arXiv:2603.05988v1 [stat.ME] 6 Mar 2026

截断偏态正态分布的参数估计

Kwangok Seo* Seul Lee† Johan Lim†‡

摘要

截断偏态正态分布的参数估计颇具挑战，因为截断会给似然函数引入额外的非线性，并常常导致现有估计程序出现数值不稳定性。本文提出一种基于网格的估计方法，称为GRID-MOM，用于估计截断偏态正态分布的参数。该方法在预先设定的网格上固定形状参数，并针对每个网格点，使用矩估计法估计位置和尺度参数。随后，通过基于似然的比较选出最优形状参数值，从而得到最终的参数估计值。通过将形状参数的估计与位置和尺度参数的估计分离，所提方法降低了优化问题的复杂度，并提高了数值稳定性。我们通过广泛的数值研究评估所提估计量的有限样本性能，并在多种情形下将其与现有方法进行比较。结果表明，所提方法能够提供稳定且准确的估计，尤其是对形状参数的估计，这说明所提方法为截断偏正态模型的统计推断提供了一种实用的替代方案。此外，我们还使用磷酸化蛋白质组学数据和住院数据展示了所提方法的实际应用价值。

关键词：偏态正态分布、截断偏态正态分布、最大似然估计量、矩估计量、加权矩。

*仁荷大学统计学系，韩国仁川。
†首尔国立大学统计学系，韩国首尔。
‡通讯作者。电子邮箱：johanlim@snu.ac.kr

1 引言

偏态正态分布通过引入额外的形状参数来处理不对称性，从而灵活扩展了正态分布，同时保留了高斯模型的大部分解析易处理性（Azzalini，2013）。自提出以来，偏正态分布族已广泛应用于各种领域的统计建模。

在许多实际场景中，观测值会受到截断。这种截断常见于多种情境，例如存在检测限的可靠性分析、涉及物理或法规界限的生物医学和环境研究，以及受报告阈值限制的社会经济数据。在这些情境中生成的数据也常常呈现显著的不对称性，而对称截断模型无法充分捕捉这一特征。在这种情况下，截断偏态正态分布通过在单一参数族中同时处理截断和偏度，提供了一种自然而灵活的建模框架（Kim，2004）。

针对截断偏态正态分布的参数估计，已有多种方法被提出。最大似然估计（MLE）是一种自然的选择，因为它直接利用截断模型的似然结构。或者，基于矩的方法通过将经验（加权）矩与相应的理论矩相匹配来估计参数。例如，矩估计法（MOM；Martinez 等人，2008；Flecher 等人，2010）依赖前三阶矩，而加权矩方法（MWM；Flecher 等人，2010）则通过纳入适当构造的加权矩扩展了 MOM，从而提高估计的稳定性。

尽管已有这些方法可用，但要实现稳定且准确的估计仍然颇具挑战，尤其是在存在明显偏度和大幅截断的情况下。这些观测值促使人们开发替代性的估计程序。

本文提出了一种针对截断偏态正态分布的新估计方法。所提方法旨在提升数值稳定性，同时保持计算效率，并易于实现。我们通过一项广泛的数值研究评估了该方法的性能。结果表明，在一系列具有实际意义的截断情形下，所提方法具有良好的有限样本性能和更高的数值稳定性。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾截断偏态正态分布，并总结现有的估计方法。第 3 节介绍所提估计程序，并讨论其实现细节。第 4节介绍数值研究和比较结果。第 5 节通过分析磷酸化蛋白质组学数据和住院数据，展示所提方法的实际适用性。第6 节总结全文。

2 预备知识

We 首先回顾偏态正态分布和截断偏态正态分布 .

偏态正态分布 设 X 是一个单变量偏态正态随机变量，其位置参数为 $\xi \in \mathbb{R}$、尺度参数为 $\omega > 0$、形状参数为 $\alpha \in \mathbb{R}$。按照 Azzalini (1985年) 的表述， X 的密度函数为

$$f_{\mathrm{SN}}(x \mid \xi, \omega, \alpha) = \frac{2}{\omega}\phi\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right)\Phi\left(\alpha\frac{x-\xi}{\omega}\right), \tag{1}$$

其中， $\phi(\cdot)$ 和 $\Phi(\cdot)$ 分别表示标准正态密度和分布函数。偏态正态分布通过形状参数 α 引入偏度，从而扩展了正态模型。当 $\alpha = 0$ 时，偏态正态分布退化为均值为 ξ 、方差为 ω^2 的正态分布。

截断偏态正态分布假设随机变量 X 服从式（1）中的偏正态分布，但仅在截断区间 $[L, U]$内被观测到，其中$-\infty \leq L < U \leq \infty$。在这种情况下，给定 $X \in [L, U]$ 的条件分布 X 为截断偏态正态分布，其密度为

$$f_{\mathrm{TSN}}(x \mid \xi, \omega, \alpha) = \frac{f_{\mathrm{SN}}(x \mid \xi, \omega, \alpha)}{F_{\mathrm{SN}}(U \mid \xi, \omega, \alpha) - F_{\mathrm{SN}}(L \mid \xi, \omega, \alpha)}\mathbb{I}(L \leq x \leq U), \tag{2}$$

其中， $F_{\mathrm{SN}}(\cdot \mid \xi,\ \omega,\ \alpha)$ 表示偏态正态分布的分布函数。全文中，我们将截断区间 $[L, U]$ 视为已知，并着重根据截断观测值估计参数 ξ、 ω 和 α 。

接下来，我们回顾截断偏态正态分布的代表性参数估计方法，包括最大似然估计（MLE）、矩估计法（MOM）和加权矩估计法（MWM）。设 $X_1, \ldots, X_n$ 为来自式（2）所定义的截断偏态正态分布的独立同分布观测值，并设 $x_1, \ldots, x_n$表示它们的实现值。

最大似然估计 截断偏态正态分布的对数似然函数可写为

$$\ell_{\mathrm{TSN}}(\xi, \omega, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \log f_{\mathrm{SN}}(x_i \mid \xi, \omega, \alpha) - n \log \left\{ F_{\mathrm{SN}}(U \mid \xi, \omega, \alpha) - F_{\mathrm{SN}}(L \mid \xi, \omega, \alpha) \right\}. \tag{3}$$

最大似然估计量通过最大化关于（3）中（ξ, ω, α）的对数似然函数得到。与未截断情形不同，截断模型的似然函数通过归一化常数依赖于所有参数，因此优化问题要复杂得多。由于式（3）中的对数似然函数没有闭式解，必须通过数值优化求得最大似然估计量。

矩估计法 矩估计法通过令经验矩等于截断偏态正态分布下的理论矩来估计模型参数。具体而言，矩估计量通过求解如下形式的方程组得到

$$\mathbb{E}_{\mathrm{TSN}}(X^k \mid L \le X \le U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k = 1, 2, 3,$$

其中 $\mathbb{E}_{\mathrm{TSN}}(\cdot \mid L \le X \le U)$ 表示在截断区间 $[L, U]$内，以截断偏态正态分布为条件的期望。Flecher 等人的命题 2 (2010) 给出了前三个理论矩的闭式表达式，从而便于实现.....

矩估计法的实现。

加权矩估计法 MWM 最初由Flecher 等人(2009) 针对偏态正态分布提出，随后由 Flecher 等人 (2010) 扩展至截断偏态正态分布，以提升矩估计法的性能。该方法基于如下形式的加权矩

$$\mathbb{E}\left[X^k \Phi^r(X) \mid L \leq X \leq U\right]. \tag{4}$$

当 $r = 0$时，（4）中的加权矩退化为普通矩。具体而言，由 Flecher 等人（2010）提出的加权矩法估计量可通过求解如下方程组得到：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathrm{TSN}}\left[X \mid L \leq X \leq U\right] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i =: \bar{x}, \\
\mathrm{Var}_{\mathrm{TSN}}(X \mid L \leq X \leq U) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 =: s^2, \\
\mathbb{E}_{\mathrm{TSN}}\left[\Phi(X) \mid L \leq X \leq U\right] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i).
\end{aligned}$$

出现在上述方程左端的理论量的闭式表达式可由Flecher 等人 （2010）的命题 2 和命题 3 推导得到，从而便于 MWM 的实现。

在本节最后，我们总结现有方法的局限性。

现有方法的局限性。最大似然估计通过最大化（3）中的对数似然来估计参数。由于对数似然通常关于（ξ、ω、α）是非凹的，因此优化问题可能存在多个局部极大值。因此，标准数值算法可能收敛到次优解，使估计结果对初始化敏感。矩估计法通过匹配截断偏态正态分布的前三阶矩来估计参数。三阶矩的形式更复杂，且通常比前两阶矩具有更大的变异性，这可能导致有限样本中的数值不稳定性。MWM 用

一个经过适当构造的加权矩来替代三阶矩，以提高稳定性。尽管这种修改通常能提升数值性能，但仍存在一个根本局限。当形状参数较大时（例如 $\alpha \geq 4$），加权矩随 α 进一步增大而变化甚微，因此难以据此区分较大的参数值。因此，在偏度显著时，准确估计仍然困难。

