arXiv:2603.06012v1 [cs.LO] 6 Mar 2026

沿着 ω-链进行对角化：有界图灵机上的迭代自我认证及其最小不动点

Miara Sung*

2026年3月9日

摘要

图灵机中的有界自我认证之所以失败，是因为自模拟必然会产生严格为正的时间开销。我们将这一操作约束转化为一个定义域论框架，并定义一个算子，使有限停机观测的时间界从 i 推进至 $i+1$。尽管没有任何有界机器能在该算子下达到不动点，迭代过程却形成一条递增的 ω-链。这条链的 Scott 极限恰为该算子的最小不动点，它代表一种无界计算，能够完整捕捉机器的停机行为。我们的构造为停机问题提供了新视角，将从有限可观测性到最小不动点的转变刻画为对角线的连续延迟。

1 设置

设 A 是一台在时间界 T 下运行的图灵机。我们考虑 A 的自停机问题： A 能否在输入 $\langle A\rangle$ （即 A 的编码）时，判定 A 是否会在 T 步内停机?

时间界为 $K \gg T$ 的图灵机 D 可以通过模拟轻松回答这个问题。但时间界为 T 的 D 却做不到，即使 $D = A$ 也是如此。要判定 A 是否会在 $\langle A\rangle$ 上停机， D 必须模拟它的执行过程。一般而言，模拟任意图灵机的 k 步，至少需要 k 步。此外，还至少需要额外一步才能进入停机状态并输出判定结果。

引理1。 设 A 是一台任意图灵机， D 是一台能够正确判定 A 是否会在 T 步内停机的任意图灵机（根据 ***Kleene*** 递归定理， $D = A$ 是可能的）。那么， D 至少需要 $T+1$ 步。

证明。 令 c_0、 c_1、..... 表示机器 A 在输入 $\langle A\rangle$下的构型序列，其中 $c_{t+1} = \delta_A(c_t)$。“A 在 T 步内停机”这一陈述成立，当且仅当存在某个 c_t 且 $t \le T$ 是一个停机配置。

在最坏情况下， A 恰好在第 T 步停机。为了在这种情况下正确判定该陈述，机器 D 必须确定配置 c_T。从 c_0 获得 c_T 的唯一方法，是跟随 A 的计算经过 T 次连续转换；由于假定 A 是任意的，因此不存在关于 A 的结构性事实可以帮助我们。因此，在知道是否会在第 T 步停机之前， D 必须至少模拟 A 的 T 步。

确定这些信息后， D 必须至少再执行一个步骤才能进入停机状态并输出判定结果。因此，任何正确的判定器至少执行 $T+1$ 步。

*独立学者。邮箱：jbaek080@berkeley.edu

特别是，根据 Kleene 递归定理，存在一个 $A = f(\langle A \rangle)$。既然我们已经证明了这一一般情形，就也证明了在 D 等于这个 $A = f(\langle A \rangle)$ 这一特定情形下，T有界机器无法判定自身在 T步时是否停机。

□

结论显而易见： A 在时间界为 T 时，无法判定 A在时刻 T的停机行为。它至多只能判定其截至时刻 $T-1$的行为，但第 T步仍不可知。A 无法判定自身是否停机。只有计算出下一步，才能知道它是什么。这是一种资源有界对角论证：试图在时间 T 内认证第 T步，会迫使时间界严格增大。

2 算子

令 D 为单调偏函数 $p : \mathbb{N} \to \{0, 1, \bot\}$ 的定义域，这些函数满足：对所有 $k' \geq k$， $p(k) = 1 \implies p(k') = 1$ ；并按扩展逐点排序：若 q 在 p 有定义的所有位置上都与 p 一致，则 $p \sqsubseteq q$ 。我们将 $p(k) = 1$ 解释为“M 在第 k 步或之前停机”，将 $p(k) = 0$ 解释为“M 截至第 k 步尚未停机”，将 $p(k) = \bot$ 解释为“第 k 步的行为尚未确定”。我们通过对 k 归纳来定义 F：$D \to D$ 。对于 $k = 0$，值 $F(p)(0)$ 独立于 p ，并记录对 M 的直接观察：

$$F(p)(0) = \begin{cases} 1 & \text{if } M \text{ halts at or before step } 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $k \geq 0$，值 $F(p)(k+1)$ 将 p 延伸一步：

$$F(p)(k+1) = \begin{cases} \bot & \text{if } p(k) = \bot, \\ 1 & \text{if } p(k) = 1, \\ 1 & \text{if } p(k) = 0 \text{ and } M \text{ halts at exactly step } k+1, \\ 0 & \text{if } p(k) = 0 \text{ and } M \text{ does not halt at step } k+1. \end{cases}$$

