arXiv:2603.05998v1 [math.DS] 6 Mar 2026

关于外长度台球的注记

米沙·比亚利与谢尔盖·塔巴奇尼科夫

摘要。我们研究外长度台球；主要结果如下。我们证明了Ivrii 猜想的3周期与4周期版本。我们表明，对每一个周期$n \geq 3$，存在一个弹球桌的函数空间，这些弹球桌具有由n-周期点组成的不变曲线。对于$n = 4$，我们用单变量函数显式参数化此类中心对称弹球桌，并描述如何以几何方式构造这些弹球桌，类似于Radon曲线的已知构造。

1. 引言

本文继续[1, 3, 5]中开始的对外长度台球的研究。这一离散时间动力系统与一条平面卵形曲线（一条封闭的严格凸光滑曲线）相关联，并作用于其外部。该弹球的精确定义在下文第2节给出；这里我们仅指出，其n周期轨道是一个外切于该椭圆且具有极值周长的n边形。

这个系统俗称“第四种弹球”，因为还有三种与平面卵形曲线相关、知名度更高的台球模型。它们分别是内长度弹球（又称毕尔霍夫弹球；其周期轨道是周长取极值的内接多边形）、外台球（其周期轨道是面积取极值的外切多边形），以及辛台球（其周期轨道是面积取极值的内接多边形）；关于统一的观点，参见 [3, 6] 。

本文研究两个与台球相关的问题：Ivrii 猜想，以及完全由周期点构成的不变曲线的存在性与描述。这两个问题也已针对上述另外三种台球模型进行了研究。

外长度弹球变换是一个保面积的扭映射，其不变面积形式取决于弹球桌（见第 2 节）。相关版本的 Ivrii 猜想指出，周期点集是零测集（一个略弱的表述是，该集合的空内点）。

我们证明，外长度弹球映射的第二次迭代也是一个扭转映射，并利用这一结果在定理1中证明 Ivrii

日期：2026年3月9日。MB 部分获得了 ISF grant974/24 的资助。ST 获得了美国国家科学基金会 DMS-2404535 项目和西蒙斯基金会 MPS- TSM-00007747 项目的资助。

猜想对周期3和4成立。在第5节中，我们采用不同方法给出周期3情形的另外两种证明。关于另外三种弹球的类似结果，参见 [2, 11, 12, 13, 19, 20,21, 22, 23, 24, 25] 。

如果弹球的相位圆柱（或至少其中的一部分）被不变曲线叶状分解，那么该弹球就是完全可积的。对于所有四种弹球模型，当弹球桌为椭圆时，情况皆是如此；而且据猜想，这也是唯一的情形，即所谓的 Birkhoff猜想，见 [10]。特别地，可积弹球具有由周期为$n \geq 3$的周期点构成的不变曲线。第二个问题是构造具有由给定周期的周期点构成的不变曲线的弹球桌。

在第3节中，我们证明，对于每个$n \geq 3$，都存在一个外长度弹球桌的函数空间，其中的弹球桌具有由n周期点构成的不变曲线。我们采用了 [7, 15] 中针对 Birkhoff 弹球提出的次黎曼几何方法，并将其应用于外弹球和辛台球，见 [2, 12]。在第5节中关于三周期伊夫里猜想的一种证明中，我们也采用了这种方法。

第4节讨论具有由4周期点构成的不变曲线的中心对称外长度弹球桌。我们证明这些周期四边形是平行四边形，并在定理 3 中用单变量函数对相应的弹球桌进行显式参数化。我们还描述了这类卵形曲线的一种构造方法，它类似于 Radon曲线的构造（例如，见 [16]）。Radon曲线解决了外长度弹球和辛台球中的一个类似问题 [2, 8]。

致谢。我们感谢 V. Zharnitsky 的有益讨论。ST 感谢特拉维夫大学高等研究院给予的支持与款待。

2. 不变面积形式，扭转条件

外长度弹球映射，记作 T，按照以下规则作用于平面卵形曲线 γ 的外部（见图1）。

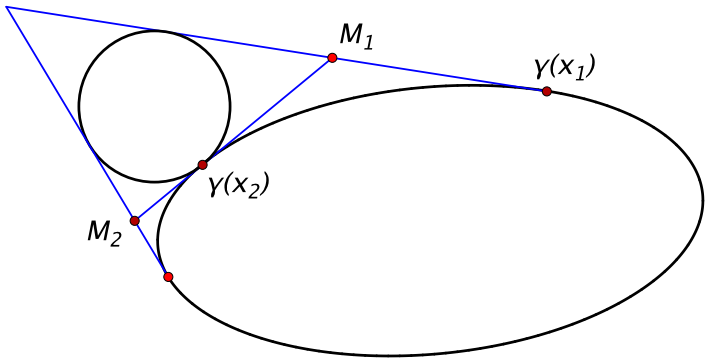


图1. 外长度弹球规则。

给定点 M_1，位于 $\gamma(x)$ 的外部，考虑从 M_1 引向 γ 的两条切线，以及唯一一个与 γ相切于点 $\gamma(x_2)$、并与在 $\gamma(x_1)$ 处的切线相切的圆。于是，点 $M_2 = T(M_1)$ 定义为在 $\gamma(x_2)$处的切线与唯一一条同时与该圆和 γ相切的直线的交点。我们将切线段的长度记作如下：

$$l_1 := |M_1 - \gamma(x_1)|, \quad l_2 := |M_1 - \gamma(x_2)|.$$

可以证明 [3] T是一个正扭转映射，并且$S = l_1 + l_2 - \overset{\frown}{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}$是外长度台球的一个生成函数。

我们将使用 γ 的包络坐标来计算生成函数$S = l_1 + l_2 - \overset{\frown}{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}$。

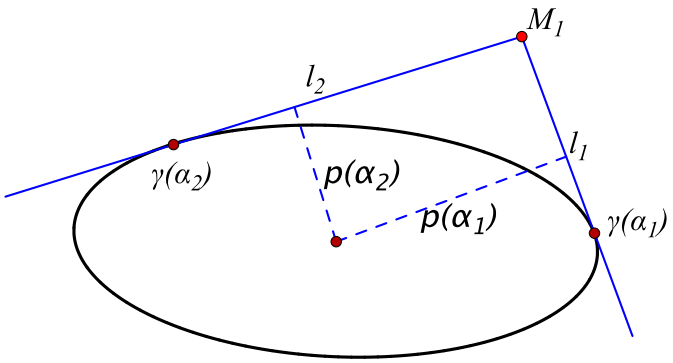


图2。在包络坐标中计算l_1,l_2。

记p为 γ 的支撑函数（见图2）。特别地：

(1) $$\gamma(\alpha) = p(\alpha)\,(\cos\alpha, \sin\alpha) + p'(\alpha)\,(-\sin\alpha, \cos\alpha).$$

我们有l_1,l_2, 和S的以下公式（见 [6]的引理4.4）。

引理 2.1。有

$$l_1 = -p'(\alpha_1) + \frac{p(\alpha_2)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} - p(\alpha_1)\cot(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$l_2 = p'(\alpha_2) + \frac{p(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} - p(\alpha_2)\cot(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$S(\alpha_1, \alpha_2) = l_1 + l_2 - \overset{\frown}{\gamma(x_1)\gamma(x_2)} = \Big(p(\alpha_2) + p(\alpha_1)\Big)\tan\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p\,d\alpha.$$

证明。由于$p'' + p$是 γ 的曲率半径，因此弧长为

$$\overset{\frown}{\gamma(x_1)\gamma(x_2)} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (p'' + p)\,d\alpha = p'(\alpha_2) - p'(\alpha_1) + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p\,d\alpha.$$

利用这一事实和引理中的前两个公式，我们得到S的表达式。

现在我们计算l_1,l_2。点 $\gamma(\alpha_1)$和点 $\gamma(\alpha_2)$的坐标可利用公式 (1) 求得，从而得到

$$\gamma(\alpha_1) = p(\alpha_1)\,(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1) + p'(\alpha_1)\,(-\sin\alpha_1, \cos\alpha_1),$$
$$\gamma(\alpha_2) = p(\alpha_2)\,(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2) + p'(\alpha_2)\,(-\sin\alpha_2, \cos\alpha_2).$$