3 方法

到目前为止，我们介绍了截断偏态正态分布，并回顾了三种现有的估计方法。现在我们介绍所提方法。所提方法的核心思想是将形状参数的估计与位置和尺度参数的估计分离，从而降低优化问题的复杂性并提高数值稳定性。

令 $\mathcal{G} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_G\}$ 表示形状参数候选值的预设网格。对于每个固定的 $\alpha_g \in \mathcal{G}$，位置和尺度参数（ξ，ω）在截断偏态正态分布下通过矩估计法进行条件估计，条件为$\alpha = \alpha_g$ 。具体而言，给定 $\alpha = \alpha_g$，我们求解

$$\mathbb{E}_{\mathrm{TSN}}[X \mid \alpha = \alpha_g, L \leq X \leq U] = \bar{x},$$
$$\mathrm{Var}_{\mathrm{TSN}}(X \mid \alpha = \alpha_g, L \leq X \leq U) = s^2.$$

这些方程仅涉及（ξ，ω），可以使用标准的求根算法进行数值求解。令（$\xi(\alpha_g)$，$\hat{}\omega(\alpha_g)$)表示所得解。对于每个 $\alpha_g \in \mathcal{G}$，我们随后计算截断偏正态对数似然

$$\ell_{\mathrm{TSN}}\big(\hat{\xi}(\alpha_g), \hat{\omega}(\alpha_g), \alpha_g\big).$$

ˆ 最终估计量是三元组（ξ，ˆω，ˆα），其中

$$\hat{\alpha} = \arg\max_{\alpha_g \in \mathcal{G}} \ \ell_{\mathrm{TSN}}\big(\hat{\xi}(\alpha_g), \hat{\omega}(\alpha_g), \alpha_g\big),$$

ˆ ˆ和 $\xi = \xi(\hat{\alpha})$，ˆω =ˆω(ˆα)。

注释1。 所提方法的数值稳定性源于三个结构特征。首先，通过对形状参数进行条件化，将原始的三维优化问题分解为一系列二维子问题。其次，该方法无需依赖三阶矩或加权矩；这些矩较为复杂且变化很大，尤其是在有限样本中。最后，对形状参数进行网格搜索，类似于非凸优化中的多重初始化，可降低收敛到局部极大值的风险。

本节最后介绍所提方法的一些实现细节。该方法的一个关键环节是为形状参数 α指定网格 $\mathcal{G}$。原则上， α 的适当范围取决于观测数据的分布特征，尤其是偏斜程度。然而，在存在截断的情况下，分布尾部所包含的信息——形状参数 α 主要由这些信息确定——会部分丢失。因此，难以根据数据可靠地确定 α 的合理范围，我们因而采用一种启发式但实用的方法。具体而言，我们为 α 选取对称区间 $[-a, a]$，其中 $a > 0$，并在该区间上构造等间距网格。也就是说，

$$\mathcal{G} = \{-a + (g-1)\Delta : g = 1, \ldots, G\}, \qquad \Delta = \frac{2a}{G-1}.$$

我们建议将 $a = 5$ 设置为 $G > 100$，因为范围 $|\alpha| \le 5$ 足以涵盖实际应用中几乎所有遇到的偏度水平。如果预期偏度更大，实践者可以相应地扩大该范围。

4 数值研究

本节通过模拟研究评估所提方法（称为 GRID-MOM）的有限样本性能。第 4.1 节将 GRID-MOM 与三种现有方法——最大似然估计、矩估计法和 MWM 进行比较；第 4.2 节将 GRID-MOM 与 GRID-MLE（一种基于剖面似然的变体，见下文）进行比较。在整个模拟研究中，所有方法的估计值均通过使用单个初始值求解相应的优化问题获得；未考虑多重初始化。

4.1 与最大似然估计、矩估计法和 MWM 的比较

我们采用 Flecher 等人（2010）的模拟设置。数据由截断偏态正态分布生成，其中 $\xi_0 = 0$、$\omega_0 = 1$ 和 $\alpha_0 \in \{1, 2, 4\}$，以评估偏度的影响。研究了三种截断方向：左截断 $[L, \infty)$、右截断 $(-\infty, U]$ 和双重截断 $[L, U]$。对于每种截断方向，我们控制截断率 $\tau \in \{0.1, 0.2\}$。具体而言，对于左截断，边界设为 $L = F^{-1}\,\mathrm{SN}(\tau \mid \xi_0, \omega_0, \alpha_0)$；对于右截断，设为 $U = F^{-1}\,\mathrm{SN}(1-\tau \mid \xi_0, \omega_0, \alpha_0)$。对于双重截断，边界分别选为 $L = F^{-1}\,\mathrm{SN}(\tau/2 \mid \xi_0, \omega_0, \alpha_0)$ 和 $U = F^{-1}\,\mathrm{SN}(1-\tau/2 \mid \xi_0, \omega_0, \alpha_0)$。对于每种配置，我们从相应的截断偏态正态分布中生成 $n = 500$ 个独立观测值，每项实验重复 1,000 次。我们使用多种汇总指标评估各估计量的表现，包括经验偏差、均方根误差（RMSE）、参数估计值的中位数和四分位距（IQR）。最大似然估计通过 R 包 TSMNSN 实现。矩估计法估计量通过 R 函数 nleqslv 求解相应的方程组得到；加权矩法估计量则通过 R 函数 nlminb 最小化相关方程组计算得到。表 1–4 汇总了模拟结果。

截断率的结果 $\tau = 0.1$ 表1报告了各竞争估计量的经验偏差和均方根误差（RMSE），由此可以得出几点观察。首先，与 Flecher等人(2010年的研究一致，在大多数模拟设置下，MWM 的表现通常优于 MOM，具体而言，MWM 的偏差和 RMSE 与 MOM 相当或更小，因此

其表现出的偏差和 RMSE 与其他方法相当或更小。因此，后续比较将聚焦于最大似然估计、MWM 和 GRID-MOM。其次，估计精度很大程度上取决于截断方向。三种方法（最大似然估计、MWM 和 GRID-MOM）在右截断下均表现良好，而左截断和双重截断会导致偏差和 RMSE 显著增大。第三，在$\alpha_0 = 4$ 左截断条件下，形状参数的最大似然估计偏差和 RMSE 均超过 100。这种增大是由一部分重复试验造成的，在这些试验中，最大似然估计产生了异常大的估计值；在 1,000 次重复试验中，有 150 个估计值超过 10，另有 6 个超过 100。最后，在$\alpha_0 = 1$时，最大似然估计和 MWM 表现良好，且在偏差和 RMSE 方面优于 GRID-MOM。相较之下，对于较大的形状参数（$\alpha_0 \in \{2, 4\}$），GRID-MOM 表现更优，尤其是在估计 α时。

为减小极端值的影响，表2 报告了参数估计值的中位数和四分位距。我们观察到以下规律。首先，与表1一致，MWM 通常优于矩估计法；在大多数设置下，MWM 的中位数更接近真实参数值；当两种方法得到的中位数相近时，MWM 的四分位距通常与之相当或更小。因此，后续比较将聚焦于最大似然估计、MWM 和 GRID-MOM。其次，在右截断且 $\alpha_0 = 1$的情况下，最大似然估计和 MWM 的表现相近，且优于 GRID-MOM；尽管 GRID-MOM 的中位数仍接近真实参数值，但其 ξ和α 的四分位距略大。对于较大的形状参数（$\alpha_0 \in \{2, 4\}$），在右截断下，三种方法（最大似然估计、MWM 和 GRID-MOM）得到的中位数均接近真实值，且四分位距相当。最后，当截断方向为左截断或双侧截断时，表现会随偏度水平而变化。当 $\alpha_0 = 1$时，最大似然估计表现最佳。对于 $\alpha_0 = 2$，最大似然估计和 GRID-MOM 的表现相当，且均优于 MWM；尤其是，MWM 估计量对形状参数的估计中位数偏离了真实值 2。当 $\alpha_0 = 4$时，GRID-MOM 优于最大似然估计和 MWM。

截断率为 $\tau = 0.2$ 表 2 报告了经验偏差和均方根误差，由此可以看出若干规律。随着截断率增加至 $\tau = 0.2$，所有方法的表现相较于 $\tau = 0.1$均有所下降，在大多数设置下都观察到更大的偏差和均方根误差。矩估计法在各种配置下始终不如 MWM。对于最大似然估计，数值不稳定性

表 1：基于 1,000 次重复试验，在截断率为 $\tau = 0.1$ 时，样本量为 $n = 500$ 的条件下，最大似然估计、矩估计法、MWM 和 GRID-MOM 的参数估计值的偏差和均方根误差。真实参数为 $\xi_0 = 0$、$\omega_0 = 1$ 和 $\alpha_0 \in \{1, 2, 4\}$。

