化（3.21），则交织算子

$$\mathcal{I}_{\mathbf{V}_\tau} : C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau^{\square}) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau^{\square'})$$

两个薛定谔模型之间的对应为

$$\mathcal{I}_{\mathbf{V}_\tau}(\phi)(x+y) = \int_{Y_F \otimes \tau V_F} \phi(y+y')\psi_F\left(\langle y', x\rangle_{\mathbb{W}_\tau^{\square}}\right)\, \mathrm{d}y', \tag{3.22}$$

其中 $x \in X_F \otimes V_F$ 以及 $y \in Y_F \otimes V_F$。特别地，我们有

$$\mathcal{I}_{\mathbf{V}_\tau}(\phi)(0) = \int_{Y_F \otimes \tau V_F} \phi(y')\, \mathrm{d}y'. \tag{3.23}$$

全文中均隐含使用了自然同一 $\mathbb{Y}^\square = \mathbb{Y}_\tau^\square$ and $C_c^\infty(\mathbb{Y}^\square) = C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau^\square)$。

引理 3.1. 对于任意 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{Y}^\square)$，我们有

$$\mathcal{I}_{\mathbf{W}}(\phi)(0) = \mathcal{I}_{\mathbf{V}_\tau}(\phi)(0).$$

证明. 这由（3.20）和（3.23）立即得出。 □

4. 局部 theta 对应

4.1. Theta 提升。 我们已经引入了对偶对 (正交群(V),Sp(W))的魏尔表示 $\omega_{V,W,\psi}$。对于 $\pi \in$ 不可约表示(Sp(W))，其大 *theta* 提升 $\Theta_{V,W,\psi}(\pi) \in$ Rep(正交群(V)) 定义为

$$\Theta_{V,W,\psi}(\pi) := (\omega_{V,W,\psi} \otimes \pi^\vee)_{\mathrm{Sp}(W)},$$

其中$(\text{-})^{\mathrm{Sp}(W)}$ 表示 Sp(W) 的余不变量空间。换言之，$\pi \otimes \Theta_{V,W,\psi}(\pi)$ 是 $\omega_{V,W,\psi}$ 的最大 π-等型商。小 *theta* 提升 $\theta_{V,W,\psi}(\pi)$ 定义为 $\Theta_{V,W,\psi}(\pi)$ 的最大半单商。

对 $\sigma \in \mathrm{Irr}(\mathrm{O}(V))$ 应用相同的构造，可得到 theta 提升 $\Theta_{V,W,\psi}(\sigma)$ 和 $\theta_{V,W,\psi}(\sigma)$，它们是 Sp$(W)$ 的表示。

4.2. The τ-扭曲。 我们可以将 V 替换为 V_τ，从而得到大 theta 提升 $\Theta_{V_\tau,W,\psi}(\pi)$及相应的小 theta 提升。同样，将 ψ 替换为 ψ_τ 可得到类似的大、小 theta 提升。回想一下，我们有自然同一 $\mathrm{O}(V_\tau) = \mathrm{O}(V)$。这些不同 theta 提升之间的关系如下。

引理4.1。 对于 $\pi \in$ 不可约表示(Sp(W))，有

$$\Theta_{V,W,\psi}(\pi_\tau) = \Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi) = \Theta_{V_\tau,W,\psi}(\pi), \quad \theta_{V,W,\psi}(\pi_\tau) = \theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi) = \theta_{V_\tau,W,\psi}(\pi).$$

证明。 这直接由（3.17）得出。 □

4.3. 跷跷板恒等式。 我们将使用跷跷板恒等式来联系不同群上的周期。令 $\Theta_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}(\mathbf{1}) \in$ Rep(Sp($\mathbf{W}$)) 为相对于魏尔表示 $\omega_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}$，由 $\mathrm{O}(V_F)$ 的平凡表示得到的大 theta 提升。类似地，令 $\Theta_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}(1) \in$Rep(O($\mathbf{V}\tau$))为相对于魏尔表示$\omega_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}$，由 Sp$(W_F)$ 的平凡表示得到的大 theta 提升。

引理 4.2 (基变换跷跷板恒等式)。 对于 $\pi \in$ 不可约表示$(\mathrm{Sp}(W))$ 和 $\sigma \in$ 不可约表示(正交群(V))，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi}(\pi), \mathbb{C}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(\Theta_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}(1), \pi\right),$$

and

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\Theta_{V_\tau,W,\psi}(\sigma), \mathbb{C}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(\Theta_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}(1), \sigma\right).$$

证明。 这由（3.11）、（3.12）以及大 theta 提升的定义可得 . □

4.4. **Howe 对偶**。 以下基本结果称为 Howe 对偶，由 Howe 猜想 [How79、How89]。 Waldspurger 证明了它 [Wal90]（当 $p \neq 2$），而 Gan–Takeda [GT16] 和 Gan–Sun [GS17] 则在一般情形下证明了它。

定理 4.3(Howe 对偶)。 对于 $\pi \in$ 不可约表示$(\mathrm{Sp}(W))$，小 *theta* 提升 $\theta_{V,W,\psi}(\pi)$ 要么为零，要么不可约。此外，若 $\theta_{V,W,\psi}(\pi) \cong \theta_{V,W,\psi}(\pi')$ 非零，则 $\pi \cong \pi'$。从正交群到辛群的小 *theta* 提升也具有相同性质。

令 $\mathcal{V}$ 为包含V的二次空间 Witt 塔。对于 $\pi \in$ 不可约表示(辛群(W))，将其在 $\mathcal{V}$ 中的首次出现指标定义为

$$m_{\mathcal{V}}(\pi) := \min\{\dim V' \mid V' \in \mathcal{V}, \Theta_{V',W,\psi}(\pi) \neq 0\}.$$

当 $\dim V' = m_{\mathcal{V}}(\pi)$ 时，表示 $\Theta_{V'}$、W、$\psi(\pi)$ 称为（π 在 $\mathcal{V}$中的）首次出现。一项关键结果——持存原理——断言，对于任意满足 $\dim V' \geq m_{\mathcal{V}}(\pi)$ 的$V' \in \mathcal{V}$，均有$\Theta_{V'}$、W、$\psi(\pi) \neq 0$。

令V_c 为V的伴随空间；也就是说，它是满足以下条件的、在同构意义下唯一的<E>上的二次空间

$$\dim V_c = \dim V, \quad \mathrm{disc}(V_c) = \mathrm{disc}(V), \quad V_c \ncong V.$$

用 $\mathcal{V}_c$ 表示包含V_c的二次空间 Witt 塔。

类似地，令 $\mathcal{W}$ 为包含W的辛空间 Witt 塔。对于 $\sigma \in$ 不可约表示(正交群(V))，将其在 $\mathcal{W}$ 中的首次出现指标定义为

$$m_{\mathcal{W}}(\sigma) := \min\{\dim W' \mid W' \in \mathcal{W}, \Theta_{V,W',\psi}(\sigma) \neq 0\}.$$

回忆一下，$\dim W = 2n$，且 $\dim V = 2m$。

定理 4.4（守恒关系， [SZ15]）。 对于 $\pi \in$ 不可约表示$(\mathrm{Sp}(W))$，我们有

$$m_{\mathcal{V}}(\pi) + m_{\mathcal{V}_c}(\pi) = 4n + 4.$$

对于 $\sigma \in$ 不可约表示(正交群(V))，我们有

$$m_{\mathcal{W}}(\sigma) + m_{\mathcal{W}}(\sigma \otimes \det) = 4m.$$

因此，我们得到以下*theta* 二分律：

- 对于 $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}(W))$，若 $V_1 \in \mathcal{V}$和 $V_2 \in \mathcal{V}$c 满足

$$\dim V_1 + \dim V_2 = 4n + 2,$$

则 Θ_{V_1}、W、$\psi(\pi)$ 与 Θ_{V_2}、W、$\psi(\pi)$ 中恰有一个非零。

- 对于 $\sigma \in$ 不可约表示(正交群(V))，若 $W1$、$W_2 \in \mathcal{W}$ 满足

$$\dim W_1 + \dim W_2 = 4m - 2,$$

则 Θ_V、W_1、$\psi(\sigma)$ 与 Θ_V、W_2、$\psi(\sigma \otimes$行列式$)$ 中恰有一个非零。

注 4.5. 我们在此汇集关于大 theta 提升与小θ提升之间相等性的若干结果。设 $\pi \in$ 不可约表示(辛群(W)) 以及 $\sigma \in$ 不可约表示(正交群(V))。

(1) 假设 π 是超尖点的。Kudla 的一个经典结果 [Kud86]指出，若Θ_V、W、$\psi_\tau(\pi)$ 是首次出现，则 Θ_V、W、$\psi_\tau(\pi) = \theta_V$、$W$、$\psi_\tau(\pi)$，且该表示是超尖点的。类似的陈述对 σ 也成立。
(2) 假设 π 是平方可积的。

- 若$m = n$且 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi) \neq 0$，则 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi) = \theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$，且它是平方可积的。

- 若 m $=$n $+1$且 ΘV,W,$\psi_\tau(\pi)$ 是首次出现，则 ΘV,W,$\psi_\tau(\pi) = \theta$V,W,$\psi_\tau(\pi)$，且它是平方可积的。（参见 [GI14, 推论 C.3]。）(3) 假设 π 是温和的。若 m $=$n $+1$且 ΘV,W,$\psi_\tau(\pi) \neq 0$，则 ΘV,W,$\psi_\tau(\pi) = \theta$V,W,$\psi_\tau(\pi)$，且它是温和的。（参见 [GI14, 命题 C.4]。）
(4) 假设 σ 是平方可积的。

- 若$m = n + 1$且 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma) \neq 0$，则 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma) = \theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma)$，且它是平方可积的。

- 若 m $=$n 且 ΘV,W,$\psi_\tau(\sigma)$ 是首次出现，则 ΘV,W,$\psi_\tau(\sigma) = \theta$V,W,$\psi_\tau(\sigma)$，并且它是平方可积的。（参见 [GI14, 推论 C.3]。）(5) 假设 σ是温和的。若 m $=$n 且 ΘV,W,$\psi_\tau(\sigma)$ $\neq 0$，则 ΘV,W,$\psi_\tau(\sigma) = \theta$V,W,$\psi_\tau(\sigma)$，并且它是温和的。（参见 [GI14, 命题 C.4]。）

5. 退化主系列

5.1. **退化主系列与 Rallis 映射。** 令**P** 为**G** 的 Siegel抛物子群: $=$ Sp(**W**)，它稳定拉格朗日子空间**X**′ $= X_F \oplus \tau Y_F$。则**P** 有 Levi分解**P** $=$ **MN**，其中**M** $\cong$ GL(**X**′)。令 det : GL(**X**′) $\to F^\times$ 表示行列式映射。对于$s \in \mathbb{C}$,

该退化主系列 定义为归一化抛物诱导

$$I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s) := \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(|\det|_F^s).$$

我们设

$$s_0 := \frac{2m-2n-1}{2}. \tag{5.1}$$

考虑正交群 $\omega_{V_F}\mathbf{w}\psi_F$ 的魏尔表示 $\mathbf{G}\times\mathrm{O}(V_F)$，该表示实现在薛定谔模型 $C_c^\infty(\mathbb{Y}^{\square'})$上。正交群 $\mathrm{O}(V_F)$ 在此模型上的作用为

$$(\omega_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}(h)\phi)(x) = \phi(h^{-1}x), \quad h\in\mathrm{O}(V_F),\ \phi\in C_c^\infty(\mathbb{Y}^{\square'}).$$

The *Rallis* 映射

$$R_{\mathbf{W}} : C_c^\infty(\mathbb{Y}^{\square'}) \longrightarrow I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0), \quad \phi\mapsto\mathcal{F}_\phi,$$

定义为

$$\mathcal{F}_\phi(g) := (\omega_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}(g)\phi)(0), \quad g\in\mathbf{G}. \tag{5.2}$$