接下来，需要求出点 M的坐标，它是两条切线的交点。因此，(x_M, y_M)（即点 M的坐标）满足以下方程组：

$$\begin{cases} \cos\alpha_1 x + \sin\alpha_1 y = p(\alpha_1) \\ \cos\alpha_2 x + \sin\alpha_2 y = p(\alpha_2). \end{cases}$$

解此方程组，得到：

$$(x_M, y_M) = \frac{1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}\Big(p(\alpha_1)\sin\alpha_2 - p(\alpha_2)\sin\alpha_1,\ p(\alpha_2)\cos\alpha_1 - p(\alpha_1)\cos\alpha_2\Big).$$

因此

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{x_M - x_{\gamma(\alpha_1)}}{\cos(\alpha_1 + \pi/2)} \\ &= -\frac{p(\alpha_1)\sin\alpha_2 - p(\alpha_2)\sin\alpha_1 - \sin(\alpha_2 - \alpha_1)(p(\alpha_1)\cos\alpha_1 - p'(\alpha_1)\sin\alpha_1)}{\sin\alpha_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}. \end{aligned}$$

将恒等式代入该公式的分子中

$$\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \cos\alpha_1\sin(\alpha_2 - \alpha_1),$$

我们得到引理 2.1 的第一个结论。第二个公式的证明类似。 □

现在我们可以计算函数S的偏导数，见图 3。

引理 2.2。 $S(\alpha_1, \alpha_2)$ 关于第一和第二个自变量的偏导数为

$$S_1 = \frac{1}{2\cos^2\omega/2}(p(\alpha_1)\cos\omega - p(\alpha_2) + p'(\alpha_1)\sin\omega) = -l_1\tan\frac{\omega}{2} = -R_1,$$
$$S_2 = \frac{1}{2\cos^2\omega/2}(-p(\alpha_2)\cos\omega + p(\alpha_1) + p'(\alpha_2)\sin\omega) = l_2\tan\frac{\omega}{2} = R_2,$$

其中 $\omega := \alpha_2 - \alpha_1$，而 R_1,R_2 是辅助圆的半径。

推论 *2.3*。 *</style}*有 $dS = R_2 d\alpha_2 - R_1 d\alpha_1$，因此 $dR \wedge d\alpha$ 是不变辛形式。

接下来我们需要计算 S 的二阶偏导数。

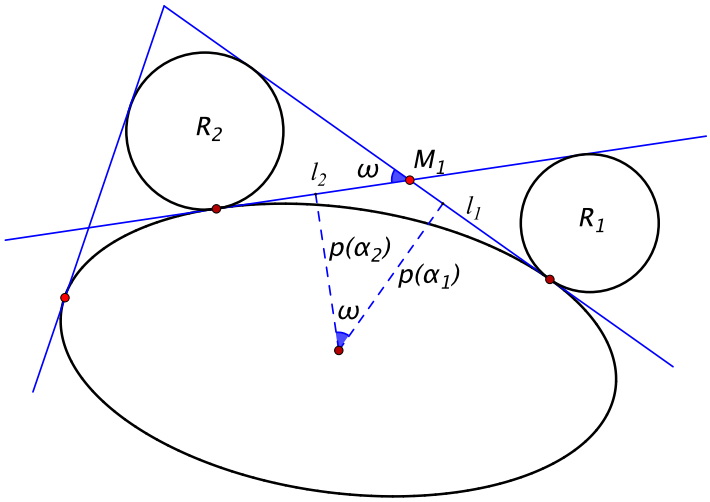


图 3. 不变辛形式 $dR \wedge d\alpha$。

引理2.4. S 的二阶偏导数如下：

$$S_{11} = \tan\frac{\omega}{2}(R_1 + \rho(\alpha_1)),$$
$$S_{22} = \tan\frac{\omega}{2}(R_2 + \rho(\alpha_2)),$$
$$S_{12} = -\frac{1}{\sin\omega}(R_1 + R_2),$$

其中，$\omega = \alpha_2 - \alpha_1$ 和 ρ 是 γ的曲率半径。特别地，$S_{12} < 0$和$S_{11}, S_{22} > 0$。

推论2.5. 映射 T 和 T^2 是相对于坐标 R, α定义在相位圆柱上的正扭转映射。

证明。$T\colon (R,\alpha) \mapsto (R',\alpha')$ 的微分可以写成如下形式：

$$DT = \begin{pmatrix} -\frac{S_{22}}{S_{12}} & \frac{S_{12}^2 - S_{11}S_{22}}{S_{12}} \\ -\frac{1}{S_{12}} & -\frac{S_{11}}{S_{12}} \end{pmatrix}.$$

因此，$\frac{\partial\alpha'}{\partial}_{R} = \frac{1}{S_{12}} > 0$。此外，由于 S_{11} 和S_{22} 均严格为正，我们可知两个矩阵$DT(R,\alpha)\cdot DT(R',\alpha')$的乘积也有一个正元素 $\frac{\partial\alpha''}{\partial}_{R} > 0$。因此$T^2$ 也是正扭转映射。 □

作为T、$T2$的扭转映射性质的一个应用，我们有

定理1. 外长度台球的*3*周期轨道集和*4*周期点集都没有空内点。

证明。我们将证明 4 周期轨道集合的情形。另一种情况是类似的（稍后我们还会给出另外两个关于 3 周期情形的证明）。

反证法，假设存在一个由 4周期点组成的圆盘。取圆盘中的一点 P_0，并令 $v^0 = \frac{\partial}{\partial} R$ 为竖直切向量。定义 $v_i := DTi(v_0), i = 1$，其中 2，3。由 4 周期性可得

$$DT^4(v_0) = v_0.$$

设z_i、$i = 0$、……、3 是向量v_i的 α-坐标。于是$z_0 = 0$；由于T、T^2是正扭转映射，我们有z_1, z_2严格为正。另一方面，映射T^{-1}、T^{-2}是负扭转映射（因为它们是正扭转映射的逆映射），因此z_3和z_2严格为负，因为$DT^{-1} v_0 = v_3, DT^{-2} v_0 = v_2$。这就产生了矛盾。 □

注 2.6。 1. 类似地可以证明，如果T、$T2$、……、Tk、$k \geq 1$是正扭转映射，那么周期分别为 2、3、……、2k的周期轨道集合都具有空内点。

2. 如果T的所有正幂都是正扭转映射，那么T是完全可积的。对于许多台球模型而言，这种情形已被证明具有很强的刚性，参见 [10]。

3. 多边形空间上的周期不变曲线与一种分布

本节的目标是证明，对每个$n \geq 3$，都存在一个由外长度台球曲线构成的函数空间，其中的曲线具有由n周期点组成的不变曲线。我们的方法是借助次黎曼几何，沿用 [7, 15, 12]。

设 γ 为一个椭圆，即外长度台球桌，并假设存在一条由n周期点组成的不变曲线。

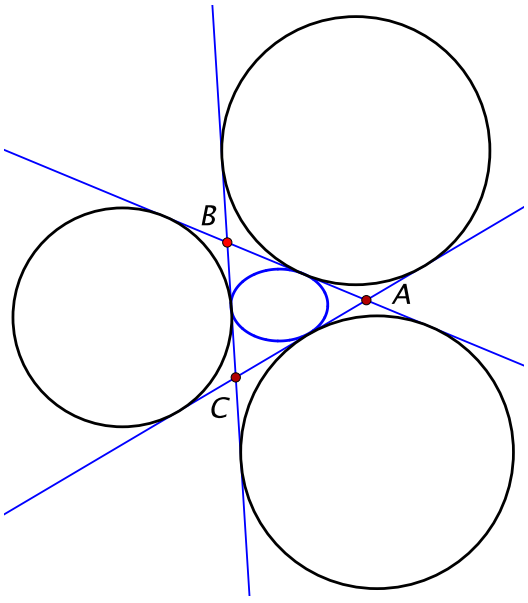


图4. ABC 是外长度台球的一个3周期轨道。

例如，考虑图4。如果3周期轨道ABC属于这样一族轨道的1参数族，那么这些三角形的边将包络椭圆γ。也就是说，每条边的运动都是围绕相应圆与该边的切点进行的无穷小旋转。

