arXiv:2603.06004v1 [math.DS] 6 Mar 2026

穿过˝谢尔宾斯基四面体的切片拓扑

YUTO NAKAJIMA 和 TAKAYUKI WATANABE

Abstract. 我们从拓扑的角度研究谢尔宾斯基四面体的切片。对于每个 $c \in [0,1]$，我们研究高度为 c处切片的切赫（上）同调群。我们证明，切片的拓扑呈现出明显的二分性。如果 c是二进有理数，则该切片具有有限个连通分支、无限的一阶切赫同调，而高阶同调均为平凡。如果 c不是二进有理数，则该切片是完全不连通的，且所有正次数的切赫同调群均消失。

1. Introduction

1.1. 背景。 在分形切片问题的研究中，一个核心目标是确定切片的维数。关于Marstrand型切片定理的一般结果可见 [7, 8, 9]。关于立方体情形下由Moran构造生成的集合的切片结果见 [1, 2, 10, 17, 19, 20]。关于由两个康托尔集的交产生的切片问题，请参见 [6, 13, 18]。

本文的主要目的是研究分形切片的拓扑性质。对于迭代函数系统（IFS）的极限集，Hata [4] 的著名工作给出了判定极限集是否连通的准则（另见 [11, 16] 关于分形连通性的相关结果）。为刻画极限集更为精细的拓扑结构，我们考虑Čech同调群，其定义将在下一节回顾。特别地，零阶Čech同调群刻画了给定拓扑空间的连通性。在这一方向上，Sumi [15]开展了开创性工作。受其工作启发，作者 [12] 为一大类分形建立了同调框架，并计算了立方情形下由Moran构造产生的集合的Čech同调群的秩。

本文聚焦于所谓Sierpi´nski四面体的切片，它是分形的一个代表性例子。Sierpi´nski四面体由一组相似变换构成的迭代函数系统生成。然而，该集合的切片一般并不会是迭代函数系统的极限集，从而带来本质性的困难。此外，由于 [12], 所处理的例子并未涵盖当前情形，解决我们的切片问题需要新的思想。

1.2. 主要结果。本节将对本文的研究背景给出严谨定义，并陈述相关的主要结果。首先定义谢尔宾斯基四面体。

定义 1.1. 设 $v_0 = (0,0,0)$ $v_1 = (0,0,1)$ $v_2 = (0,1,1)$, 与 $v_3 = (1,1,1)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中一个四面体的顶点。对每个 $i \in \{0,1,2,3\}$，定义压缩映射 $f_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，由 $f_i(x) = (x + v_i)/2$ 给出。则唯一存在一个非空

$\mathbb{R}^3$ 的紧子集 J，使得 $J = \bigcup_{i=0}^{3} f_i(J)$（例如参见 [3, 5]），称为谢尔宾斯基四面体。

对于 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$，令 $p_z(x) = x_3$。令 $c \in [0,1]$，并考虑 J 的如下水平集 J_c：

$$J_c = \{x \in J \ : \ p_z(x) = c\},$$

它是 J 在高度 c 处的切片。

设 Δ 为一个拓扑空间。对于 Δ 的子集族 $\mathfrak{U}$，令 $N(\mathfrak{U})$ 表示如下的（抽象）单纯复形，它称为神经：其单形是 $\mathfrak{U}$ 的有限非空子集，且这些子集的交非空。于是，对于每个 $q \geq 0$，第 q 个切赫同调群 $\check{H}_q(\Delta)$ 定义为逆极限 $\check{H}_q(\Delta) = \varprojlim_{\mathfrak{U}} H_q(N(\mathfrak{U}))$，其中 $H_q(\mathcal{K})$ 是单纯复形 $\mathcal{K}$ 的第 q 个同调群，而 $\mathfrak{U}$ 遍历 Δ 的所有按细化关系排序的有限开覆盖。类似地，第 q 个切赫上同调群 $\check{H}^q(\Delta) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^q(N(\mathfrak{U}))$ 定义为正向极限。

若存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ 使得 $c = k/2^n.$，则称数 $c \in [0,1]$ 为二进有理数。以下是本文的第一个主要结果。

主定理 A. 令 $c \in [0,1].$。则下述结论成立。

(a) 若 c 是二进有理数，则 J_c 是有限个所谓的谢尔宾斯基垫片的互不相交并。此外，$\check{H}_0(J_c)$ 和 $\check{H}^0(J_c)$ 与具有某个 $r \geq 1$ 的 $\mathbb{Z}^r$ 同构，秩 $\check{H}_1(J_c) = \infty =$ 秩 $\check{H}^1(J_c)$，并且对所有 $q \geq 2.$，$\check{H}_q(J_c) = \check{H}^q(J_c) = 0$。*(b)* 若 c 是非二进有理数，则 J_c 完全不连通，并且对所有 $q \geq 1.$，$\check{H}_q(J_c) = \check{H}^q(J_c) = 0$

主定理 A 的证明归结为非自治迭代函数系统的理论（见定义 2.1），这类系统是迭代函数系统的推广。更确切地说，对于任意 $c \in [0,1]$，切片 J_c 都可以表示为某个非自治迭代函数系统的极限集（见引理 3.2）。对于任意 $c \in [0,1]$，相应的非自治迭代函数系统由 c 的二进制展开确定，定义如下。