设 $R_{\mathbf{W}}(V_F)$ 表示 $R_{\mathbf{W}}$的像。已知 $R_{\mathbf{W}}$ 是 $\mathbf{G}$-等变的、在正交群 $\mathrm{O}(V_F)$下不变的，并且

$$R_{\mathbf{W}}(V_F) \cong \Theta_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}(1). \tag{5.3}$$

类似地，令$\mathbf{Q}$ 为$\mathbf{H}$ 的Siegel抛物子群：$=\mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau)$，它稳定拉格朗日子空间$\tau V_F$；令$I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(|\det|_F^s)$为$\mathbf{H}$的退化主系列。在此情形下，Rallis 映射

$$R_{\mathbf{V}_\tau} : C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau^{\square'}) \longrightarrow I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0), \quad \phi\mapsto\mathcal{F}_\phi,$$

定义为

$$\mathcal{F}_\phi(h) := (\omega_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}(h)\phi)(0), \quad h\in\mathbf{H}.$$

令$R^{\mathbf{V}_\tau}(W_F)$表示$R^{\mathbf{V}_\tau}$的像。它满足

$$R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \cong \Theta_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}(1). \tag{5.4}$$

以下结论是跷跷板恒等式（引理 4.2）的直接推论。

推论 5.1。对于 $\pi\in$ 不可约表示$(\mathrm{Sp}(W))$ 和 $\sigma\in$ 不可约表示(正交群(V))，有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi}(\pi),\mathbb{C}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(R_{\mathbf{W}}(V_F),\pi\right),$$

and

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\Theta_{V_\tau,W,\psi}(\sigma),\mathbb{C}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F),\sigma\right).$$

5.2. **退化主系列的结构 I.** 现在我们回顾退化主系列作为 $\mathbf{G}$-模或 $\mathbf{H}$-模的结构；相关概要见 [GI14，第7]节。

令 $V_{\mathrm{c},F}$ 为 V_F的伴随空间。与 $V_{\mathrm{c},F}$相关联的，有大 theta 提升 $\Theta_{V_{\mathrm{c},F},\mathbf{W},\psi_F}(1)$以及 Rallis 映射的像 $R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F})$。此外，

$$\Theta_{V_{\mathrm{c},F},\mathbf{W},\psi_F}(1) \cong R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F}) \subset I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0).$$

设V_F 是V_F的互补空间；也就是说，它是V_F 的 Witt 塔中满足下列条件的唯一二次空间

$$\dim \widetilde{V}_F + \dim V_F = 4n+2.$$

类似地，设$V_{\mathrm{c},F}$ 是$V_{\mathrm{c},F}$的互补空间。这给出了$I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(-s_0)$的$\mathbf{G}$-子模$R_{\mathbf{W}}(V_F)$ 和$R_{\mathbf{W}}(\widetilde{V}_{\mathrm{c},F})$。

命题 5.2。(1) 若 $m > n$，则

(a) $I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0) = R_{\mathbf{W}}(V_F) + R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F})$；(b) $R_{\mathbf{W}}(V_F) \cap R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F})$ 不可约，且是 $I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0)$的极大半单子模；(c) 我们有

$$R_{\mathbf{W}}(V_F)/R_{\mathbf{W}}(V_F)\cap R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F}) \cong R_{\mathbf{W}}(\widetilde{V}_F)$$

and

$$R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F})/R_{\mathbf{W}}(V_F)\cap R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F}) \cong R_{\mathbf{W}}(\widetilde{V}_{\mathrm{c},F});$$

(d) $R_{\mathbf{W}}(V_F)$ 和 $R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F})$ 均不可约。

特别地，我们有如下正合序列

$$0 \longrightarrow R_{\mathbf{W}}(V_F) \longrightarrow I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0) \longrightarrow R_{\mathbf{W}}(\widetilde{V}_{\mathrm{c},F}) \longrightarrow 0$$

and

$$0 \longrightarrow R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F}) \longrightarrow I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0) \longrightarrow R_{\mathbf{W}}(\widetilde{V}_F) \longrightarrow 0.$$

(2) 若 $m \leq n$，则

(a) $R_{\mathbf{W}}(V_F)$、$R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F})$ 和 $R_{\mathbf{W}}(V_F)\cap R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F})$ 均为不可约；(b) $R_{\mathbf{W}}(V_F) \oplus R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F})$ 是 $I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0)$的极大半单子模；(c) 我们有如下正合序列

$$0 \longrightarrow R_{\mathbf{W}}(V_F) \oplus R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F}) \longrightarrow I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0) \longrightarrow R_{\mathbf{W}}(\widetilde{V}_F) \cap R_{\mathbf{W}}(\widetilde{V}_{\mathrm{c},F}) \longrightarrow 0.$$

令 W_F 为W_F 所在 Witt 塔中满足以下条件的唯一辛空间

$$\dim \widetilde{W}_F + \dim W_F = 4m-2.$$

这将产生一个 $\mathbf{H}$-子模 $R\mathbf{v}_\tau(\widetilde{W}_F)$，它属于 $I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(s_0)$。

命题 5.3。(1) 如果 $m \leq n$，则

(a) $I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0) = R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) + R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F)\otimes \det$;

(b) $R\mathbf{v}_\tau(W_F) \cap R\mathbf{v}_\tau(W_F)$ $\otimes$ 行列式 是不可约的，并且是 $I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0)$ 的极大半单子模；

(c) 我们有

$$R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F)/R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \cap R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \otimes \det \cong R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F)$$

and

$$R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \otimes \det / R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \cap R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \otimes \det \cong R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F) \otimes \det .$$

~(d) $R\mathbf{v}_\tau(W_F)$ 是不可约的。

特别地，我们有如下正合列

$$0 \longrightarrow R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \longrightarrow I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0) \longrightarrow R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F) \otimes \det \longrightarrow 0$$

and

$$0 \longrightarrow R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \otimes \det \longrightarrow I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0) \longrightarrow R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F) \longrightarrow 0.$$

(2) 若 $m > n$，则

(a) $R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F)$ *and* $R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F) \cap R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F) \otimes \det$ *are irreducible;*

(b) $R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \bigoplus R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \otimes \det$ *is the maximal semisimple submodule of* $I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0)$*;*

(c) *we have the exact sequence*

$$0 \longrightarrow R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \oplus R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F) \otimes \det \longrightarrow I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0) \longrightarrow R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F) \cap R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F) \otimes \det \longrightarrow 0.$$

5.3. **退化主系列的结构 II**。令 $G = \mathrm{Sp}(W)$ 且 $H = \mathrm{O}(V)$。在本小节中，我们研究退化主系列 $I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s)$ （分别为 $I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(s)$）作为$G$-模（分别作为$H$-模）的结构。

设 r 是 V 的维特指标。回顾第 2.5 节， $\mathcal{X} = \mathbf{Q}\backslash\mathbf{H}$，视为 $\mathbf{V}_\tau$ 的拉格朗日子空间集合，它具有如下不交分解

$$\mathcal{X} = \bigsqcup_{k=0}^{r} \mathcal{X}_r, \quad \mathcal{X}_k = \{L \in \mathcal{X} \mid \dim_E L_{\mathrm{an}} = k\}.$$

直接验证可得

$$\overline{\mathcal{X}}_k = \bigsqcup_{k' \geq k} \mathcal{X}_{k'},$$

其中 $\mathcal{X}_k$¯表示 $\mathcal{X}$中 $\mathcal{X}_k$ 的闭包。

应用 Bernstein–Zelevinsky 几何引理，这个分层给出了一个H-滤过

$$0 = I_0(s) \subset I_1(s) \subset \cdots \subset I_{r+1}(s) = I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(s),$$

with

$$I_k(s) := \left\{ f \in I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(s) \mid f|_{\overline{\mathcal{X}}_k} = 0 \right\}.$$

对于 $0 \le k \le r$，连续商记作

$$J_k(s) := I_{k+1}(s)/I_k(s).$$

由引理2.15（见第 2.5 节的记号）可知

$$\mathcal{X}_k = \bigsqcup_{V'_{2m-2k,F} \in \mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V_{2m-2k}))} H \cdot \left(X_k \oplus \tau V'_{2m-2k,F}\right),$$

并由引理 2.14 可知，$L_k := X_k \oplus \tau V'_{2m-2k,F}$ 的稳定子为

$$R_k := \mathrm{Stab}_H(L_k) = \left(\mathrm{GL}(X_k) \times \mathrm{O}(V'_{2m-2k,F})\right) \ltimes N,$$

它包含于抛物子群

$$Q_k := \mathrm{Stab}_H(X_k) = (\mathrm{GL}(X_k) \times \mathrm{O}(V_{2m-2k})) \ltimes N.$$

现在设 $L_k = g^{-1}{}_k \cdot \tau V_F$，其中 $g_k \in \mathbf{Q}\backslash\mathbf{H}$。则 $g_k R_k g^{-1}{}_k \subset \mathbf{Q}$。对于 $\mathbf{Q}$ 的一个表示χ，我们定义 R_k 的一个表示 χ^{g_k} 如下：

$$\chi^{g_k}(r) = \chi(g_k r g_k^{-1}), \quad r \in R_k.$$

命题 5.4。对于 $H = \mathrm{O}(V)$ 以及 $0 \le k \le r$，有

$$J_k(s) \cong \bigoplus_{V'_{2m-2k,F} \in \mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V_{2m-2k}))} \mathrm{Ind}_{Q_k}^H \left(|\det {}_{X_k}|_E^{s+\frac{k}{2}} \otimes C_c^\infty \left(\mathrm{O}(V_{2m-2k,F})\backslash \mathrm{O}(V_{2m-2k})\right)\right).$$

特别地，

$$J_0(s) = I_1(s) \cong \bigoplus_{V'_F \in \mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V))} C_c^\infty \left(\mathrm{O}(V'_F)\backslash \mathrm{O}(V)\right)$$

与 s 无关。

证明。令 χ_s 表示特征标 $|\text{行列式}|_F^s$：$\mathbf{Q} \to$ 一般线性群$(\tau V_F) \to \mathbb{C}^\times$。则我们有

$$\begin{aligned}
J_k(s) &\cong \bigoplus_{V'_{2m-2k,F} \in \mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V_{2m-2k}))} \text{un-Ind}_{R_k}^H \left((\chi_s \delta_{\mathbf{Q}}^{1/2})^{g_k} \right) \\
&\cong \bigoplus_{V'_{2m-2k,F} \in \mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V_{2m-2k}))} \text{un-Ind}_{Q_k}^H \left(\text{un-Ind}_{R_k}^{Q_k} \left((\chi_s \delta_{\mathbf{Q}}^{1/2})^{g_k} \right) \right) \\
&\cong \bigoplus_{V'_{2m-2k,F} \in \mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V_{2m-2k}))} \mathrm{Ind}_{Q_k}^H \left((\chi_s \delta_{\mathbf{Q}}^{1/2} \delta_{Q_k}^{-1/2})|_{\mathrm{GL}(X_k)} \otimes C_c^\infty \left(\mathrm{O}(V'_{2m-2k,F})\backslash \mathrm{O}(V_{2m-2k})\right)\right),
\end{aligned}$$

其中 un-Ind 表示非归一化诱导。

对于一个 $\in$ 一般线性群(X_k)，我们计算

$$\begin{aligned}(\chi_s\delta_{\mathbf{Q}}^{1/2}\delta_{Q_k}^{-1/2})(a) &= |\mathrm{N}_{E/F}(\det(a))|_F^s \cdot |\mathrm{N}_{E/F}(\det(a))|_F^{\frac{4m-2m-1}{2}} \cdot |\det(a)|_E^{-\frac{2m-k-1}{2}} \\ &= |\det(a)|_E^{s+\frac{k}{2}}.\end{aligned}$$