截断		MLE		MOM		MWM		GRID-MOM	
		Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE
$\alpha_0 = 1$									
Left	$\hat{\xi}$	0.146	0.336	0.445	0.668	0.073	0.133	0.314	0.629
	$\hat{\omega}$	-0.018	0.144	0.081	1.552	-0.033	0.070	0.075	0.222
	$\hat{\alpha}$	-0.121	0.860	-0.869	2.840	-0.185	0.358	-0.465	1.391
右	$\hat{\xi}$	0.102	0.371	0.230	0.576	0.087	0.339	0.228	0.576
	$\hat{\omega}$	0.053	0.285	0.085	0.262	0.049	0.281	0.088	0.271
	$\hat{\alpha}$	-0.011	0.965	-0.274	1.292	0.014	0.885	-0.268	1.311
双	$\hat{\xi}$	0.140	0.411	0.381	0.737	0.088	0.302	0.358	0.739
	$\hat{\omega}$	0.029	0.214	0.111	0.218	0.013	0.197	0.131	0.226
	$\hat{\alpha}$	0.011	1.144	-0.543	1.751	0.053	0.908	-0.484	1.768
$\alpha_0 = 2$									
Left	$\hat{\xi}$	0.058	0.172	0.392	0.503	0.079	0.164	0.090	0.301
	$\hat{\omega}$	-0.019	0.082	-0.078	0.157	-0.041	0.094	0.005	0.109
	$\hat{\alpha}$	0.209	1.563	>100	>100	-0.490	0.961	0.041	1.342
右	$\hat{\xi}$	0.028	0.143	0.036	0.171	0.039	0.147	0.032	0.167
	$\hat{\omega}$	-0.007	0.176	-0.010	0.172	-0.020	0.176	-0.004	0.174
	$\hat{\alpha}$	0.013	0.760	-0.016	0.793	-0.058	0.746	0.005	0.792
双	$\hat{\xi}$	0.071	0.228	0.291	0.467	0.099	0.180	0.114	0.363
	$\hat{\omega}$	-0.016	0.149	-0.088	0.185	-0.068	0.143	0.008	0.134
	$\hat{\alpha}$	0.082	1.296	>100	>100	-0.440	0.958	-0.053	1.420
$\alpha_0 = 4$									
Left	$\hat{\xi}$	0.059	0.166	0.255	0.438	-0.042	0.164	0.082	0.356
	$\hat{\omega}$	-0.025	0.193	0.130	1.820	-0.018	0.080	0.107	0.488
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	-2.517	2.679	-0.986	2.515
右	$\hat{\xi}$	0.002	0.045	0.001	0.054	0.011	0.064	0.003	0.043
	$\hat{\omega}$	0.006	0.103	0.009	0.119	-0.005	0.118	0.004	0.096
	$\hat{\alpha}$	0.165	0.967	>100	>100	0.034	1.180	0.053	0.737
双	$\hat{\xi}$	0.036	0.132	0.320	0.439	0.122	0.157	0.043	0.225
	$\hat{\omega}$	-0.027	0.103	-0.132	0.202	-0.156	0.173	-0.006	0.117
	$\hat{\alpha}$	0.606	4.812	>100	>100	-3.042	3.072	-0.414	1.627

表2：在截断率为 $\tau = 0.1$ 的情况下，基于 1,000 次重复试验、样本量为 $n = 500$ 的最大似然估计、矩估计法、MWM 和 GRID-MOM 参数估计值的中位数和四分位距。真实参数为 $\xi_0 = 0$、 $\omega_0 = 1$ 和 $\alpha_0 \in \{1, 2, 4\}$。

截断		MLE		MOM		MWM		GRID-MOM	
		中位数	IQR	中位数	IQR	中位数	IQR	中位数	IQR
$\alpha_0 = 1$									
Left	$\hat{\xi}$	0.031	0.540	0.344	0.909	0.074	0.121	0.028	0.959
	$\hat{\omega}$	0.982	0.171	0.987	0.152	0.958	0.064	1.038	0.145
	$\hat{\alpha}$	0.971	1.413	0.151	1.638	0.774	0.054	0.975	1.975
右	$\hat{\xi}$	0.007	0.664	-0.000	1.025	0.005	0.631	0.008	1.027
	$\hat{\omega}$	0.991	0.387	1.009	0.297	0.988	0.393	1.013	0.300
	$\hat{\alpha}$	0.994	1.581	0.999	2.157	1.005	1.508	1.000	2.175
双	$\hat{\xi}$	0.012	0.703	0.060	1.272	0.055	0.548	0.011	1.286
	$\hat{\omega}$	0.995	0.347	1.098	0.271	0.970	0.308	1.118	0.262
	$\hat{\alpha}$	0.997	1.745	0.907	2.773	0.842	1.446	1.000	2.825
$\alpha_0 = 2$									
Left	$\hat{\xi}$	0.018	0.117	0.463	0.496	0.047	0.185	0.015	0.118
	$\hat{\omega}$	0.993	0.097	0.894	0.133	0.971	0.120	1.002	0.091
	$\hat{\alpha}$	2.013	1.436	0.003	1.260	1.654	1.471	2.025	1.425
右	$\hat{\xi}$	0.004	0.155	0.007	0.154	0.011	0.162	0.003	0.154
	$\hat{\omega}$	0.990	0.233	0.982	0.232	0.977	0.242	0.994	0.233
	$\hat{\alpha}$	1.973	0.962	1.984	0.936	1.943	0.975	1.975	0.956
双	$\hat{\xi}$	0.003	0.164	0.122	0.603	0.070	0.221	0.002	0.167
	$\hat{\omega}$	0.999	0.185	0.911	0.272	0.935	0.184	1.011	0.171
	$\hat{\alpha}$	2.069	1.390	1.291	2.250	1.596	1.228	2.075	1.425
$\alpha_0 = 4$									
Left	$\hat{\xi}$	0.052	0.107	0.235	0.470	-0.036	0.191	0.006	0.114
	$\hat{\omega}$	0.973	0.076	0.949	0.150	0.984	0.105	1.005	0.085
	$\hat{\alpha}$	3.085	4.135	0.060	2.997	1.658	1.732	3.575	2.925
右	$\hat{\xi}$	-0.001	0.059	-0.001	0.070	0.004	0.066	-0.003	0.053
	$\hat{\omega}$	0.997	0.141	1.001	0.154	0.990	0.147	0.998	0.139
	$\hat{\alpha}$	4.068	1.241	4.057	1.613	3.908	1.265	4.050	1.225
双	$\hat{\xi}$	0.016	0.070	0.415	0.539	0.136	0.128	0.008	0.083
	$\hat{\omega}$	0.982	0.115	0.847	0.230	0.834	0.098	0.990	0.118
	$\hat{\alpha}$	3.898	2.682	0.059	3.137	0.842	0.042	3.938	2.250

在 $\tau = 0.2$ 时，这种不稳定性变得更加明显。当 $\tau = 0.1$ 时，偏差和均方根误差超过 100 的情况仅出现在一种模拟设置中；而随着截断率上升，这种极端表现会出现在多种模拟设置中。竞争方法的相对表现取决于截断方向以及 α_0 的取值。仅当 $\alpha_0 = 1$ 且采用左截断时，最大似然估计才表现出优势；而当 $\alpha_0 = 1$ 且采用双重截断时，MWM 的表现最佳。除这些有限情形外，在左截断和双重截断下，所有方法的估计准确性都显著下降。然而，在右截断下，对于不同的 α_0 取值，MWM 和 GRID-MOM 均表现出持续的竞争力，并且明显优于最大似然估计，尤其是在估计形状参数时。

表4 报告了参数估计值的中位数和四分位距，由此可观察到若干规律。首先，与表 2一致，MWM 优于矩估计法；因此，后续比较将重点放在最大似然估计、MWM 和 GRID-MOM 上。其次，当 $\alpha_0 = 1$ 且采用右截断时，最大似然估计和 MWM 的表现相近，且通常优于 GRID-MOM；尽管 GRID-MOM 的中位数仍接近真实参数值，但其对于 ξ 和 $\hat{}\alpha$ 的四分位距稍大。在左截断和双重截断下，最大似然估计表现最佳。第三，当 $\alpha_0 = 2$时，表现因截断方向而异；在左截断下，GRID-MOM 优于最大似然估计和 MWM；在这种设置中，最大似然估计和 MWM 对形状参数的估计中位数往往略低于真实值。在右截断下，三种方法的表现相近。在双重截断下，最大似然估计和 GRID-MOM 表现相当，且优于 MWM；值得注意的是，MWM 对形状参数的估计中位数明显低于真实值。最后，当 $\alpha_0 = 4$时，在左截断下，所有方法对形状参数的估计中位数都与真实值相差甚远。因此，我们将比较重点放在右截断和双重截断上，在这两种情况下，GRID-MOM 的表现与竞争方法相当或更优。

