arXiv:2603.06005v1 [math.RA] 6 Mar 2026

δ-Virasoro相关代数的双导子

CHENGKANG XU

摘要。我们确定了 Witt代数、Virasoro代数、W-$\tilde{}$代数$W(a, b)$及其泛中心扩张$W(a,b)$的所有 δ-双导子，并给出了一些应用。

1. 引言

双导子的研究源于结合环理论。（斜对称）双导子的概念是研究结合环交换线性映射的一种有效方法（见 [1]）。在 [22],中，作者给出了李代数双导子的定义，并研究了有限维单李代数抛物子代数的斜对称双导子。此后，李代数双导子的研究吸引了广泛关注。斜对称双导子已在薛定谔-Virasoro代数、 [23], 广义 Witt 代数、 [5],W-代数 W(a, b)、 [9], A型仿射-Virasoro代数、$_1$ [24], Kac-Moody 代数、 [6],环薛定谔-Witt代数、 [16], Witt代数和 W(2, 2)、 [17], 块李代数、 $\mathcal{B}(q)$、[15], 扭 Heisenberg–Virasoro 代数、 [20], 镜像 Heisenberg–Virasoro 代数 [14],等中得到了确定。还值得一提的是，Br$\check{}$esar 和 Zhao 在 [4] 中提出了一种利用质心概念研究李代数斜对称双导子的新方法。上述李代数的交换线性映射也分别得到了确定。

对称双导子与交换后李代数有关。关于李代数上的对称双导子也有许多研究。例如，有限维复单李代数 [18], Witt代数和W代数$W(2, 2)$ [17], 块李代数$\mathcal{B}(q)$ [15], 扭 Heisenberg–Virasoro 代数 [20],镜像 Heisenberg–Virasoro 代数[14], W代数$W(a,b)$ [19], 高秩 Witt 代数 [21]。在上述李代数中，Witt代数、$W(2, 2)$、扭 Heisenberg–Virasoro 代数、W代数$W(a,b)$以及高秩 Witt 代数的交换后李代数结构已被确定。

作为双导子的推广， δ-双导子的概念在 [25], 中被引入，其中δ 是任意复数。该概念也推广了 δ-导子的概念，后者最早由 Filippov 在 [7]中研究。特别地，$_1$ $_2$-导子与转置泊松代数有着密切联系；转置泊松代数是在 [2] 中作为 Poisson 代数的对偶概念引入的。[25] 中的作者还确定了扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数、Schr¨odinger-Virasoro 代数、扩张 Schr¨odinger-Virasoro 代数以及扭曲 Schr¨odinger-Virasoro 代数的所有 $_1$ $_2$-导子，并利用它们确定了这些代数上的转置泊松代数结构。然而，他们并未进一步研究李代数的 δ-双导子。最近，人们确定了一些李代数上的转置泊松代数结构，

2020年数学主题分类。17B10, 17B65, 17B68。关键词和短语。Witt代数、Virasoro代数、 δ-导子、双导子、 δ-双导子。

参见 [10, 11, 13, 26]及其中的参考文献。上述参考文献中关于李代数上转置泊松代数结构的研究，均采用$_{1\ 2}$-导子的方法。但$_{1\ 2}$-导子与李代数上的转置泊松代数结构之间并无直接联系，实际上二者是通过$_{1\ 2}$-双导子关联起来的。因此，我们在最后一节为李代数引入一种称为转置δ-Poisson 代数结构的概念，将其作为上一节所述转置泊松代数结构的推广，同时也将其作为 δ-双导子的一项应用。

本文确定了Witt代数、Virasoro代数、$\widetilde{W}$-代数 $W(a,b)$及其泛中心扩张 $W(a,b)$的所有 δ-双导子。下面简要介绍本文的组织结构。第2节回顾这些代数的定义，以及 δ-导子和 δ-双导子的概念。第3节介绍δ-双导子的一些基本性质。第4节专门研究Witt代数和$\widetilde{\text{Virasoro}}$代数的 δ-双导子，第5节则研究对于任意复数a、b，代数$W(a,b)$和$W(a,b)$的 δ-双导子。在最后一节中，我们应用 δ-双导子确定上述代数上的交换线性映射、交换后李代数结构以及转置δ-Poisson代数结构。

本文中，符号 $\mathbb{Z}$和 $\mathbb{C}$ 分别表示整数集和复数集。假设所有向量空间均定义在 $\mathbb{C}$上，对于任意李代数 $\mathfrak{g}$，我们用 $\mathfrak{g}'$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的导出子代数。设G 为一个加法群，V 为一个G-分次空间（或李代数），满足$V = \bigoplus_{g\in G} V_g$。我们称$V_g$ 为次数为g的齐次子空间，并称V_g 中的非零元素的次数为g。

2. 预备知识

本节回顾本文所研究的李代数、 δ-导子和δ-双导子的概念，以及一些基本结果。

定义 2.1. ***Witt***代数 是一个复李代数 $\mathcal{W}$，其基为 $\{L_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$，并满足交换关系

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \quad \textit{for any } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Virasoro代数 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{W}$的泛中心扩张。等价地，$\mathcal{V}$ 的基为$\{L_n, C_0 \mid n \in \mathbb{Z}\}$，并满足交换关系

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3-m)C_0\delta_{m+n,0} \quad \textit{for any } m, n \in \mathbb{Z}.$$

W-代　　数是 Witt代数与其中间系列模的张量积　　es.

定义 2.2. 设 $a,b \in \mathbb{C}$，W-代数 $W(a,b)$ 是一个李代数，具有 $\mathbb{C}$-基 $\{L_n, I_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$，满足李括号关系

$$[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j}, \quad [L_i, I_j] = -(a+j+bi)I_{i+j}, \quad [I_i, I_j] = 0 \quad \textit{for } i, j \in \mathbb{Z}.$$

由于 $W(a,b) \cong W(a+k,b)$ 对任意 $k \in \mathbb{Z}$均成立，因此本文始终假设 $0 \le a < 1$。注意到，当且仅当 $(a,b) \neq (0,1)$ 时，$W(a,b)$ 是完美的。

在 [8] 中确定了$W(a,b)$ 的泛中心扩张$\widetilde{W}(a,b)$。

定理 2.3。 代数 $W(a,b)$ 满足以下李括号关系

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}C_0\delta_{m+n,0},$$

$$[L_m, I_n] = -(a+n+bm)I_{m+n} + \delta_{m+n,0}\delta_{a,0}\left((m^2+m)C_1^0\delta_{b,0} + (mC_1^1 + C_2^1)\delta_{b,1} + \frac{m^3-m}{12}C_1^{-1}\delta_{b,-1}\right),$$

$$[I_m, I_n] = mC_2^0\delta_{m+n,0}\delta_{a,0}\delta_{b,0} + (2m+1)C_2^{\frac{1}{2},0}\delta_{m+n+1,0}\delta_{a,\frac{1}{2}}\delta_{b,0},$$

其中 $C_0, C_1^0, C_1^1, C_2^1, C_1^{-1}$， $C_2^0, C^-{}_{12,\ 0\,2}$ 是中心元。

~ ~记 C 为$W(a, b)$ 的中心。注意，除非 $(a,b) = (0, 1)$，否则$W(a, b)$ 是完美的。

定义 2.4. 设 $\delta \in \mathbb{C}$， $\mathcal{L}$ 是一个李代数。若线性映射 f： $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ 满足

$$\delta[f(x), y] + \delta[x, f(y)] = f([x, y]) \quad \textit{for any } x, y \in \mathcal{L}.$$

显然，当 $\delta = 1$ 时， δ-导子的概念就是通常的导子。

记 $\mathfrak{Der}_\delta(\mathcal{L})$ 为 δ-导子空间，其中 $\mathcal{L}$固定 δ。为简便起见，记作$\mathfrak{Der}(\mathcal{L}) = \mathfrak{Der}_1(\mathcal{L})$。Witt代数 δ及 Virasoro代数的所有 $\mathcal{W}$ -导子已在 $\mathcal{V}$ 中确定 [12]。

定理 2.5 ([12]). *(1)* $\mathfrak{Der}(\mathcal{W})$ = 张成空间$_{\mathbb{C}}\left\{\mathrm{ad}L_j \mid j \in \mathbb{Z}\right\}$。
(2) $\mathcal{D}er_{\ 12}(\mathcal{W})$ =张成空间$_{\mathbb{C}}\left\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{Z}\right\}$，其中 φ_j $(L_i) = L_{i+j}$。*(3)* $\mathfrak{Der}_\delta(\mathcal{W}) = 0$ 如果 $\delta \neq \frac{1}{2}$， 1。

现在我们回顾 [25]中 δ-双导子的概念。

定义 2.6. 设 $\delta \in \mathbb{C}$，并设 $\mathcal{L}$ 为一个李代数。双线性映射 f： $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ 称为 $\mathcal{L}$的一个δ-双导子，如果

$$\delta[x, f(y,z)] + \delta[f(x,z), y] = f([x,y], z), \tag{2.1}$$

$$\delta[f(x,y), z] + \delta[y, f(x,z)] = f(x, [y,z]) \tag{2.2}$$

对任意 x， y， $z \in \mathcal{L}$。当 $\delta = 1$时，我们简单地称 f 为一个双导子。 $\mathcal{L}$ 的 δ-双导子称为中心的，如果 $f(x, y) \in Z(\mathcal{L})$，即 $\mathcal{L}$的中心，称为对称的，如果 $f(x, y) = f(y, x)$，并且称为反对称的，如果 $f(x, y) = -f(y, x)$，对所有 x， $y \in \mathcal{L}$。

记 $\mathrm{BD}^{[\delta]}(\mathcal{L})$ 为固定 δ 下 $\mathcal{L}$ 的 δ-双导子空间。设f 是 $\mathcal{L}$的 δ-双导子，则对任意$x \in \mathcal{L}$, 线性映射$f(x, \cdot)$ 和$f(\cdot, x)$ 都是 $\mathcal{L}$的 δ-导子。

3. δ-双导子的基本性质

在本节 中，我们给出任意李代数上 δ-双导子的一些基本性质 .