因此命题得证。 □

同理，$I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s)$ 具有一个G-滤过

$$0 = I_0(s) \subset I_1(s) \subset \cdots \subset I_{n+1}(s) = I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s)$$

其连续商$J_k(s) = I_{k+1}(s)/I_k(s)$ （对于 $0 \le k \le n$）描述如下。

命题 5.5。 对于 $G = \mathrm{Sp}(W)$ 以及 $0 \le k \le n$，有

$$J_k(s) = \mathrm{Ind}_{P_k}^G \left(|\det{}_{X_k}|_E^{s+\frac{k}{2}} \otimes C_c^\infty\left(\mathrm{Sp}(W_{F,2n-2k})^\tau \backslash \mathrm{Sp}(W_{2n-2k})\right)\right),$$

其中 X_k 是第 2.5 节中定义的 W 的各向同性子空间，且 P_k 是稳定 X 的 G 的抛物子群$_k$。特别地，

$$J_0(s) = I_1(s) \cong C_c^\infty\left(\mathrm{Sp}(W_F)^\tau \backslash \mathrm{Sp}(W)\right)$$

与 s 无关。

6. Multiplicities

对于 $\pi \in \mathrm{Rep}(\mathrm{Sp}(W))$ 和 $\sigma \in \mathrm{Rep}(\mathrm{O}(V))$，为简便起见，我们记

$$m_{W_F}(\pi) := \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C}), \quad m_{V_F'}(\sigma) := \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F')}(\sigma, \mathbb{C}),$$

其中 $V_F' \in \mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V))$。

6.1. 情形 $m > n$。

定理 6.1. L 且 $\pi \in$ 不可约表示$(\mathrm{Sp}(W))$。假设 $m > n$，且 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$ 是首次出现。

(1) 如果 π 是温和的，那么

$$m_{W_F}(\pi^\vee) \le m_{V_F}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)\right).$$

(2) 如果 π 是平方可积的，且 $m = n + 1$，那么

$$m_{W_F}(\pi^\vee) = m_{V_F}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)\right).$$

(3) 如果 π 是超尖点，则

$$m_{W_F}(\pi^\vee) = m_{V_F}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)\right).$$

注6.2。 (1) 回顾引理 4.1 可知 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi) = \Theta_{V,W,\psi}(\pi_\tau)$。直接验证可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi,\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)^\tau}(\pi_\tau,\mathbb{C}), \quad (\pi^\vee)_\tau = (\pi_\tau)^\vee.$$

因此，我们可以毫无歧义地用 $\pi_\tau^\vee$ 表示任一表达式，并得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi^\vee,\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)^\tau}(\pi_\tau^\vee,\mathbb{C}).$$

(2) 注意，若 π 是超尖点（分别为平方可积、温和），则 π_τ也具有相同性质。

证明。 在假设 $m > n$ 下，我们有

$$\dim V_F = \dim V_{\mathrm{c},F} > \dim \widetilde{V}_F = \dim \widetilde{V}_{\mathrm{c},F}.$$

Set

$$\widetilde{V} := \widetilde{V}_F \otimes_F E, \quad V_{\mathrm{c}} := V_{\mathrm{c},F} \otimes_F E, \quad \widetilde{V}_{\mathrm{c}} := \widetilde{V}_{\mathrm{c},F} \otimes_F E.$$

根据命题 5.2 和推论5.1，我们得到正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(\widetilde{V}_{\mathrm{c},F})}\left(\Theta_{\widetilde{V}_{\mathrm{c}},W,\psi}(\pi_\tau),\mathbb{C}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0),\pi_\tau\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi}(\pi_\tau),\mathbb{C}\right), \tag{6.1}$$

其中，当 π 为超尖点时，最后一个箭头是满射。

由于V 和 $\widetilde{V}$ 位于同一个 Witt 塔中，且 $\Theta_{V,W,\psi}(\pi_\tau)$ 是首次出现，因此我们有

$$\Theta_{\widetilde{V},W,\psi}(\pi_\tau) = 0.$$

若 V 与 V_{c} 同构，则 $\Theta_{V_{\mathrm{c}},W,\psi}(\pi_\tau) \neq 0$，从而

$$\Theta_{\widetilde{V}_{\mathrm{c}},W,\psi}(\pi_\tau) = 0.$$

若 V 与 V_{c} 不同构，由于 $\dim V + \dim V_{\mathrm{c}} = 4n+2$，根据 θ二分性，我们得到

$$\Theta_{\widetilde{V}_{\mathrm{c}},W,\psi}(\pi_\tau) = 0.$$

因此，在所有情况下，正合序列 (6.1) 给出一个单射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0),\pi_\tau\right) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}(\Theta_{V,W,\psi}(\pi_\tau),\mathbb{C}), \tag{6.2}$$

当 π 是超尖点时，它是一个同构。

将 s_0 替换为 $-s_0$，命题 5.2 给出正合序列

$$0 \longrightarrow R_{\mathbf{W}}(\widetilde{V}_F) \oplus R_{\mathbf{W}}(\widetilde{V}_{\mathrm{c},F}) \longrightarrow I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(-s_0) \longrightarrow R_{\mathbf{W}}(V_F) \cap R_{\mathbf{W}}(V_{\mathrm{c},F}) \longrightarrow 0.$$

由于 $\Theta_{\sim V,\ W,\ \psi}(\pi_\tau)$ 以及 $\Theta_{\widetilde{V}_c,\ W,\ \psi}(\pi_\tau)$ 均为零，推论 5.1 给出

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(R_{\mathbf{W}}(V_F)\cap R_{\mathbf{W}}(V_{c,F}),\pi_\tau\right)\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(-s_0),\pi_\tau\right). \tag{6.3}$$

结合该同构

$$R_{\mathbf{W}}(V_F)/R_{\mathbf{W}}(V_F)\cap R_{\mathbf{W}}(V_{c,F})\cong R_{\mathbf{W}}(\widetilde{V}_F)$$

与推论 5.1，我们得到一个单射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}(\Theta_{V,W,\psi}(\pi_\tau),\mathbb{C})\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(R_{\mathbf{W}}(V_F)\cap R_{\mathbf{W}}(V_{c,F}),\pi_\tau\right), \tag{6.4}$$

当 π 为超尖点时，它是一个同构。

结合单射（6.2）、同构（6.3）和单射（6.4），我们得到一串单射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0),\pi_\tau\right)\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}(\Theta_{V,W,\psi}(\pi_\tau),\mathbb{C})\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(-s_0),\pi_\tau\right), \tag{6.5}$$

当 π 为超尖点时，它们全都是同构。

我们现在讨论……之间的关系

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s),\pi_\tau\right)\quad\text{and}\quad\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\pi^\vee,\mathbb{C}\right).$$

回顾第5.3 节，$I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s)$ 具有一个 $\mathrm{Sp}(W)$-等变滤过，其连续商为$J_k(s)$，其中 $0\le k\le n$。

对于$k=0$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\pi^\vee,\mathbb{C}\right)&=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)^\tau}\left(\pi_\tau^\vee,\mathbb{C}\right)\\&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(C_c^\infty\left(\mathrm{Sp}(W_F)^\tau\backslash\mathrm{Sp}(W)\right),\pi_\tau\right).\\&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(J_0(s),\pi_\tau\right).\end{aligned}$$

对于 $0<k\le n$，命题 5.5 结合 Bernstein 互反律可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(J_k(s),\pi_\tau\right)\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(X_k)\times\mathrm{Sp}(W_{2n-2k})}\left(|\det_{X_k}|_E^{s+\frac{k}{2}}\otimes C_c^\infty\left(\mathrm{Sp}(W_{2n-2k,F})^\tau\backslash\mathrm{Sp}(W_{2n-2k})\right),R_{\overline{P}_k}(\pi_\tau)\right)$$

and

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Sp}(W)}\left(J_k(s),\pi_\tau\right)\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}(X_k)\times\mathrm{Sp}(W_{2n-2k})}\left(|\det_{X_k}|_E^{s+\frac{k}{2}}\otimes C_c^\infty\left(\mathrm{Sp}(W_{2n-2k,F})^\tau\backslash\mathrm{Sp}(W_{2n-2k})\right),R_{\overline{P}_k}(\pi_\tau)\right).$$

若 π 平方可积（分别地，温和），则 Casselman 判据表明，一般线性群（X_k）的中心在 $R^{P_k}(\pi)$ 的任一不可约子商上的作用由形如 $\mu|\cdot|^\alpha$ 的特征标给出，其中 μ是酉的，且 $\alpha<0$（分别地，$\alpha\le 0$）。因此，

对于温和的 $\bullet$ 以及任意的 $0<k\leq n$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(J_k(s_0),\pi_\tau\right)=0,\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Sp}(W)}\left(J_k(s_0),\pi_\tau\right)=0;$$

- 若 π 是平方可积的，且 $m=n+1$，则对所有 $0<k\leq n$，有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(J_k(-s_0),\pi_\tau\right)=0,\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Sp}(W)}\left(J_k(-s_0),\pi_\tau\right)=0.$$

因此，对于温和的 π，有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\pi^\vee,\mathbb{C}\right)\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0),\pi_\tau\right),\tag{6.6}$$

而对于满足 $m=n+1$ 的平方可积 π，

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\pi^\vee,\mathbb{C}\right)\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(-s_0),\pi_\tau\right).\tag{6.7}$$

最后，对于超尖点 π，显然有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\pi^\vee,\mathbb{C}\right)\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s),\pi_\tau\right),\forall s\in\mathbb{C}.\tag{6.8}$$

将 (6.5) 与同构 (6.6)–(6.8) 结合起来，即得定理 6.1。

□

注 6.3. 我们预期，若 π 是 $\mathrm{Sp}(W_F)$-区分的，则对每个 $s\in\mathbb{C}$，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s),\pi_\tau\right)\neq 0$。若此结论成立，则 (6.2) 直接推出 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$ 是 $\mathrm{O}(V_F)$-区分的。

6.2. 情形 $m\leq n$。

定理 6.4. 设 $\sigma\in$ 不可约表示(正交群(V))。假设 $m\leq n$，且 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma)$ 是首次出现。

(1) 若 σ 是温和的，则

$$m_{W_F}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma)\right)\geq\sum_{V'_F\in\mathrm{H}^1(E/F,\mathrm{O}(V))}m_{V'_F}\left(\sigma^\vee\right).$$

(2) 若 σ 是平方可积的且 $m=n$，则

$$m_{W_F}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma)\right)=\sum_{V'_F\in\mathrm{H}^1(E/F,\mathrm{O}(V))}m_{V'_F}\left(\sigma^\vee\right).$$

(3) 若 σ 是超尖点的，则

$$m_{W_F}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma)\right)=\sum_{V'_F\in\mathrm{H}^1(E/F,\mathrm{O}(V))}m_{V'_F}\left(\sigma^\vee\right).$$

证明。 证明与定理 6.1的证明类似。我们仅给出一个梗概。

根据命题 5.3，我们有正合序列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F)\otimes\det,\sigma\right)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0),\sigma\right)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F),\sigma\right).$$

注意到，正交群$(\mathbf{V}_\tau)$ 的行列式特征 det 限制到子群正交群(V)后，与 $\mathrm{N}_{E/F}\circ\det^{\mathrm{O}(V)}$ 重合，而后者在正交群(V)上恒等于 $\mathbf{1}$。因此

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F)\otimes\det,\sigma\right)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(R_{\mathbf{V}_\tau}(\widetilde{W}_F),\sigma\right).$$

根据推论 5.1，后一个空间同构于

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(\widetilde{W}_F)}\left(\Theta_{V,\widetilde{W},\psi_\tau}(\sigma),\mathbb{C}\right).$$

由于假设 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma)$ 是首次出现，因此该 Hom 空间为零。因此，由上述正合序列可得一个单射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0),\sigma\right)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma),\mathbb{C}\right).$$