4.2 与 GRID-MLE 的比较

在本节中，我们考察 GRID-MOM 的一种基于剖面似然的变体。为方便起见，我们将该程序称为 GRID-MLE，并将其性能与 GRID-MOM 进行比较。如同

表 3：基于 1，000 次重复试验，在截断率为 $\tau = 0.2$、样本量为 $n = 500$ 时，最大似然估计、矩估计法、MWM 和 GRID-MOM 的参数估计值的偏差和均方根误差。真实参数为 $\xi_0 = 0$、 $\omega_0 = 1$ 和 $\alpha_0 \in \{1, 2, 4\}$。

截断		MLE		MOM		MWM		GRID-MOM	
		Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE
$\alpha_0 = 1$									
Left	$\hat{\xi}$	0.172	0.331	0.586	0.762	0.063	0.177	0.408	0.725
	$\hat{\omega}$	-0.017	0.206	0.258	1.107	-0.011	0.084	0.246	0.612
	$\hat{\alpha}$	0.034	1.306	>100	>100	0.256	0.907	-0.647	2.158
右	$\hat{\xi}$	0.098	0.402	0.240	0.607	0.074	0.359	0.246	0.614
	$\hat{\omega}$	0.481	5.200	0.484	4.103	0.201	0.709	0.220	0.542
	$\hat{\alpha}$	0.838	11.373	0.432	9.268	0.314	1.670	-0.164	1.808
双	$\hat{\xi}$	0.145	0.443	0.545	0.808	0.075	0.223	0.418	0.828
	$\hat{\omega}$	0.095	0.317	0.128	0.298	0.002	0.176	0.272	0.393
	$\hat{\alpha}$	0.379	2.267	-0.929	2.422	-0.034	0.720	-0.599	2.622
$\alpha_0 = 2$									
Left	$\hat{\xi}$	0.142	0.254	0.364	0.525	0.058	0.158	0.245	0.515
	$\hat{\omega}$	0.080	1.875	0.156	1.221	-0.032	0.082	0.173	0.628
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	-0.276	1.105	-0.250	2.505
右	$\hat{\xi}$	0.043	0.203	0.065	0.266	0.047	0.192	0.063	0.262
	$\hat{\omega}$	0.122	1.568	0.085	0.840	0.033	0.332	0.050	0.319
	$\hat{\alpha}$	0.394	4.589	0.226	2.793	0.109	1.234	0.096	1.316
双	$\hat{\xi}$	0.170	0.347	0.543	0.696	0.165	0.191	0.311	0.623
	$\hat{\omega}$	-0.031	0.241	-0.080	0.302	-0.156	0.184	0.084	0.263
	$\hat{\alpha}$	0.771	14.697	>100	>100	-1.090	1.117	-0.540	2.604
$\alpha_0 = 4$									
Left	$\hat{\xi}$	0.001	0.266	0.160	0.475	-0.177	0.300	0.171	0.565
	$\hat{\omega}$	0.107	1.540	0.680	2.682	0.022	0.095	0.686	1.455
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	-2.884	2.988	-2.960	4.508
右	$\hat{\xi}$	0.004	0.052	0.011	0.129	0.013	0.055	0.008	0.047
	$\hat{\omega}$	0.026	0.206	0.032	0.260	-0.002	0.171	0.006	0.151
	$\hat{\alpha}$	0.260	1.402	0.388	2.419	-0.048	1.089	-0.004	0.857
双	$\hat{\xi}$	0.081	0.219	0.374	0.546	0.017	0.194	0.144	0.467
	$\hat{\omega}$	0.025	2.326	0.525	5.928	-0.119	0.181	0.135	0.508
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	-3.162	3.164	-1.234	3.083

表4：基于1,000次重复试验，在样本量 $n = 500$ 、截断率 $\tau = 0.2$下，最大似然估计、矩估计法、MWM和GRID-MOM的参数估计值的中位数和四分位距。真实参数为 $\xi_0 = 0$、 $\omega_0 = 1$和 $\alpha_0 \in \{1, 2, 4\}$。

截断		MLE		MOM		MWM		GRID-MOM	
		中位数	IQR	中位数	IQR	中位数	IQR	中位数	IQR
$\alpha_0 = 1$									
Left	$\hat{\xi}$	0.057	0.480	0.521	0.759	0.019	0.245	0.053	1.099
	$\hat{\omega}$	0.978	0.150	0.957	0.215	0.998	0.137	1.053	0.172
	$\hat{\alpha}$	0.914	1.634	-0.067	1.385	0.808	1.732	0.938	2.706
右	$\hat{\xi}$	0.016	0.722	0.011	1.123	0.021	0.677	0.015	1.130
	$\hat{\omega}$	0.989	0.591	1.002	0.517	0.983	0.576	1.009	0.503
	$\hat{\alpha}$	1.026	1.990	1.006	2.717	0.982	1.891	1.025	2.800
双	$\hat{\xi}$	0.018	0.740	0.531	1.247	0.072	0.355	0.013	1.448
	$\hat{\omega}$	1.047	0.487	1.093	0.398	0.970	0.261	1.247	0.357
	$\hat{\alpha}$	1.046	2.300	-0.001	2.768	0.819	1.018	1.050	4.075
$\alpha_0 = 2$									
Left	$\hat{\xi}$	0.109	0.170	0.320	0.472	0.058	0.168	0.081	0.166
	$\hat{\omega}$	0.963	0.092	0.930	0.138	0.970	0.095	0.996	0.102
	$\hat{\alpha}$	1.834	2.447	0.093	2.625	1.828	1.870	2.013	2.506
右	$\hat{\xi}$	-0.007	0.191	-0.004	0.191	-0.000	0.194	-0.007	0.192
	$\hat{\omega}$	0.997	0.392	0.996	0.397	0.988	0.385	1.001	0.396
	$\hat{\alpha}$	2.004	1.432	2.010	1.449	1.969	1.423	2.013	1.431
双	$\hat{\xi}$	0.039	0.493	0.581	0.584	0.175	0.131	0.031	0.721
	$\hat{\omega}$	0.966	0.322	0.840	0.305	0.832	0.127	1.050	0.265
	$\hat{\alpha}$	1.935	3.076	-0.003	1.538	0.858	0.043	1.975	3.375
$\alpha_0 = 4$									
Left	$\hat{\xi}$	0.009	0.347	0.148	0.547	-0.143	0.292	0.022	0.790
	$\hat{\omega}$	0.983	0.117	1.005	0.190	1.017	0.112	1.054	0.296
	$\hat{\alpha}$	1.105	2.554	1.013	2.475	0.808	1.495	1.988	4.606
右	$\hat{\xi}$	-0.000	0.066	0.003	0.075	0.010	0.068	0.001	0.059
	$\hat{\omega}$	0.999	0.229	0.998	0.245	0.984	0.217	1.003	0.219
	$\hat{\alpha}$	4.051	1.578	3.994	1.870	3.826	1.416	4.075	1.575
双	$\hat{\xi}$	0.056	0.099	0.362	0.497	0.051	0.197	0.011	0.133
	$\hat{\omega}$	0.952	0.155	0.895	0.260	0.858	0.157	1.012	0.203
	$\hat{\alpha}$	3.451	4.346	0.085	4.251	0.840	0.064	3.612	3.100

GRID-MOM，GRID-MLE在形状参数 α上采用网格；然而，对于 α的每个候选值，其余参数（ξ, ω）是通过最大化相应的轮廓似然而非求解矩方程得到的。

图1–2 比较了GRID-MOM与GRID-MLE在与第4.1节相同的模拟设置下的估计结果。我们观察到，在所考虑的所有模拟情形中，两种方法的表现几乎相同。图3 报告了平均计算时间随样本量和网格点数量的变化。结果表明，GRID-MOM的计算成本始终低于GRID-MLE。特别是，随着样本量的增加，GRID-MLE所需的计算时间显著多于GRID-MOM，且这一差距更加明显。总之，GRID-MOM在取得相当的估计性能的同时，所需的计算量远少于GRID-MLE。因此，我们得出结论：GRID-MOM为轮廓似然方法提供了一种计算高效的替代方案。

5 真实数据示例

首先，我们使用癌症基因组图谱（TCGA）高级别浆液性卵巢癌（HGSC）磷酸化蛋白质组学数据，展示 GRID-MOM 的实际表现。该数据集包含 67 个肿瘤样本中 5,746 个位点的标准化磷酸化测量值，这些样本被分为五种蛋白质组亚型（A–E）（Zhang 等人，2016；Seo 等人，2025）。

在 20 种可能的亚型两两比较中，我们重点考察一个具有代表性的案例：比较亚型 D（间充质型）与亚型 B（免疫反应型）。我们的目标是找出亚型 D 的平均磷酸化水平高于亚型 B 的磷酸化位点。解决这一单侧多重检验问题，需要准确估计检验统计量的原假设密度。在零假定（Efron，2004）下，并假设原假设分布属于偏态正态分布族，该问题可归结为根据截断检验统计量对截断偏态正态分布进行参数估计。