这促使我们给出如下定义。

设$\mathscr{P}_n$为平面上凸n边形的空间，它是一个$2n$维流形。我们将一个多边形视为其边的循环有序集合L_i，$i=1$，……，n，并由外法向量共定向。对于多边形的顶点，我们使用记号$V^{i+\frac{1}{2}}:=L_i\cap L_{i+1}$。顶点与边按逆时针循环排序。

选取一个原点，并令（α_i，p_i）为L_i的支撑坐标，即α_i是共定向法向量的方向，而p_i是从L_i到原点的有符号距离（若原点位于多边形内部，则所有距离均为正）。于是单位共定向向量为（$\cos\alpha_i$，$\sin\alpha_i$），该直线在笛卡尔坐标下的方程为$x\cos\alpha_i+y\sin\alpha_i=p_i$。

定义$\mathscr{D}_n$上的一个n维分布$\mathscr{D}_n$。考虑三条连续的直线L_{i-1}、L_i、L_{i+1}。考虑与这些直线相切的圆（这样的圆有四个），它位于共定向直线L_{i-1}和L_{i+1}的负侧，以及直线L_i的正侧。令C_i为此圆与直线L_i的切点，见图5。令ξ_i为直线L_i绕点C_i的无穷小旋转。分布$\mathscr{D}_n$由向量场ξ_i、$i=1$、……、n张成。

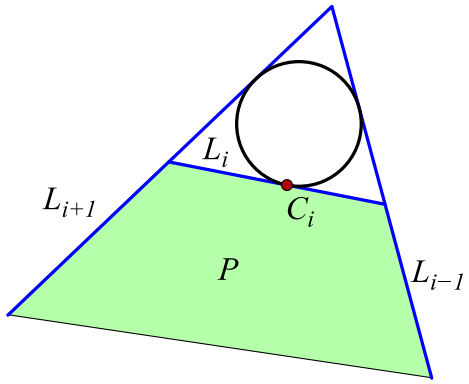


图5. 分布$\mathscr{D}_n$的定义。

$F:\ \mathscr{P}_n\to\mathbb{R}$表示一个多边形的周长。

引理3.1. 分布$\mathscr{D}_n$与函数F在$\mathscr{P}_n$上的等值超曲面相切。

证明。论证基本上就是[3]中引理3.1的证明。

见图6。固定点C_i，并令经过C_i的边L_i可变。我们断言，当$Z_i=C_i$时，多边形的周长达到极值，也就是说，圆经过点C_I。

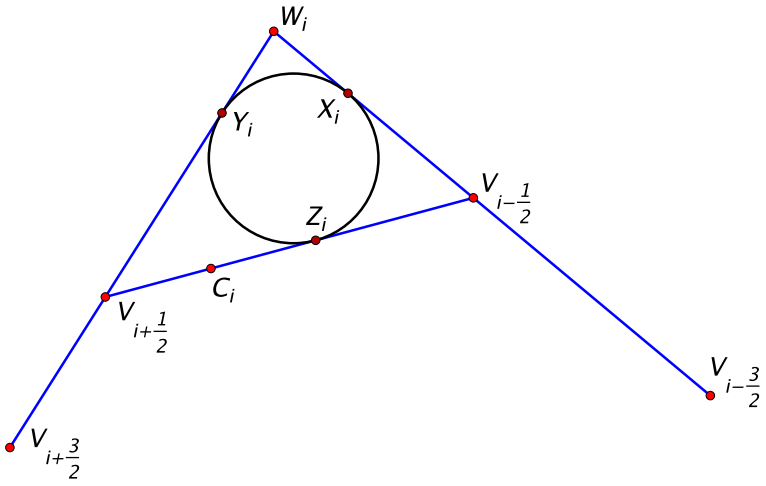


图6. 引理3.1的证明。若点W_i 位于直线L_i的另一侧，或者边L_{i-1} 和L_{i+1} 平行，论证类似。

事实上，从一点向圆引出的两条切线段长度相等。因此，$|V_{i-\frac{1}{2}}Z_i| = |V_{i-\frac{1}{2}}X_i|$，$|V_{i+\frac{1}{2}}Z_i| = |V_{i+\frac{1}{2}}Y_i|$，并且

$$|V_{i-\frac{3}{2}}V_{i-\frac{1}{2}}| + |V_{i-\frac{1}{2}}V_{i+\frac{1}{2}}| + |V_{i+\frac{1}{2}}V_{i+\frac{3}{2}}| = |V_{i-\frac{3}{2}}X_i| + |V_{i+\frac{3}{2}}Y_i|$$
$$= |V_{i-\frac{3}{2}}W_i| + |V_{i+\frac{3}{2}}W_i| - 2|W_iX_i|.$$

由此可知，当切线线段W_iX_i取极值时，周长也取极值；而这发生在圆经过点C_i时。

回到图5，可得方向导数$D^{\chi_i}(F) = 0$，正如所需。 □

鉴于上述引理，我们将注意力限制在周长固定的多边形上，例如单位周长。令 $\mathscr{C}_n$ 为这类凸n边形的集合。则 $\dim\ \mathscr{C}_n = 2n - 1$，且 $\mathscr{D}_n$ 是$\mathscr{C}_n$上的一个 n 维分布。以下是本节的主要结果。

定理2. 对于每个 $n \geq 3$，都存在一个外长度台球曲线的函数空间，它充分接近圆形，并具有由 n 周期轨道构成的不变曲线。

以下是证明的大致思路。我们通过扰动一个圆（显然它具有上述性质），构造由n周期轨道组成的外长度台球曲线。外长度台球的圆形n周期不变曲线，是空间 $\mathscr{C}_n$中的一条闭水平曲线 γ_0 。群 $\mathbb{Z}_n$ 作用于 $\mathscr{C}_n$，循环置换n边形的边，并保持分布 $\mathscr{D}_n$不变，而γ_0 在这种循环置换下保持不变。我们证明，γ_0 在 $\mathscr{C}_n$中由水平闭 $\mathbb{Z}_n$不变曲线构成的类里，存在一个扰动函数空间。相应三角形的边随后包络

所需的外长度台球曲线。关于其基础理论，请参阅 [17, 18] 。

作为证明的准备，我们做一些计算。

令 $X=(a,b)$ 表示一个点的笛卡尔坐标，并令 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 表示经过点 X 的直线方程。该直线绕点 X 作逆时针无穷小旋转，所得切向量 ξ 属于直线空间。

引理3.2. 有

$$\xi=\partial\alpha+(b\cos\alpha-a\sin\alpha)\,\partial p=\partial\alpha+[(\cos\alpha,\sin\alpha),(a,b)]\,\partial p,$$

其中，方括号表示一对向量的行列式。

证明. 经过点 X 的直线方程为 $p(\alpha)=a\cos\alpha+b\sin\alpha$。对 α 求导即可得到结果。 □

令 $2\beta_{i-\frac{1}{2}}:=\alpha_i-\alpha_{i-1}$ 为顶点 $V^{i-\frac{1}{2}}$ 处的外角。下面计算顶点 Vj （其中 j 为半整数）的坐标，以及第 i 条边绕点 C_i 的无穷小旋转。

引理 3.3. 有：

$$V_{i-\frac{1}{2}}=\frac{(p_{i-1}\sin\alpha_i-p_i\sin\alpha_{i-1},\,p_i\cos\alpha_{i-1}-p_{i-1}\cos\alpha_i)}{\sin(\alpha_i-\alpha_{i-1})},$$

and

(2)

$$[(\cos\alpha_i,\sin\alpha_i),C_i]=\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{2}\right)(p_{i+1}+p_i)-\cos^2\left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right)(p_{i-1}+p_i)}{2\sin\left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right)}.$$

证明。点 $V^{i-\frac{1}{2}}$ 是由方程 $x\cos\alpha_{i-1}+y\sin\alpha_{i-1}=p_{i-1}$ 和 $x\cos\alpha_i+y\sin\alpha_i=p_i$ 所确定的两条直线的交点。解这个线性方程组求出 x、y，再利用一些三角学即可得到结果（见引理 2.1 的证明）。

设 r_i 为图5中圆的半径。那么

$$|V_{i-\frac{1}{2}}C_i|=r_i\cot\beta_{i-\frac{1}{2}},\ |V_{i+\frac{1}{2}}C_i|=r_i\cot\beta_{i+\frac{1}{2}},$$