将命题 $-s_0$ 替换为 s_0，可得命题 5.3 中的另一个单射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma),\mathbb{C}\right)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(s_0),\sigma\right).$$

综上，我们得到一系列单射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0),\sigma\right)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma),\mathbb{C}\right)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(s_0),\sigma\right).\tag{6.9}$$

当 σ 是超尖点表示时，式（6.9）中的两个单射都是同构。

退化主系列$I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(s)$ 具有一个带有连续商的 $\mathrm{O}(V)$-等变滤过，其连续商为 $J_k(s)$ 其中 $0\leq k\leq r$。结合命题5.4 与 Casselman 判据可得：

- 若 σ 是温和的，则

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(J_0(-s_0),\sigma\right)\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0),\sigma\right);\tag{6.10}$$

- 若 σ 是平方可积的且 $m=n$，则

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(J_0(s_0),\sigma\right)\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(s_0),\sigma\right).\tag{6.11}$$

对于超尖点 σ，显然有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(J_0(s),\sigma\right)\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(s),\sigma\right),\forall s\in\mathbb{C}.\tag{6.12}$$

另一方面，命题 5.4 给出

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}\left(J_0(s),\sigma\right)\cong\bigoplus_{V_F'\in\mathrm{H}^1(E/F,\mathrm{O}(V))}\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F')}(\sigma^\vee,\mathbb{C}).$$

定理 6.1 由（6.9）、（6.10）、（6.11）和（6.12）即可得出。

□

7. 局部周期的转移

7.1. 对称空间上的调和分析。 我们先回顾一下关于p进对称空间上的调和分析的一些基本事实。

设 G 为 F 上的约化群，ι 为 F 上 G 的对合。我们用 $G := G(F)$ 表示 F-有理点群，并用 $H := G^\iota$ 表示由 ι 固定的点子群。齐性空间 $X := H\backslash G$ 是一个对称空间。设 Z 为 G 的中心。

对于 $\alpha \in$ 同态空间$_H(\pi, \mathbb{C})$ 以及 $v \in \pi$，广义矩阵系数 $\varphi_{\alpha,v} : G \to \mathbb{C}$ 由下式定义

$$\varphi_{\alpha,v}(g) = \alpha(\pi(g)v).$$

该函数是 H-不变的，因此下降为对称空间 $X = H\backslash G$ 上的一个函数。

设 π 为 G 的一个 H-可区分表示，$\alpha \in$ 同态空间$_H(\pi, \mathbb{C})$ 为一个非零局部周期。我们现在回顾 α 与 π 的若干解析性质。

(1) 如果对于每个 $v \in \pi$，广义矩阵系数 $\varphi_{\alpha,v}$ 在模去ZH后具有紧支撑，则称周期 α 为相对超尖点。如果每个 $\alpha \in \mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C})$ 都是相对超尖点的，则称表示 π 为H-相对超尖点。

(2) 假设 π 具有酉中心特征。

- 周期 α 是相对平方可积的，如果 $\varphi_{\alpha,v} \in L^2(ZH\backslash G)$ 对所有 $v \in \pi$都成立。
- 如果对于每个 $\epsilon > 0$ 以及所有$v \in \pi$，α 周期满足 $\varphi_{\alpha,v} \in L^{2+\epsilon}(ZH\backslash G)$，则称其为相对温和的。

如果对于每个 $\alpha \in \mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C})$ 都是相对平方可积的（相应地，都是相对温和的），则称表示 π 为H-相对平方可积（相应地，为H-相对温和）。

一个基本事实（参见 [KT08], [KT10] 和 [DH14]）是：任何 H-区分表示 π 若为超尖点（相应地，为平方可积、温和），则自动是 H-相对超尖点的（相应地，是 H-相对平方可积的、H-相对温和的）。

我们回顾以下术语。若分裂环面 S 属于 G，则称其为 ι-分裂的，如果对于任意$s \in S$，都有 $\iota(s) = s^{-1}$。若抛物子群 P 属于 G，则称其为 ι-抛物子群，如果 P 与 $\iota(P)$ 相对。给定一个 ι-抛物子群 P，记 S_P 为 $P \cap \iota(P)$的中心中的最大 ι-分裂环面，并定义

$$S_P^+ := \{s \in S_P \mid |\alpha(s)|_F \leq 1, \ \forall \alpha \in \Delta(S_P, P)\},$$

其中 $\Delta(S_P, P)$ 是 S_P 在 P的李代数中的单根集合。对称空间 $X = H\backslash G$（见 [BO07，定理 1。1]）的弱 Cartan 分解断言，存在一个紧子集 $\Omega \subset G$ 以及一个有限集合 $\mathcal{P}$，其中包含 ι-抛物子群 G 的极小者，使得

$$G = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} HS_P^+\Omega. \tag{7.1}$$

令 Ξ 为 G上的 Harish-Chandra函数，其基本性质在 [Wal03，第 II 节1]中有所回顾。定义对称空间 Ξ^X 上的函数 X 如下：

$$\Xi^X(Hg) := \Xi(s(g))^{1/2}, \quad g \in G,$$

其中 $s(g) = \iota(g)^{-1}g$。在 G 上固定一个高度函数 $\|\cdot\|$。对于 $d \in \mathbb{Z}$，令

$$\mathrm{N}_d(Hg) := (1 + \log \|s(g)\|)^d.$$

对于任意极小 ι-抛物子群 $P \in \mathcal{P}$，存在非负整数 $d,d' \in \mathbb{N}$，使得（参见 [Lag08，命题 6]）

$$\delta_P^{1/2}(a)\mathrm{N}_{-d}(Ha) \ll \Xi^X(Ha) \ll \delta_P^{1/2}(a)\mathrm{N}_{d'}(Ha), \quad \forall a \in S_P, \tag{7.2}$$

以及（参见 [KT10，命题 2。6]）

$$\mathrm{vol}(H\backslash Ha\Omega) \asymp \delta_P^{-1}(a), \quad \forall a \in S_P^+. \tag{7.3}$$

这里 $A \ll B$ 表示存在一个常数 $c > 0$，使得 $A \leq cB$；而 $A \asymp B$ 表示 $A \ll B$与 $B \ll A$ 均成立。

我们引入以下函数空间。令

$$C_{\mathrm{sm}}(X) := \bigcup_J C(X/J)$$

表示 X 上函数的空间，这些函数对于某个紧开子群$J \subset G$右J-不变。我们用 $\mathcal{C}(X)$（分别用 $\mathcal{C}_{\mathrm{temp}}(X)$）表示 X 上的施瓦茨函数（分别为温和函数）空间。这些是$C_{\mathrm{sm}}(X)$ 的子空间，其特征在于满足增长条件

$$|f(x)| \ll \Xi^X(x)\mathrm{N}_{-d}(x), \quad \forall x \in X, \tag{7.4}$$

在施瓦茨情形下，该条件要求对每个$d \in \mathbb{N}$ 成立；在温和情形下，则要求对某个$d \in \mathbb{Z}$ 成立。一个基本事实是，如果 $\alpha \in \mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C})$ 是相对平方可积的（分别为相对温和的），那么相应的广义矩阵系数满足$\varphi_{\alpha,v} \in \mathcal{C}(X)$（分别为 $\varphi_{\alpha,v} \in \mathcal{C}_{\mathrm{temp}}(X)$）。

7.2. **基变换倍增 ζ 积分。** 在本小节中，我们引入基变换倍增 ζ 积分，并讨论其一些基本性质。

我们在两种平行的情形下进行讨论。令$\mathbf{G}$ 表示 $\mathrm{Sp}(\mathbf{W})$ 或 $\mathrm{O}(\mathbf{V}_\tau)$中的一个，并相应地令$G$ = 为 $\mathrm{Sp}(W)$ 或 $\mathrm{O}(V)$。令H = 为 $\mathrm{Sp}(W_F)$（分别为 $\mathrm{O}(V_F)$），并令X = 为$H\backslash G$ 所对应的伽罗瓦对称空间。

设 $\mathbf{P}$ 为 $\mathbf{G}$ 中稳定拉格朗日子空间 $\mathbf{X}'$（在辛情形中）或 τV_F（在正交情形中）的 Siegel抛物子群；精确定义见第 5 节。

设 $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$。给定退化主系列 $I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s)$ 的全纯截面 $\mathcal{F}$、一个周期 $\alpha \in$ 同态空间$_H(\pi^\vee, \mathbb{C})$ 以及一个向量$v \in \pi^\vee$，我们定义基变换倍增 ζ 积分如下:

$$Z(s, \alpha, \mathcal{F}, v) := \int_X \mathcal{F}(g_\tau)\alpha(\pi^\vee(g)v)\,\mathrm{d}g, \tag{7.5}$$

其中

$$g_\tau := \begin{cases} \varphi_\tau(g) = c_\tau g c_\tau^{-1}, & \text{if } G = \mathrm{Sp}(W), \\ g, & \text{if } G = \mathrm{O}(V). \end{cases}$$

在辛情形下，该积分有一个等价表达式

$$Z(s, \alpha, \mathcal{F}, v) = \int_{X^\tau} \mathcal{F}(g)\alpha(\pi_\tau^\vee(g)v)\,\mathrm{d}g,$$

其中$X^\tau := \mathrm{Sp}(W_F)^\tau \backslash \mathrm{Sp}(W)$。

该积分是 Piatetski-Shapiro 与 Rallis 所引入的经典倍增 ζ 积分的直接类比 [PSR87]。

易见，若 α 是相对超尖点的，则积分$Z(s, \alpha, \mathcal{F}, v)$ 对每个$s \in \mathbb{C}$绝对收敛。对于使这些积分绝对收敛的固定$s \in \mathbb{C}$，它们定义一个G不变线性形式

$$Z(s, \alpha, -, -) : I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s)^\tau \otimes \pi^\vee \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F} \otimes v \mapsto Z(s, \alpha, \mathcal{F}, v),$$

其中我们设 $I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s)^\tau := I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s) \circ \varphi_\tau$。

本小节余下部分将证明以下关于基变换倍增 ζ 积分收敛性的命题。为同时处理辛情形和正交情形，我们在下文中假设

$$\dim W = \dim V = 2n.$$

命题 7.1。 (1) 若 α 相对平方可积，则 $Z(s, \alpha, \mathcal{F}, v)$ 在 $\mathrm{Re}(s) \geq -\frac{1}{2}$时绝对收敛。

(2) 若 α 相对温和，则 $Z(s, \alpha, \mathcal{F}, v)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2}$时绝对收敛。

7.2.1. 极大 ι-分裂环面。为了研究积分（7.5），我们需要对 ι-分裂的G的极大环面进行分类，其中 ι 表示伽罗瓦对合。定义$n \times n$ 反对角矩阵

$$w_n := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n.$$

Set

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & w_n \\ -w_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_n := \begin{pmatrix} 1 & w_n \\ -\tau w_n & \tau \end{pmatrix}.$$

对于任意$k \leq n$，令

$$A_k := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & a_k^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_1^{-1} \end{pmatrix} \mid a_1, ..., a_k \in F^\times \right\}$$

and

$$S_k := \gamma_k A_k \gamma_k^{-1}.$$

我们以自然的方式将A_k与$(F^\times)^k$对应起来。通过嵌入将A_k视为A_n的子环面

$$(a_1, ..., a_k) \mapsto (a_1, ..., a_k, 1, ..., 1),$$

类似地，通过相同的对应关系，将S_k视为S_n的子环面。

对于伽罗瓦对称对 (GL$_{2n}$(E),GL$_{2n}$(F))，已知 S$_n$ 是 GL$_{2n}$(E) 的极大 ι-分裂环面。此外，GL$_{2n}$(E) 的每个 ι-分裂环面都与某个 S$_k$ 经 GL$_{2n}$(F) 共轭，其中 k $\leq$ n（见 [Smi18，第 5.1]节）。