命题 3.1. 设 $\mathcal{L}$是一个中心为 $Z(\mathcal{L})$的李代数，且 f 是 $\mathcal{L}$的 δ-双导子。
（*1*）若 $\delta \neq 0$，则对任意 $\alpha \in Z(\mathcal{L})$、$y \in \mathcal{L}$，有 $f(\alpha, y) = f(y, \alpha) \in Z(\mathcal{L})$。
（*2*）对任意 $\alpha \in Z(\mathcal{L})$、$y \in [\mathcal{L}, \mathcal{L}]$，有 $f(\alpha, y) = f(y, \alpha) = 0$。（*3*）若 $\mathcal{L}$ 是完美的，则对任意 $\alpha \in Z(\mathcal{L})$、$y \in \mathcal{L}$，有 $f(\alpha, y) = f(y, \alpha) = 0$。

证明。(1) 对任意 $x \in \mathcal{L}$, $\phi_x = f(x, \cdot)$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个 δ-导子。则对任意 $y \in \mathcal{L}$, 我们有

$$0 = \phi_x([\alpha, y]) = \delta[\phi_x(\alpha), y] + \delta[\alpha, \phi_x(y)] = \delta[\phi_x(\alpha), y],$$

这就得到 $f(x, \alpha) = \phi_x(\alpha) \in$ 整数集($\mathcal{L}$), 若 $\delta \neq 0$。类似地, 可得 $f(\alpha, x) \in$ 整数集($\mathcal{L}$) .

(2) 由于 f 是双线性的, 我们不妨设 $y = [z, z']$, 其中某些 z、$z' \in \mathcal{L}$。于是有

$$f(y, \alpha) = f([z, z'], \alpha) = \delta[z, f(z', \alpha)] + \delta[f(z, \alpha), z'] = 0.$$

类似地, 可得 $f(\alpha, y) = 0$。(3)由(2)推出。 □

命题 3.2. 完美李代数的任何中心 δ-双导子都是零映射。

证明。设 $\mathcal{L}$ 是一个完美李代数, f 是 $\mathcal{L}$ 的中心 δ-双导子。对于任意 x, y $\in \mathcal{L}$, 写作 y = [z, z′], 其中某些 z, z′ $\in \mathcal{L}$。由(2.2), 有 f (x, y) = f (x, [z, z′]) = δ[z, f (x, z′)] +δ[f (x, z′), z] = 0。因此 f = 0。 □

命题 3.3. 设 G 是一个阿贝尔群, 且 $\mathcal{L}$ 是一个有限生成 G-分次李代数, 使得 $\mathcal{L} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{L}_g$。则 $\mathfrak{BD}^{[\delta]}(\mathcal{L})$ 也是 G-分次的,

$$\mathfrak{BD}^{[\delta]}(\mathcal{L}) = \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{BD}^{[\delta]}(\mathcal{L})_g,$$

其中 $\mathfrak{BD}^{[\delta]}(\mathcal{L})_g = \{\phi \in \mathfrak{BD}^{[\delta]}(\mathcal{L}) | \ \phi(x, y) \in \mathcal{L}_{g+a+b}$ 对任意 $a, b \in G, x \in \mathcal{L}_a, y \in \mathcal{L}_b\}$。我们称 $\mathfrak{BD}^{[\delta]}(\mathcal{L})_g$ 中的元素次数为 g。

证明。 其证明类似于引理 2.1, 见 [14], , 我们省略细节。 □

命题 3.4. 设 ϕ 是李代数 $\mathcal{L}$ 的一个 δ-双导子, 其中心为 $Z(\mathcal{L})$。定义

$$\overline{\phi}(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{\phi(x, y)} = \phi(x, y) + Z(\mathcal{L}),$$

对所有 $x, y \in \mathcal{L}$, 其中 $\overline{x} = x + Z(\mathcal{L}) \in \mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$。则 $\overline{\phi}$ 是 $\mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$的一个 δ-双导子。

证明。 利用命题 3.1即可轻松验证, 此处省略细节。 □

4. δ-biderivations of the Witt and Virasoro algebras

本节分为两个小节, 确定 Witt代数 $\mathcal{W}$ 和 Virasoro代数$\mathcal{V}$的所有 δ-双导子。

4.1. δ-Witt代数的双导子。

显然, 由下式定义的双线性映射 $\pi: \mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$

$$\pi(L_i, L_j) = [L_i, L_j] \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{Z},$$

是一个 (1-) 双导子, 且对于任意 $n \in \mathbb{Z}$, 由下式定义的双线性映射 $\theta_n: \mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$

$$\theta_n(L_i, L_j) = L_{n+i+j} \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{Z},$$

是一个1 2-双导子。

定理4.1。*Witt*代数 $\mathcal{W}$ 的所有 δ-双导子空间为

$$\mathfrak{BD}^{[\delta]}(\mathcal{W}) = \begin{cases} \mathbb{C}\pi & \text{if } \delta = 1; \\ \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\theta_n \mid n \in \mathbb{Z}\} & \text{if } \delta = \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

证明。设 f 是 δ 上的 $\mathcal{W}$-双导子。那么对任意 $i \in \mathbb{Z}$，线性映射 $f(L_i, \cdot)$ 和 $f(\cdot, L_i)$ 都是 δ-导子，且作用于 $\mathcal{W}$。此外，根据命题 3.3，我们不妨设 $f \in BD^{[\delta]}(\mathcal{W})_n = \{g \in BD^{[\delta]}(\mathcal{W}) \mid g(L_i, L_j) \in \mathbb{C}L_{n+i+j}$，对任意 $i, j \in \mathbb{Z}\}$，其中某个 $n \in \mathbb{Z}$。

若$\delta \neq \frac{1}{2}$，1，则由定理 2.5(3) 可得 $f(L_i, \cdot) = 0$，即 $f(L_i, L_j) = 0$ 对任意 $i, j \in \mathbb{Z}$。因此 $f = 0$。

若 $\delta = 1$，则对任意 $i \in \mathbb{Z}$，线性映射 $f(L_i, \cdot)$ 是次数为 $n+i$ 的导子，因此由定理 2.5(1)，对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $f(L_i, \cdot) = \lambda \operatorname{ad} L_{n+i}$。所以 $f(L_i, L_j) = \lambda[L_{n+i}, L_j] = \lambda(n+i-j)L_{n+i+j}$。类似地，由于 $f(\cdot, L_j)$ 是次数为 $n+j$ 的导子，对某个 $\mu \in \mathbb{C}$，有 $f(L_i, L_j) = \mu(n-i+j)L_{n+i+j}$。因此

$$\lambda(n+i-j) = \mu(n-i+j) \quad \text{for any } i, j \in \mathbb{Z}.$$

令$j = n+i$，得到$n\mu = 0$。若$n \neq 0$，则 $\mu = 0$，进而有 $\lambda = 0$。因此$f = 0$。若$n = 0$，则显然 $\mu = -\lambda$，从而$f = \lambda\pi$。这证明了 $\mathcal{BD}^{[1]}(\mathcal{W}) = \mathbb{C}\pi$。

若$\delta = \frac{1}{2}$，则对任意$i, j \in \mathbb{Z}$，由定理2.5(2)可得

$$f(L_i, \cdot) = a_i\varphi_{n+i}, \quad f(\cdot, L_j) = b_j\varphi_{n+j},$$

其中$a_i, b_j \in \mathbb{C}$。因此$a_iL_{n+i+j} = f(L_i, L_j) = b_jL_{n+i+j}$，这进一步意味着$a_i = b_j$对所有$i$、$j \in \mathbb{Z}$均成立。因此$f$是 θ_n 的倍数。这证明了情形 $\delta = \frac{1}{2}$。□

4.2. **δ-Virasoro代数的双导子**。在本小节中，我们确定 Virasoro代数 $\mathcal{V}$ 的所有 δ-双导子。容易验证，由下式定义的双线性映射 $\widetilde{\pi}: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$

$$\widetilde{\pi}(L_i, L_j) = [L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j} + \frac{1}{12}(i^3 - i)C_0\delta_{i+j,0} \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{Z},$$

是一个次数为 0 的（1-）双导子。

定理 4.2. *Virasoro*代数 $\mathcal{V}$ 的所有 δ-双导子空间是

$$\mathfrak{BD}^{[\delta]}(\mathcal{V}) = \begin{cases} \mathbb{C}\widetilde{\pi} & \text{if } \delta = 1; \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

证明. 设 f 是 $\mathcal{V}$ 的一个 δ-双导子，且 f 是由命题 3.4 定义的商代数 $\mathcal{V}/\mathbb{C}C_0$的 δ-双导子。由于 $\mathcal{V}$ 是完美的，根据命题 3.1(3)，我们有 $f(C0, \mathcal{V}) = f(\mathcal{V}, C_0) = 0$。注意到 $\mathcal{V}/\mathbb{C}C_0 \cong \mathcal{W}$。

若 $\delta \neq \frac{1}{2}$，1，则$f = 0$根据定理 4.1，即f是一个中心 δ-双导子 $\mathcal{V}$。因此$f = 0$根据命题 3.2。