定义 1.2。对于 $c \in [0,1]$，令 $(a_j(c))_{j=1}^{\infty} = a_1(c)a_2(c) \cdots a_j(c) \cdots$ 为一个满足 $a_j(c) \in \{0,1\}$ 的序列，使得

$$c = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j(c)}{2^j}.$$

对于除 0 以外的二进有理数的两种可能表示，我们选择满足以下条件的一种

$$\#\{j \in \mathbb{N} \colon a_j(c) = 1\} = \infty,$$

这样展开式便是唯一确定的。当 $c = 0,$ 时，对于任意 $j \geq 1.$，定义 $a_j(0) = 0$。我们称序列 $(a_j(c))_{j=1}^{\infty}$ 为 $c.$ 的二进制展开

接下来，对于每个有限字 $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n \in \{0,1\}^n$，我们设 $\omega = \overline{\omega_1 \cdots \omega_n \omega_1 \cdots \omega_n \omega_1 \cdots \omega_n \cdots}$。例如，$(a_j(3/8))_{j=1}^{\infty} = 0101$。注意，如果 $\overline{c}$ 是非二进有理数，则 $\#\{j \in \mathbb{N} \colon a_j(c) = 0\} = \#\{j \in \mathbb{N} \colon a_j(c) = 1\} = \infty.$

与迭代函数系统的情形一样，非自治迭代函数系的极限集具有由该系统确定的自然覆盖（见引理 2.2）。这使我们能够关联一族神经，记作$\mathcal{N}_{1,\ k}$ 对于 $k>1$（见定义 2.3）。随后，我们研究 $\mathcal{N}_{1,\ k}$ 的同调群的秩随 $k\to\infty$ 变化时的增长率，这反映了切片中连通分支或孔洞的数量。

主定理 B。 设 $c\in[0,1]$. 则有以下结论。

（a）设 c 是一个二进有理数，其二进制展开为 $a_1\cdots a_n01$，且 $\ell=\#\{j\in\{1,\dots,n\}\colon\ a_j=0\}$. 那么我们有 秩$\check{}H_0\left(J_c\right)=3^{n-\ell}$，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\operatorname{rank}H_1(\mathcal{N}_{1,n+1})=\log 3.$$

上同调也有相同的结论。

（b）若 c 是一个非二进有理数，其二进制展开为 $\left(a_j\left(c\right)\right)_{j=1}^{\infty}$，那么对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\log\operatorname{rank}H_0(\mathcal{N}_{1,n+1})=\log\operatorname{rank}H^0(\mathcal{N}_{1,n+1})=\sum_{j=1}^{n}a_j(c)\log 3.$$

As 由主定理 B(b) 的推论，我们得到以下推论 .

推论 1.3. 对于几乎处处的勒贝格 $c\in[0,1]$，满足 $(a_j(c))_{i=1}^{\infty}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\operatorname{rank}H_0(\mathcal{N}_{1,n+1})=\frac{\log 3}{2}.$$

证明。根据比尔科夫遍历定理，对于几乎处处的勒贝格 $c\in[0,1]$，我们有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j(c)=\frac{1}{2}$。结合主定理 B 可得所需结论。□

推论 1.4. 设 c是一个非二进有理数。那么

$$\dim_{\mathrm{H}}J_c=\underline{\dim}_{\mathrm{B}}J_c=\liminf_{n\to\infty}\frac{\log\operatorname{rank}H_0(\mathcal{N}_{1,n+1})}{n\log 2}$$

and

$$\dim_{\mathrm{P}}J_c=\overline{\dim}_{\mathrm{B}}J_c=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\operatorname{rank}H_0(\mathcal{N}_{1,n+1})}{n\log 2},$$

其中 维数$_{\mathrm{H}}$、$\underline{\text{维数}}_{\mathrm{B}}$、维数$_{\mathrm{P}}$ 和 $\overline{\text{维数}}_{\mathrm{B}}$分别表示豪斯多夫维数、下盒维数、装填维数和上盒维数。

证明。 设 c 是一个非二进有理数，其二进制展开为 $(a_j(c))_{j=1}^{\infty}$。 根据 [10,主定理 A], ，我们得到

$$\dim_{\mathrm{H}}J_c=\underline{\dim}_{\mathrm{B}}J_c=\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\log 3}{\log 2}a_j(c)$$

and

$$\dim_{\mathrm{P}} J_c = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} J_c = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\log 3}{\log 2} a_j(c).$$

将此结果与主定理 B结合，即得所需结论。 □

推论 1.3 和 1.4 中的相同结论也适用于上同调。

2. Non-autonomous iterated function systems and Cech-Sumi homology group

本节总结 [12] 中同调框架的理论。我们首先介绍非自治迭代函数系（NIFS）的定义，它在本文中起着核心作用。

定义 2.1. </style}非自治迭代函数系统 $(\Phi^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ 是在紧致度量空间 X 上的一个映射族序列 $\Phi^{(j)} = \{\varphi_i^{(j)} : X \to X\}_{i\in I^{(j)}}$，其中每个指标集 $I^{(j)}$ 都是有限的，并且对于所有 $j \geq 1$ 和 $i \in I^{(j)}$，$\varphi_i^{(j)}$ 的 Lipschitz 常数均一致地被一个严格小于 1 的常数所界定。