令 $G = \mathrm{Sp}(W)$。设W_F 上的辛形式由矩阵J_n表示。直接验证可知S_n 包含于G中；因此它是G的极大 ι-分裂环面。此外，可得 H^1(F,$Z_G(S_n) \cap H$) 是平凡的。因此G的每个极大 ι-分裂环面都与S_n在H下共轭。对于$a \in A_n$，记

$$g(a) := \gamma_n a \gamma_n^{-1} \in S_n.$$

令$G = \mathrm{O}(V)$。由于 G 的任意极大 ι-分裂环面特别是 GL$_{2n}(E)$的一个 ι-分裂环面，因此它必与 S_r在 GL$_{2n}(F)$中共轭，其中r 表示其分裂秩。若$S = \delta S_r \delta^{-1}$ 与 GL$_{2n}(F)$ 一起是 G的一个极大 ι- 分裂环面，则对于 $a \in A_r$，我们定义

$$g(a) := \delta \gamma_r a \gamma_r^{-1} \delta^{-1} \in S.$$

7.2.2. 全纯截面的渐近行为。置

$$A_k^+ := \left\{ (a_1, ..., a_k) \in (F^\times)^k \mid |a_1|_F \leq \cdots \leq |a_k|_F \leq 1 \right\}.$$

引理 7.2. (1) 设 $G = \mathrm{Sp}(W)$。对于 $\in A_n$，用 $g(a) \in S_n$ 表示在第 7.2.1 节中构造的元素。则对每个 $\mathcal{F} \in I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s)$ 以及 $\in A_n^+$,

$$|\mathcal{F}(g(a)_\tau)| \ll \prod_{i=1}^{n} |a_i|_E^{\mathrm{Re}(s)+\rho}, \quad \rho := \frac{2n+1}{2}.$$

(2) 设 G = 正交群(V) 并设 S 为 G 的一个极大 ι-分裂环面。对于 $\in A_r$，用 $g(a)$ $\in S$ 表示相应的元素。则对任意 $\mathcal{F} \in I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s)$ 以及 $\in A_r^+$，

$$|\mathcal{F}(g(a))| \ll \prod_{i=1}^{r} |a_i|_E^{\mathrm{Re}(s)+\rho}, \quad \rho := \frac{2n-1}{2}.$$

证明。 沿用 [GI14，引理 9 的证明4]，，只需考虑在 [PSR87 第 6 节中构造的特定截面 $\mathcal{F}_0$ of$I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ (s) 。接下来，我们将调整*loc. cit.* 中的论证，显式计算$\mathcal{F}_0(g(a)\tau)$ 。

设 G = Sp(W)。我们将$\mathbf{G}$ = Sp$(\mathbf{W})$ 中的元素相对于分解写成分块形式

$$\mathbf{W} = W_F \oplus \tau W_F = X_F \oplus Y_F \oplus \tau X_F \oplus \tau Y_F.$$

为简洁起见，我们也将 a = diag$(a_1,\ldots, a_n)$ 和 w = w_n记作。于是

$$\begin{aligned} g(a)_\tau = c_\tau \gamma_n a \gamma_n^{-1} c_\tau^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & w \\ -w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \\ & wa^{-1}w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w \\ -w & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & w \\ -w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \\ & wa^{-1}w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -w \\ w & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

将其改写为 Sp$(\mathbf{W})$ 中的矩阵可得

$$g(a)_\tau = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & w & & \\ -w & 1 & & \\ & & 1 & w \\ & & -w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & & & \\ & wa^{-1}w & & \\ & & a & \\ & & & wa^{-1}w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -w & & \\ w & 1 & & \\ & & 1 & -w \\ & & w & 1 \end{pmatrix}.$$

令 Φ_0 为 $\mathrm{M}_{2n\times 4n}(\mathcal{O}_F)$的特征函数，其中 $\mathrm{M}_{2n\times 4n}$ 表示 $2n$ $\times$ $4n$矩阵的集合。定义截面 $\mathcal{F}_0$ 如下

$$\mathcal{F}_0(g) := \xi(s)^{-1} \int_{\mathrm{GL}_{2n}(F)} \Phi_0((Z_1,0,0,Z_2)g) |\det Z|_F^s \, \mathrm{d}Z,$$

其中Z $\in$ 一般线性群$_{2n}(F)$ 写成分块形式Z = (Z_1,Z_2) ，其中$Z_i \in \mathrm{M}_{2n\times n}(F)$，且

$$\xi(s) := \int_{\mathrm{GL}_{2n}(F)} \Phi_0((Z_1,0,0,Z_2)) |\det Z|_F^s \, \mathrm{d}Z.$$

那么， $\mathcal{F}_0$ 属于退化主系列 $I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s-\rho)$。

通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}&(Z_1,0,0,Z_2)\cdot g(a)_\tau\\ =&Z\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&w\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{a+a^{-1}}{2}&\frac{-a+a^{-1}}{2}&&\\&&\frac{-a+a^{-1}}{2}&\frac{a+a^{-1}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&w&&\\&&1&\\&&&w\end{pmatrix}}_{h(a):=}.\end{aligned}$$

这促使我们引入辅助函数

$$\kappa(h):=\xi(s)^{-1}\int_{\mathrm{GL}_{2n}(F)}\Phi_0(Zh)|\det Z|^s\,\mathrm{d}Z,\quad h\in\mathrm{M}_{2n\times 4n}(F).$$

注意到

$$\mathcal{F}_0(g(a)_\tau)=\kappa(h(a)).$$

由 κ 的不变性与齐次性（见 [PSR87，引理6.8]），我们有

$$\kappa(h)=\kappa'(h)^{-s},$$

其中 $\kappa'(h):=\max_{M\in\mathcal{M}(h)}(|\text{行列式 }M|)$，且 $\mathcal{M}(h)$ 表示h的所有$2n\times 2n$ 子式的集合。直接计算表明

$$|\kappa'(h(a))|\gg\prod_{i=1}^n|a_i|_F^{-2}.$$

因此，

$$|\mathcal{F}_0(g(a)_\tau)|\ll\prod_{i=1}^n|a_i|_E^{\mathrm{Re}(s)}.$$

上述证明经过简单调整后，也适用于$G=$正交群(V)的情形。设$G=$正交群(V)，并令$S=\delta\gamma_r A_r\gamma_r^{-1}\delta^{-1}$，其中 $\delta\in$一般线性群$_{2n}(F)$。我们相对于分解将$\mathbf{G}=$正交群$(\mathbf{V}_\tau)$ 中的元素写成分块形式

$$\mathbf{V}_\tau=\tau V_F\oplus V_F.$$

注意，元素$g\in$一般线性群$_{2n}(E)$ 可写为$g=A+\tau B$，其中A、$B\in\mathrm{M}_{2n}(F)$。将其视为通过限制标量得到的一般线性群$_{4n}(F)$ 中的矩阵时，它具有如下分块形式

$$g=\begin{pmatrix}A&\beta B\\B&A\end{pmatrix},$$

其中 $\beta=\tau^2\in F^\times$。

定义

$$\mathcal{F}_0(g):=\xi(s)^{-1}\int_{\mathrm{GL}_{2n}(F)}\Phi_0((Z,0)g)|\det Z|^s\,\mathrm{d}Z,$$

其中

$$\xi(s) := \int_{\mathrm{GL}_{2n}(F)} \Phi_0((Z,0))|\det Z|^s \,\mathrm{d}Z.$$

那么， $\mathcal{F}_0$ 属于退化主系列 $I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s-\rho)$。

对于 $g = A + \tau B \in$ 正交群(V)，有

$$(Z,0)g = Z(A,\beta B).$$

特别地，对于

$$g(a) = \delta\gamma_r a\gamma_r^{-1}\delta^{-1} \in S,$$

直接计算可得

$$(Z,0)\cdot g(a)$$

$$= Z\cdot\delta\underbrace{\begin{pmatrix}1 & \\ & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{a+a^{-1}}{2} & & & \frac{-a+a^{-1}}{2}\\ & \frac{a+a^{-1}}{2} & \frac{\beta(-a+a^{-1})}{2} & \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & w & & \\ & & 1 & \\ & & & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta^{-1} & \\ & \delta^{-1}\end{pmatrix}}_{h(a):=}.$$

因此，

$$\mathcal{F}_0(g(a)) = \kappa(h(a)) = \kappa'(h(a))^{-s}.$$

于是可直接得到估计

$$|\mathcal{F}_0(g(a))| \ll \prod_{i=1}^{r}|a_i|_E^{\mathrm{Re}(s)}.$$

□

7.2.3. 证明的完成。 现在完成命题 7.1的证明。

命题的证明7.1。 我们对 $G = \mathrm{Sp}(W)$证明此命题；正交情形可通过相同的论证得到，只需作显然的记号变更。

设 P 是 ι-抛物子群 G 的一个极小者，并令 $S := S_P$。由弱 Cartan 分解（7.1）和体积估计（7.3），只需研究积分

$$\int_{S^+}\mathcal{F}(a_\tau)\varphi_{\alpha,v}(a)\delta_P^{-1}(a)\,\mathrm{d}a.$$

将S 等同于$(F^\times)^n$。则

$$\delta_P(a) = \prod_{i=1}^{n}|a_i|_E^{2\rho+1-2i}, \quad a = (a_1,\ldots,a_n)\in S.$$

首先假设 α 是相对平方可积的。由（7.2）和（7.4），对任意$d \in \mathbb{N}$ 我们有

$$|\varphi_{\alpha,v}(a)| \ll \delta_P(a)^{1/2}(a)\mathrm{N}_{-d}(a).$$

应用引理7.2，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{S^+} |\mathcal{F}(a_\tau)\varphi_{\alpha,v}(a)|\delta_P^{-1}(a)\,\mathrm{d}a &\ll \int_{S^+}\prod_{i=1}^{r}|a_i|_E^{\mathrm{Re}(s)+\rho}\cdot\delta_P^{1/2}(a)\mathrm{N}_{-d}(a)\cdot\delta_P^{-1}(a)\,\mathrm{d}a\\ &= \int_{S^+}\prod_{i=1}^{n}|a_i|_E^{\mathrm{Re}(s)+i-1/2}\mathrm{N}_{-d}(a)\,\mathrm{d}a.\end{aligned}$$

标准估计表明，当 $\mathrm{Re}(s) \geq -\frac{1}{2}$ 且 d取值充分大时，该积分绝对收敛。 α 为相对温和的情形也可类似处理，只需对相对温和的周期使用（7.4）中的相应估计。 □

7.3. **测试函数**。 从现在起，我们回到一般情形

$$\dim W_F = 2n, \quad \dim V_F = 2m,$$

并继续 第 5 节和 6 节中的记号。我们将相关的伽罗瓦对称空间记为

$$X_{W_F} := \mathrm{Sp}(W_F)\backslash\mathrm{Sp}(W), \quad X_{V_F} := \mathrm{O}(V_F)\backslash\mathrm{O}(V).$$

回顾一下，O(V) ×Sp(W) 的魏尔表示 $\omega_{V,W,\psi}$ 实现于施瓦茨空间 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{Y})$ 上，而 $\mathrm{O}(\mathrm{V}_F)$ × Sp(W) 的魏尔表示 $\omega_{V_F,\mathrm{W},\psi_F}$ 实现于施瓦茨空间 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{Y}^\square)$ 上。我们将 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{Y}^\square)$ 与 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{Y})$ 视为相同。此外，$\omega_{V_F,\mathrm{W},\psi_F}$ 还可在施瓦茨空间 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{Y}^{\square'})$ 上以另一种方式实现，并且我们有交织算子

$$\mathcal{I}_{\mathbf{W}} : C_c^\infty(\mathrm{Y}) = C_c^\infty(\mathrm{Y}^\square) \longrightarrow C_c^\infty(\mathrm{Y}^{\square'}),$$