若 $\delta = 1$，则$f = \lambda\pi$由某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 根据定理4.1。因此$f_1 = f - \lambda\widetilde{\pi}$ 是 $\mathcal{V}$的中心双导子。于是$f_1 = 0$ 由命题3.2，从而$f = \lambda\widetilde{\pi}$。

对于 $\delta = \frac{1}{2}$ 的情形，我们还可以进一步假设f的次数为$n \in \mathbb{Z}$ 由命题3.3。因此$f = a_n\theta_n$ 对于某个$a_n \in \mathbb{C}$ 根据定理4.1。因此对于$i, j \in \mathbb{Z}$我们可以写作

$$f(L_i, L_j) = a_n L_{n+i+j} + C_{i,j}C_0 \quad \text{for some } C_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

对于任意$i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，对$x = L_i$、$y = L_{-i}$、$z = L_{-n}$应用（2.1），可得

$$a_n(i^2 - 1) - 24C_{0,-n} = 0,$$

这意味着 $a_n = 0$。因此，f是一个中心$\frac{1}{2}$-双导子 $\mathcal{V}$。由命题$f = 0$ 3.2 . □

注 4.3。 *(1)* 众所周知，完美李代数 $\mathcal{L}$ 的非平凡导子可以唯一延拓为其泛中心扩张的非平凡导子 $\mathcal{L}$ （见 [3]）。对于$\frac{1}{2}$-双导子，这样的延拓不一定存在。由定理*4.1* 和定理*4.2* 可知，$\frac{1}{2}$-双导子 θ_n 在 $\mathcal{W}$ 上不存在延拓到 *Virsaoro* 代数的非平凡延拓。

(2) 也可以按照定理*4.2* 的证明中证明定理*4.1*时所采用的相同方法，利用δ-导子 $\mathcal{V}$来证明，这些内容已在 [12]中给出。

5. W-代数的 δ-双导子

本节确定任意 δ、a、$b \in \mathbb{C}$下W-代数$W(a,b)$与$W(a, b)$的全部 δ-双导子。$W(a, b)$的全部 δ-导子已在 [12]中给出。

命题 5.1. *(1)* $W(a,b)$ 的*(1-)*导子空间为

$$\mathfrak{Der}(W(a,b)) = \begin{cases} \mathrm{Inn}(W(a,b)) \oplus \mathbb{C}D_1 \oplus \mathbb{C}D_2^0 \oplus \mathbb{C}D_3 & \text{if } (a,b) = (0,0), \\ \mathrm{Inn}(W(a,b)) \oplus \mathbb{C}D_1 \oplus \mathbb{C}D_2^k & \text{if } (a,b) = (0,k), k = 1,2, \\ \mathrm{Inn}(W(a,b)) \oplus \mathbb{C}D_1 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中导子$D_1, D_2^k, k = 0,1,2$与D_3 由下式定义

$$\begin{aligned} &D_1(L_i) = 0, \quad D_1(I_i) = I_i; \\ &D_2^k(L_i) = i^{k+1}I_i, \quad D_2^k(I_i) = 0; \\ &D_3(L_i) = I_i, \quad D_3(I_i) = 0. \end{aligned}$$

(2) $W(a,b)$ 的$\frac{1}{2}$-导子空间为

$$\mathfrak{Der}_{\frac{1}{2}}(W(a,b)) = \begin{cases} \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\varphi_j, \psi_j \mid j \in \mathbb{Z}\} & \text{if } b = -1, \\ \mathbb{C}\varphi_0 & \text{if } b \neq -1, \end{cases}$$

其中$\frac{1}{2}$-导子φ_j与 ψ_j由下式定义

$$\varphi_j(L_i) = L_{i+j}, \ \varphi_j(I_i) = I_{i+j}; \qquad \psi_j(L_i) = I_{i+j}, \ \psi_j(I_i) = 0.$$

(3) 对于 $\delta \neq \frac{1}{2}, 1$， $W(a,b)$ 的 δ-导子空间为 *0*。

5.1. **δ-双导子：** $W(a,b)$。本小节确定 $\mathrm{BD}^{[\delta]}(W(a,b))$，即 W-代数 $W(a,b)$的所有δ-双导子的空间。

定理 5.2。*(1)* 如果 $\delta \neq \frac{1}{2}$，1，那么 $\mathfrak{BD}^{[\delta]}($ $W(a,\ b))=0$。*(2)* 对于 $\delta=1$，我们有

$$\mathfrak{BD}^{[1]}(W(a,b))=\begin{cases}\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\pi,\Psi_n^{(a,0)}\mid n\in\mathbb{Z}\right\} & \text{if } b=0;\\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\pi,\Psi_n^{(a,1)}\mid n\in\mathbb{Z}\right\} & \text{if } b=1;\\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\pi,\Theta^{(0,-1)}\right\} & \text{if } a=0,b=-1;\\ \mathbb{C}\pi & \text{otherwise},\end{cases}$$

其中 $\pi(x,\ y)=[x,\ y],x,\ y\in W(a,\ b)$，双导子 $\Psi_n^{(a,0)}$，$\Psi_n^{(a,1)}$，$\Theta^{(0,-1)}$ 定义为

$$\Psi_n^{(a,0)}(L_i,L_j)=I_{i+j+n},\quad \Psi_n^{(a,0)}(L_i,I_j)=\Psi_n^{(a,0)}(I_i,L_j)=\Psi_n^{(a,0)}(I_i,I_j)=0;$$
$$\Psi_n^{(a,1)}(L_i,L_j)=(a+i+j+n)I_{i+j+n},\quad \Psi_n^{(a,1)}(L_i,I_j)=\Psi_n^{(a,1)}(I_i,L_j)=\Psi_n^{(a,1)}(I_i,I_j)=0;$$
$$\Theta^{(0,-1)}(L_i,L_j)=(i-j)I_{i+j},\quad \Theta^{(0,-1)}(L_i,I_j)=\Theta^{(0,-1)}(I_i,L_j)=\Theta^{(0,-1)}(I_i,I_j)=0.$$

(3) 对于 $\delta=\frac{1}{2}$，我们有

$$\mathfrak{BD}^{[\frac{1}{2}]}(W(a,b))=\begin{cases}\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\Phi_n,\Psi_n\mid n\in\mathbb{Z}\} & \text{if } b=-1;\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}$$

其中 Φ_n，Ψ_n 是由下式定义的双线性映射

$$\Phi_n(L_i,L_j)=L_{n+i+j},\quad \Phi_n(L_i,I_j)=\Phi_n(I_i,L_j)=I_{n+i+j},\quad \Phi_n(I_i,I_j)=0;$$
$$\Psi_n(L_i,L_j)=I_{n+i+j},\quad \Psi_n(L_i,I_j)=\Psi_n(I_i,L_j)=\Psi_n(I_i,I_j)=0$$

证明。令 f 为 δ-双导子 $W(a,\ b)$。由于对于任意 $x\in W(a,\ b)$，$f(x,\ \cdot)$ 是 δ-导子 $W(a,b)$，结论 (1) 由命题 5.1(3) 得出。结论 (2) 是 [19]中的定理 3.2。

(3) 若 $b\neq -1$，则由命题 5.1(2)，对任意 $x,y\in W(a,b)$，有 $f(x,\cdot)=\lambda\varphi_0$ 且 $f(\cdot,y)=\mu\varphi_0$，其中 λ、$\mu\in\mathbb{C}$。因此 $f(x,y)=\lambda y=\mu x$，这迫使 $\lambda=\mu=0$ 且 $f=0$。

现在令 $b=-1$，并可假设 f 具有某个固定次数 $n\in\mathbb{Z}$ 由命题 3.3。然后由命题 5.1(2) 可将其写为：对 $i\in\mathbb{Z}$有

$$f(L_i,\cdot)=a_{i,n}\varphi_{n+i}+b_{i,n}\psi_{n+i},\quad f(\cdot,L_i)=a'_{i,n}\varphi_{n+i}+b'_{i,n}\psi_{n+i},$$
$$f(I_i,\cdot)=c_{i,n}\varphi_{n+i}+d_{i,n}\psi_{n+i},\quad f(\cdot,I_i)=c'_{i,n}\varphi_{n+i}+d'_{i,n}\psi_{n+i},$$

其中 $a_{i,n},b_{i,n},c_{i,n},d_{i,n},a'_{i,n},b'_{i,n},c'_{i,n},d'_{i,n}\in\mathbb{C}$。于是有

$$f(L_i,L_j)=a_{i,n}L_{n+i+j}+b_{i,n}I_{n+i+j}=a'_{j,n}L_{n+i+j}+b'_{j,n}I_{n+i+j},$$

这意味着 由此可知 $a'_{j,n}=a_{i,n},b'_{j,n}=b_{i,n}$ 对任意 i、$j\in\mathbb{Z}$。令 $a_n=a_{i,n},b_n=b_{i,n}$，于是有

$$f(L_i,L_j)=a_nL_{n+i+j}+b_nI_{n+i+j}. \tag{5.1}$$

以两种方式写出$f(L_i,I_j)$,

$$f(L_i,I_j)=a_nI_{n+i+j}=c'_{j,n}L_{n+i+j}+d'_{j,n}I_{n+i+j}, \tag{5.2}$$

由此得到$c'_{j,n} = 0$、$d'_{j,n} = a_n$，对任意$j \in \mathbb{Z}$均成立。类似地，以两种方式写出$f(I_i, L_j)$，可得$c_{j,n} = 0$、$d_{j,n} = a_n$，对任意$j \in \mathbb{Z}$均成立。因此

$$f(I_i, L_j) = a_n I_{n+i+j}. \tag{5.3}$$

于是$f(\cdot, I_i) = a_n \psi_{n+i}$且$f(I_j, I_i) = 0$。结合 (5.1)、(5.2) 和 (5.3)，可知$f = a_n \Phi_n + b_n \Psi_n$。证明完毕。□