因此

$$C_i=\frac{\cot\beta_{i-\frac{1}{2}}V_{i+\frac{1}{2}}+\cot\beta_{i+\frac{1}{2}}V_{i-\frac{1}{2}}}{\cot\beta_{i-\frac{1}{2}}+\cot\beta_{i+\frac{1}{2}}}.$$

接下来，利用得到的 C_i 和 $V^{i\pm\frac{1}{2}}$ 的公式，我们计算：

$$[(\cos\alpha_i,\sin\alpha_i),C_i]=\frac{(\cos^2\beta_{i-\frac{1}{2}})p_{i+1}-(\cos^2\beta_{i+\frac{1}{2}})p_{i-1}-(\cos^2\beta_{i+\frac{1}{2}}-\cos^2\beta_{i-\frac{1}{2}})p_i}{2\sin(\beta_{i-\frac{1}{2}}+\beta_{i+\frac{1}{2}})\cos\beta_{i-\frac{1}{2}}\cos\beta_{i+\frac{1}{2}}}.$$

这等价于公式 (2)。 □

注 3.4. 以下公式值得一提：多边形第i条边的长度等于

$$\frac{p_{i-1}}{\sin(\alpha_i-\alpha_{i-1})}+\frac{p_{i+1}}{\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)}-\frac{p_i\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1})}{\sin(\alpha_i-\alpha_{i-1})\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)},$$

且周长F由下式给出

$$\sum p_i\left[\tan\left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right)+\tan\left(\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{2}\right)\right]=\sum(p_i+p_{i+1})\tan\left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right).$$

可以直接验证，周长关于向量 ξ_i 的方向导数为零，从而解析地重新证明引理3.1。

记 Φ_i 为(2)式右端的表达式。则分布 $\mathscr{D}_n$ 由向量场 $\xi_i=\partial\alpha_i+\Phi_i\partial p_i$ 生成。由于 Φ_i 仅依赖于指标为$i-1$、i、$i+1$的变量，因此当 $|i-j|\geq 2$时，有 $[\xi_i,\xi_j]=0$。

命题 3.5. 在曲线 γ_0的充分小邻域内，分布 $\mathscr{D}_n$ 是完全不可积的。更具体地说，其增长类型为$(n,2n-1)$，即切空间$T\mathscr{C}_n$ 由向量场 ξ_i 及其一阶交换子张成。

证明。可得

$$[\xi_i,\xi_{i+1}]=\left(\frac{\partial\Phi_{i+1}}{\partial\alpha_i}+\Phi_i\frac{\partial\Phi_{i+1}}{\partial p_i}\right)\partial p_{i+1}-\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial\alpha_{i+1}}+\Phi_{i+1}\frac{\partial\Phi_i}{\partial p_{i+1}}\right)\partial p_i,$$

其中，指标按循环方式理解。我们沿曲线 γ_0 计算这些括号。

将原点选在圆心；随后经过重新缩放，可得 $p_i=1$ 且 $\alpha_{i+1}-\alpha_i=\frac{2\pi}{n}$对所有 i均成立。因此，对所有 i，$\Phi_i=0$，于是

$$[\xi_i,\xi_{i+1}]=\frac{\partial\Phi_{i+1}}{\partial\alpha_i}\partial p_{i+1}-\frac{\partial\Phi_i}{\partial\alpha_{i+1}}\partial p_i.$$

沿着 γ_0。

接下来，对所有 j 令 $p_j=1$，再对 α_i 求导，这两个操作可交换。令所有 $p_j=1$，并利用一些三角学知识，可得

$$\begin{aligned}\Phi_{i+1}&=\frac{\cos^2\beta_{i+\frac12}-\cos^2\beta_{i+\frac32}}{\sin(\beta_{i+\frac12}+\beta_{i+\frac32})\cos\beta_{i+\frac12}\cos\beta_{i+\frac32}}=\frac{\sin\left(\beta_{i+\frac32}-\beta_{i+\frac12}\right)}{\cos\beta_{i+\frac12}\cos\beta_{i+\frac32}}\\&=\tan\left(\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\right)-\tan\left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right),\end{aligned}\tag{3}$$

因此，沿着 γ_0,

$$\frac{\partial\Phi_{i+1}}{\partial\alpha_i}=\frac{1}{2\cos^2\beta_{i+\frac12}}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{n}}>0.$$

同样，$\frac{\partial\Phi_i}{\partial\alpha_{i+1}}<0$。

令 $\theta_i = dp_i - \Phi_i d\alpha_i$、$i = 1$、……、$n$ 为张成分布 $\mathscr{D}$的余法丛 $\mathscr{D}^{\perp}$ 的 1-形式。由此可知，沿着 γ_0，矩阵 $\theta_j([\xi_i, \xi_{i+1}])$、$j = 1$、……、$n-1$、$i = 1$、……、$n$ 的秩为 $n-1$。因此，在 γ_0 的充分小邻域内，该秩也等于$n-1$，即$T\mathscr{C}_n = \mathscr{D} + [\mathscr{D}, \mathscr{D}]$，如所述。 □

评注 3.6。 我们认为， $\mathscr{D}_n$在 $\mathscr{C}_n$ 的任意位置都具有 $(n, 2n-1)$ 增长类型，并已对 $n = 3$ 验证了这一点，但目前尚未证明这个猜想。

定理2的证明。 一个圆形外长度台球产生一族由 1 个参数构成的周期 n 边形 $L(t) = (L_1(t), \ldots, L_n(t))$, $t \in [0,1]$，它们外切于圆形台面（我们仍将多边形视为其各边组成的元组）。设 σ 为各边的循环扰动；则 $L(1) = \sigma(L(0))$。这族 n 边形是初始水平曲线 $\gamma_0 : [0,1] \to \mathscr{C}_n$，经缩放后可表示为

$$\alpha_i(t) = \frac{2\pi}{n}(t + (i-1)),\ p_i(t) = 1,\ i = 1, \ldots, n.$$

记 $H^2_{\mathscr{D}_n}$为水平曲线 $\gamma : [0,1] \to \mathscr{C}_n$构成的空间，其中曲线的前两个导数均平方可积；并记 $H^2_{\mathscr{D}_n}(c)$为从 $c \in \mathscr{C}_n$出发的路径所构成的子空间。于是 $H^2_{\mathscr{D}_n}(c)$是一个希尔伯特流形，其局部坐标图如下。

我们有水平向量场 $\xi_i, i = 1, \ldots, n$，它们张成 $\mathscr{D}_n$。如果 $\gamma(t)$ 是一条水平曲线，那么 $\gamma'(t) = \sum^n{}_{i=1} f_i(t)\xi_i(\gamma(t))$，其中 $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是平方可积函数。这些函数是曲线 $\gamma(t)$ 的坐标。因此， $H^2_{\mathscr{D}_n}(c)$ 的函数维数为 n，而起点固定的非参数化有向水平曲线空间的函数维数为 $n-1$。

用 $H^2_{\mathscr{D}_n}(c_0, c_1) \subset H^2_{\mathscr{D}_n}$ 表示起点为 $c_0 \in \mathscr{C}_n$、终点为 $c_1 \in \mathscr{C}_n$ 的水平曲线空间。圆形外长度台球桌产生了上述水平曲线$\gamma_0 \in H^2_{\mathscr{D}_n}(L(0), L(1))$。我们希望在子空间$H^2_{\mathscr{D}_n}(L(0), L(1))$ 内扰动这条曲线。

我们证明， $H^2_{\mathscr{D}_n}(L(0), L(1)) \subset H^2_{\mathscr{D}_n}(L(0))$ 是一个余维为 $2n-1$ 的希尔伯特子流形。为此，设 $\pi : H^2_{\mathscr{D}_n}(L(0)) \to \mathscr{C}_n$ 是一个投影，它将路径 γ 映射到其端点 $\gamma(1)$。如果该光滑映射是一个浸没，那么原像 $\pi^{-1}(L(1))$ 就是一个余维为 $2n-1$ 的希尔伯特子流形。

然而， π 可能不是满浸；发生这种情况的曲线称为奇异曲线。一个奇异曲线的例子是三维空间中x轴的一段，其中 Martinet 分布由$dz - y^2 dx = 0$ 给出：将这条曲线视为端点固定的水平曲线时，它的扰动仅仅是重新参数化。