如（3.19）中所定义。将 $R_{\mathbf{W}}$ 与 $\mathcal{I}_{\mathbf{W}}$ 复合，并施加 τ-扭曲，我们得到一个线性映射

$$p_{V_F} : C_c^\infty(\mathrm{Y}) \longrightarrow C_{\mathrm{sm}}\left(X_{W_F}\right), \tag{7.6}$$

其显式表达式为

$$\begin{aligned}p_{V_F}(\phi)(g) &= \omega_{V_F,\mathbf{W},\psi_F}(g_\tau)(\mathcal{I}_{\mathbf{W}}(\phi))(0)\\ &= \mathcal{I}_{\mathbf{W}}(\omega_{V,W,\psi}(g_\tau)\phi)(0)\\ &= \mathcal{I}_{\mathbf{W}}(\omega_{V,W,\psi_\tau}(g)\phi)(0).\end{aligned}$$

以完全类似的方式，利用魏尔表示 $\omega_{V_c,W,\psi}$ 和 $\omega_{V_{c,F},\mathbf{W},\psi_F}$，我们定义一个映射

$$p_{V_{c,F}} : C_c^\infty(\mathrm{Y}_c) \longrightarrow C_{\mathrm{sm}}(X_{W_F}),$$

其中 $\mathrm{Y}_c = Y \otimes_E V_c$。

我们还有 O(V) ×Sp(W) 的韦伊表示 ω_{V,W,ψ_τ}，以及 O(V_τ) ×Sp(W_F) 的韦伊表示 $\omega_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}$；二者都实现在共同的施瓦茨空间 $C_c^\infty(\mathbb{Y})=C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau)=C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau^\square)$ 上。通过复合交织算子 (3.22)

$$\mathcal{I}_{\mathbf{V}_\tau}: C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau^\square)\longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{Y}_\tau^{\square'})$$

利用 Rallis 映射 $R\mathbf{v}_\tau$，我们得到一个线性映射

$$q_{W_F}: C_c^\infty(\mathbb{Y})\longrightarrow C_{\mathrm{sm}}(X_{V_F}), \tag{7.7}$$

其具体表达式为

$$q_{W_F}(\phi)(h)=\omega_{\mathbf{V}_\tau,W_F,\psi_F}(h)(\mathcal{I}_{\mathbf{V}_\tau}(\phi))(0)=\mathcal{I}_{\mathbf{V}_\tau}(\omega_{V_\tau,W,\psi}(h)\phi)(0).$$

引理 7.3。对于任意 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{Y})$、$g\in \mathrm{Sp}(W)$ 以及 $h\in$ 正交群(V)，有

$$p_{V_F}(\omega_{V,W,\psi_\tau}(h)\phi)(g)=q_{W_F}(\omega_{V,W,\psi_\tau}(g)\phi)(h).$$

证明。根据 p^{V_F} 和 q^{W_F} 的定义，结合引理 3.1，可得

$$\begin{aligned}p_{V_F}(\omega_{V,W,\psi_\tau}(h)\phi)(g)&=\mathcal{I}_{\mathbf{W}}(\omega_{V,W,\psi_\tau}(g)\omega_{V,W,\psi_\tau}(h)\phi)(0)\\&=\mathcal{I}_{\mathbf{V}_\tau}(\omega_{V,W,\psi_\tau}(h)\omega_{V,W,\psi_\tau}(g)\phi)(0)\\&=q_{W_F}(\omega_{V,W,\psi_\tau}(g)\phi)(h).\end{aligned}$$

□

定义 7.4。(1) 令 $\mathcal{S}(X^{W_F})$ 为该映射的像

$$p_{V_F}\oplus p_{V_{c,F}}: C_c^\infty(\mathbb{Y})\oplus C_c^\infty(\mathbb{Y}_c)\longrightarrow C_{\mathrm{sm}}(X_{W_F}),$$

并令 $\mathcal{S}(X^{V_F})$ 为 p^{W_F} 的像。我们称 $\mathcal{S}(X^{W_F})$ 和 $\mathcal{S}(X^{V_F})$ 为测试函数空间。

(2) 对于$f\in C_{\mathrm{sm}}(X^{W_F})$和$f'\in C_{\mathrm{sm}}(X^{V_F})$，如果存在 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{Y})$ 使得……，则称f与f'彼此对应。

$$f=p_{V_F}(\phi),\quad f'=q_{W_F}(\phi).$$

注 7.5。根据定义，我们得到以下描述。对于辛侧，

$$\mathcal{S}(X_{W_F})=(R_{\mathbf{W}}(V_F)+R_{\mathbf{W}}(V_{c,F}))^\tau|_{\mathrm{Sp}(W)},$$

其中上标 τ 表示与 φ_τ 复合。对于正交侧，我们有

$$\mathcal{S}(X_{V_F})=R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F)|_{\mathrm{O}(V)}=(R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F)+R_{\mathbf{V}_\tau}(W_F)\otimes\det)|_{\mathrm{O}(V)},$$

因为 正交群$\mathbf{v}_\tau(W_F)$ = 正交群$\mathbf{v}_\tau(W_F)$ ⊗ 行列式。

命题 7.6。若 $m > n$，则

$$C_c^\infty(X_{W_F}) \subset \mathcal{S}(X_{W_F}) \subset \mathcal{C}(X_{W_F}).$$

若 $m \leq n$，则

$$C_c^\infty(X_{V_F}) \subset \mathcal{S}(X_{V_F}) \subset \mathcal{C}(X_{V_F}).$$

证明。由注 7.5、命题 5.2 和命题 5.3 可得

$$\mathcal{S}(X_{W_F}) = I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0)^\tau|_{\mathrm{Sp}(W)}, \quad \mathcal{S}(X_{V_F}) = I_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{H}}(-s_0)|_{\mathrm{O}(V)}.$$

注意到

$$C_c^\infty(X_{W_F}^\tau)^\tau = C_c^\infty(X_{W_F}).$$

由命题 5.5 和命题 5.4 可得

$$C_c^\infty(X_{W_F}) \subset \mathcal{S}(X_{W_F}), \quad C_c^\infty(X_{V_F}) \subset \mathcal{S}(X_{V_F}).$$

退化主系列的渐近行为（引理 7.2）进一步给出

$$\mathcal{S}(X_{W_F}) \subset \mathcal{C}(X_{W_F}), \quad \mathcal{S}(X_{V_F}) \subset \mathcal{C}(X_{V_F}).$$

□

注 7.7。此外，引理 7.2 蕴含以下温和性:

$$\mathcal{S}(X_{W_F}) \subset \mathcal{C}_{\mathrm{temp}}(X_{W_F}) \quad \text{for } m = n,$$

and

$$\mathcal{S}(X_{V_F}) \subset \mathcal{C}_{\mathrm{temp}}(X_{V_F}) \quad \text{for } m = n+1.$$

7.4. 周期的转移。令 $\pi \in$ 不可约表示 $(\mathrm{Sp}(W))$。对于 $\alpha \in$ 同态空间$_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi^\vee, \mathbb{C})$，我们形式化地定义一个线性形式

$$T_{W_F}(\alpha) : \omega_{V,W,\psi_\tau} \otimes \pi^\vee \longrightarrow \mathbb{C}$$

by

$$\begin{aligned} T_{W_F}(\alpha)(\phi, v) &= \int_{X_{W_F}} p_{V_F}(\phi)(g)\alpha\left(\pi^\vee(g)v\right)\, \mathrm{d}g \\ &= \int_{X_{W_F}} \mathcal{I}_{\mathbf{W}}(\omega_{V,W,\psi_\tau}(g)\phi)(0)\alpha\left(\pi^\vee(g)v\right)\, \mathrm{d}g. \end{aligned} \tag{7.8}$$

类似地，对于 $\sigma \in$ 不可约表示 (正交群(V)) 和 $\beta \in$ 同态空间$_{\mathrm{O}(V_F)}(\sigma^\vee, \mathbb{C})$，我们形式化地定义

$$T_{V_F}(\beta) : \omega_{V,W,\psi_\tau} \otimes \sigma^\vee \longrightarrow \mathbb{C}$$

by

$$T_{V_F}(\beta)(\phi, w) = \int_{X_{V_F}} q_{W_F}(\phi)(h)\beta\left(\sigma^\vee(h)w\right)\, \mathrm{d}h. \tag{7.9}$$

线性形式 $T^{W_F}(\alpha)$ 和 $T^{V_F}(\beta)$ 在（7.8）和（7.9）中的积分绝对收敛时有良好定义。

引理 7.8。（1）线性形式 T^{W_F}（α）在以下情况下定义良好：

- α 是相对超尖点的；
- α 是相对平方可积的，且 $m \geq n$；
- α 是相对温和的，且 $m > n$。

（2）线性形式 T^{V_F}（β）在以下情况下定义良好：

- β 是相对超尖点的；
- β 是相对平方可积的，且 $m \leq n+1$；
- β 是相对温和的，且 $m \leq n$。

证明。这可由命题 7.6 与注记 7.7直接得出。 □

此后，我们假设 $T^{W_F}(\alpha)$ 与 $T^{V_F}(\beta)$ 均是良定义的。显然，$T^{W_F}(\alpha)$是 $\mathrm{Sp}(W)$-不变的，且 $T^{V_F}(\beta)$ 是正交群(V)-不变的。因此，由大 theta 提升的定义以及基变换跷跷板恒等式，$T^{W_F}(\alpha)$ 下降为一个线性形式

$$\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi) \longrightarrow \mathbb{C},$$

它是正交群(V_F)-不变的。我们继续将这个诱导映射记为 $T^{W_F}(\alpha)$；因此

$$T_{W_F}(\alpha) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi), \mathbb{C}\right). \tag{7.10}$$

更具体地说，令 $\theta(\phi,v)$ 表示 $\phi \otimes v$ 在典范满射下的像

$$\omega_{V,W,\psi_\tau} \otimes \pi^\vee \longrightarrow \Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi).$$

则 $T^{W_F}(\alpha)$ 由下述条件刻画

$$T_{W_F}(\alpha)(\theta(\phi,v)) := T_{W_F}(\alpha)(\phi,v).$$

以完全类似的方式，我们得到一个局部周期

$$T_{V_F}(\beta) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma), \mathbb{C}\right). \tag{7.11}$$

根据引理7.8，线性映射

$$T_{W_F} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\pi^\vee, \mathbb{C}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi), \mathbb{C}\right), \quad \alpha \mapsto T_{W_F}(\alpha), \tag{7.12}$$

在下列情形中是良定义的：

- π 是 $\mathrm{Sp}(W_F)$-相对超尖点的；
- π 是 $\mathrm{Sp}(W_F)$-相对平方可积，且 $m \geq n$；
- π 是 $\mathrm{Sp}(W_F)$-相对温和的，且 $m > n$。

同样，我们有一个定义良好的线性映射

$$T_{V_F} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}\left(\sigma^\vee, \mathbb{C}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma), \mathbb{C}\right), \quad \beta \mapsto T_{V_F}(\beta), \tag{7.13}$$

在以下情形中：

- σ 是正交群(V_F)-相对超尖点；
- σ 是正交群(V_F)-相对平方可积，且$m \leq n+1$；
- σ 是正交群(V_F)-相对温和，且$m \leq n$。

当V_F' 遍历 $\mathrm{H}^1(E/F, \text{正交群}(V))$时，我们可以合并映射$T^{V_F'}$，得到一个线性映射$T_V := \oplus_{V_F' \in \mathrm{H}^1(E/F, \text{正交群}(V))} T_{V_F'}$：

$$\bigoplus_{V_F' \in \mathrm{H}^1(E/F, \mathrm{O}(V))} \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F')}\left(\sigma^\vee, \mathbb{C}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma), \mathbb{C}\right).$$

定理 7.9。 设 $\pi \in$ 不可约表示$(\mathrm{Sp}(W))$。假设 $m > n$，且 $\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$ 是首次出现。