~5.2. **δ-$W(a,b)$的双导子。** 本小节中，我们确定代数 $W(a,b)$ 的所有 δ-双导子。代数 $W(0,1)$ 有三个线性无关的中心双导子 $\delta, \mathcal{A}, \mathcal{B}$，对任意 $\delta \in \mathbb{C}$ 均成立，它们定义如下：

$$\mathcal{A}(I_0, I_0) = C_0, \quad \mathcal{B}(I_0, I_0) = C_1^1, \quad \mathcal{C}(I_0, I_0) = C_2^1,$$

其余所有取值均为零。

定理5.3。 *(1)* 若 $\delta \neq \frac{1}{2}$ 或 *1*，则

$$\mathfrak{BD}^{[\delta]}\left(\widetilde{W}(a,b)\right) = \begin{cases} \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\} & \text{if } (a,b) = (0,1); \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) 若 $\delta = 1$，则

$$\mathfrak{BD}^{[1]}\left(\widetilde{W}(a,b)\right) = \begin{cases} \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\widetilde{\pi}, \widetilde{\Theta}^{(0,-1)}\right\} & \text{if } a = 0, b = -1; \\ \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\widetilde{\pi}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\} & \text{if } a = 0, b = 1; \\ \mathbb{C}\widetilde{\pi} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $\widetilde{\pi}(x,y) = [x,y], x,y \in \widetilde{W}(a,b)$ 且 $\widetilde{\Theta}^{(0,-1)}$ 是定义在 $\widetilde{W}(0,-1)$ 上的双线性映射，其唯一非零取值为

$$\widetilde{\Theta}^{(0,-1)}(L_i, L_j) = (i-j) I_{i+j} + \frac{i^3 - i}{12} C_1^{-1} \delta_{i+j,0} \delta_{a,0}.$$

(3) 若 $\delta = \frac{1}{2}$，则

$$\mathfrak{BD}^{[\frac{1}{2}]}\left(\widetilde{W}(a,b)\right) = \begin{cases} \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\widetilde{\Psi}_n \mid n \in \mathbb{Z}\right\} & \text{if } 0 < a < 1, b = -1; \\ \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\} & \text{if } a = 0, b = 1; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

~ ~其中 Ψ_n 是 $W(a,-1)$ 上的双线性映射，且仅有非零值

$$\widetilde{\Psi}_n(L_i, L_j) = I_{n+i+j}.$$

~ – ~固定 W(a, b) 的一个 δ-双导子 f，并令 f 为商代数 W(a, b)/复数域~的 δ-双导子，其定义如命题 3.4。注意 W(a, b)/复数域 $\cong$ W(a, b)。此外，注意若 (a, b) $\neq$ (0, 1)，则 ~W(a, b) 是完美的，且 f (复数域, ~W(a, b)) = f (~W(a, b), 复数域) = 0，此由命题 3.1(3) 得到。我们将定理5.3的证明分成如下七个处理不同情形的引理。第一个引理处理情形$\delta \neq \frac{1}{2}$或 1。

引理 5.4. 设 $\delta \neq \frac{1}{2}$或 *1*。则 f 是 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$ 的线性组合，若 $(a,b) = (0,1)$；若 $(a,b) \neq (0,1)$，则 $f = 0$。

~证明. 由定理 5.2(1)，可知$f = \overline{0}$ 且f 是一个中心 δ-双导子，作用于 $W(a,b)$。若~$(a,b) \neq (0,1)$，则 $W(a,b)$ 是完美的，且$f = 0$由命题 3.2得出。

假设（a，b）=（0，1）。将$x = L_i$，$y = L_j$代入（2.1），可得

$$12(i-j)f(L_{i+j},z) + (i^3-i)f(C_0,z)\delta_{i+j,0} = 0 \quad \text{for any } i,j \in \mathbb{Z},\ z \in \widetilde{W}(a,b),$$

~由此可得，对任意 k ∈ ℤ以及 z ∈W(a, b)，有 f（复数域$_0$, z）=f（L$_k$，z）=0。类似地，利用（2.2），我们有 f（z，复数域$_0$）=f（z，L$_k$）=0。

令$x = L_i$，$y = I_j$于（2.1）中，我们得到

$$-(i+j)f(I_{i+j},z) + \delta_{i+j,0}if(C_1^1,z) + \delta_{i+j,0}f(C_2^1,z) = 0 \quad \text{for any } i,j \in \mathbb{Z}, z \in \widetilde{W}(a,b),$$

由此可得，对 i ≠ 0，有 f（I$_i$，z）=f（复数域$_1^1$, z）=f（复数域$_2^1$, z）=0。类似地，利用（2.2），对 i ≠ 0，我们得到 f（z，I$_i$）=f（z，复数域$_1^1$）=f（z，复数域$_2^1$）=0。综上所述，我们已经证明 f（x，y）∈复数域 =张成空间$_{\mathbb{C}}\{$复数域$_0$, 复数域$_1^1$, 复数域$_2^1\}$，并且除非 x =y =I$_0$，否则 f（x，y）=0。这就证明了该引理。□

~下面四个引理讨论 $W(a,b)$ 的双导子（即 $\delta = 1$ 的情形）。

引理 *5.5*。*</style}*若 $\delta = 1$ 且 $b = 0$，则 f 是 $\widetilde{\pi}$ 的倍数。

证明。 由定理5.2（2），可知

$$\overline{f} = A\pi + \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n\Psi_n^{(a,0)},$$

其中 A、$B_n \in \mathbb{C}$。因此，对于 i、$j \in \mathbb{Z}$，我们可以写成（有限和）

$$f(L_i,L_j) = A(i-j)L_{i+j} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_nI_{n+i+j} + A_{i,j}, \qquad f(I_i,I_j) = C_{i,j},$$

$$f(L_i,I_j) = -A(a+j)I_{i+j} + B_{i,j}, \qquad f(I_i,L_j) = A(a+i)I_{i+j} + B'_{i,j},$$

其中 $A_{i,j}$，$B_{i,j}$，$B'_{i,j}$，复数域$_{i,j} \in$ C。

令$x = L_i$，$y = L_j$，$z = L_k$属于（2.1），可得

$$\begin{aligned} 12(i-j)A_{i+j,k} =& A(j-k)(i^3-i)C_0\delta_{i+j+k,0} - A(i-k)(j^3-j)C_0\delta_{i+j+k,0} \\ &+ 12B_{-i-j-k}(i^2+i-j^2-j)C_1^0\delta_{a,0}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

令$j = 0$ 和$i \neq 0$在（5.4）中，则有

$$A_{i,k} = \frac{A}{12}(i^3-i)C_0\delta_{i+j+k,0} + B_{-i-k}(i+1)C_1^0\delta_{a,0} \quad \text{for } i,k \in \mathbb{Z}, i \neq 0. \tag{5.5}$$

令$j = -i \neq 0$ 在（5.4）中，则有

$$A_{0,k} = B_{-k}C_1^0\delta_{a,0} \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}.$$

这表示（5.5）也指$i = 0$，即有

$$A_{i,j} = \frac{A}{12}(i^3-i)C_0\delta_{i+j,0} + B_{-i-j}(i+1)C_1^0\delta_{a,0} \quad \text{for any } i,j \in \mathbb{Z}.$$

特别地，若 a ≠ 0，则 A$_i$，j =A 12(i^3 −i)C$_0\delta_{i+}$j,0。若 a = 0，则将 x =L$_i$、y =L j、z =L$_k$代入 (2.2)，同理可得

$$A_{i,j} = \frac{A}{12}(i^3-i)C_0\delta_{i+j,0} + B_{-i-j}(j+1)C_1^0 \quad \text{for any } i,j \in \mathbb{Z}.$$

比较上述两个等式可知，对于任意$B_n = 0\ n \in \mathbb{Z}$，都有$A_{i,\ j} = {}_{A\ 12}(i^3 - i)C_0\delta_{i+j,\ 0}$。因此

$$f(L_i, L_j) = A[L_i, L_j] \quad \text{for any } i, j \in \mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

设$x = L_i$、$y = L_j$、$z = I_k$属于（2.1），得到

$$(i - j)B_{i+j,k} = -A(a + k)(i^2 + i - j^2 - j)C_1^0\delta_{i+j+k,0}\delta_{a,0}. \tag{5.7}$$

设$j = 0$且$i \neq 0$属于（5.7），则有

$$B_{i,k} = A(i^2 + i)C_1^0\delta_{i+k,0}\delta_{a,0}.$$

设$j = -i \neq 0$属于（5.7），得到$B_{0,\ k} = 0$。因此

$$f(L_i, I_j) = A[L_i, I_j] \quad \text{for any } i, j \in \mathbb{Z}. \tag{5.8}$$

设$x = I_i$、$y = L_j$、$z = L_k$属于（2.2），得到

$$(j - k)B'_{i,j+k} = iAC_1^0(j^2 + j - i^2 + i)\delta_{k+i+j,0}\delta_{a,0},$$

这意味着

$$B'_{i,j} = -A(i^2 - i)C_1^0\delta_{i+j,0} \quad \text{for any } i, j \in \mathbb{Z}.$$

因此，

$$f(I_i, L_j) = A[I_i, L_j] \quad \text{for any } i, j \in \mathbb{Z}. \tag{5.9}$$