请注意， $F(p)(k+1)$ 仅通过单一值 $p(k)$ 依赖于 p；正是这种局部性使F 成为Scott连续的，如命题 1 所示。

从空的部分模型 $p_0 = \bot$ 出发，定义 $p_{i+1} = F(p_i)$。由归纳法， p_i 在 $\{0, 1, \ldots, i-1\}$ 上有定义，而在其之外无定义，且该序列在 D 中构成一条上升的 ω-链：

$$p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \cdots$$

每次应用 F 都会记录对 M 配置的一次额外观察，这与引理1中确立的$+1$ 开销相一致。

命题 1 （单调性与连续性）。 算子 F 是单调的：更多时间产生严格更多的信息，且先前已确定的值不会被否定。它也是*Scott*连续的：对于任意 k，值 $p_\omega(k)$ 在有限阶段 p_k 被确定，因此极限与 F 可交换。

证明。 我们首先证明单调性。设 $p, q \in D$ 满足 $p \sqsubseteq q$。根据信息序的定义，只要 p 有定义， q 就与 p 一致（$p(x) \neq \bot \implies p(x) = q(x)$）。算子$F$ 会保留其输入中所有已定义的值，并确定 M的确定性计算中至多一个额外步骤。由于底层机器 M 是确定性的，由 p 推导出的额外计算步骤必定与由 q推导出的步骤相同。此外， q中的任何额外信息都会在 $F(q)$中保留。因此， $F(p) \sqsubseteq F(q)$。

接下来，我们证明 Scott连续性。设 $C \subseteq D$ 是一个有向集。我们必须证明 $F(\bigsqcup C) = \bigsqcup_{p\in C} F(p)$。由于 F是单调的，不等式 $\bigsqcup_{p\in C} F(p) \sqsubseteq F(\bigsqcup C)$普遍成立。我们只需证明反向包含关系： $F(\bigsqcup C) \sqsubseteq \bigsqcup_{p\in C} F(p)$。

假设 $F(\bigsqcup C)(k) = v$，其中 $k \in \mathbb{N}$ 和 $v \in \{0, 1\}$。 F 在步骤 k 的计算只取决于 M 计算的一个有限前缀（具体而言，是截至步骤 $k-1$ 的行为）。由于 C 是有向的，上确界 $\bigsqcup C$ 中包含的任何有限信息子集，都必定已完整包含在某个单独的元素 $p^* \in C$ 中。

由于 p^* 包含了确定步骤 k 所需的有限前缀，因此 $F(p^*)(k) = v$。由于 $\bigsqcup_{p\in C} F(p)$ 是最小上界， $F(p) \sqsubseteq \bigsqcup_{p\in C} F(p)$。特别地， $F(p^*) \sqsubseteq \bigsqcup_{p\in C} F(p)$。这意味着，在有定义的情况下， $F(p^*)$ 的值必定等于 $\bigsqcup_{p\in C} F(p)$ 的值。因此， $\left(\bigsqcup_{p\in C} F(p)\right)(k) = v$。于是， $F(\bigsqcup C)$ 不包含 $\bigsqcup_{p\in C} F(p)$ 中尚未有的信息，也就是说， $F(\bigsqcup C) \sqsubseteq \bigsqcup_{p\in C} F(p)$。两边相等，因此 F 是 Scott 连续的。 □

3 不动点

根据 Kleene 的 不动点定理，由于 F 在 D上是 Scott连续的，最小不动点 is:

$$p_\omega = \mathrm{lfp}(F) = \bigsqcup_{n<\omega} p_n = \bigsqcup_{n<\omega} F^n(p_0)$$

这是一个全函数，它在每个有限步骤上确定 M的停机行为：对于每个 k， $p_\omega(k)$都有定义，因为 p_{k+1} 已经确定了它。不动点 p_ω 是 M的完整停机观测。

但 p_ω 无法通过有限计算得出。每个 p_n 都是由一台时间界为 n的机器生成的——这是一种有限计算。极限 $\bigsqcup_n p_n$ 需要对无穷多个这样的计算取上确界。计算 p_ω 的图灵机，其时间界为 ω。它不再是有界图灵机，而是一台需要无限时间的图灵机。迭代自模拟一直进行到不动点，产生了从有限计算到无限计算的转变。

我们指出两个与这个不动点有关的定理。令 B_T 表示由时间界为 T的机器可计算的有限停机观测类；也就是说，是在$\{0, 1, \ldots, T-1\}$ 上有定义、在其之外无定义的偏函数。