设 $(\Phi^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ 是一个非自治迭代函数系。定义 $(\Phi^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ 的编码映射 Π: $\prod_{j=1}^{\infty} I^{(j)} \to X$ 为

$$\{\Pi(i_1, i_2, \dots)\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \varphi_{i_1}^{(1)} \circ \varphi_{i_2}^{(2)} \circ \cdots \circ \varphi_{i_j}^{(j)}(X),$$

根据一致压缩条件，它是一个单点集。定义 $(\Phi^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ 的极限集 J 为 $J = \Pi(\prod_{j=1}^{\infty} I^{(j)})$。

设 $(\Phi^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ 是一个非自治迭代函数系。对每个 $j \geq 1$，考虑一个非自治迭代函数系 $(\Phi^{(j-1+k)})_{k=1}^{\infty}$ 及其极限集 J_j。与通常的迭代函数系统相比，非自治迭代函数系的极限集不呈现自相似性，但具有如下嵌套结构。

引理 2.2. [12, 引理 3。3] 我们有 $J = J_1$，并且对每个 $j < k$，有

$$J_j = \bigcup_{(i_j,\dots,i_{k-1})\in I^{(j)}\times\cdots\times I^{(k-1)}} \varphi_{i_j}^{(j)} \circ \cdots \circ \varphi_{i_{k-1}}^{(k-1)}(J_k).$$

根据引理 2.2，对于每个 $1 \leq j < k$，集合 $\{\varphi_{i_j}^{(j)} \circ \cdots \circ \varphi_{i_{k-1}}^{(k-1)}(J_k)\}_{(i_j,\dots,i_{k-1})\in I^{(j)}\times\cdots\times I^{(k-1)}}$ 是 J_j 的一个覆盖。这使我们能够定义一个单纯复形。

定义 2.3。设 $(\Phi^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ 是一个非自治迭代函数系。对于 $1 \leq j < k$，定义 $\mathcal{N}_{j,\,k}$ 为引理 2.2 中覆盖的神经。也就是说，$\mathcal{N}_{j,\,k}$ 是按如下方式定义的单纯复形。其顶点集为 $I^{(j)} \times \cdots \times I^{(k-1)}$。对于每个顶点 $v = (i_j, \dots\dots, i_{k-1})$，令 $\varphi_v := \varphi_{i_j}^{(j)} \circ \cdots \circ \varphi_{i_{k-1}}^{(k-1)}$. 由互不相同的顶点组成的有限集 $\{v_0, \dots, v_q\}$ 是 $\mathcal{N}_{j,\,k}$ 的一个单形，当且仅当

$$\bigcap_{p=0}^{q} \varphi_{v_p}(J_k) \neq \emptyset.$$

定义一个单纯映射 $\phi_{j,\ k}$: $\mathcal{N}_{j,\ k+1} \to \mathcal{N}_{j,\ k}$，使得

$$\phi_{j,k}(i_j, \ldots, i_{k-1}, i_k) = (i_j, \ldots, i_{k-1}),$$

它诱导出一个同态

$$(\phi_{j,k})_*\colon H_q(\mathcal{N}_{j,k+1}) \to H_q(\mathcal{N}_{j,k})$$

在每个 $q \geq 0$对应的同调群（系数为 $\mathbb{Z}$）之间。定义非自治迭代函数系（$\Phi^{(j)}$）$_{j=1}^{\infty}$ 的第 q个切赫- Sumi 同调群 $\varprojlim_k H_q(\mathcal{N}_{1,k})$为逆系统 $\{(\phi_{1,k})_*$的逆极限： $H_q(\mathcal{N}_{1,k+1}) \to H_q(\mathcal{N}_{1,k})\}_{k=2}^{\infty}$。类似地，定义第 q个切赫-Sumi 上同调群 $\varinjlim_k H^q(\mathcal{N}_{1,k})$为正向系统$\{(\phi_{1,k})^*$的正向极限： $H^q(\mathcal{N}_{1,k}) \to H^q(\mathcal{N}_{1,k+1})\}_{k=2}^{\infty}$。于是有以下结论。

定理 2.4. [12, 定理 4.6] 对于每个 $\check{}q \geq 0$，切赫- *Sumi* 同调群 $\varprojlim_k H_q(\mathcal{N}_{1,k})$ 与切赫同调群 $\check{}\ H_q(J)$ 同构。此外，对于每个 $q \geq 0$，切赫-*Sumi* 上同调群$\varinjlim_k H_q(\mathcal{N}_{1,k})$ 与切赫上同调群 $\check{}H^q(J)$ 同构。

3. Proof

本节给出主要结果的证明。回顾一下， $v_0 =(0,0,0)$ $v_1 =(0,0,1)$ $v_2 =(0,1,1)$ $v_3 =(1,1,1)$，对于每个 $i \in \{0,1,2,3\}$，映射 f_i: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$由 $f_i(x) =(x + v_i)/2$ 定义。

3.1. 预备引理。 令 $c \in [0,1]$，并设 $(a_j(c))_{j=1}^{\infty}$ 是其在定义 1.2 中定义的二进制展开。对于每个 $j \in \mathbb{N}$，定义

$$A_c^{(j)} = \begin{cases} \{0\} & (a_j(c) = 0) \\ \{1,2,3\} & (a_j(c) = 1), \end{cases}$$

并考虑由 $\Phi_c^{(j)} =\{f_i\}_{i \in A_c^{(j)}},\ j \geq 1.$ 定义的非自治迭代函数系 $\Phi_c = (\Phi_c^{(j)})_{j=1}^{\infty}$。令 Π_{Φ_c} 为 $\Phi_c.$的编码映射

引理 3.1. 对于任意 $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \in \{0,1,2,3\}^{\infty}$，我们有 $\Pi_{\Phi_c}(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_{\omega_j}}{2^j}$.