(1) 若 π 是温和表示，则 T^{W_F} 是单射。(2) 若 π 是平方可积表示且 $m = n+1$，则 T^{W_F} 是同构。(3) 若 π 是超尖点表示，则 T^{W_F} 是同构。

证明。 设 α 是 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi^\vee, \mathbb{C})$中的非零元素。由弗罗贝尼乌斯互反律可得一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\pi^\vee, \mathbb{C}\right) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(C_c^\infty(X_{W_F}) \otimes \pi^\vee, \mathbb{C}\right),$$

它将 α 映到线性形式 $\ell(\alpha)$，该线性形式的显式定义为

$$\ell(\alpha)(f, v) = \int_{X_{W_F}} f(g)\alpha(\pi^\vee(g)v)\, \mathrm{d}g.$$

根据命题 7.1，关于 π 的假设保证 $\ell(\alpha)$ 可延拓为一个非零元素

$$Z(s_0, \alpha, -, -) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0)^\tau \otimes \pi^\vee, \mathbb{C}\right).$$

于是显然有

$$T_{W_F}(\alpha) = Z(s_0, \alpha, -, -)|_{R_{\mathbf{W}}(V_F)^\tau \otimes \pi^\vee}.$$

由单射（6.2）可推出 $T^{W_F}(\alpha)$ 非零。因此，T^{W_F} 是单射。

在假设（2）和（3）成立的情况下，由上述讨论可知，T^{W_F}可分解为以下同构的复合：

同态空间$_{\mathrm{Sp}(W_F)}\left(\pi^\vee, \mathbb{C}\right) \xrightarrow{\simeq}$! 同态空间$_{\mathrm{Sp}(W)}\left(C_c^\infty(X_{W_F}) \otimes \pi^\vee, \mathbb{C}\right) \xrightarrow{\simeq}$! 同态空间$_{\mathrm{Sp}(W)}\left(I_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(s_0)^\tau \otimes \pi^\vee, \mathbb{C}\right) \xrightarrow{\simeq}$!同态空间$_{\mathrm{Sp}(W)}(R_{\mathbf{W}}(V_F)^\tau \otimes \pi^\vee, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq}$! 同态空间$_{\mathrm{Sp}(W)}(R_{\mathbf{W}}(V_F), \pi_\tau) \xrightarrow{\simeq}$! 同态空间$_{\mathrm{O}(V_F)}\left(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi), \mathbb{C}\right)$。因此，$T^{W_F}$ 是一个同构。

□

定理 7.10。 设 $\sigma \in$ 不可约表示(正交群(V))。假设 $m \leq n$，且 $\Theta_{V,\ W,\ \psi_\tau}(\sigma)$ 是首次出现。

(1) 若 σ 是温和的，则T_V 是单射。(2) 若 σ 是平方可积的且$m = n$，则T_V 是同构。(3) 若 σ 是超尖点的，则T_V 是同构。

证明。 该证明与定理7.9沿相同的思路，并作显然的修改。我们略去细节。

□

7.5. **伴随关系**。 设 $\pi \in$ 不可约表示$(\mathrm{Sp}(W))$ 是酉的。则我们有自然等同$\pi^\vee = \pi$，其中 π 表示 π 的复共轭表示。对于线性形式α： $\pi \to \mathbb{C}$，我们定义线性形式 α： $\pi^\vee \to \mathbb{C}$，其由 $\alpha(v) = \alpha(v)$给出。由此得到一个同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi^\vee, \mathbb{C}), \quad \alpha \mapsto \bar{\alpha}.$$

因此，每当T^{W_F} 在同态空间$_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi^\vee, \mathbb{C})$上有良好定义时，我们得到一个线性映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi), \mathbb{C}), \quad \alpha \mapsto T_{W_F}(\bar{\alpha}),$$

我们仍将其记作T^{W_F}。

类似地，若 $\sigma \in$ 正交群$(\mathrm{O}(V))$ 的不可约表示是酉的，则可得到一个线性映射

$$T_{V_F} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}(\sigma, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma), \mathbb{C}),$$

其定义方式与上文完全相同。

假设 $\pi \in \mathrm{Sp}(\mathrm{Sp}(W))$ 的不可约表示是平方可积的。特别地， π 是酉的，并且是 $\mathrm{Sp}(W_F)$-相对平方可积的。在 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi,\mathbb{C})$空间上存在一个内积 $\langle \text{-}, \text{-} \rangle_{X_{W_F}}$，由下述恒等式唯一确定

$$\int_{X_{W_F}} \alpha(\pi(g)v)\overline{\alpha'(\pi(g)v')}\, \mathrm{d}g = \langle \alpha, \alpha' \rangle_{X_{W_F}} \cdot \langle v, v' \rangle_\pi,$$

对所有 $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C})$ 以及所有v、$v' \in \pi$均成立，其中 $\langle \text{-}, \text{-} \rangle_\pi$是 π上的一个固定内积。注意， $\langle \text{-}, \text{-} \rangle_{X_{W_F}}$ 取决于g 在X^{W_F} 上的 Haar 测度 d 和内积$\langle \text{-}, \text{-} \rangle_\pi$的选择。

类似地，对于正交群 $\mathrm{O}(V)$的不可约平方可积表示 σ，我们在 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}(\sigma, \mathbb{C})$ 上有一个内积 $\langle \text{-}, \text{-} \rangle_{X_{V_F}}$。

定理 7.11. 假设 $\pi \in$ 不可约表示$(\mathrm{Sp}(W))$ 是超尖点表示，并且 $\sigma = \Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$ 是首次出现。那么存在一个非零常数 $c \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\langle T_{W_F}(\alpha), \beta \rangle_{X_{V_F}} = c \langle T_{V_F}(\beta), \alpha \rangle_{X_{W_F}}$$

对所有 $\alpha \in$ 同态空间$_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi,\ \mathbb{C})$ 以及 $\beta \in$ 同态空间$_{\mathrm{O}(V_F)}(\sigma,\ \mathbb{C})$。

证明。 注意到 σ 是不可约的超尖点表示，并且根据 Howe 对偶，我们有 $\pi = \Theta_{V,W,\psi_\tau}(\sigma)$。

与前文相同，对于 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{Y})$ 和 $\mathrm{v} \in \pi$，我们用 $\theta(\phi,\mathrm{v})$ 表示 $\phi \otimes \mathrm{v} \in \omega_{V,W,\psi_\tau} \otimes \pi$ 在自然投影到 $\sigma = \Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$ 下的像。同理，对于 $\mathrm{w} \in \sigma$，我们得到一个元素 $\theta(\phi,\mathrm{w}) \in \pi$。根据 [GW21，方程（5.9）]，，存在常数 $\mathrm{c} \in \mathbb{C}^\times$，使得

$$\langle \theta(\phi, v), w \rangle_\sigma = c \langle \theta(\phi, w), v \rangle_\pi \tag{7.14}$$

对每个 $v \in \pi$、$w \in \sigma$ 以及 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{Y})$ 均成立。

根据定义，我们有

$$\begin{aligned} &\langle T_{V_F}(\beta), \alpha \rangle_{X_{W_F}} \cdot \langle \theta(\phi, w), v \rangle_\pi \\ =& \int_{X_{W_F}} T_{V_F}(\beta) \left(\pi(g)\theta(\phi, w) \right) \overline{\alpha(\pi(g)v)} \, \mathrm{d}g \\ =& \int_{X_{W_F}} \left(\int_{X_{V_F}} q_{W_F} \left(\omega_{V,W,\psi_\tau}(g)\phi \right)(h) \overline{\beta(\sigma(h)w)} \, \mathrm{d}h \right) \overline{\alpha(\pi(g)v)} \, \mathrm{d}g. \end{aligned} \tag{7.15}$$

由于 π 和 σ 均为超尖点表示，局部周期 α 和 β 均为相对超尖点，因此我们可以交换积分次序。应用引理 7.3，式（7.15）中的最后一个表达式等于

$$\begin{aligned} &\int_{X_{V_F}} \left(\int_{X_{W_F}} p_{V_F}(\omega_{V,W,\psi_\tau}(h)\phi)(g) \overline{\alpha(\pi(g)v)} \, \mathrm{d}g \right) \overline{\beta(\sigma(h)w)} \, \mathrm{d}h \\ =& \int_{X_{V_F}} T_{W_F}(\alpha) \left(\sigma(h)\theta(\phi, v) \right) \overline{\beta(\sigma(h)w)} \, \mathrm{d}h \\ =& \langle T_{W_F}(\alpha), \beta \rangle_{X_{V_F}} \cdot \langle \theta(\phi, v), w \rangle_\sigma. \end{aligned}$$

所需恒等式现在由（7.14）得出。 □

注 7.12. (1) 事实上，我们可以选择内积 $\langle \text{-}, \text{-} \rangle_\pi$ 和 $\langle \text{-}, \text{-} \rangle_\sigma$ 使得

$$c = 1$$

在（7.14）中。从现在起，我们将始终作这样的选择。

(2) 若 $m = n$ 或 $n + 1$，π 是平方可积的，并且 $\sigma = \Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$ 是不可约且平方可积的，我们预期（7.15）中的最后一个积分绝对收敛。若确实如此，定理 7.11 的结论在此情形下也成立。

若 π 和 $\sigma = \Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$ 均为不可约酉表示，且映射 T^{W_F} 和 T^{V_F} 定义良好，则我们得到线性自同态

$$\begin{aligned} L^{W_F} &:= T^{V_F} \circ T^{W_F} \in \mathrm{End}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C})\right), \\ L^{V_F} &:= T^{W_F} \circ T^{V_F} \in \mathrm{End}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_F)}(\sigma, \mathbb{C})\right). \end{aligned} \tag{7.16}$$

推论 7.13. 假设 $\pi \in$ 不可约表示$(\mathrm{Sp}(W))$ 是超尖点的，且 $\sigma = \Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$ 是首次出现。则 L^{W_F} 与 L^{V_F} 是正规算子。

证明。 对任意 $\alpha, \alpha' \in$ 同态空间$\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C})$，定理 7.11 连同如注 7.12 中那样选取内积（使得 $c = 1$）可得

$$\begin{aligned} \langle L^{W_F}(\alpha), \alpha' \rangle_{X^{W_F}} &= \langle T^{W_F}(\alpha'), T^{W_F}(\alpha) \rangle_{X^{W_F}} \\ &= \overline{\langle T^{W_F}(\alpha), T^{W_F}(\alpha') \rangle_{X^{W_F}}} \\ &= \overline{\langle L^{W_F}(\alpha'), \alpha \rangle_{X^{W_F}}} \\ &= \langle \alpha, L^{W_F}(\alpha') \rangle_{X^{W_F}}. \end{aligned}$$

因此 L^{W_F} 是正规算子。将同一论证应用于 L^{V_F}，可知它也是正规的。 □

注 7.14. (1) 推论 7.13 是定理 7.11的直接推论。我们猜想，在注 7.12的第 (2) 部分的条件下，它仍然成立。

(2) 若 L^{W_F} 是一个 正规算子，因此我们可以将空间同态空间$\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C})$ 分解为特征空间 s:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C})_\lambda,$$

其中 λ 遍历L^{W_F} 的特征值，下标表示相应的特征空间。一个自然的问题是研究这些特征值 λ 的性质，以及维数 $\dim\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C})_\lambda$的表示论意义。

推论 7.15。 设 T^{W_F} 和 T^{V_F} 定义良好，并满足定理7.11中的伴随关系。若 T^{W_F}(或 T^{V_F})是单射，则 L^{W_F}(或 L^{V_F}) 是自同构。

证明。 设T^{W_F} 是单射。对于任意非零的 $\alpha \in$ 同态空间$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi, \mathbb{C})$，我们有

$$\langle L^{W_F}(\alpha), \alpha \rangle_{X^{W_F}} = \langle T^{W_F}(\alpha), T^{W_F}(\alpha) \rangle_{X^{W_F}} \neq 0.$$