因此，我们需要检验 γ_0 不是奇异的，并采用 Hsu [14], 提出、以 [18]第4节所述形式给出的判据。我们先以一般形式表述这一判据，再将其应用于我们的特殊情形。

设M是一个带有分布 $\mathscr{D}$ 的光滑流形，且 η_i 是一组微分1-形式，它们构成余法丛 $\mathscr{D}^\perp$ 的一组基。那么每个余向量 $\mathscr{D}^\perp$ 都可以写成 $\sum \lambda_i \eta_i$。考虑微分2-形式 $\omega(\lambda) := \sum \lambda_i d\eta_i$。水平曲线 γ 是非奇异的，当且仅当其切向量 $\dot\gamma$ 始终不落在 $\omega(\lambda)$ 对 $\mathscr{D}$ 的限制的核中。

在我们的情形中，1-形式 $\theta_i, i, \dots, n$ 生成 $\mathscr{D}^\perp$，但这些形式并不独立：它们满足一个线性关系。沿着曲线 γ_0，有 $\theta_i = dp_i$。由注记3.4中的周长公式可知，沿着 γ_0,

$$0 = dF = 2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} dp_i.$$

因此 $\sum^n{}_{i=1}\theta_i = 0$ 沿着 γ_0，为消去这一关系，我们假设 $\sum^n{}_{i=1}\lambda_i = 0$。

沿着 γ_0，有

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial p_{i+1}} = -\frac{\partial\Phi_i}{\partial p_{i-1}} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)},\ \frac{\partial\Phi_i}{\partial p_i} = 0,\ \frac{\partial\Phi_i}{\partial\alpha_{i-1}} = \frac{\partial\Phi_i}{\partial\alpha_{i+1}} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)},$$

因此

$$d\theta_i = \frac{1}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} d\alpha_i \wedge (dp_{i+1} - dp_{i-1}) + \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}(d\alpha_i \wedge d\alpha_{i+1} - d\alpha_{i-1} \wedge d\alpha_i).$$

还可以得到

$$\dot\gamma_0 = \frac{2\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}\partial\alpha_i,$$

因此

$$\dot\gamma_0 \lrcorner d\theta_i = \frac{\pi}{2n\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}(d\alpha_{i-1} - 2d\alpha_i + d\alpha_{i+1}).$$

最后，假设 $\dot\gamma_0 \lrcorner \omega(\lambda) = 0$ 在 $\mathscr{D}_n$上，即 $\omega(\lambda)(\dot\gamma_0, \xi_i) = 0$ 对 $i = 1, \dots, n$ 成立。那么 $\lambda_{i-1} - 2\lambda_i + \lambda_{i+1} = 0$ 对所有 i 都成立，因此 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$。但是 $\sum^n{}_{i+1}\lambda_i = 0$, 因此 $\omega(\lambda) = 0$。

我们得出曲线 γ_0 是非奇异的，从而完成证明。 □

4. 四周期，中心对称情形

在本节中，我们给出具有由四周期点组成的不变曲线的中心对称外长度台球曲线 γ的显式参数化。

引理4.1。 如果一条中心对称曲线 γ 具有一条由周期点组成的不变曲线δ, 那么 δ 是中心对称的。

证明。令S为关于原点的反射。由于 γ 是中心对称的，S 与T可交换。因此，$S(\delta)$ 是T的一条具有相同旋转数的不变曲线。

我们将使用Aubry-Mather理论关于具有有理旋转数的极小轨道结构的如下推论（例如，参见综述论文 [4], 定理5.8）：

若 δ 是柱面上扭转映射的一条旋转不变曲线，其旋转数为有理数，且仅由周期轨道组成，则任何另一条具有相同旋转数的旋转不变曲线都必须与 δ重合。

事实上，由该理论可知，位于旋转不变曲线上的所有轨道都是极小化的。此外，若该曲线具有有理旋转数 ρ，且该曲线上的所有轨道都是周期的，则这些轨道的集合与旋转数为 ρ的极小化子集合重合。

将这一事实应用于不变曲线 δ 与$S(\delta)$，我们得出结论：$\delta = S(\delta)$，正如所断言的那样。 □

由上述引理，周期四边形必定是平行四边形。让我们将前一节的讨论专门化到这一特定情形。

固定周长的以原点为中心的平行四边形空间是 3 维的。这种平行四边形由四个参数 $(\alpha_1、\ \alpha_2、\ p_1, p_2)$ 确定，见图 7。圆的半径分别等于 p_1 和 p_2, ，平行四边形的周长等于 $4(p_1+p_2)\ \sin(\alpha_2-\alpha_1)$。设周长为 4，即 $p_1 + p_2 = \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$。

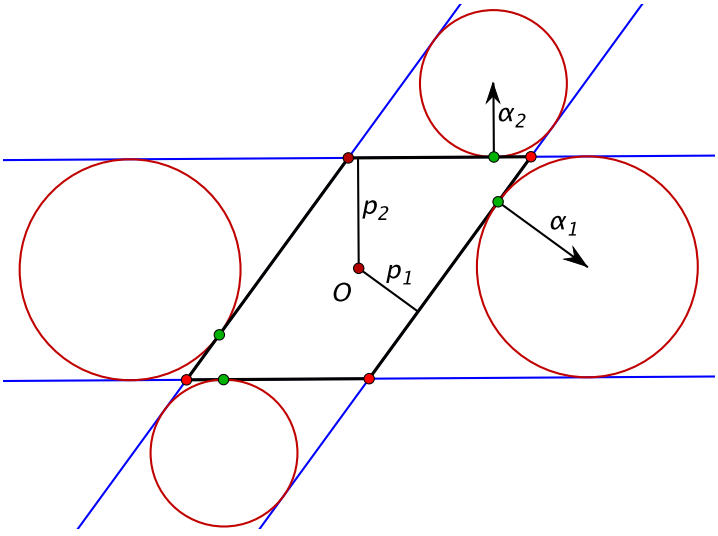


图 7。以原点为中心的平行四边形的参数。

我们在此情形下应用引理 3.3。所涉及的角为 α_1、 α_2、 $\alpha_1+\pi$、 $\alpha_2+\pi$, 相应的支撑数为 p_1, p_2, p_1, p_2。计算得

引理 4.2. *$\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{C}$ 上的二维分布由以下向量场张成*

$$\xi_1 = \partial\alpha_1 - \cot(\alpha_2-\alpha_1)(p_1+p_2)\partial p_1 = \partial\alpha_1 - \cos(\alpha_2-\alpha_1)\partial p_1,$$
$$\xi_2 = \partial\alpha_2 + \cot(\alpha_2-\alpha_1)(p_1+p_2)\partial p_2 = \partial\alpha_2 + \cos(\alpha_2-\alpha_1)\partial p_2,$$

并且有 $[\xi_1,\xi_2] = \sin(\alpha_2-\alpha_1)(\partial p_1 - \partial p_2) \neq 0$。

我们看到， $\mathscr{D}$ 是完全不可积的，也就是说，它是一个接触结构。作为接触形式，可以取

$$\lambda = \cos(\alpha_2-\alpha_1)(d\alpha_1+d\alpha_2) + dp_1 - dp_2,$$

而周长的微分是一个在 $\mathscr{C}$ 上为零的 1-形式：

$$dF = \cos(\alpha_2-\alpha_1)(d\alpha_1 - d\alpha_2) - dp_1 - dp_2.$$

推论 4.3. *不存在由 4 周期轨道构成的开集。*

证明。这样的集合将是与分布 $\mathscr{D}$相切的曲面；这将与其完全不可积性相矛盾。 □

现在我们将对具有由4周期点组成的不变曲线的中心对称光滑严格凸外长度台球曲线 γ进行参数化。让我们变换坐标：

$$x = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\ y = 2\cos(\alpha_2-\alpha_1),\ z = p_2 - p_1.$$

于是$x \in [0, 2\pi)$是一个角，而y 与z 为实数。在这些坐标中，接触1-形式具有标准形式 $\lambda = ydx - dz$。我们感兴趣的是由变量x参数化的水平勒让德曲线；它们由下式给出

$$z = f(x), y = \frac{df(x)}{dx},$$

其中$f(x)$是满足 $|f\prime(x)| \leq 2$ （对所有x）的可微函数。

此外，我们有循环群 $\mathbb{Z}_4$ 的一个作用，由其生成元的作用给出：

$$(\alpha_1,\alpha_2,p_1,p_2) \mapsto (\alpha_2, \alpha_1+\pi, p_2, p_1),$$

见图 7。所涉及的勒让德曲线在此作用下不变，因此在新坐标中，有$f(x + \frac{\pi}{2}) = -f(x)$。不失一般性，我们可以假设$f(0) = 0$。 –