令$x = L_i$，$y = I_j$，$z = I_k$满足（2.1），可得

$$(a + j)C_{i+j,k} = A(a + k)\left(-jC_2^0\delta_{i+j+k,0}\delta_{a,0} - (2j + 1)C_2^{\frac{1}{2},0}\delta_{i+j+k+1,0}\delta_{a,\frac{1}{2}}\right),$$

由此可得

$$f(I_i, I_j) = C_{i,j} = iAC_2^0\delta_{i+j,0}\delta_{a,0} + A(2i + 1)C_2^{\frac{1}{2},0}\delta_{i+j+1,0}\delta_{a,\frac{1}{2}} = A[I_i, I_j] \quad \text{for any } i, j \in \mathbb{Z}. \tag{5.10}$$

由（5.6）、（5.8）、（5.9）和（5.10），可知$f = A\widetilde{\pi}$。 □

引理 5.6。若$\delta = 1$，$a = 0$，$b = -1$，则f是$\widetilde{\pi}$和$\Theta^{(0,-1)}$的线性组合。

证明。在此情形下，根据定理 5.2（2）可写为

$$\overline{f} = A\pi + B\Theta^{(0,-1)},$$

其中A、$B \in \mathbb{C}$。对于任意i、$j \in \mathbb{Z}$，记为

$$f(L_i, L_j) = A(i - j)L_{i+j} + B(i - j)I_{i+j} + A_{i,j}, \qquad f(I_i, I_j) = C_{i,j},$$
$$f(L_i, I_j) = A(i - j)I_{i+j} + B_{i,j}, \qquad f(I_i, L_j) = A(i - j)I_{i+j} + B'_{i,j},$$

其中$A_{i,j}, B_{i,j}, B'_{i,j}$，复数域$_{i,j} \in$复数域。

令$x = L_i, y = L_j, z = L_k$属于（2.2），可得

$$\begin{aligned} 12(j - k)A_{i,j+k} =& A(i - k)(j^3 - j)C_0\delta_{i+j+k,0} - A(i - j)(k^3 - k)C_0\delta_{i+j+k,0} \\ &+ B(i - k)(j^3 - j)C_1^{-1}\delta_{i+j+k,0}\delta_{a,0} - B(i - j)(k^3 - k)C_1^{-1}\delta_{i+j+k,0}\delta_{a,0}. \end{aligned}$$

用与求解（5.4）相同的方法求解该方程，我们得到

$$A_{i,j} = \frac{i^3 - i}{12}\left(AC_0 + BC_1^{-1}\delta_{a,0}\right)\delta_{i+j,0}.$$

So

$$f(L_i, L_j) = A\widetilde{\pi}(L_i, L_j) + B\widetilde{\Theta}^{(0,-1)}(L_i, L_j) \quad \text{for any } i, j \in \mathbb{Z}. \tag{5.11}$$

将$x = L_i$、$y = I_j$、$z = I_k$代入（2.1），我们得到

$$(i - j)C_{i+j,k} = 0,$$

由此我们得到 复数域$_{i,j} = 0$ 对任意的 $i, j \in \mathbb{Z}$，以及

$$f(I_i, I_j) = 0. \tag{5.12}$$

设 $x = L_i, y = L_j, z = I_k$ 在式（2.2）中，得到

$$12(k - j)B_{i,j+k} = A(i - j)(k^3 - k)C_1^{-1}\delta_{i+j+k,0} - A(i - k)(j^3 - j)C_1^{-1}\delta_{i+j+k,0}.$$

解此方程，得到

$$B_{i,j} = \frac{1}{12}A(i^3 - i)C_1^{-1}\delta_{i+j,0},$$

因此

$$f(L_i, I_j) = A[L_i, I_j]. \tag{5.13}$$

同理，将 $x = I_i, y = L_j, z = L_k$ 代入式（2.2）中，得到

$$f(I_i, L_j) = A[I_i, L_j]. \tag{5.14}$$

~由式（5.11）、（5.12）、（5.25）和（5.14）可知，$f = A\widetilde{\pi} + B\,\Theta^{(0,-1)}$。 □

引理 5.7. 设 $\delta = 1, b = 1$。那么，当 $a = 0$ 时，f 是 $\widetilde{\pi}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 的线性组合；当 $a \neq 0$ 时，f 是 $\widetilde{\pi}$ 的倍数。

~证明。 首先指出，尽管 $W(0, 1)$ 不是完美的，因为

$$I_0 \notin \widetilde{W}(0,1)' = \left[\widetilde{W}(0,1), \widetilde{W}(0,1)\right] = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{L_i, I_j, C_0, C_1^1, C_2^1 \mid i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\},$$

根据命题 3.1(2)，我们仍有

$$f\left(\mathfrak{C}, \widetilde{W}(0,1)'\right) = f\left(\widetilde{W}(0,1)', \mathfrak{C}\right) = 0.$$

根据定理 5.2(2)，我们可以写成（有限和）

$$\overline{f} = A\pi + \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n \Psi_n^{(a,1)},$$

其中 A、$B_n \in \mathbb{C}$。因此，对于任意 i、$j \in \mathbb{Z}$，我们有

$$f(L_i, L_j) = A(i - j)L_{i+j} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n(a + n + i + j)I_{n+i+j} + A_{i,j}, \qquad f(I_i, I_j) = C_{i,j},$$

$$f(L_i, I_j) = -A(a + i + j)I_{i+j} + B_{i,j}, \qquad f(I_i, L_j) = A(a + i + j)I_{i+j} + B'_{i,j},$$

其中 $A_{i,j}$、$B_{i,j}$、$B'_{i,j}$、复数域$_{i,j} \in \mathbb{C}$。

令$x = L_i$，$y = L_j$，$z = L_k$ 满足（2.1），可得

$$\begin{aligned}(i - j)A_{i+j,k} =& A(j - k)\frac{i^3 - i}{12}C_0\delta_{i+j+k,0} - A(i - k)\frac{j^3 - j}{12}C_0\delta_{i+j+k,0} \\ &+ B_{-i-j-k}\delta_{a,0}\delta_{b,1}\left((j^2 - i^2)C_1^1 + (j - i)C_2^1\right) \quad \text{for any } i, j, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

解这个方程可得

$$A_{i,j}=A\frac{i^3-i}{12}C_0\delta_{i+j,0}-B_{-i-j}\delta_{a,0}\delta_{b,1}\left(iC_1^1+C_2^1\right). \tag{5.15}$$

同样地，代入$x=L_i$、$y=Lj$、$z=L_k$到（2.2）中可得

$$\begin{aligned}(j-k)A_{i,j+k}=&A(i-k)\frac{j^3-j}{12}C_0\delta_{i+j+k,0}-A(i-j)\frac{k^3-k}{12}C_0\delta_{i+j+k,0}\\&+B_{-i-j-k}\delta_{a,0}\delta_{b,1}\left((k^2-j^2)C_1^1+(k-j)C_2^1\right)\quad\text{for any } i,j,k\in\mathbb{Z},\end{aligned}$$

这意味着

$$A_{i,j}=A\frac{i^3-i}{12}C_0\delta_{i+j,0}+B_{-i-j}\delta_{a,0}\delta_{b,1}\left(iC_1^1-C_2^1\right). \tag{5.16}$$

比较（5.15）和（5.16），可知

$$B_n=0\quad\text{for any } n\in\mathbb{Z}\text{ if }(a,b)=(0,1).$$

因此我们有

$$A_{i,j}=\frac{1}{12}A(i^3-i)C_0\delta_{i+j,0}\quad\text{and}\quad f(L_i,L_j)=A[L_i,L_j]. \tag{5.17}$$

将$x=L_i$、$y=Lj$、$z=I_k$代入（2.1）可得

$$(i-j)B_{i+j,k}+\delta_{i+j,0}\delta_{k,0}\frac{i^3-i}{12}f(C_0,I_0)=A\delta_{i+j+k,0}\delta_{a,0}\delta_{b,1}\left((i^2-j^2)C_1^1+(i-j)C_2^1\right)\text{ for any } i,j,k\in\mathbb{Z}.$$

Let $j=0$ and we have

$$B_{i,k}=A\delta_{i+k,0}\delta_{a,0}\delta_{b,1}\left(iC_1^1+C_2^1\right)\quad\text{for } i,k\in\mathbb{Z}\text{ and } i\neq 0.$$

取$j=-i\neq 0$可得

$$B_{0,k}+\delta_{k,0}\frac{i^2-1}{24}f(C_0,I_0)=A\delta_{k,0}\delta_{a,0}\delta_{b,1}C_2^1\quad\text{for } i,k\in\mathbb{Z}\text{ and } i\neq 0.$$

若$k\neq 0$，则$B_{0,k}=0$。若$k=0$，上述方程迫使f(复数域$_0$,I_0)$=0$，于是$B_{0,0}=A\delta_{a,0}\delta_{b,1}$复数域$_2^1$。综上，我们有

$$f(C_0,I_0)=0,\quad B_{i,j}=A\delta_{i+j,0}\delta_{a,0}\delta_{b,1}\left(iC_1^1+C_2^1\right)\quad\text{and}\quad f(L_i,I_j)=A[L_i,I_j]. \tag{5.18}$$

类似地，令$x=I_i,y=Lj,z=L_k$作用于（2.2），得到

$$f(I_0,C_0)=0,\quad B'_{i,j}=-A\delta_{i+j,0}\delta_{a,0}\delta_{b,1}\left(jC_1^1+C_2^1\right)\quad\text{and}\quad f(I_i,L_j)=A[I_i,L_j]. \tag{5.19}$$