因此L^{W_F} 是单射，进而是自同构。同理，对T^{V_F}应用相同推理可知，只要T^{V_F} 是单射，L^{V_F} 也是自同构。□

7.6. **相对特征关系**。 我们先回顾相对特征的定义。

设 $X = H\backslash G$ 是一个对称空间，且 $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ 是一个酉表示。和通常一样，我们将对偶表示 $\pi^\vee$ 与复共轭 $\overline{\pi}$等同。对于 $f \in C_c^\infty(X)$ 和 $\alpha \in$同态空间$_H(\pi,\mathbb{C})$，我们定义一个元素 $\pi(f)\alpha \in \pi^*$ 如下：

$$(\pi(f)\alpha)(v) = \int_X f(g)\overline{\alpha(\pi(g)v)}\,\mathrm{d}g, \quad v \in \overline{\pi}, \tag{7.17}$$

其中 π^*表示 π的线性对偶。此外，由于f关于某个紧开子群$J \subset G$是右J不变的，故有

$$\pi(f)\alpha \in (\overline{\pi}^*)^J \subset \pi. \tag{7.18}$$

定义 7.16. 对于酉表示 $\pi \in$不可约表示(G) 以及局部周期 α、 $\alpha' \in$同态空间$_H(\pi,\ \mathbb{C})$，我们将 π 的、与 α、 α' 相关联的相对特征 定义为分布

$$\Phi_{\pi,\alpha,\alpha'} : C_c^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \alpha'(\pi(f)\alpha). \tag{7.19}$$

设ONB$(\ \pi)$ 为 π的一个正交归一基。则该相对特征可表示为

$$\begin{aligned}\Phi_{\pi,\alpha,\alpha'}(f) &= \sum_{v\in \mathrm{ONB}(\pi)} (\pi(f)\alpha)(v)\alpha'(v) \\ &= \sum_{v\in \mathrm{ONB}(\pi)} \left(\int_X f(g)\overline{\alpha(\pi(g)v)}\,\mathrm{d}g\right)\alpha'(v).\end{aligned} \tag{7.20}$$

在文献中，相对特征最初是针对 $C_c^\infty(X)$ 中的测试函数、以略有不同的方式定义的。然而，在关于 π 的适当假设下，定义域可以扩展到更大的函数空间。更确切地说，积分（7.17）仍然绝对收敛，因而 $\pi(f)\alpha$ 是良定义的，这出现在下列情形中：

- π 是温和的，且$f \in \mathcal{C}(X)$,
- π 是平方可积的，且$f \in \mathcal{C}\mathrm{temp}(X)$,
- π 是超尖点的，且$f \in C\mathrm{sm}(X)$.

此外，由于$f \in C\mathrm{sm}(X)$ 在以上三种情形中，都有 $\pi(f)\alpha \in \pi$. 因此，相对特征可以通过与 (7.19) 相同的公式扩展到这些更大的空间上：

- $\Phi_{\pi,\alpha,\alpha'}$: $\mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$ 若 π 是温和的;
- $\Phi_{\pi,\alpha,\alpha'}$: $\mathcal{C}\mathrm{temp}(X) \to \mathbb{C}$ 若 π 是平方可积的;
- $\Phi_{\pi、\alpha、\alpha'}$: $C\mathrm{sm}$（X）！ $\mathbb{C}$，如果 π 是超尖点。

定理 7.17. 假设 $\pi \in Irr(Sp(W))$ 是超尖点的，且 $\sigma = \Theta_{V,W,\psi_\tau}(\pi)$ 是首次出现。设 $f \in \mathcal{S}(X^{W_F})$ 和 $f' \in \mathcal{S}(X^{V_F})$ 是依定义 *7.4* 的意义相互对应的测试函数。那么，对于所有 $\alpha \in$同态空间$_{\mathrm{Sp}(W_F)}(\pi,\mathbb{C})$ 和 $\beta \in$同态空间$_{O(V_F)}(\sigma,\mathbb{C})$，我们有

$$\Phi_{\pi,\alpha,T_{V_F}(\beta)}(f) = \Phi_{\sigma,\beta,T_{W_F}(\alpha)}(f').$$

证明。 取 $\phi \in C_c^\infty(\Upsilon)$，使得 $f = p^{V_F}(\phi)$ 且 $f' = q^{W_F}(\phi)$。那么

$$\begin{aligned}\Phi_{\pi,\alpha,T_{V_F}(\beta)}(f) &= \sum_{v\in \mathrm{ONB}(\pi)} \left(\int_{X_{W_F}} p_{V_F}(\phi)(g)\overline{\alpha(\pi(g)v)}\,\mathrm{d}g \right) T_{V_F}(\beta)(v) \\ &= \sum_{v\in \mathrm{ONB}(\pi)} T_{W_F}(\alpha)(\theta(\phi,v)) \cdot T_{V_F}(\beta)(v) \\ &= \sum_{v\in \mathrm{ONB}(\pi)} \sum_{w\in \mathrm{ONB}(\sigma)} \langle \theta(\phi,v), w\rangle_\sigma \cdot T_{W_F}(\alpha)(w) \cdot T_{V_F}(\beta)(v).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma,\beta,T_{W_F}(\alpha)}(f') &= \sum_{w\in \mathrm{ONB}(\sigma)} \left(\int_{X_{V_F}} q_{W_F}(\phi)(h)\overline{\beta(\sigma(h)w)}\,\mathrm{d}h \right) T_{W_F}(\alpha)(w) \\ &= \sum_{w\in \mathrm{ONB}(\sigma)} T_{V_F}(\beta)(\theta(\phi,w)) \cdot T_{W_F}(\alpha)(w) \\ &= \sum_{w\in \mathrm{ONB}(\sigma)} \sum_{v\in \mathrm{ONB}(\pi)} \langle \theta(\phi,w), v\rangle_\pi \cdot T_{V_F}(\beta)(v) \cdot T_{W_F}(\alpha)(w).\end{aligned}$$

所需的恒等式现在可由（7.14）得出。 □

推论 7.18。 沿用定理 7.17 的假设。设 α 为正规算子 L^{W_F} 的特征向量，其特征值为 λ，并令 $\beta = T^{W_F}(\alpha)$。则

$$\Phi_{\sigma,\beta,\beta}(f') = \lambda \Phi_{\pi,\alpha,\alpha}(f).$$

证明。 这可直接由定理 7.17 得出。 □

References

[BO07] Y. Benoist 和 H. Oh，p进对称空间的极分解。《国际数学研究通知》**24** (2007)，文章编号 rnm121，共20页。[BZSV] D. Ben-Zvi、Y. Sakellaridis 和 Venkatesh，相对朗兰兹对偶。预印本，arXiv:2409.04677。[Del10] P. Delorme，约化 p 进群上光滑 $H\psi$-球函数的常数项。《美国数学会汇刊》**362** (2010)，第2期，933–955。[DH14] P. Delorme 和 P. Harinck，约化 p 进对称空间的施瓦茨空间中的波包。《李理论杂志》**24**(2014)，第1期，41–75。[Gan18a] W.T. Gan，致 *Atsushi Ichino* 的信。日期：2018年7月27日。[Gan18b] W.T. Gan，致 *Yiannis Sakellaridis* 的信。日期：2018年8月2日。[Gan19] W.T. Gan，周期与θ对应。《约化群的表示》，《纯粹数学专题讨论会论文集》，**101**，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2019年，第113–132页。[Gan25] W.T. Gan，自守形式的显式构造：θ对应与自守下降。《朗兰兹纲领：III. 周期、函数与相对迹公式》，《纯粹数学专题讨论会论文集》，**111.2**，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2025年，第139–200页。[GI14] W.T. Gan 和 A. Ichino，形式度与局部 *theta* 对应。《数学发明》**195** (2014)，第3期，509–672。[GKT25] W.T. Gan、S. Kudla 和 S. Takeda，局部 *theta* 对应。预印本，2025 年 4 月 25 日版。

[GS17] W.T. Gan 和 B. Sun，豪双重性猜想：四元数情形。《表示论、数论与不变量理论》，《数学进展》，323，Birkh¨auser/Springer，沙姆，2017年，第175–192页。[GT16] W.T. Gan 和 S. Takeda，豪双重性猜想的证明。美国数学会杂志 29 (2016)，第2期，473–493。[GW21] W.T. Gan 和 X. Wan，相对特征标恒等式与 theta 对应。《相对迹公式》，西蒙斯研讨会，施普林格出版社，沙姆，2021年，第101–186页。[How79] R. Howe，θ-级数与不变量理论。《自守形式、表示与 L 函数》（《纯粹数学专题讨论会论文集》，俄勒冈州立大学，科瓦利斯，俄勒冈州，1977），《纯粹数学专题讨论会论文集》，XXXIII，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1979年，第275–285页。[How89] R. Howe，超越经典不变量理论。美国数学会杂志 2 (1989)，第3期，535–552。[KT08] S. Kato 和 K. Takano，p进对称空间的子表示定理。《国际数学研究通知》11 (2008)，文章编号 rnn 028，共40页。[KT10] S. Kato 和 K. Takano，p进对称空间上表示的平方可积性。《泛函分析杂志》258 (2010)，1427–1451。[Kud86] S. Kudla，关于局部 theta 对应。《数学发明》83 (1986)，第2期，229–255。[Lag08] N. Lagier，约化 p 进对称空间上函数的常数项。《泛函分析杂志》254 (2008)，1088–1145。[LR05] E. Lapid 和 S. Rallis，关于经典群表示的局部因子。《自守表示、L 函数及其应用：进展与展望》，俄亥俄州立大学数学研究所出版物，11，德格鲁伊特，柏林，2005年，第309–359页。[Lu20a] H. Lu，theta 对应在分支定律中的若干应用。《数学研究快报》27 (2020)，第1期，243–263。[Lu20b] H. Lu，GSp_4 和 PGSp_4的 Prasad猜想。《代数与数论》14 (2020)，第9期，2417–2480。[Lu20c] H. Lu，元辛情形的区分问题。《国际数论杂志》16 (2020)，第6期，1161–1183。[Lu21] H. Lu，$\mathrm{PGSp}_{1,1}(\mathbb{A})$-区分表示。《数学杂志》298 (2021)，第1-2期，497–519。[PSR87] I. I. Piatetski-Shapiro 和 S. Rallis，经典群的 L 函数，《自守L函数的显式构造》。《数学讲义》1254，施普林格出版社，柏林，1987年，第1–52页。[Pra15] D. Prasad，一种“相对”局部朗兰兹对应。预印本，arXiv:1512.04347 (2015)。[SV17] Y. Sakellaridis 和 A. Venkatesh，球簇上的周期与调和分析。Ast´erisque 396 (2017)，viii+360 页。[Smi18] J. Smith，p进一般线性群$_n$的两个商的相对离散系列表示。《加拿大数学杂志》70 (2018)，第6期，1339–1372。[SZ15] B. Sun 和 C.-B. Zhu，局部 theta 对应的守恒关系。美国数学会杂志 28 (2015)，第4期，939–983。[Wal90] J.-L.Waldspurger，在 p 进情形下证明 Howe 对偶性猜想，$p \neq 2$《纪念 I. I. Piatetski-Shapiro 六十寿辰文集》第一部分（拉马特阿维夫，1989），《以色列数学会议论文集》，2，魏茨曼研究所，耶路撒冷，1990年，第267–324页。[Wal03] J.-L. Waldspurger，Harish-Chandra 关于 p 进群的普朗歇尔公式。《Jussieu数学研究所杂志》2 (2003)，235–333。[Yam14] S. Yamana，经典群的 L 函数与 theta 对应。《数学发明》196 (2014)，第3期，651–732。

CHONG ZHANG 南京大学数学学院，

中华人民共和国江苏省南京市 210093。电
子邮件地址：zhangchong@nju.edu.cn