证明. 取 $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \in \{0,1,2,3\}^{\infty}$。我们先对 n 使用归纳法证明：对于任意 $n \geq 1$,

$$f_{\omega|_n}(x) = \frac{x}{2^n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{\omega_j}}{2^j} \text{ for any } x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

其中 $\omega|_n = \omega_1 \cdots \omega_n.$对于 $n = 1$，由于 $f_{\omega_1}(x) =(x + v_{\omega_1})/2$，我们有

$$f_{\omega|_1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{v_{\omega_1}}{2},$$

且 (3.1) 成立。

假设对于某个 $n \geq 1$，式 (3.1) 成立。那么

$$f_{\omega|_{n+1}}(x) = f_{\omega|_n}\big(f_{\omega_{n+1}}(x)\big) = f_{\omega|_n}\Big(\frac{x + v_{\omega_{n+1}}}{2}\Big).$$

应用归纳假设，并令 $y=(x+v_{\omega_{n+1}})/2$，得到

$$f_{\omega|_{n+1}}(x)=\frac{1}{2^n}\frac{x+v_{\omega_{n+1}}}{2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{v_{\omega_j}}{2^j}=\frac{x}{2^{n+1}}+\sum_{j=1}^{n}\frac{v_{\omega_j}}{2^j}+\frac{v_{\omega_{n+1}}}{2^{n+1}},$$

这就是对 $n+1$ 而言的（3.1）。因此，（3.1）对任意 n 都成立。

根据编码映射的定义，

$$\Pi_{\Phi_c}(\omega)=\lim_{n\to\infty}f_{\omega|_n}(x_0),$$

对于基点 $x_0\in\mathbb{R}^3$ 的任意选取，将 $x_0=0$ 代入（3.1）可得

$$f_{\omega|_n}(0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{v_{\omega_j}}{2^j}.$$

令 $n\to\infty$，得到

$$\Pi_{\Phi_c}(\omega)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{v_{\omega_j}}{2^j},$$

至此，证明完毕。 □

下面的引理指出，谢尔宾斯基四面体的每个切片都可视为一个非自治迭代函数系的极限集。

引理 3.2. 对于任意 $c\in[0,1]$，集合 J_c 是非自治迭代函数系 $\Phi_c.$ 的极限集。特别地，若 c 是满足 $a(c)=a_1\cdots a_n01$ 的二进有理数，则

$$J_c=\bigcup_{\omega_1\cdots\omega_{n+1}\in\prod_{j=1}^{n}A_c^{(j)}\times\{0\}}f_{\omega_1\cdots\omega_{n+1}}(\mathrm{SG}),$$

其中 SG 表示迭代函数系统 $\{f_1,f_2,f_3\}.$ 的极限集

证明。尽管这个引理可由 [10], 立即推出，为完整起见，我们仍给出论证。根据引理 3.1，我们有

$$\begin{aligned}J_c&=\{x\in J\colon p_z(x)=c\}\\&=\{\Pi_{\Phi_c}(\omega)\colon p_z(\Pi_{\Phi_c}(\omega))=c\text{ for }\omega\in\{0,1,2,3\}^\infty\}\\&=\left\{\Pi_{\Phi_c}(\omega)\ :\ p_z\left(\sum_{j=1}^{\infty}(1/2)^jv_{\omega_j}\right)=c\text{ for }\omega\in\{0,1,2,3\}^\infty\right\}\\&=\left\{\Pi_{\Phi_c}(\omega)\colon\sum_{j=1}^{\infty}(1/2)^jp_z(v_{\omega_j})=c\text{ for }\omega\in\{0,1,2,3\}^\infty\right\}.\end{aligned}$$

若 c 是二进制展开为 $(a_j(c))$ 的非二进有理数，由 $z_j:=p_z(v_{\omega_j})\in\{0,1\}$ 以及二进制展开的唯一性可知，对任意$j\in\mathbb{N}$，都有 $z_j=a_j(c)$。因此， J_c 与.....重合

$$\left\{\Pi_{\Phi_c}(\omega)\colon\omega_j\in A_c^{(j)}\text{ for any }j\in\mathbb{N}\right\},$$

它是非自治迭代函数系 $\Phi_c.$ 的极限集

设 $c \in [0,1]$ 是一个二进有理数，其二进制展开为 $a_1 \cdots a_n 01$。那么我们有

$$J_c = \left\{ \Pi_{\Phi_c}(\omega) \colon \sum_{j=1}^{\infty} (1/2)^j p_z(v_{\omega_j}) = c \text{ for } \omega \in \{0,1,2,3\}^{\infty} \right\}.$$