对于每个磷酸化位点，计算双样本 t 统计量，以评估两种亚型之间磷酸化水平的升高。为实现零假定，我们截断上

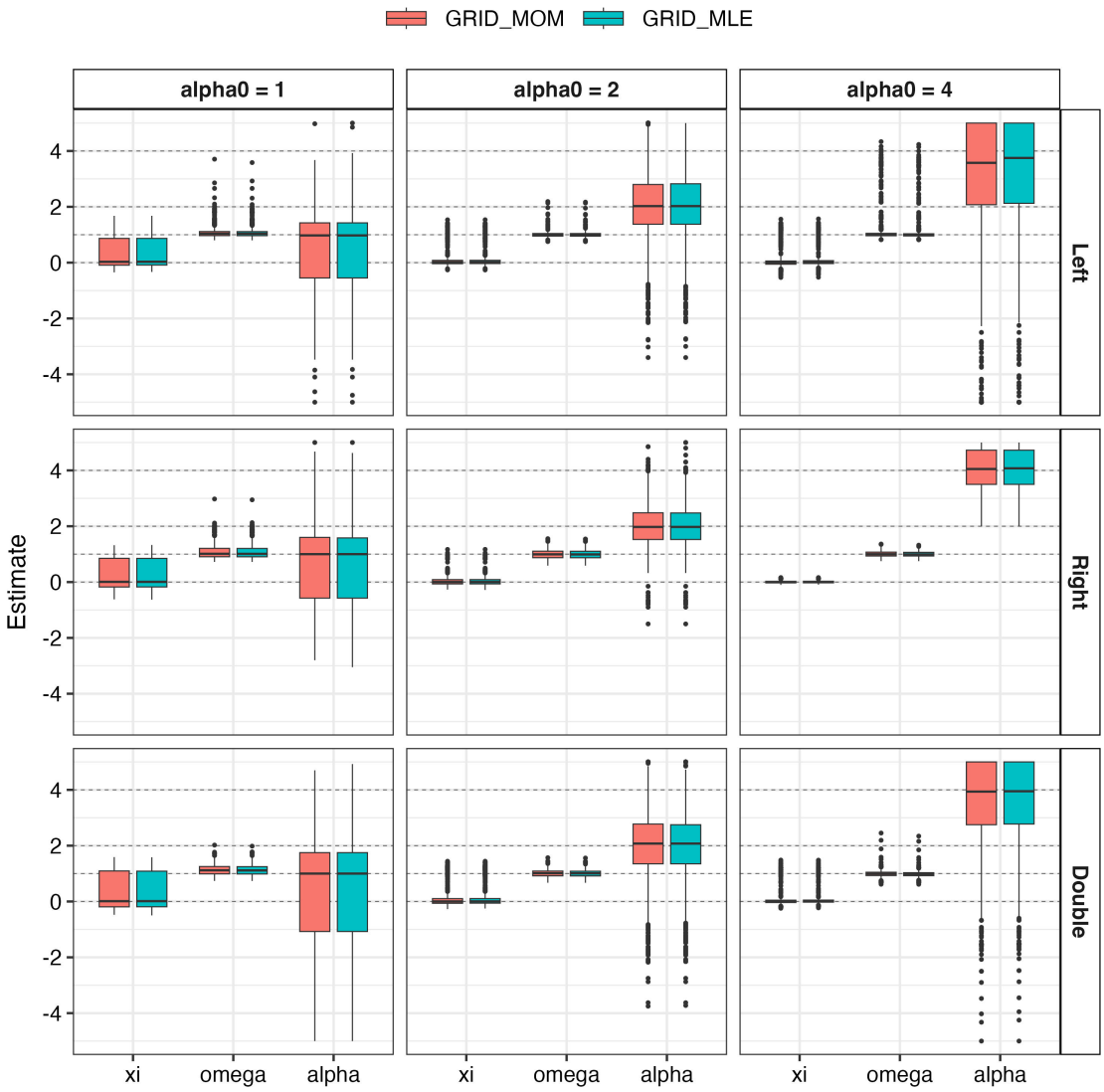


图1：截断率为 $\tau = 0.1$ 时 GRID-MOM（红色箱线图）与 GRID-MLE（绿色箱线图）的比较。各行对应不同的截断方向（左、右、双），各列对应不同的真实形状参数 $\alpha_0 \in \{1, 2, 4\}$。在所有模拟设置中，真实位置参数和尺度参数分别固定为 $\xi_0 = 0$ 和 $\omega_0 = 1$，样本量设为 $n = 500$。$\hat{}$ 每个面板中，基于 1,000 次蒙特卡洛重复得到的参数估计值（$\hat{\xi}$，$\hat{\omega}$，$\hat{\alpha}$）以箱线图汇总。水平虚线为 0、1、2 和 4 处的参考线。

观测到的 t 统计量的 15%，并使用最大似然估计、矩估计法、MWM、GRID-MLE 和 GIRD-MOM 对剩余的 t 统计量拟合截断偏正态模型。与数值研究不同，我们对最大似然估计采用多起点策略。具体而言，令 m 和 s 分别表示观测值的样本均值和样本标准差。我们生成 20 个候选初始值，通过

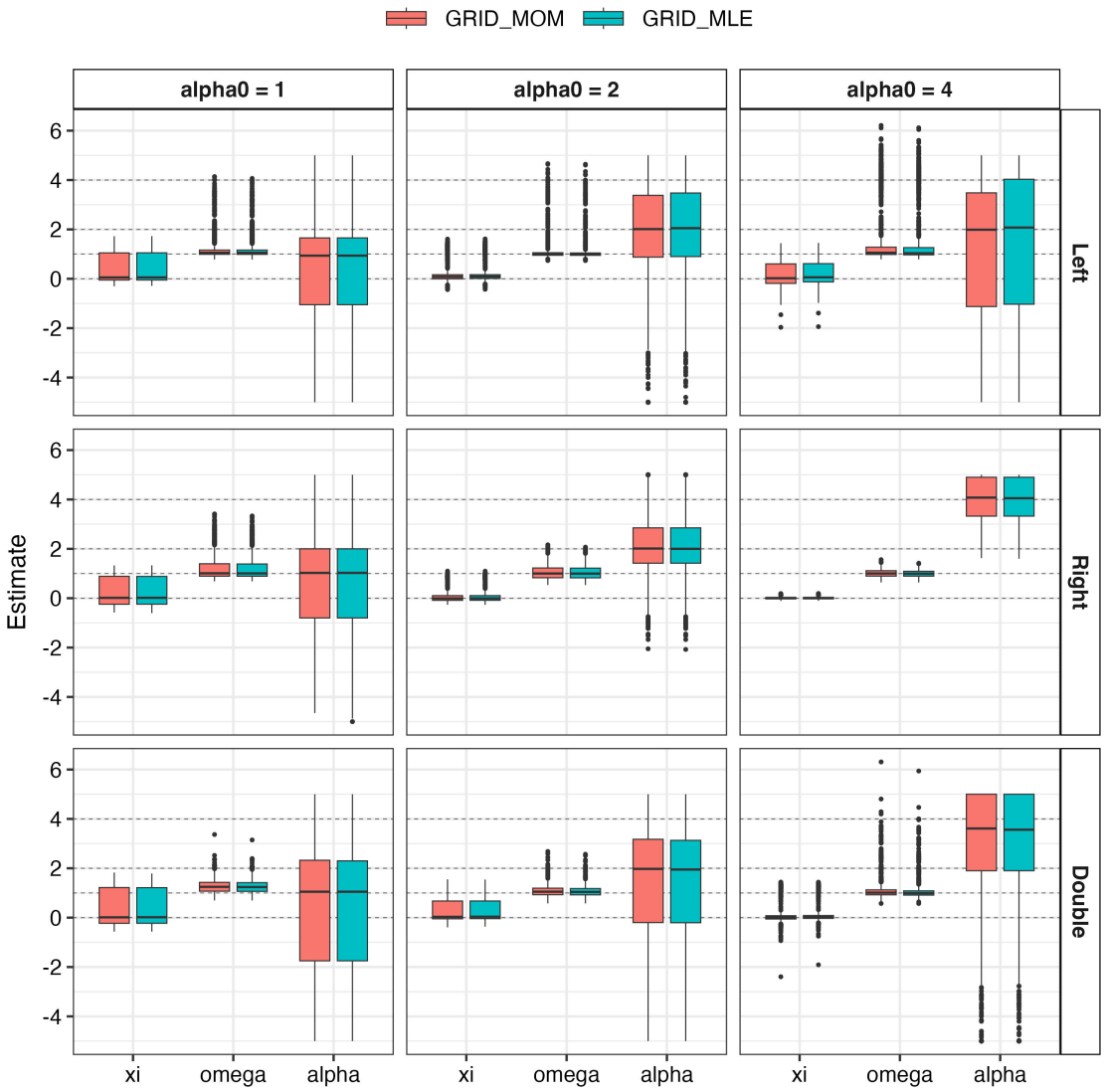
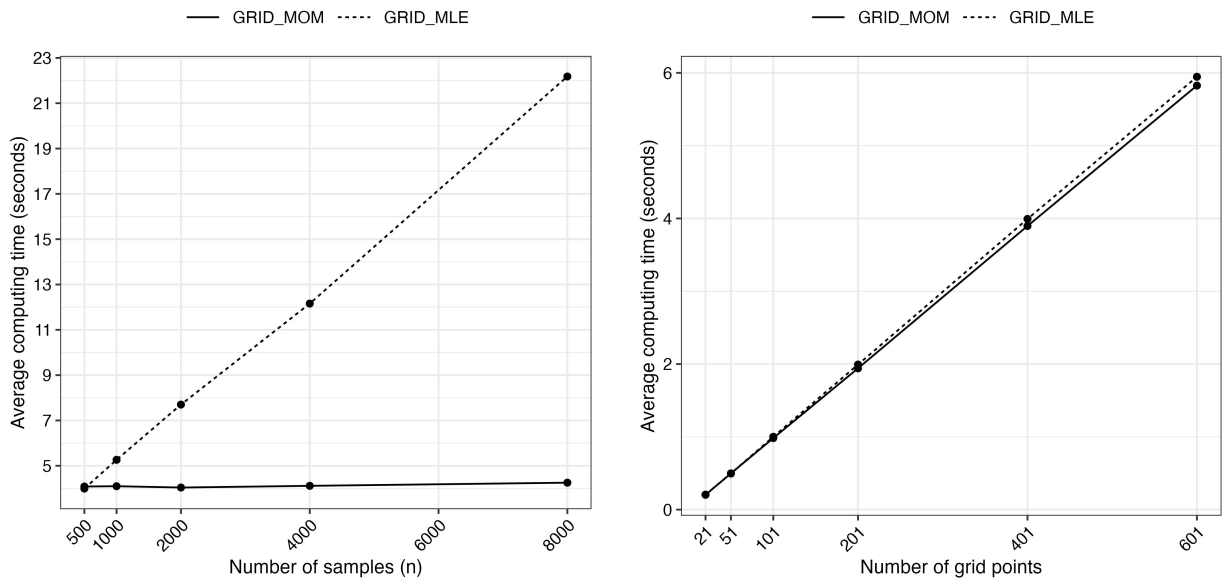