令$x=L_i,y=Ij,z=I_k$作用于（2.1），得到

$$(a+i+j)C_{i+j,k}-\delta_{i+j,0}\delta_{a,0}\delta_{k,0}f\left(iC_1^1+C_2^1,I_0\right)=0\quad\text{for any } i,j,k\in\mathbb{Z}.$$

若a$\neq 0$，则对任意i,k$\in\mathbb{Z}$，有(a$+$i)复数域$_{i,k}=0$。若a$=0$，令j$=-$i$\neq 0$,k$=0$，得到i f$\left(\text{复数域}_1^1,\text{I}_0\right)+f\left(\text{复数域}_2^1,\text{I}_0\right)=0$，对任意i$\in\mathbb{Z}$均成立。因此f$\left(\text{复数域}_1^1,\text{I}_0\right)=f\left(\text{复数域}_2^1,\text{I}_0\right)=0$，于是对任意i,k$\in\mathbb{Z}$，有i复数域$_{i,k}=0$。综上，我们有

$$f\left(C_1^1,I_0\right)=f\left(C_2^1,I_0\right)=0,\text{ and }(a+i)C_{i,j}=0\text{ for any } i,j\in\mathbb{Z}.$$

同理，将$x=I_i$、$y=Lj$、$z=I_k$代入（2.2）可得

$$f\left(I_0,C_1^1\right)=f\left(I_0,C_2^1\right)=0,\text{ and }(a+j)C_{i,j}=0\text{ for any } i,j\in\mathbb{Z}.$$

比较上述两个方程，我们得出

$$\begin{aligned} &f\left(C_1^1, I_0\right) = f\left(C_2^1, I_0\right) = f\left(I_0, C_1^1\right) = f\left(I_0, C_2^1\right) = 0; \\ &f(I_i, I_j) = C_{i,j} = 0 \quad \text{unless } (a,b) = (0,1) \text{ and } (i,j) = (0,0). \end{aligned} \tag{5.20}$$

现在考虑 (a, b) =(0, 1) 的情形，将 x =I$_0$, y =L$_k$、z =I$_0$ 代入 (2.2)，可得对于任意 k ∈ ℤ，[C$_{0,0}$, L$_k$] = 0。这迫使 C0,0 ∈ C =张成空间$_{\mathbb{C}}\{C_0, C_1^1, C_2^1\}$。结合 (5.17)、(5.18)、(5.19) 和 (5.20)，我们证明了该引理。 □

引理 5.8。令 $\delta = 1$，并假设 $b \neq 0$，1 且当 $b = -1$ 时 $a \notin \mathbb{Z}$。则 f 是 $\widetilde{\pi}$ 的倍数。

~ ~证明。显然，$\widetilde{\pi}$是 W(a, b) 的双导子，且 W(a, b) 是完美的。根据定理 5.2(2)，有~f =Aπ，其中 A ∈ ℂ。因此，对于任意 x, y ∈W(a, b)，有 f (x, y) =A[x, y] + C。因此，~f $_1$ = f − A$\widetilde{\pi}$ 是 W(a, b) 的中心双导子，故根据命题 3.2，f$_1$ = 0。所以 f =A$\widetilde{\pi}$。 □

下面两个引理讨论 ~ $_{1\,2}$-双导子。 -

引理 5.9. 设 $\delta = \frac{1}{2}$ 且-$b = -1$。若 $a \neq 0$，则 f 是 $\widetilde{\Psi}_n$ 的线性组合；若 $a = 0$，则 $f = 0$。

证明。在此情形下，我们有 $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n\Phi_n + B_n\Psi_n$，其中某些 $A_n, B_n \in \mathbb{C}$。因此，对于任意 i、$j \in \mathbb{Z}$，我们可以写成

$$f(L_i, L_j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n L_{n+i+j} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n I_{n+i+j} + A_{i,j}, \qquad f(I_i, I_j) = C_{i,j},$$
$$f(L_i, I_j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n I_{n+i+j} + B_{i,j}, \qquad f(I_i, L_j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n I_{n+i+j} + B'_{i,j},$$

其中 $A_{i,j}$、$B_{i,j}$、$B'_{i,j}$、复数域$_{i,j} \in$ℂ。

将 $x = L_i, y = L_j, z = L_k$ 到 (2.1) 中，即得

$$24(i-j)A_{i+j,k} = \left(i^3 - i - j^3 + j\right)\left(A_{-i-j-k}\text{复数域}_0 + B_{-i-j-k}\text{复数域}_1^{-1}\delta_{a,0}\delta_{b,-1}\right) \quad \text{对于任意}i、j、k \in \mathbb{Z}。 \tag{5.21}$$

取$j = -i \neq 0$，得到

$$24A_{0,k} = \left(i^2 - 1\right)\left(A_{-k}C_0 + B_{-k}C_1^{-1}\delta_{a,0}\delta_{b,-1}\right) \quad \text{for any } i, k \in \mathbb{Z}, i \neq 0,$$

这意味着

$$A_kC_0 + B_kC_1^{-1}\delta_{a,0}\delta_{b,-1} = A_{0,k} = 0 \quad \text{for any } k \in \mathbb{Z}. \tag{5.22}$$

这将（5.21）变为（$i - j$）$A_{i+j,\ k} = 0$，这意味着

$$A_{i,k} = 0 \quad \text{for any } i, k \in \mathbb{Z}.$$

令 $x = L_i$、$y = L_j$、$z = I_k$ 代入（2.1），得到

$$24(i-j)B_{i+j,k} = A_{-i-j-k}C_1^{-1}\delta_{a,0}\delta_{b,-1}\left(i^3 - i - j^3 + j\right) \quad \text{for any } i, j, k \in \mathbb{Z}. \tag{5.23}$$

设$j = -i \neq 0$，得到

$$24B_{0,k} = A_{-k}C_1^{-1}\delta_{a,0}\delta_{b,-1}\left(i^2 - 1\right) \quad \text{for any } i, k \in \mathbb{Z}, i \neq 0,$$

这意味着

$$A_kC_1^{-1}\delta_{a,0}\delta_{b,-1} = B_{0,k} = 0 \quad \text{for any } k \in \mathbb{Z}. \tag{5.24}$$

因此我们有 $A_k = 0$由（5.24），当$a = 0$时；由（5.22），当$a \neq 0$时。在（$j = 0$）中取5.23，可以看出$B_{i,\ k} = 0$ 对任意i、$k \in \mathbb{Z}$均成立。因此我们有

$$f(L_i, I_j) = 0 \text{ and } f(I_i, L_j) = B'_{i,j} \quad \text{for any } i, j \in \mathbb{Z}. \tag{5.25}$$

然后将 $x = I_i$、$y = L_j$、$z = L_k$或 $z = I_k$代入（2.1），即可得到

$$B'_{i,j} = C_{i,j} = 0 \quad \text{for any } i, j \in \mathbb{Z}.$$

因此我们有

$$f(I_i, L_j) = f(I_i, I_j) = 0. \tag{5.26}$$

此外，我们有 $B_k = 0$ 若 $a = 0$ 由（5.22）得。因此

$$f(L_i, L_j) = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n I_{n+i+j} & \text{if } a \neq 0; \\ 0 & \text{if } a = 0. \end{cases}$$

结合（5.25）和（5.26），我们便证明了该引理。 □

引理 5.10. 设 $\delta = \frac{1}{2}$且 $b \neq -1$。则 f 是 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$ 的线性组合，若 $(a, b) = (0, 1)$，且若 $(a,b) \neq (0,1)$，则 $f = 0$。

证明。 由定理 5.2(3) 可知 f是一个中心 1_2-双导子，定义在 $\tilde{W}(a, b)$ 上。因此 $f = 0$ 由命题 3.2 若 $(a,b) \neq (0,1)$。

在本证明的其余部分，我们假设 $(a,b) = (0, 1)$。注意，导出子代数 $\tilde{W}(0, 1)'$ 属于 $\tilde{W}(0, 1)$，且它是完美的，而 $\tilde{W}(0, 1) = \mathbb{C}I_0 \oplus \tilde{W}(0, 1)'$。因此，将 f 限制在 $\tilde{W}(0, 1)'$上时，它是零映射。

令 $x = L_i$、$y = L_j$，$z = I_0$ 满足 (2.1)，则有

$$12(i - j)f(L_{i+j}, I_0) + \left(i^3 - i\right) f(C_0, I_0)\delta_{i+j,0} = 0.$$

取 $j = 0$、$i \neq 0$，可知对于所有 $i \neq 0$，$f(L_i, I_0) = 0$。取 $j = -i \neq 0$，可得 $f(L_0, I_0) = f(C_0, I_0) = 0$。类似地，令 $x = I_0, y = L_i$、$z = L_j$ 满足 (2.2)，可推得对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，$f(I_0, C_0) = f(I_0, L_i) = 0$。

设 $x = I_i$，$y = L_j$，$z = I_0$ 属于 (2.1)，则有

$$(i + j)f(I_{i+j}, I_0) - \delta_{i+j,0}\left(if(C_1^1, I_0) + f(C_2^1, I_0)\right) = 0,$$

由此可得，对于所有 $i \neq 0$，$f(C_1^1, I_0) = f(C_2^1, I_0) = f(I_i, I_0) = 0$。类似地，设 $x = I_0, y = L_i$，$z = I_j$ 满足 (2.2)，则对于所有 $i \neq 0$，可得 $f(I_0, C_1^1) = f(I_0, C_2^1) = f(I_0, I_i) = 0$。

总之，我们已经证明，对于任意 x、$y \in \tilde{W}(0, 1)$，除非 $x = y = I_0$，，否则$f(x, y) = 0$；并且$f(I_0, I_0) \in$ 复数域。这证明了该引理。 □