由于 $z_j := p_z(v_{\omega_j}) \in \{0,1\}$，我们有 $z_1 z_2 \cdots z_n \cdots = a_1 a_2 \cdots a_n 10$ 或 $z_1 \overline{z_2} \cdots z_n \cdots = a_1 a_2 \cdots a_n 0\overline{1}$。因此，我们有

$$J_c = \bigcup_{\omega_1 \cdots \omega_{n+1} \in \prod_{j=1}^{n} A_c^{(j)} \times \{1,2,3\}} f_{\omega_1 \cdots \omega_{n+1}}(\boldsymbol{o}) \cup \bigcup_{\omega_1 \cdots \omega_{n+1} \in \prod_{j=1}^{n} A_c^{(j)} \times \{0\}} f_{\omega_1 \cdots \omega_{n+1}}(\mathrm{SG}),$$

其中，$\boldsymbol{o}$ 表示原点 (0，0，0)，SG 表示迭代函数系统 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 的极限集。取 $\omega_1 \cdots \omega_{n+1} \in \prod_{j=1}^{n} A_c^{(j)} \times \{1,2,3\}$，并设 $f_{\omega_{n+1}}(x) = (x + v_{\omega_{n+1}})/2$。由于$f_{\omega_{n+1}}(\boldsymbol{o}) = v_{\omega_{n+1}}/2$，且 $v_{\omega_{n+1}}$ 是 $f_{\omega_{n+1}}$ 的不动点，属于 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 的极限集 SG，因此我们有 $f_{\omega_1 \cdots \omega_{n+1}}(\boldsymbol{o}) = f_{\omega_1} \circ \cdots \circ f_{\omega_n}(v_{\omega_{n+1}}/2) = f_{\omega_1} \circ \cdots \circ f_{\omega_n}(f_0(v_{\omega_{n+1}})) \in f_{\omega_1} \circ \cdots \circ f_{\omega_n} \circ f_0(\mathrm{SG})$。因此，我们有

$$J_c = \bigcup_{\omega_1 \cdots \omega_{n+1} \in \prod_{j=1}^{n} A_c^{(j)} \times \{0\}} f_{\omega_1 \cdots \omega_{n+1}}(\mathrm{SG}),$$

它是非自治迭代函数系 $(\Phi_c^{(j)})_{j=1}^{\infty}$. 的极限集 □

令 $X = [0,1]^2$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的单位正方形。令 $b_1 = (0, 0)$ $b_2 = (0, 1)$，以及$b_3 = (1, 1)$。对每个 $i \in \{1,2,3\}$，定义一个压缩映射 $\psi_i \colon X \to X$，使得$\psi_i(x) = (x + b_i)/2$。

令 $c \in [0,1]$，并令 $(a_j(c))_{j=1}^{\infty}$ 为其在定义 1.2 中定义的二进制展开。对每个 $j \in \mathbb{N}$，定义

$$I_c^{(j)} := \begin{cases} \{1\} & (a_j(c) = 0) \\ \{1,2,3\} & (a_j(c) = 1) \end{cases}$$

并考虑一个非自治迭代函数系 $\Psi_c = (\Psi_c^{(j)})_{j=1}^{\infty}$，$\Psi_c^{(j)} = \{\psi_i\}_{i \in I^{(j)}}$，$j \geq 1$.。令 Π_{Ψ_c} 为 Ψ_c. 的编码映射

引理 3.3。对于任意 $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \in \{1,2,3\}^{\infty}$，我们有 $\Pi_{\Psi_c}(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{\omega_j}}{2^j}$.

证明。证明过程与引理 3.1 的证明类似。 □

设 P 是从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的投影，由 $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$。

引理 3.4. 对于任意 $c \in [0,1]$，映射 $P|_{J_c}$ 是非自治迭代函数系 Ψ_c. 的极限集上的同胚

证明. 根据引理 3.2，对于任意 $c \in [0,1]$，集合 J_c 是非自治迭代函数系 $(\Phi_c^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ 的极限集。根据引理 3.1 和引理 3.3，我们有

$$P(J_c) = P\left(\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_{\omega_j}}{2^j} : \omega_j \in A_c^{(j)} \text{ for all } j \geq 1\right\}\right)$$
$$= \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{P(v_{\omega_j})}{2^j} : \omega_j \in A_c^{(j)} \text{ for all } j \geq 1\right\} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{\omega_j}}{2^j} : \omega_j \in I_c^{(j)} \text{ for all } j \geq 1\right\},$$

它是 Ψ_c. 的极限集 □

根据引理 3.4，对于每个 c，我们有 $P(J_c) = \{x – (0, 0, c) \in \mathbb{R}^3 : x \in J_c\}$. 因此，为了研究高度为 c 的切片 J_c，只需考察其投影 $P(J_c)$。下文中，我们分别用 J_c 和 Π_c 代替 $P(J_c)$ 和 Π_{Ψ_c}。

引理 3.5。设 $1 \leq j < k$。那么对于任意互不相同的 $\omega = \omega_j \cdots \omega_{k-1}, \tau = \tau_j \cdots \tau_{k-1} \in \{1,2,3\}^{k-j}$，我们有 $\psi_{\omega 1}(X) \cap \psi_{\tau 1}(X) = \emptyset$.