图2：在截断率 $\tau = 0.2$ 下比较 GRID-MOM（红色箱线图）和 GRID-MLE（绿色箱线图）。布局及其他所有模拟设置均与图 1 中的相同。

从立方体 $[m-1, m+1] \times [\max(s-1、\ 1),\ \max(s+1、\ 2)] \times [-5, 5]$ 中均匀抽样（ξ、ω、α）。对于每个初始值，我们计算相应的最大似然估计，并选择对数似然值最高的解作为最终估计。结果汇总于图4 中。

五种方法均得到与经验直方图高度吻合的估计截断偏态正态密度。尤其是，最大似然估计、矩估计法、GRID-MLE 和 GRID-MOM 得到几乎相同的拟合密度，而 MWM 产生的曲线略有不同，但仍大体



(a) 平均计算时间与样本量的关系　　(b) 平均计算时间与网格点数量的关系

图 3：GRID-MOM 和 GRID-MLE 的计算成本与样本量（左图）及网格点数量（右图）的关系。左图中报告的平均计算时间基于 50 次蒙特卡洛重复，网格点数量固定为 401。右图中的平均值基于 100 次蒙特卡洛重复，样本量固定为$n = 500$。

相似。具体而言，最大似然估计、矩估计法、GRID-MLE 和 GRID-MOM 的参数估计值分别为 $\hat{}(\xi, \hat{}\omega, \hat{}\alpha)$ $=(-1.391, 1.379, 0.861)$ 、 $(-1.343, 1.347, 0.785)$ 、 $(-1.384, 1.375, 0.850)$ 和 $(-1.384, 1.375, 0.850)$，而 MWM 的相应估计值为 $(-1.836, 1.842, 1.864)$。MWM 下拟合密度的细微差异源于其参数估计值与其他方法所得结果略有不同。

作为第二个示例，我们分析痴呆症患者一年内的住院天数数据。由于患者个人层面的住院天数被视为敏感个人信息，因此无法直接获取此类数据。因此，我们根据公开的国民健康保险统计数据构建了一个合成数据集。该数据集包含 6,000 名痴呆症患者的住院天数，我们的目标是对这些住院天数的分布进行建模。

合成数据集是利用韩国健康保险审查与评估服务（HIRA）提供的汇总统计数据构建的，这些统计报告了患者人数以及

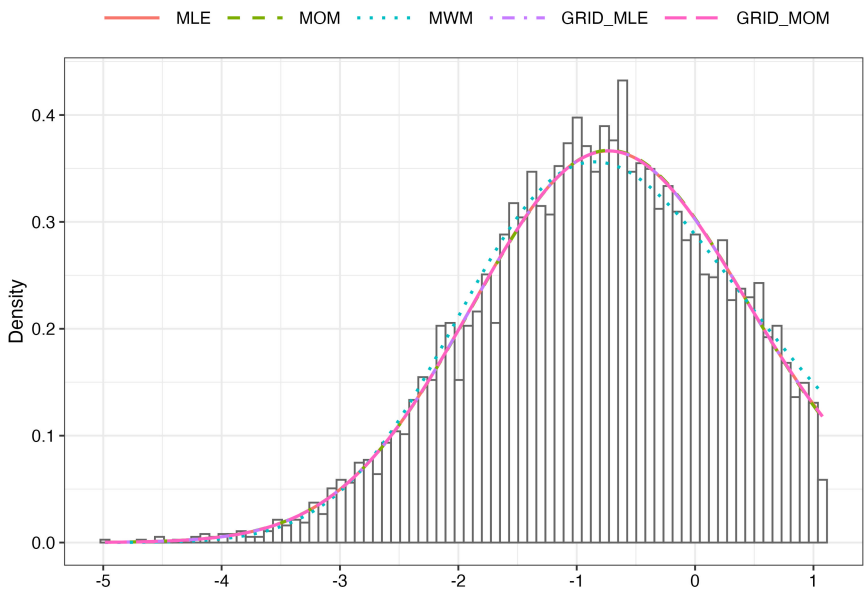


图4：磷酸化蛋白质组学数据检验统计量的直方图，并叠加了通过最大似然估计（红色实线）、矩估计法（绿色虚线）、MWM（蓝色点线）、GRID-MLE（紫色点划线）和GRID-MOM（粉色长虚线）得到的估计截断密度。通过最大似然估计、矩估计法、GRID-MLE和GRID-MOM得到的拟合密度曲线几乎无法区分，且基本完全重合。

按诊断代码、性别和年龄组划分的总诊疗天数。由于这些统计同时汇总了住院与门诊服务，我们采用HIRA提供的住院利用率，以得到仅针对住院的住院时长。我们的分析聚焦于对应于国际疾病分类第十版代码F00–F03的痴呆相关诊断。为近似真实的住院模式，通过多项分配对个体进行抽样，以保留实测人口构成，并根据对数正态分布生成个体住院时长[1] 该分布根据所报告的住院时长均值，以及从国民健康保险公团一山医院发布的2018年报告中获得的变异系数进行校准。

由于观测到的住院天数范围为 1 天至 356 天，我们将数据视为截断数据，并使用截断偏态正态分布对其进行建模。由于住院天数的分布呈高度右偏，因此在拟合截断偏正态模型之前，先进行平方根变换。与磷酸化蛋白质组学数据

[1]选择对数正态分布，是因为它能够自然地适应医院住院时长数据中常见的非负性、明显的右偏度和较大的变异性。

分析一样，我们使用多个初始值进行最大似然估计。

图5展示了观测值的直方图及其上叠加的估计密度。尽管直方图呈现出明显的偏度，但其形状不够平滑，无法用偏正态分布族很好地描述。尽管如此，我们仍采用偏态正态分布作为密度拟合的便捷参数模型。最大似然估计和 GRID-MOM 得到的拟合密度彼此十分接近，而矩估计法似乎高估了偏斜程度。MWM 和 GRID-MLE 得到的拟合密度几乎完全相同，而且似乎忽略了 4 附近的峰值 ˆ。具体而言，最大似然估计和 GRID-MOM 的估计值分别为 $(\xi, \hat{}\omega, \hat{}\alpha) = (1.826, 7.883, 10.116)$ 和 (1.563, 8.187,12.825)，而矩估计法的估计值为 $(1.347, 8.520, > 100)$。MWM 和 GRID-MLE 对应的估计值分别为 $(5.237, 6.461, -0.035)$ 和 (2.162, 7.043,0.675)。矩估计法的估计量给出的形状参数估计值极大，这解释了拟合密度中观察到的明显右偏。相比之下，最大似然估计和 GRID-MOM 得到较大的形状参数估计值，而 MWM 和 GRID-MLE 得到的估计值相对较小，因此拟合密度差异显著。GRID-MOM 与 GRID-MLE 之间的差异可能是因为底层观测值并不严格服从截断偏态正态分布。