显然，定理 5.3 可由引理5.4、5.5、5.6、5.7、5.8、5.9 和 5.10推出。

注记5.11. 由定理5.2 和定理5.3 可以看出，李代数的 δ-双导子未必能扩张到其泛中心扩张。例如，$W(a, 0)$ 的双导子$\Psi_n^{(a,0)}$以及$W(a, 1)$的 $\Psi_n^{(a,1)}$，$W(a, -1)$ 的1_2-双导子 Φ_n 以及$W(0, -1)$的 Ψ_n。

6. 应用

在本节中，我们确定第4节和第5节所研究的李代数上的所有交换线性映射、交换后李代数结构以及转置 δ-Poisson 代数结构，作为 δ-双导子的应用。在本节中，我们用 $\mathcal{L}$ 表示Witt~代数 $\mathcal{W}$、Virasoro代数 $\mathcal{V}$、W-代数$W(a, b)$或$W(a,b)$之一。

6.1. 交　换线性映射。 李代数 g 上的线性映射 φ称为**交换映射**i　　f

$$[\varphi(x), x] = 0 \quad \text{for any } x \in \mathfrak{g}.$$

该条件等价于

$$[\varphi(x), y] = [x, \varphi(y)] \quad \text{for any } x, y \in \mathfrak{g}.$$

显然，恒等映射 id 是 g 的一个交换线性映射。

定理6.1。 $\mathcal{L}$ 的所有交换线性映射构成的空间是

$$\mathfrak{Im}(\mathcal{L}) = \begin{cases} \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\mathrm{id}, \Theta_1^{(0,-1)}\right\} & \text{if } \mathcal{L} = W(0,-1); \\ \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\mathrm{id}, \widetilde{\Theta}_1^{(0,-1)}\right\} & \text{if } \mathcal{L} = \widetilde{W}(0,-1); \\ \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\mathrm{id}\} & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中，线性映射 $\Theta_1^{(0,-1)}$ 和 $\widetilde{\Theta}_1^{(0,-1)}$ 定义为

$$\Theta_1^{(0,-1)}(L_i) = I_i, \quad \Theta_1^{(0,-1)}(I_i) = 0;$$
$$\widetilde{\Theta}_1^{(0,-1)}(L_i) = I_i, \quad \widetilde{\Theta}_1^{(0,-1)}(I_i) = 0, \quad \widetilde{\Theta}_1^{(0,-1)}(C_0) = \widetilde{\Theta}_1^{(0,-1)}(C_1^{-1}) = 0.$$

证明。设 φ 是 $\mathcal{L}$的一个交换线性映射，定义在 $\mathcal{L}$上的双线性映射f_φ 为

$$f_\varphi(x, y) = [\varphi(x), y] = [x, \varphi(y)] \quad \text{for any } x, y \in \mathcal{L}, \tag{6.1}$$

是 的一个斜对称双导子。因此，$\{f_\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{Im}(\mathcal{L})\}$ 是空间 $\mathcal{SSBD}(\mathcal{L})$~中 的斜对称双导子所构成的子空间；根据定理 4.1、定理 4.2、定理 5.2 和定理 5.3，当 $\mathcal{L} = W(0,-1)$ 或 $W(0,-1)$ 时，该子空间的维数为 2；其他情况下维数为 1。

容易验证，$\Theta_1^{(0,-1)}$和 $\widetilde{\Theta}_1^{(0,-1)}$分别是 $W(0,-1)$ 和 ~$W(0,-1)$ 的交换线性映射。因此，分别利用 id6.1）中 id、$\Theta_1^{(0,-1)}$ 和 $\widetilde{\Theta}_1^{(0,-1)}$ 的所有线性组合构造出的斜对称双导子 $\mathcal{SSBD}($ $\mathcal{L})$穷尽了各自情形下的空间。这就证明了该定理。

□

6.2. 交换后李代数。在本小节中，我们确定代数 $\mathcal{L}$ 上所有的交换后李代数结构。首先回顾交换后李代数的定义。

定义 6.2。设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。$\mathfrak{g}$ 上的一个交换后李代数结构 是一个双线性乘积 $\circ$，满足

$$x \circ y = y \circ x, \quad [x, y] \circ z = x \circ (y \circ z) - y \circ (x \circ z), \quad x \circ [y, z] = [x \circ y, z] + [y, x \circ z]$$

对任意 x、y、z $\in \mathfrak{g}$。若对所有 x、y $\in \mathfrak{g}$，均有 $x \circ y = 0$，则称$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 上的交换后李代数结构 $\circ$是平凡的。我们也称$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \circ)$ 为交换后李代数。

容易验证，g 上的双线性映射$f(x, y) = x \circ y$是一个对称双导子。这一观察使我们能够对代数 $\mathcal{L}$上的所有交换后李代数结构进行分类。

定理6.3。 除非$\sim \mathcal{L} = W(0,1)$，否则代数 $\mathcal{L}$上的交换后李代数结构都是平凡的。代数 $W(0,1)$ 上的非平凡交换后李代数结构具有以下形式：$\Lambda_{a,b,c}, a,b,c \in \mathbb{C}$，其中定义为

$$\Lambda_{a,b,c}(I_0 + x, I_0 + y) = aC_0 + bC_1^1 + cC_2^1 \quad for\ any\ x, y \in \widetilde{W}(0,1)'.$$

证明。 记 $\mathcal{SBD}(\mathcal{L})$为 $\mathcal{L}$上的对称双导子空间。由定理 4.1、定理4.2、定理5.2和定理 5.3 可得

$$\mathcal{SBD}(\mathcal{L}) = \begin{cases} \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\Psi_n^{(a,0)} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} & \text{if } \mathcal{L} = W(a,0); \\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\Psi_n^{(a,1)} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} & \text{if } \mathcal{L} = W(a,1); \\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\} & \text{if } \mathcal{L} = \widetilde{W}(0,1); \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令f 为 $\mathcal{L}$上的对称双导子，定义为

$$f(x, y) = x \circ y \quad \text{for any } x, y \in \mathcal{L}.$$

$\sim$因此，若 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L} \neq \mathrm{W(a, 0)}$、$\mathrm{W(a, 1)}$或$\mathrm{W(0, 1)}$，则其上的交换后李代数结构都是平凡的。若 $\mathcal{L} = \mathrm{W(a, 0)}$，则可将 $\mathrm{f} = \sum^{p}_{n=q} \mu_n \Psi_n^{(a,0)}$写成某个 $\mu_n \in \mathbb{C}$、p、$\mathrm{q} \in \mathbb{Z}$的形式，其中 $\mathrm{p} \geq \mathrm{q}$。因此，由定理 5.2(2)可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=q}^{p} \mu_n I_n &= f(L_1, L_{-1}) = f([L_1, L_0], L_{-1}) = [L_1, L_0] \circ L_{-1} = L_1 \circ (L_0 \circ L_{-1}) - L_0 \circ (L_1 \circ L_{-1}) \\ &= f\left(L_1, f(L_0, L_{-1})\right) - f\left(L_0, f(L_1, L_{-1})\right) = 0, \end{aligned}$$

这意味着所有 $\mu_n = 0$。因此$f = 0$。于是，$W(a,0)$ 上的任何交换后李代数结构都是平凡的。

若 $\mathcal{L} = W(a,1)$，则可写成$f = \sum^{p}_{n=q} \mu_n \Psi_n^{(a,1)}$，其中$\mu_n \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{Z}$满足$p \geq q$。令$k \in \mathbb{Z}$满足$k > -a - p - 1$，则由定理5.2(2)

$$\sum_{n=q}^{p} \mu_n (a + n + k + 1) I_{n+k} = f(L_1, L_k) = [L_1, L_0] \circ L_k = f\left(L_1, f(L_0, L_k)\right) - f\left(L_0, f(L_1, L_k)\right) = 0,$$

这意味着所有 $\mu_n = 0$。因此$f = 0$。于是，$W(a,1)$ 上的任何交换后李代数结构都是平凡的。

$\sim$ $\sim$若 $\mathcal{L} = W(0,1)$，则对任意 x、$y \in W(0,1)$，都有 $f(x, y) \in$复数域，并且容易验证，对于任意 a、b、$c \in \mathbb{C}$, $\Lambda_{a,b,c}$，实际上定义了 $W(0,1)$ 上的一个交换后李代数结构。这就证明了定理。□

6.3. **转置 δ-Poisson 代数结构**。在本小节中，我们确定代数 $\mathcal{L}$ 上所有转置δ-Poisson 代数结构。在本小节中，我们始终假设 δ 是一个非零复数。我们先回顾转置 δ-Poisson 代数的定义。

定义 6.4。一个转置 δ-***Poisson*** 代数是一个向量空间 $\mathcal{P}$，配备两个双线性运算 $\circ$ 和 $[\cdot,\cdot]$，使得$(\mathcal{P},\circ)$ 是一个交换结合代数，$(\mathcal{P},[\cdot,\cdot])$ 是一个李代数，并且这两个运算满足以下相容条件

$$\delta z\circ[x,y]=[z\circ x,y]+[x,z\circ y]\quad \textit{for any } x,y,z\in\mathcal{P}.$$

李代数 $\mathfrak{g}$ 上的一个转置 δ-***Poisson*** 代数结构是定义在$\mathfrak{g}$ 上的双线性运算，使$\mathfrak{g}$成为一个转置 δ-*Poisson* 代数。$\mathfrak{g}$ 上的转置 δ-*Poisson* 代数结构 $\circ$若满足对任意 $x,y\in\mathfrak{g}$，$x\circ y=0$，则称其为平凡的。