用新坐标表示旧坐标，得到

$$\alpha_1 = x - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{f'(x)}{2}\right),\ \alpha_2 = x + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{f'(x)}{2}\right),$$
$$p_1 = \frac{\sqrt{4-f'(x)^2} - f(x)}{4},\ p_2 = \frac{\sqrt{4-f'(x)^2} + f(x)}{4}.$$

由此得到下一个结论。

定理 3. 设 $f(x)$ 是一个 2π 周期函数，满足 $f(x+\frac{\pi}{2}) = -f(x)$，且 $|f'(x)| < 2$ 对所有 x 均成立。由参数方程给出的中心对称外长度台球曲线

$$\gamma(x) = p(x)(\cos\alpha(x), \sin\alpha(x)) + \frac{p'(x)}{\alpha'(x)}(-\sin\alpha(x), \cos\alpha(x)),$$

其中

$$p(x) = \frac{\sqrt{4 - f'(x)^2} - f(x)}{4}, \alpha(x) = x - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{f'(x)}{2}\right),$$

具有一条由 4周期点构成的不变曲线，且所有此类外长度台球曲线均可由上述公式给出，其中 $f(x)$ 是适当的函数。

例如，若 γ 是一个圆，则 $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$，且 $z = y = 0$，也就是说，$f(x) = 0$ 恒成立。设 $f(x)$ 是满足$f(x+\frac{\pi}{2}) = -f(x)$ 的可微函数（即其傅里叶展开只包含第 $(2+4k)$ 次谐波，其中 $k \in \mathbb{Z}$；例如，$\sin 2x$ 就可以）。那么，当 ε 足够小时，函数 $\varepsilon f(x)$ 将给出所需的椭圆。因此，我们得到一个函数空间的例子。

例 4.4. 考虑 γ 是椭圆的情形。关于椭圆的外长度台球是完全可积的，见 [5] 或 [1],，其不变曲线是共焦椭圆。因此，关于 γ 的外长度台球的 4 周期轨道，就是以 γ 为焦曲线的共焦椭圆中的 4 周期台球轨道。

我们利用 [9]，中关于 4 周期轨道的信息，并采用其中的记号。半轴为 $a > b$ 的以原点为中心的椭圆，其支撑函数为 $h(\psi) = \sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}$。考虑该椭圆中的一个 4 周期轨道，设构成该轨道的两条相邻定向直线的支撑坐标分别为 (φ, p) 和 (φ_1, p_1)。令$\psi = \frac{\varphi+\varphi_1}{2}$，$d(\psi) = \frac{\varphi-\varphi_1}{2}$。于是

$$d(\psi) = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\cos 2\psi\right).$$

让我们将这些公式与上面的记号联系起来。我们需要 4 周期四边形的周长等于四，因此 $a^2 + b^2 = 1$，或 $a = \sin t$，$b = \cos t$（对某个参数 t），见图 8。

我们有

$$\psi = x,\ \varphi = \alpha_1,\ \varphi_1 = \alpha_2,\ d = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{f'}{2}\right),$$

于是我们得出 $f(x) = \cos 2t \sin 2x$。

现在我们描述一种类似于用于构造Radon曲线的方法，参见 [8]。

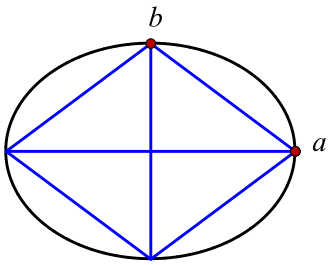


图 8. 椭圆中的一条 4 周期台球轨道。

由于 $R_0 = p_1, R_2 = p_0$（见图 7），利用引理 2.2 中的公式，我们得到

$$p_0' = -(p_0 + p_1)\cot\omega,\ p_1' = (p_0 + p_1)\cot\omega.$$

此外，由于平行四边形的周长可以归一化为 4，我们得到以下方程：

$$p(\alpha_1) + p(\alpha_2) = \sin\omega,\ p'(\alpha_1) = -\cos\omega,\ p'(\alpha_2) = \cos\omega,\ \omega = \alpha_2 - \alpha_1.$$

旋转平面后，我们可以假设$p'(0) = 0$，因此 $\alpha_2 = \pi/2$ 对应于 $\alpha_1 = 0$，而 $p'(\pi/2) = 0$ 也如此。我们还需要选择$p(0), p(\pi/2)$，使得$p(0) + p(\pi/2) = 1$。

现在取第一象限内任意一段凸弧，其支撑函数为$p(\alpha)$，$\alpha \in [0, \pi/2]$，并满足约束条件

$$p'(0) = p'(\pi/2) = 0,\ p(0) + p(\pi/2) = 1,$$

并按如下方式延伸至第二象限。设 β 对应于 α：

$$\beta \in [\pi/2, \pi],\quad \beta := \alpha + \arccos(-p'(\alpha))$$

and

$$p(\beta) := -p(\alpha) + \sin(\beta - \alpha).$$

然后，我们通过中心对称，将曲线从上半平面延伸出去。

例如，我们可以从对圆或椭圆进行微小扰动开始，进而得到一条凸闭曲线。

5. Ivrii猜想的3周期版本的另外两个证明

俗话说，同一个定理有不同的证明，胜过不同的定理用同一个证明。遵循这一原则，我们给出外长台球中 Ivrii 猜想的3周期版本的另外两个证明。第一个证明纯粹是几何的，受[20]中的证明启发，且与之类似。第二个证明则类似于 [7, 15, 12, 22, 23]中的证明。

定理4。外长度台球的*3*周期点集没有空内点。

第一种证明。设 γ 是一个具有一组开集的3周期轨道的椭圆。我们将推导出矛盾。

设ABC为这样的轨道，设U、V和W为旁切圆与对应边的切点，见图9。这些点也是三角形的边与 γ的切点。

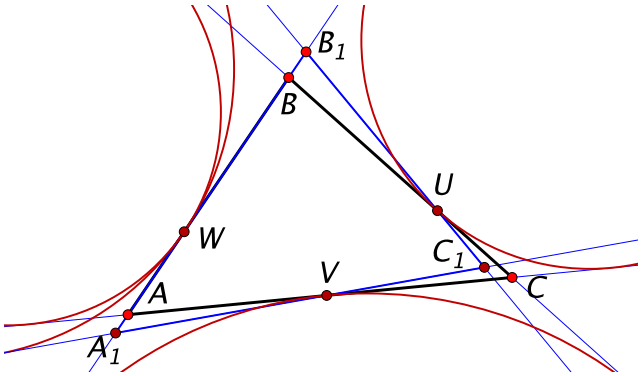


图9. 3周期轨道的变形。

该轨道存在一个无穷小变形，$A_1B_1C_1$, 其中点A_1 和B_1 位于边AB上。边AC 和BC 的相应无穷小变形，是分别绕V和U旋转。

首先，我们断言，若点A_1 从点W移开，那么点B_1也从点W移开，如图9所示。因此，边AC和BC分别逆时针和顺时针旋转。

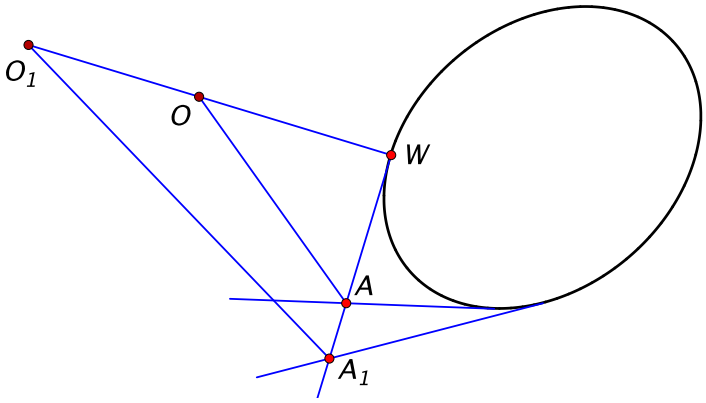


图10. 移动点A。

事实上，点W 是从点A引向 γ的切线的切点，因此它保持不动。如果点A 从点W移开，那么从此点看 γ 所成的角就会变小，而外角则会变大。因此，外角的平分线沿正方向转动，它与法线的交点