6 结论

我们研究了截断偏态正态分布的参数估计问题，并提出一种结合基于矩的估计与似然评估的基于网格的估计方法。通过将形状参数的估计与位置和尺度参数的估计解耦，所提方法降低了估计问题的复杂度，并提高了数值稳定性。通过广泛的数值研究，我们将所提估计量与最大似然估计、矩估计法和 MWM 进行了比较。结果表明，所提方法的有限样本性能具有竞争力，甚至更优，尤其是在形状参数的稳定性和准确性方面。总的来说，所提方法为截断偏正态模型的参数估计提供了一个简单的框架，并为截断和偏度起核心作用的应用场景提供了一种有用的替代方案。

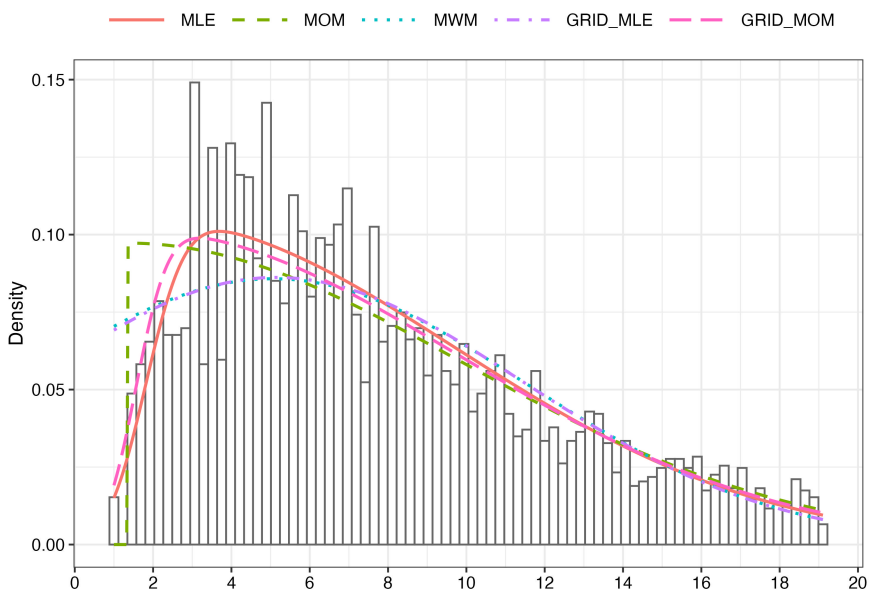


图5：住院天数的直方图，并叠加了通过最大似然估计（红色实线）、矩估计法（绿色虚线）、MWM（蓝色点线）、GRID-MLE（紫色点划线）和 GRID-MOM（粉色长虚线）得到的截断密度估计值。MWM 和 GRID-MLE 得到的拟合密度曲线几乎无法区分，基本完全重叠。

本文主要关注点估计。然而，在实际统计推断中，量化不确定性同样重要。为此，我们按照 Flecher 等人(2010的做法，提出一种参数自助法程序，以评估 GRID-MOM估计量的变异性。假设有 n 个来自截断偏态正态分布、截断区间为 $[L, U]$ 的观测值。令 $(\xi, \hat{}\omega, \hat{}\alpha)$ 表示基于观测数据得到的 GRID-MOM 估计值。将这些估计值视为数据生成参数，从截断区间相同的截断偏态正态分布中生成一个大小为 n 的自助样本，其参数为 $(\xi, \hat{}\omega, \hat{}\alpha)$，截断区间为 $[L, U]$。随后，将 GRID-MOM 重新应用于该自助样本，以获得一组新的参数估计值。独立重复这一重抽样再拟合程序 B 次，可得到该估计量的 B 个自助复制。这些复制的自助标准误以样本标准差计算。 B

致谢

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

Azzalini, A.（1985年）。一类包含正态分布的分布族。斯堪的纳维亚统计学杂志，第171–178页。

Azzalini, A.（2013）。偏正态及相关分布族，第3卷。剑桥大学出版社。

Efron, B.（2004）。大规模同时假设检验：原假设的选择。美国统计协会期刊，99(465):96–104。

Flecher, C., Allard, D., and Naveau, P. (2010). 截断偏态正态分布：矩、加权矩估计及其在气候数据中的应用。$Metron$, 68(3):331–345.

Flecher, C., Naveau, P., and Allard, D. (2009). 使用加权矩估计闭偏正态分布的参数。统计与概率快报, 79(19):1977–1984.

Kim, H.-J. (2004). 一类截断偏态正态分布。统计应用与方法通讯, 11(2):265–274.

Martinez, E. H., Varela, H., G´omez, H. W., and Bolfarine, H. (2008). 关于偏态正态分布的似然和矩的一则注记。$SORT$, 32(1):57–66.

Seo, K., Lim, J., Choi, H., and Jeong, J. (2025). 对带有保守 p-值的单侧假设进行多重检验。*arXiv*预印本 *arXiv:2512.24588*.

Zhang, H., Liu, T., Zhang, Z., Payne, S. H., Zhang, B., McDermott, J. E., Zhou, J.-Y., Petyuk, V. A., Chen, L., Ray, D., 等（2016）。人类高级别浆液性卵巢癌的整合蛋白质基因组学表征。$Cell$，166(3):755–765。

A 附加模拟结果

A.1 形状参数的极端取值

本节考察真实形状参数 α_0 位于预先设定的搜索范围 $[-a, a]$ 之外时 GRID-MOM 的表现。与主要实验相同，我们设定 $\xi_0 = 0$ 和 $\omega_0 = 1$，并考虑一个极端形状参数值 $\alpha_0 = 10$。在截断率为 $\tau = 0.1$ 的右截断条件下，我们生成一个样本量为 $n = 500$ 的样本。随后，我们将搜索范围限定为 $\alpha \in [-5, 5]$ 并应用 GRID-MOM，从而有意对参数空间设定错误。

$\hat{}$ 得到的估计值为 $\xi = 0.046$、$\hat{}\omega = 0.868$和$\hat{}\alpha = 5$。由于真实值 $\alpha_0 = 10$超出了设定的搜索范围，GRID-MOM 无法恢复真实的形状参数，因此 α 的估计值存在偏差。为评估这种偏差对拟合密度的影响，我们将真实密度和估计密度叠加在观测值的经验直方图上。如图A.1所示，GRID-MOM 估计值所隐含的密度（蓝色虚线）与真实密度（红色实线）有所不同，但仍与经验直方图十分吻合。这是因为对于固定的（ξ_0，ω_0），足够大的 α 所对应的偏斜正态密度几乎无法区分。超过某个阈值后（该阈值取决于（ξ_0，ω_0）），进一步增大 α 对密度整体形状的影响很有限。因此，尽管限制参数空间可能无法精确恢复真实的 α，但在实践中，α 的推荐范围通常足以捕捉底层密度的主要特征。

如果已有关于偏斜程度的先验信息，则可相应扩大 α 的搜索范围。在此示例中，将范围扩展至 $[-15, 15]$ 后，得到的估计值 $\hat{}\xi = 0.012$、$\hat{}\omega = 0.919$ 和 $\hat{}\alpha = 9$ 与真实参数值更加接近。

A.2 小样本量下的结果

在本节中，我们开展了额外的数值研究，以评估并比较样本量较小时各方法的表现。具体而言，我们将样本量设为 $n = 100$，截断率设为 $\tau = 0.1$，其余模拟设置均与正文中的设置相同。结果汇总于表 A.1–A.2。

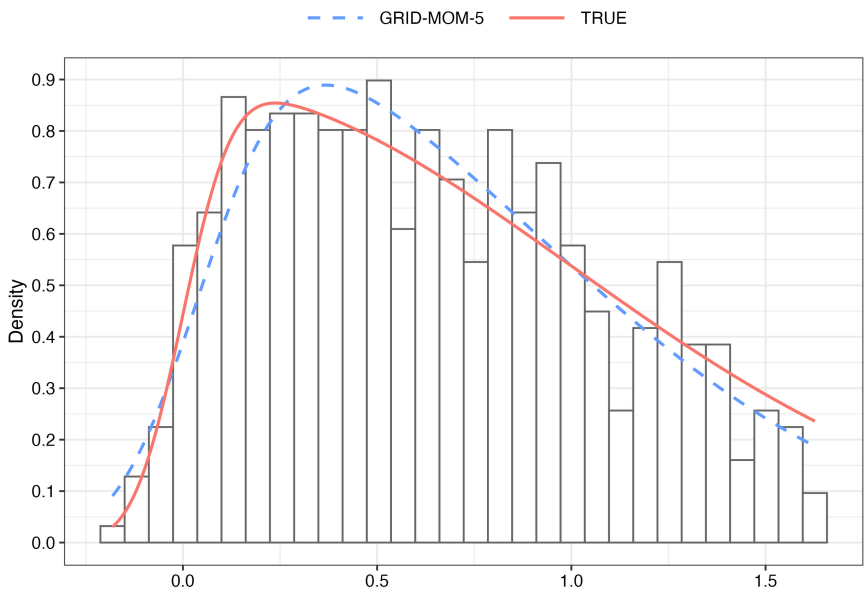


图 A.1：右截断率为 $\tau = 0.1$ 时，从参数为 $(\xi_0,\ \omega_0,\ \alpha_0) = (0,\ 1,\ 10)$ 的截断偏态正态分布中生成的 $n = 500$ 观测值直方图，并叠加真实密度和基于 GRID-MOM 的密度估计。标记为 TRUE 的曲线表示真实截断密度。标记为 GRID-MOM-5 的曲线对应于在限制条件 $\alpha \in [-5, 5]$ 下通过 GRID-MOM 得到的密度估计。