设 $(\mathfrak{g},\circ,[\cdot,\cdot])$ 是一个转置 δ-Poisson 代数。容易验证，定义在 $\mathfrak{g}$ 上的双线性映射$f(x,y)=x\circ y$是一个对称的$\frac{1}{\delta}$-双导子。这一事实使我们能够对代数 $\mathcal{L}$上的所有转置δ-Poisson 代数结构进行分类。

定理 6.5。*(1)* $\mathcal{W}$ 上的任意转置 2-*Poisson* 代数结构都具有如下形式

$$L_i\circ L_j=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n L_{n+i+j}$$

对某个 $\lambda_n\in\mathbb{C}$ 成立。当 $\delta\neq 2,0$ 时，$\mathcal{W}$ 上的任意转置 δ-*Poisson* 代数结构都是平凡的。
(2) $W(a,0)$ 上的任意转置 1-*Poisson* 代数结构都具有如下形式

$$L_i\circ L_j=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n I_{n+i+j},\quad L_i\circ I_j=I_i\circ I_j=0$$

对某个 $\lambda_n\in\mathbb{C}$ 成立。对于 $\delta\neq 1,0$，$W(a,0)$ 上的任意转置 δ-*Poisson* 代数结构都是平凡的。
(3) $W(a,1)$ 上的任意转置 1-*Poisson* 代数结构具有如下形式

$$L_i\circ L_j=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(a+n+i+j)\lambda_n I_{n+i+j},\quad L_i\circ I_j=I_i\circ I_j=0$$

对某个 $\lambda_n\in\mathbb{C}$ 成立。对于 $\delta\neq 1,0$，$W(a,1)$ 上的任意转置 δ-*Poisson* 代数结构都是平凡的。
(4) $W(a,-1)$ 上的任意转置 2-*Poisson* 代数结构具有如下形式

$$L_i\circ L_j=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n L_{n+i+j}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu_n I_{n+i+j},\quad L_i\circ I_j=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n I_{n+i+j},\quad I_i\circ I_j=0$$

对某个 $\lambda_n,\mu_n\in\mathbb{C}$ 成立。对于 $\delta\neq 2,0$，$W(a,-1)$ 上的任意转置 δ-*Poisson* 代数结构都是平凡的。

~*(5)* 令 $a\notin\mathbb{Z}$。$W(a,-1)$ 上的任意转置 2-*Poisson* 代数结构具有如下形式

$$L_i\circ L_j=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu_n I_{n+i+j},\quad L_i\circ I_j=I_i\circ I_j=\mathfrak{C}\circ\widetilde{W}(a,-1)=0$$

~其中 $\mu_n\in\mathbb{C}$。当 $\delta\neq 2,\ 0$ 时，$W(a,\ -1)$ 上的任意转置 δ-*Poisson* 代数结构都是平凡的。~*(6)* $W(0,\ 1)$ 上的任意转置2-*Poisson* 代数结构均具有如下形式

$$(\lambda I_0+x)\circ(\mu I_0+y)=\lambda\mu\left(aC_0+bC_1^1+cC_2^1\right),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{C},x,y\in\widetilde{W}(0,1)',$$

~其中存在 $a,\ b,\ c\in\mathbb{C}$。当 $\delta\neq 2,\ 0$ 时，$W(0,\ 1)$ 上的任意转置 δ-*Poisson* 代数结构都是平凡的。

~*(7)* 令 $\mathcal{L}$ 为 *Virasoro*代数 $\mathcal{V}$、*W*-代数 $W(a,\ b)$ 或 $W(a,\ b)$ 中的任意一个，但不包括 *(2)*、*(3)*、*(4)*、*(5)* 和 *(6)* 中列出的那些代数。那么，$\mathcal{L}$ 上的任意转置 δ-*Poisson* 代数结构都是平凡的。

证明。 由定理 4.1、定理 4.2、定理 5.2和定理 5.3可知，所有对称$^1_\delta$-双导子在 $\mathcal{L}$ 上的空间

$$\begin{cases} \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\theta_n \mid n\in\mathbb{Z}\} & \text{if } \mathcal{L}=\mathcal{W}, \delta=2; \\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\Psi_n^{(a,0)} \mid n\in\mathbb{Z}\right\} & \text{if } \mathcal{L}=W(a,0), \delta=1; \\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\Psi_n^{(a,1)} \mid n\in\mathbb{Z}\right\} & \text{if } \mathcal{L}=W(a,1), \delta=1; \\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\Phi_n, \Psi_n \mid n\in\mathbb{Z}\} & \text{if } \mathcal{L}=W(a,-1), \delta=2; \\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\widetilde{\Psi}_n \mid n\in\mathbb{Z}\right\} & \text{if } \mathcal{L}=\widetilde{W}(a,-1) \text{ and } a\notin\mathbb{Z}, \delta=2; \\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\} & \text{if } \mathcal{L}=\widetilde{W}(0,1), \delta=2; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是定理得证。 □

致谢： C. Xu 得到国家自然科学基金（项目编号：12261077）的资助。

参考文献

[1] M. Brˇesar. 可交换映射：综述. 《台湾数学期刊》 8(2004), 361-397. 1[2] C. Bai, R. Bai, L. Guo 和 Y. Wu. 转置泊松代数、诺维科夫-泊松代数与3-李代数. 《代数杂志》 632(2023), 535-566. 1[3] G. M. Benkart 和 R. V. Moody. 导子、中心扩张与仿射李代数. 《代数、群与几何》 3(1986), 第4期, 456-492. 6[4] M. Brˇesar 和 K. Zhao. 李代数上的双导子与交换线性映射. 《李理论杂志》 28(2018), 885-900. 1[5] Z. Chen. 域上单广义 Witt 代数的双导子与线性交换映射. 《电子线性代数杂志》 31(2016), 1-12. 1[6] Z. Chen 和 Y. Wang. Kac-Moody 代数的斜对称双导子与线性交换映射. 《线性与多线性代数》 71(2023), 第5期, 867-874. 1[7] V. T. Filippov. 关于李代数的 δ-导子. 《西伯利亚数学杂志》 39(1998), 第6期, 1218-1230. 1[8] S. Gao, C. Jiang 和 Y. Pei. 李代数 W(a,b) 的低维上同调群. 《代数通讯》 39(2011), 第2期, 397-423. 2[9] X. Han, D. Wang 和 C. Xia. 李代数 W(a,b) 上的线性交换映射与双导子. 《李理论杂志》 26(2016), 第 3 期 , 777-786. 1[10] I. Kaygorodov 和 M. Khrypchenko. Witt 型代数上的转置泊松结构 . 《线性代数及其应用》 665(2023), 196-210. 2[11] I. Kaygorodov 和 M. Khrypchenko. 广义 Witt 代数与块李代数上的转置泊松结构. 《数学研究成果》 78(2023), 第5期, 186. 2[12] I. Kaygorodov, A. Khudoyberdiyev 和 Z. Shermatova. Witt 代数及相关代数的拟导子. arXiv: 2508.14914v1. 3, 6[13] I. Kaygorodov, K. Lopatkin 和 Z. Zhang. 伽利略李代数与可解李代数上的转置泊松结构. 《几何与物理杂志》 187(2023), 104781. 2[14] H. Liu 和 Z. Chen. 镜像 Heisenberg–Virasoro 代数的双导子. 《代数及其应用杂志》 24(2025), 第10期, 2550244. 1, 4[15] X. Liu, X. Guo 和 K. Zhao. 块李代数的双导子. 《线性代数及其应用》 538(2018), 43-55. 1[16] Y. Liu, Y. Ma 和 L. Chen. 代数 $\mathcal{SW}$(b) 上的斜对称双导子与线性交换映射. 《代数通讯》 53(2025), 第5期, 1755-1769. 1

[17] X. Tang. W-代数上的双导子、线性交换映射与交换后李代数结构. 《代数通讯》 45(2017), 5252-5261. 1[18] X. Tang. 有限维复单李代数的双导子. 《线性与多线性代数》 66(2018), 第2期, 250-259. 1[19] X. Tang. 李代数 $\mathcal{W}(a, b)$ 上的双导子与交换后李代数结构. 《台湾数学期刊》 22(2018), 第6期, 1347-1366. 1, 7[20] X. Tang 和 X. Li. 扭 Heisenberg–Virasoro 代数的双导子及其应用. 《代数通讯》 46(2018), 第 6 期 , 2346-2355. 1[21] X. Tang 和 Y. Yang. 无反对称条件的高秩维特代数的双导子 . 《开放数学》 16(2018), 第1期, 447-452. 1[22] D. Wang, X. Yu 和 Z. Chen. 单李代数抛物子代数的双导子. 《代数通讯》 39(2011), 4097-4104. 1[23] D. Wang 和 X. Yu. Schr¨odinger-Virasoro 李代数上的双导子与线性交换映射. 《代数通讯》 41(2013), 2166-2173. 1[24] Y. Wu 和 X. Yue. A_1 型仿射-Virasoro 代数上的斜对称双导子及其应用. 《代数通讯》 50(2022), 第2期, 770-783. 1[25] L. Yuan 和 Q. Hua. 李代数上的 1 2-（双）导子与转置泊松代数结构. 《线性与多线性代数》 70(2022), 第22期, 7672-7701. 1, 3[26] Y. Yang 和 X. Tang. 环海森堡-维拉索罗李代数上的转置泊松结构. 《比利时数学会通报·Simon Stevin》 31(2024), 第2期, 238-249. 2

–

C. Xu：数学科学学院，上饶师范学院，中国江西上饶，中华人民共和国，电子邮箱：xiaoxiongxu@126.com