到 γ 在点W处的交点离 γ 更远——这些交点分别是相应各圆的圆心，即图10中的点O和O_1。反之，如果点B向点W移动，则圆的圆心O也会向点W移动。正如我们所见，情况并非如此，因此点B是从点W移开的，正如所断言的那样。

接下来，我们考察点U在两种情况下的无穷小运动：当直线AC绕点V逆时针旋转，而其他边固定时；以及当直线BC绕点U顺时针旋转，而其他边固定时。我们断言，在这两种情况下，点U的速度方向都指向点B。

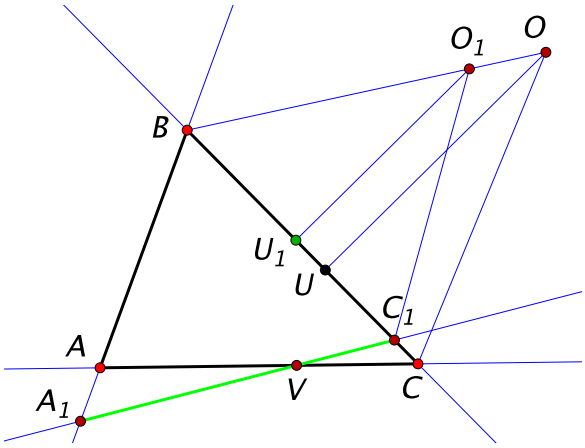


图11. 直线AC的旋转。

第一种情况如图11所示。外角的平分线CO变为C_1O_1，点C向点B移动，且角平分线逆时针旋转。因此，圆心O（该圆与直线BC在点U处相切）向点B移动，到达点O_1，，于是点U（它在直线BC上的投影）也向点B移动，到达U_1，，如所断言。

第二种情况如图12所示。回忆一个初等几何问题：已知角U内有一点，角的顶点为A，作一条过点U的弦BC，使$\triangle BAC$的周长最小。解法是在角内作一个圆，使点U位于圆与顶点A之间，然后将圆向内推，直至它经过点U。该圆在U处的切线BC即为所求。我们在引理3.1的证明中已经用过这一论证。

考虑无穷小变形后的$\triangle B_1AC_1$。点U现在位于其旁切圆之外。如果直线BC绕点U顺时针转动，那么旁切圆U_1的切点位于U和B_1之间（若旋转方向为逆时针，则切点位于U和C_1之间）。因此，点U的速度方向指向点B，证毕。

最后，导出矛盾。当$\triangle ABC$被无穷小地变形为$\triangle A_1B_1C$（见图9）时，直线AC沿逆时针方向旋转，并且

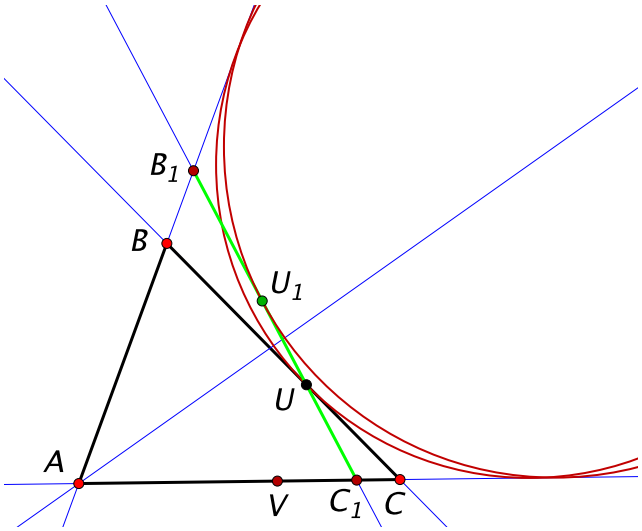


图12。直线BC的旋转。

直线BC则沿顺时针方向旋转。点U在这两种运动下的速度相加，并且如我们所见，切点U的合成运动朝向点B。然而请看图13。曲线γ的凸性意味着向量UU_1的方向朝向点C，也就是从点B出发。这正是所要的矛盾。 □

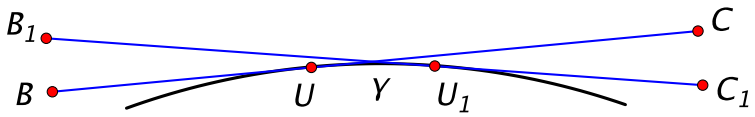


图13。曲线的凸性γ意味着点U沿着从点B出发的方向移动。

第二个证明。我们将第3节中的公式特化到$n = 3$的情形。令$\mathscr{C}$为周长为单位长度的三角形所构成的空间，这是一个五维空间；令$\mathscr{D}$为其中由向量场$\xi_i = \partial\alpha_i + \Phi_i\partial p_i$、$i = 1$、2、3生成的三维分布，其中$\Phi_i$是式（2）右端的表达式。

有

$$[\xi_1,\xi_2] = \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_1} + \Phi_1\frac{\partial\Phi_2}{\partial p_1}\right)\partial p_2 - \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_2} + \Phi_2\frac{\partial\Phi_1}{\partial p_2}\right)\partial p_1,$$

以及通过对指标作循环置换得到的另外两个类似公式。为简化记号，设

$$W_2 = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_1} + \Phi_1\frac{\partial\Phi_2}{\partial p_1},\ U_1 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_2} + \Phi_2\frac{\partial\Phi_1}{\partial p_2},$$

以及通过对指标作循环置换得到的四个类似公式。我们将计算这些量。

我们可以自由选择原点（这会影响p_i的值），而一个方便的选择是内心，由此$p_i = r$，$i = 1,2,3$。通过缩放，我们可以假设$r = 1$。我们注意到，对 α_i 求偏导数与令$p_j = 1$ 对所有j成立这两种运算可交换，这简化了计算。

为进一步简化记号，将三角形的外角记为 $2u$、$2v$、$2w$，于是

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2u,\ \alpha_3 - \alpha_2 = 2v,\ \alpha_1 - \alpha_3 = 2w.$$

注意，$u + v + w = \pi$，并且

$$\partial\alpha_1 = \frac{1}{2}(\partial w - \partial u),\ \partial\alpha_2 = \frac{1}{2}(\partial u - \partial v),\ \partial\alpha_2 = \frac{1}{2}(\partial v - \partial w). \tag{4}$$

有

$$\Phi_2 = \frac{\cos^2 u\,(p_3 + p_2) - \cos^2 v\,(p_2 + p_1)}{2\sin(u+v)\cos u\cos v},$$

因此

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial p_1} = -\frac{\cos v}{2\sin(u+v)\cos u}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial p_2} = \frac{\cos^2 u - \cos^2 v}{2\sin(u+v)\cos u\cos v}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial p_3} = \frac{\cos u}{2\sin(u+v)\cos v},$$

and, setting $p_j = 1$ for all j,

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_1} = \frac{1}{2\cos^2 u}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cos^2 u} + \frac{1}{2\cos^2 v}\right), \frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_3} = \frac{1}{2\cos^2 v}.$$

与之前一样，通过对指标作循环置换，可以得到其他类似公式。

然后，利用一些三角学，并记住 $u + v + w = \pi$，我们得到

$$\begin{aligned} W_1 = \frac{\tan u}{\sin 2v}, W_2 = \frac{\tan v}{\sin 2w}, W_3 = \frac{\tan w}{\sin 2u}, \\ U_1 = \frac{\tan w}{\sin 2v}, U_2 = \frac{\tan u}{\sin 2w}, U_3 = \frac{\tan v}{\sin 2u}, \end{aligned} \tag{5}$$

所有正的量。

顺便指出，这些公式意味着 $\mathscr{D}$ 具有增长类型 (3, 5)。事实上，$\mathscr{D}^\perp$ 由以下三个微分1-形式中的任意两个生成：$r_{1i} = dp_i - \Phi_i d\alpha_i$。我们看到

$$\theta_1([\xi_1,\xi_2]) < 0, \theta_2([\xi_1,\xi_2]) > 0, \theta_1([\xi_2,\xi_3]) = 0, \theta_2([\xi_2,\xi_3]) < 0.$$