表 A.1 报告了经验偏差和均方根误差（RMSE），由此可以看出若干规律。在所有模拟设置下，最大似然估计和矩估计法对形状参数的偏差和均方根误差均超过 100，表明其稳定性严重不足。此外，在若干设置下，最大似然估计对尺度参数的偏差和均方根误差也超过 100，进一步凸显了其数值不稳定性。因此，后续比较将聚焦于 MWM 和 GRID-MOM。在右截断且 $\alpha_0 \in \{2, 4\}$ 的情况下，GRID-MOM 的表现始终优于 MWM。然而，在其余模拟设置下，MWM 和 GRID-MOM 均表现出较大的偏差和/或均方根误差。

表 A.2 给出了各估计量的中位数和四分位距。总体而言，最大似然估计和 GRID-MOM 的表现与矩估计法和 MWM 相当或更优；因此，后续比较聚焦于最大似然估计和 GRID-MOM。当 $\alpha_0 \in \{1, 2\}$时，在左截断下，最大似然估计所得形状参数的中位数估计往往比 GRID-MOM 略微更偏离真实值。在其余截断方向下，最大似然估计与 GRID-MOM 得到相近且接近真实值的中位数，而最大似然估计的四分位距始终小于 GRID-

MOM。当 $\alpha_0 = 4$ 时，两种方法在左截断下的中位数形状估计均出现较大偏离。然而，在右截断和双重截断下，GRID-MOM 优于最大似然估计。

表 A.1：基于 1，000 次重复试验，在样本量为 $n = 100$ 、截断率为 $\tau = 0.1$ 时，最大似然估计、矩估计法、MWM 和 GRID-MOM 的参数估计值的偏差和均方根误差。真实参数为 $\xi_0 = 0$、 $\omega_0 = 1$ 和 $\alpha_0 \in \{1, 2, 4\}$。

截断		MLE		MOM		MWM		GRID-MOM	
		Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE
$\alpha_0 = 1$									
Left	$\hat{\xi}$	0.199	0.402	0.690	0.972	0.063	0.240	0.566	0.952
	$\hat{\omega}$	0.100	4.218	0.687	3.310	-0.018	0.141	0.395	0.761
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	0.297	11.969	-0.998	2.951
右	$\hat{\xi}$	0.027	0.457	0.222	0.716	0.042	0.442	0.239	0.734
	$\hat{\omega}$	>100	>100	1.681	16.105	0.638	5.277	0.324	0.642
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	1.452	10.130	-0.041	2.517
双	$\hat{\xi}$	0.108	0.443	0.489	0.913	0.142	0.408	0.447	0.931
	$\hat{\omega}$	>100	>100	0.449	4.333	0.057	0.336	0.363	0.591
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	19.284	>100	-0.573	3.164
$\alpha_0 = 2$									
Left	$\hat{\xi}$	0.185	0.336	0.532	0.764	0.077	0.248	0.339	0.691
	$\hat{\omega}$	-0.062	0.155	0.442	2.515	-0.041	0.147	0.232	0.687
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	-0.499	1.068	-0.498	2.964
右	$\hat{\xi}$	0.076	0.306	0.135	0.428	0.104	0.305	0.143	0.445
	$\hat{\omega}$	>100	>100	0.154	3.009	0.015	0.458	0.052	0.351
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	0.216	2.394	0.013	1.973
双	$\hat{\xi}$	0.158	0.366	0.468	0.718	0.223	0.336	0.321	0.704
	$\hat{\omega}$	0.165	5.844	0.099	2.082	-0.122	0.243	0.156	0.430
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	-0.627	4.937	-0.453	3.084
$\alpha_0 = 4$									
Left	$\hat{\xi}$	0.132	0.373	0.390	0.708	-0.092	0.387	0.247	0.680
	$\hat{\omega}$	0.697	6.509	1.432	6.452	-0.006	0.170	0.605	1.404
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	-2.522	2.746	-2.674	4.521
右	$\hat{\xi}$	0.017	0.140	0.027	0.161	0.047	0.150	0.034	0.147
	$\hat{\omega}$	>100	>100	0.102	1.776	-0.007	0.323	-0.002	0.228
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	0.471	5.541	-0.132	1.314
双	$\hat{\xi}$	-0.196	4.809	0.419	0.641	-0.044	1.943	-0.595	11.244
	$\hat{\omega}$	0.547	9.074	0.460	4.193	0.007	1.972	0.306	2.405
	$\hat{\alpha}$	>100	>100	>100	>100	-3.176	3.236	-1.427	3.435

表 A.2：基于 1,000 次重复试验，在截断率为 $\tau = 0.1$、样本量为 $n = 100$ 时，MLE、MOM、MWM 和 GRID-MOM 的参数估计值的中位数和四分位距。真实参数为 $\xi_0 = 0$、$\omega_0 = 1$ 和 $\alpha_0 \in \{1, 2, 4\}$。

截断		MLE		MOM		MWM		GRID-MOM	
		中位数	IQR	中位数	IQR	中位数	IQR	中位数	IQR
$\alpha_0 = 1$									
Left	$\hat{\xi}$	0.194	0.643	0.621	1.282	0.068	0.324	0.173	1.484
	$\hat{\omega}$	0.948	0.235	1.109	0.477	0.972	0.175	1.153	0.428
	$\hat{\alpha}$	0.486	1.789	-0.103	2.847	0.781	0.715	0.688	3.900
右	$\hat{\xi}$	-0.061	0.839	-0.070	1.322	-0.021	0.823	-0.066	1.361
	$\hat{\omega}$	1.014	0.678	1.097	0.540	1.012	0.662	1.125	0.562
	$\hat{\alpha}$	1.187	2.587	1.186	3.481	1.135	2.448	1.200	3.725
双	$\hat{\xi}$	0.045	0.785	0.212	1.515	0.234	0.683	0.024	1.586
	$\hat{\omega}$	1.014	0.451	1.213	0.449	0.957	0.399	1.273	0.472
	$\hat{\alpha}$	1.023	2.738	0.433	4.246	0.294	1.925	1.075	4.825
$\alpha_0 = 2$									
Left	$\hat{\xi}$	0.095	0.423	0.456	0.763	0.078	0.279	0.075	0.773
	$\hat{\omega}$	0.949	0.200	0.951	0.313	0.958	0.188	1.033	0.234
	$\hat{\alpha}$	1.717	3.298	-0.003	1.807	1.505	1.458	1.963	3.888
右	$\hat{\xi}$	0.001	0.354	0.009	0.336	0.035	0.360	-0.007	0.356
	$\hat{\omega}$	0.956	0.484	0.954	0.440	0.917	0.459	0.971	0.450
	$\hat{\alpha}$	2.066	2.336	2.023	2.127	1.842	1.945	2.100	2.350
双	$\hat{\xi}$	0.034	0.568	0.397	0.782	0.253	0.417	0.020	0.955
	$\hat{\omega}$	0.952	0.387	0.943	0.377	0.848	0.284	1.090	0.386
	$\hat{\alpha}$	1.967	3.888	0.155	2.687	0.781	1.402	2.138	4.575
$\alpha_0 = 4$									
Left	$\hat{\xi}$	0.123	0.295	0.331	0.685	-0.026	0.377	0.060	0.746
	$\hat{\omega}$	0.937	0.183	1.006	0.352	0.979	0.202	1.056	0.374
	$\hat{\alpha}$	1.384	4.016	0.001	2.753	1.488	1.818	2.350	6.181
右	$\hat{\xi}$	0.001	0.149	0.008	0.164	0.029	0.157	0.007	0.119
	$\hat{\omega}$	0.981	0.322	0.973	0.345	0.943	0.316	0.979	0.276
	$\hat{\alpha}$	4.256	3.503	3.977	4.067	3.398	2.513	4.300	2.000
双	$\hat{\xi}$	0.067	0.226	0.411	0.599	0.154	0.295	0.038	0.242
	$\hat{\omega}$	0.922	0.252	0.892	0.347	0.827	0.235	1.019	0.327
	$\hat{\alpha}$	3.164	6.169	0.000	3.208	0.815	0.212	3.875	3.431