证明。对于每个字 $\omega \in \{1,2,3\}^{k-j}$，集合 $\psi_\omega(X)$ 是一个边长为 $2^{-(k-j)}$ 的正方形。于是我们有

$$\psi_{\omega 1}(X) = \psi_\omega(\psi_1(X)) = \psi_\omega\big([0,1/2]^2\big),$$

这恰好是将 $\psi_\omega(X)$ 分成四个全等正方形后得到的左下子正方形。因此，它的边长为 $2^{-(k-j+1)}$，且位于 $\psi_\omega(X)$ 的左下四分之一内。

由于 $\omega \neq \tau$，正方形 $\psi_\omega(X)$ 和 $\psi_\tau(X)$ 互不相同，且它们的内部不相交。特别地，它们的左下四分之一也互不相交。因此，$\psi_{\omega 1}(X) \cap \psi_{\tau 1}(X) = \emptyset$. □

命题 3.6. 若 c 是非二进有理数，则 J_c 完全不连通。

证明。由于 c 不是二进有理数，存在一个严格递增序列 $(n_i)_{i=1}^{\infty}$，使得对于任意 $i \geq 1.$，都有 $I^{(n_i)_c} = \{1\}$。取 $x \in J_c$，令 C_x 表示包含 x 的连通分支，并令 $\omega = \omega_1\omega_2\cdots \in \prod_{j=1}^{\infty} I^{(j)}$ 满足 $\Pi_c(\omega) = x.$。由引理 3.5，任意 $i \geq 1.$ 均有 $C_x \subset \psi_{\omega_1\cdots\omega_{n_i}}(X)$。由于 $|C_x| \leq |\psi_{\omega_1\cdots\omega_{n_i}}(X)| \leq 1/2^{n_i}$，令 $i \to \infty$，可得 $|C_x| = 0$，由此完成证明。□

在下文中，给定非自治迭代函数系 Ψ_c 和 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathcal{N}_{1,n+1}$ 表示定义 2.3 中引入的单纯复形。

引理 3.7. 设 $1 \leq m < n$ 和 $\ell = \#\{i \in \{m, \ldots, n-1\} : I_c^{(i)} = \{1\}\}$. 若 $I_c^{(n)} = \{1\}$，则 $H_0(\mathcal{N}_{m,n+1})$ 和 $H^0(\mathcal{N}_{m,n+1})$ 是秩为 $3^{n-m-\ell}$. 的自由阿贝尔群

证明。设 $1 \leq m < n$ 和 $\ell = \#\{i \in \{m, \ldots, n-1\} : I^{(i)} = \{1\}\}$. 根据引理 3.5，$\mathcal{N}_{m,n+1}$ 上没有 1-单形，这就推出了所需结论。□

命题 3.8。设 c 是一个二进有理数，其二进制展开为 $a_1 \cdots a_n 01$，且 $\ell = \#\{i \in \{1, \ldots, n\} : a_i(c) = 0\}$. 那么 $\check{} H_0(J_c)$ 和 $\check{}H^0(J_c)$ 是秩为 $3^{n-\ell}$. 的自由阿贝尔群

证明。 由引理 3.2 和 3.5 可得

$$J_c = \bigcup_{\omega_1\cdots\omega_{n+1}\in\prod_{j=1}^{n} I_c^{(j)}\times\{0\}} \psi_{\omega_1\cdots\omega_{n+1}}(\mathrm{SG}) \text{ (disjoint union)},$$

其中 SG 是 $\{\psi_1,\psi_2,\psi_3\}$. 的极限集。由于 SG 是连通的，根据引理 3.7，我们得到了所需结论。

□

命题 3.9。 如果 c 是一个非二进有理数，其二进制展开为 $(a_j(c))_{i=1}^{\infty}$，那么我们有

$$\log \mathrm{rank} H_0(\mathcal{N}_{1,n+1}) = \log \mathrm{rank} H^0(\mathcal{N}_{1,n+1}) = \sum_{j=1}^{n} a_j(c)\log 3.$$

证明。 令 $n\in\mathbb{N}.$。由于 c 不是二进有理数，存在 $j_0>n$ 使得 $a_{j_0}(c)=0$，这意味着 $I^{(j_0)}{}_c = \{1\}.$。取 $\omega\neq\tau\in I^{(1)}\times\cdots\times I^{(n)}$，并令 K_n 为非自治迭代函数系 $(\Psi_c^{(n+k)})_{k=1}^{\infty}$. 的极限集。根据引理 3.5，对于任意 $\mu\in I_c^{(n+1)}\times\cdots\times I_c^{(j_0-1)}$，我们有

$$\psi_\omega\circ\psi_\mu\circ\psi_1(X)\cap\psi_\tau\circ\psi_\mu\circ\psi_1(X)=\emptyset. \tag{3.2}$$

根据 K_n 的定义，我们有

$$K_n \subset \bigcup_{\mu\in I_c^{(n+1)}\times\cdots\times I_c^{(j_0-1)}} \psi_\mu\circ\psi_1(X). \tag{3.3}$$