由此可知，向量场 $[\xi_1,\xi_2]$ 和 $[\xi_2,\xi_3]$，连同 $\mathscr{D}$，张成了 $\mathscr{C}$的切空间。

我们继续证明外长度台球的三周期伊夫里猜想。假设存在一个由 3周期点集构成的开圆盘。那么，有一个水平圆盘$D \subset \mathscr{C}$由向量场 ξ_i 的线性组合张成，例如$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3$和$b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3$。不失一般性，假设 $a_1 \neq 0, b_2 \neq 0$，并通过取线性组合，将这些向量场替换为 $\xi_1 + a\xi_3$和 $\xi_2 + b\xi_3$。于是

$$[\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3] = f(\xi_1 + a\xi_3) + g(\xi_2 + b\xi_3).$$

左边的括号等于

$$[\xi_1,\xi_2]-a[\xi_2,\xi_3]-b[\xi_3,\xi_1]+\{\xi_1(b)+a\xi_3(b)-\xi_2(a)-b\xi_3(a)\}\xi_3,$$

而这个表达式不含带有 $\partial\alpha_1$ 和 $\partial\alpha_2$ 的项。因此$f=g=0$，由此可得

(6) $[\xi_1,\xi_2]-a[\xi_2,\xi_3]-b[\xi_3,\xi_1]=0,\ \xi_1(b)+a\xi_3(b)-\xi_2(a)-b\xi_3(a)=0.$

第一个方程为

$$W_2\partial p_2-U_2\partial p_1-a(W_3\partial p_3-U_2\partial p_2)-b(W_1\partial p_1-U_3\partial p_3)=0,$$

解此方程得

$$a=-\frac{W_2}{U_2}=-\frac{\tan v}{\tan u},\ b=-\frac{U_1}{W_1}=-\frac{\tan w}{\tan u}.$$

回忆等式 (4)，以及 $\xi_i=\partial\alpha_i+\Phi_i\partial p_i$。现在可以计算 (6) 中第二个等式左边的两倍：

$$-(\partial w-\partial u)\left(\frac{\tan w}{\tan u}\right)+\frac{\tan v}{\tan u}(\partial v-\partial w)\left(\frac{\tan w}{\tan u}\right)$$
$$+(\partial u-\partial v)\left(\frac{\tan v}{\tan u}\right)-\frac{\tan w}{\tan u}(\partial v-\partial w)\left(\frac{\tan v}{\tan u}\right)=$$
$$-\frac{1}{\cos^2 w\tan u}-\frac{\tan w}{\sin^2 u}-\frac{\tan v}{\cos^2 w\tan^2 u}-\frac{\tan v}{\sin^2 u}-\frac{1}{\cos^2 v\tan u}-\frac{\tan w}{\cos^2 v\tan^2 u}.$$

这个表达式的每一项都是负数，因此它不等于零。这个矛盾完成了证明。 □

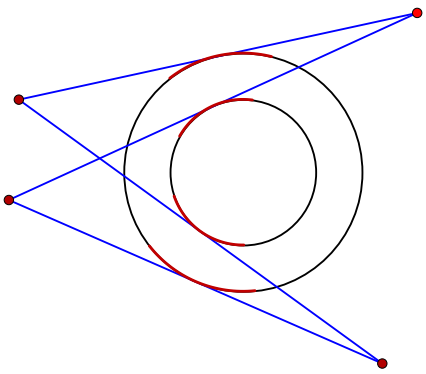


图14. 同心圆弧上的外长度台球反射的复合是恒等变换。

注5.1. 1. 五维流形上的一个完全不可积的三维分布可能容许一个水平曲面。考虑一个五维空间，其坐标为x、y、z、u、v，以及由向量场 ∂x、∂y、$\partial z+x\partial u+y\partial v$张成的三维分布 $\mathscr{D}$。那么 $\mathscr{D}$

它是不可积的，括号增长类型为(3,5)，但 $\mathscr{D}$ 容许一个由对易向量场 ∂x和 ∂y张成的水平二维圆盘。

2. 可以构造四个定向适当的凸曲线芽，使相应的四个外长度弹球反射的复合为恒等映射。只需在两条同心圆上各取一对弧即可。相应的外长度弹球映射是绕这两条圆的共同圆心的旋转，而这类旋转彼此可交换，见图14。类似的考虑也适用于其他台球模型，包括 Birkhoff 弹球（在那里也可以用共焦椭圆代替同心圆）。

参考文献

[1] P. Albers, L. Edwards-Costa, S. Tabachnikov. 大尺度下的外长度台球。arXiv:2510.08370.[2] P. Albers, S. Tabachnikov. 引入辛台球。《数学进展》333 (2018), 822–867.[3] P. Albers, S. Tabachnikov. 单调扭映射与Dowker型定理。《太平洋数学杂志》330 (2024), 1–24.[4] V. Bangert. 扭映射的Mather集与环面上的测地线。《动力学报告》(1988), 第1卷，1–56，《动力系统及其应用报告丛书》1，Wiley，奇切斯特。[5] L. Baracco, O. Bernardi, C. Fierobe. 外长度台球研究初探。《太平洋数学杂志》339 (2025), 201–222.[6] S. Baranzini, M. Bialy, A. Sorrentino. 凸台球的Mather函数的等周型不等式。arXiv:2509.06915.[7] Yu. Baryshnikov, V. Zharnitsky. 次黎曼几何与经典台球中的周期轨道。《数学研究快报》13 (2006), 587–598.[8] M. Bialy, G. Bor, S. Tabachnikov. 中心仿射几何中的自Bäcklund曲线与Lamé方程。《美国数学会通讯》2 (2022), 232–282.[9] M. Bialy, A. Mironov. 中心对称台球桌的Birkhoff-Poritsky猜想。《数学年刊》196 (2022), 389–413.[10] M. Bialy, A. Mironov. 可积台球及相关主题。arXiv:2510.03790.[11] V. Blumen, K. Y. Kim, J. Nance, V. Zharnitsky. 常曲率曲面上的台球三周期轨道。《国际数学研究通知》IMRN 2012, 第21期，5014–5024.[12]D. Genin, S. Tabachnikov. 关于平面多边形的构形空间、次黎曼几何与外台球的周期轨道。《现代动力学杂志》1 (2007), 155–173.[13] A. Glutsyuk, Yu. Kudryashov. 不存在具有四边形轨迹开集的平面台球。《现代动力学杂志》6 (2012), 287–326.[14] L. Hsu. 通过Griffiths形式体系的变分法。《微分几何杂志》36 (1992), 551–589.[15] J. Landsberg. 外微分系统与台球。载于《几何、可积性与量子化》，35–54，Softex，索非亚，2006.[16] H. Martini, K. Swanepoel. 反范数与Radon曲线。《数学方程》72 (2006), 110–138.[17] R. Montgomery. 次黎曼几何、其测地线及应用巡览。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002.[18] R. Montgomery. 次黎曼几何中奇异曲线综述。《动力学与控制系统杂志》1 (1995), 49–90。

[19] M. Rychlik。凸区域内台球映射的周期点。《微分几何杂志》**30** (1989), 191–205。[20] A.Sharipova. 外台球和辛台球若干情形下的*Ivrii* 猜想。离散与连续动力系统**45** (2025), 896–907。[21] L.Stojanov. 关于台球周期点的注记。《微分几何杂志》**34** (1991), 835–837。[22] A. Tumanov, V. Zharnitsky. 外台球中的周期轨道。《国际数学研究通知》2006, 文章编号67089, 共17页。[23] A. Tumanov. 外台球中周期轨道的稀缺性。《几何分析杂志》**30** (2020), 2479–2490。[24] Ya. Vorobets。关于台球周期点集的测度。《数学札记》**55** (1994), 455–460。[25] M.Wojtkowski. 雅可比场在台球问题中的两个应用。《微分几何杂志》**40** (1994), 155–164。

特拉维夫大学数学科学学院，雷蒙德与贝弗利·萨克勒学院，精确科学学院，以色列电子邮件地址：bialy@tauex.tau.ac.il

宾夕法尼亚州立大学数学系，数学系，宾夕法尼亚州立大学，大学公园校区，美国，邮编：16802，美国电子邮件地址：tabachni@math.psu.edu