结合 (3.2) 和 (3.3)，我们有 $\psi_\omega(K_n)\cap\psi_\tau(K_n)=\emptyset.$。因此，在 $\mathcal{N}_{1,\ n+1}$ 上不存在 1-单形，这意味着

$$\mathrm{rank} H_0(\mathcal{N}_{1,n+1}) = \mathrm{rank} H^0(\mathcal{N}_{1,n+1}) = \#(I_c^{(1)}\times\cdots\times I_c^{(n)}).$$

根据 $I_c^{(j)}$的定义，我们有

$$\log \mathrm{rank} H_0(\mathcal{N}_{1,n+1}) = \log \mathrm{rank} H^0(\mathcal{N}_{1,n+1}) = \sum_{j=1}^{n} a_j(c)\log 3,$$

这就完成了证明。 □

3.2. 主要结果的证明。根据 $[15,$ 定理 1.9（2）$]$，，我们有 $\check{}\ H_0$(SG) $\cong\check{}H^0$(SG) $\cong\mathbb{Z}$，秩 $\check{}H_1$(SG) $=$ 秩 $\check{}H^1$(SG) $=\infty$，并且对于所有 $q\geq 2$，$\check{}\ H_q$(SG) $=\check{}H^q$(SG) $=0$。此外，SG 的第一（上）同调的秩的增长率等于 log 3。

若 c 是非二进有理数，根据引理 3.5，存在一个严格递增序列 $(n_i)_{i=1}^{\infty}$，使得 $H_1(\mathcal{N}_{1,\ n_i+1}) = H^1(\mathcal{N}_{1,\ n_i+1}) = 0.$。结合定理 2.4 可得 $\check{}\ H_1(J_c)=\check{}H^1(J_c)=0$，而命题 3.6 推出主定理 A（b）。命题 3.8 推出主定理 A（a）和主定理 B（a）。最后，由命题 3.9 可得主定理 B（b），至此证明完成。

4. The general dimensional setting

设 $d \geq 3$。与 [10], 中一样，我们引入 d 维谢尔宾斯基地毯，其中三维谢尔宾斯基地毯与谢尔宾斯基四面体相同。

定义 4.1. 设 $v_0 = (0,0,...,0) \in \mathbb{R}^d$。令 $v_i = v_0 + \sum_{j=d-i+1}^{d} e_j \in \mathbb{R}^d$ 对每个 $i \in \{1,2,...,d\}$成立，其中 e_j 是 $\mathbb{R}^d$的自然基中的第 j 个元素。令 $V_d = \{v_0, v_1, ..., v_d\}$，即。

$$V_d := \big\{(0,0,0,...,0,0,0), (0,0,0,...,0,0,1), (0,0,0,...,0,1,1), \cdots,$$
$$(0,0,1,...,1,1,1), (0,1,1,...,1,1,1), (1,1,1,...,1,1,1)\big\}$$

对每个 $v \in V_d$，定义一个压缩映射 $g_v\colon [0,1]^d \to [0,1]^d$，其定义为 $g_v(x) = (x+v)/2$。于是，这组 $d+1$ 映射 $\{g_v\}_{v\in V_d}$ 构成一个迭代函数系统。因而存在唯一的非空紧子集 J^d，使得

$$J^d = \bigcup_{v\in V_d} g_v(J^d),$$

它称为 d 维谢尔宾斯基垫片。

设 $x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$。我们令 $p_d(x) = x_d$。设 $c \in \mathbb{R}$ 并考虑 J^d 的如下水平集 J_c^d。

$$J_c^d = \{x \in J^d\colon p_d(x) = c\}.$$

与情形 $d = 3$ 中的论证类似，我们得到如下与主定理 A 和 B 类似的结果。

定理 4.2. 设 $c \in [0,1]$. 则下列结论成立。

(a) 若 c 是二进有理数，则 J_c^d 是$(d-1)$维 *Sierpi ́nski* 垫片的有限个副本的不交并，$0 < \text{秩}\check{}H_0(J_c^d) < \infty$，秩$\check{}H_1(J_c^d) = \infty$，且 $\check{} H_q(J_c^d) = 0$ 对所有 $q \geq 2$.(b) 若 c是非二进有理数，则 J_c^d完全不连通，且 $\check{} H_q(J_c^d) = 0$对所有 $q \geq 1$.

定理 4.3. 设 $c \in [0,1]$. 则下列结论成立。

(a) 设 c 为二进有理数，其二进制展开为 $a_1 \cdots a_n 01$ 且 $\ell = \#\{j \in \overline{\{1,\ldots,n\}}: a_j = 0\}$. 则有 秩$\check{}H_0(J_c^d) = d^{n-\ell}$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \text{rank} H_1(\mathcal{N}_{1,n+1}) = \log d.$$

(b) 若 c 为非二进有理数，其二进制展开为 $(a_j(c))_{j=1}^{\infty}$，则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 我们有

$$\log \text{rank} H_0(\mathcal{N}_{1,n+1}) = \sum_{j=1}^{n} a_j(c) \log d.$$

上同调群同样如此。

注 4.4。 根据亚历山大对偶定理 [14, 定理 6.2。16], 一个子集 $D \subset \mathbb{R}^d$ 的拓扑决定了其补集的拓扑。更准确地说，切赫上同调群 $\check{H}^{d-q-1}(D)$ 与补集的约化同调群$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^d \setminus D)$同构。在我们的设定下，由主定理 A 和 B 可推出以下结果。

定理 4.5. 设 $c \in [0,1]$. 则以下结论成立。

(a) 设 c 是一个二进有理数，其二进制展开为 $a_1 \cdots a_n 01$，其中某个$\overline{n} \in \mathbb{N}$ 且 $\ell = \#\{j \in \{1,\dots,n\} : a_j = 0\}$. 则秩 $\tilde{H}_{d-1}(\mathbb{R}^d \setminus J_c) = d^{n-\ell}$，秩 $\tilde{H}_{d-2}(\mathbb{R}^d \setminus J_c) = \infty$，并且对所有 $q \notin \{d-1, d-2\}$.，$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^d \setminus J_c) = 0$。*(b)* 若 c 是一个非二进有理数，则秩 $\tilde{H}_{d-1}(\mathbb{R}^d \setminus J_c) = \infty$，且对所有 $q \neq d-1$.，秩 $\tilde{H}_q(\mathbb{R}^d \setminus J_c) = 0$

致谢。 YN 得到了 JSPS KAKENHI JP25K17282 的部分资助。TW 得到了 JSPS KAKENHI（JP23K13000、JP24K00526、JP25K00011）以及 JST AIP 加速计划 JPMJCR25U6 的部分资助。

References

[1] B´ar´any, Bal´azs；Ferguson, Andrew；Simon, K´aroly：《谢尔宾斯基垫片的切片》，Nonlinearity 25 (2012), 1753–1770。[2] Benjamini, Itai；Peres Yuval：《纤维的豪斯多夫维数》，Israel J. Math. 74 (1991), 267–279。[3] Falconer, Kenneth：《分形几何：数学基础与应用》。第三版。John Wiley & Sons, Ltd., 奇切斯特，2014。xxx+368 页。[4] Hata, Masayoshi：《自相似集的结构》，Japan J. Appl. Math. 2 (1985), no. 2, 381–414。[5] Hutchinson, John E.：《Fractals and Self-Similarity》，Indiana Univ. Math. J. 30, no. 5 (1981), 713–747。[6] Li, Wenxia；Xiao, Dongmei：《三分康托集的平移之间的交》，Acta Math. Sci. 19 (1999), 214–219。[7] Marstrand, John M.：《分数维平面集的一些基本几何性质》，Proc. London math. Soc. III. Ser. 4 (1954), 257–302。[8] Mattila, Pertti：《豪斯多夫维数、正交投影及与平面的交》，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1 (1975), 227–244。[9] Mattila, Pertti：《欧几里得空间中集合与测度的几何：分形与可整性》，Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 44. 剑桥大学出版社，剑桥，1995。[10] Nakajima, Yuto：《穿过谢尔宾斯基垫片的切片维数》，Journal of Difference Equations and Applications, 28:3 (2022), 429–456。[11] Nakajima, Yuto：《分形 n边形的曼德博集合与幂级数零点》，Topology Appl. 350 (2024), Paper No. 108918, 11 pp.。[12] Nakajima, Yuto；Watanabe, Takayuki：《非自治迭代函数系统极限集的拓扑》，arXiv:2510.23255, 2025。[13] Shmerkin, Pablo：《关于 Furstenberg 交集猜想、自相似测度及卷积的范数》，Ann. of Math. (2) 189 (2019), no. 2, 319–391。[14] Spanier, Edwin H.：《代数拓扑》，McGraw-Hill Book Co., 纽约-多伦多-伦敦，1966。xiv+528 页。[15] Sumi, Hiroki：《正向或反向自相似系统的交互上同调》，Adv. Math. 222 (2009), no. 3, 729–781。[16] Watanabe, Takayuki：《关于形如 $z^2 + c_n$的多项式随机迭代所涉及的随机分岔》，Ergodic Theory Dynam. Systems 44 (2024), no. 11, 3358–3384。

[17] Wen, Zhixiong；Wu, Wen；Xi, Lifeng：《具有初始立方模式的自相似集的切片维数》，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 38 (2013), no. 2, 473–487。[18] Wu, Meng：《关于 $\times p$和 $\times q$不变集交集的 Furstenberg 猜想的证明》，Ann. of Math. (2) 189 (2019), no. 3, 707–751。[19] Wu, Wen；Xi, Lifeng：《一类广义谢尔宾斯基海绵的切片维数》，J. Math. Anal. Appl. 399 (2013), no. 2, 514–523。[20] Xi, Lifeng；Wu, Wen；Xiong, Ying：《具有初始立方模式的分形切片维数》，Chinese Ann. Math. Ser. B 38 (2017), no. 5, 1145–1178。

Faculty of Science and Engineering, Doshisha University, 1-3 Tatara Miyako-dani, Kyotanabe-shi, Kyoto, 610-0394, Japan电子邮箱地址：yunakaji@mail.doshisha.ac.jp

Chubu University Academy of Emerging Sciences, 1200 Matsumoto-cho, Kasugai-shi, Aichi, 487-8501, Japan.电子邮箱地址：takawatanabe@fsc.chubu.ac.jp