定理 1 (无有界不动点)。 对于任意有限时间界 T，类 B_T 中没有机器是 F 的不动点。等价地，

$$\forall T \in \mathbb{N}\ \ \forall p \in B_T\ \ (F(p) \neq p).$$

证明。 反设 $p \in B_T$ 是 F 的不动点，即 $F(p) = p$。根据定义， p 由一台时间界为 T 的机器计算，因此 p 在 $\{0, 1, \ldots, T-1\}$ 上有定义，并且对所有 $k \geq T$， $p(k) = \perp$。但 $F(p)$ 比 p 多延伸一步： $F(p)$ 在 $\{0, 1, \ldots, T\}$ 上有定义，因为时间界为 $T+1$ 的机器可以完整模拟 T 有界机器，并再执行一步。特别地， $F(p)(T) \neq \perp$，而 $p(T) = \perp$，所以 $F(p) \neq p$。矛盾。 □

定理 2 （最小不动点与无界性）。 设 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为由 $p_0 = \perp$与 $p_{n+1} = F(p_n)$ 定义的 ω-链。则

$$\mathrm{lfp}(F) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} p_n = p_\omega,$$

此外

$$p_\omega \notin \bigcup_{T\in\mathbb{N}} B_T.$$

证明。 第一项结论可直接由Kleene不动点定理得出： F 在D上是Scott连续的（命题 1），因此 lfp(F) $=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} F^n(\bot) = \bigsqcup_n p_n = p_\omega$。

对于第二个断言，反设对某个 $T \in \mathbb{N}$， $p_\omega \in B_T$ 。那么 p_ω 至多在 $\{0,\ldots,T-1\}$ 上有定义。但对于每个 $k \in \mathbb{N}$，阶段 p_{k+1} 都定义了 $p_{k+1}(k)$，因此 $p_\omega(k) = p_{k+1}(k) \neq \bot$。特别地， $p_\omega(T) \neq \bot$，这与 $p_\omega \in B_T$ 矛盾。由于 T 是任意的，$p_\omega \notin \bigcup_{T\in\mathbb{N}} B_T$。

□

推论 1 (有界自我认证与 Scott 极限)。 有界自我认证失败，而 *Scott* 极限成立：没有有界机器能实现 F 的不动点，而有向上确界$p_\omega = \mathrm{lfp}(F)$ 可以。

证明。 根据定理 1，不存在满足 $F(p) = p$ 的 $p \in B_T$，因此有界自我认证失败。根据定理 2， $p_\omega =$lfp(F) 存在且满足 $F(p_\omega) = p_\omega$，但 $p_\omega \notin \bigcup_T B_T$：该不动点仅在 Scott 极限处实现，而这并非有界计算。

□

定理 3 （半可判定性即非对称可观测性）。 全局停机性质 H（M） $\equiv\exists k \in \mathbb{N}$ （p_ω（k） $= 1$）若为真，则可以通过有限步骤观测到；若为假，则需要严格意义上的无限计算。试图有限地计算 H（M） $=$ 为假，会通过 $+1$ 模拟开销重现经典的图灵对角线矛盾。

证明。 我们通过检查最小不动点 $p_\omega = \bigsqcup_n p_n$ 来评估全局停机性质。分两种情况：

1. **正向情况（停机）：** 假设 M 在某个有限的确切步骤 K 停机。那么 $p_{K+1}(K) = 1$。由于阶段 p_{K+1}由 M^{K+1}在有限时间界 $K+1$ 内计算得出，因此可以在有限时间内确定肯定答案。性质 $\exists k\,(p_\omega(k) = 1)$ 可由 ω-链的一个有限前缀见证。

2. **负向情况（不停机）：** 假设 M 永不停机。那么对所有有限的 k，都有 $p_\omega(k) = 0$。若要肯定地判定 $H(M) =$ 为假，判定器必须验证由 0 构成的整个无限序列。反设存在一台机器 D，它能在有限时间界 T 内正确判定 $H(M) =$ 为假。

   如果存在这样的 D，它就会把 ω链的无限求值压缩为一个有限界 T。随后我们可以构造一个经典图灵对角化程序 X，它模拟 $D(\langle X\rangle)$，并且当且仅当 D 输出“不停机”时停机。

   根据引理1， X 模拟 D 会产生严格为正的运行开销。为了求值D的输出并将其取反， X 至少需要 $T+1$ 步。由于 D 将其分析限制在时间 T内，它未能考虑到第$(T+1)$步，而在该步 X 明确地与 D的预测相矛盾。

因此，引理1中确立的有限 $+1$ 开销在每一步 i都构成局部障碍。对于会终止的程序，开销有界（在 $K+1$处停止），因此求上确界只需有限计算。对于不终止程序， $+1$ 开销会无限次地适用。试图在任何有限时间T 截断这一过程并明确断言“不会停机”，都会立即在步骤 $T+1$引发对角化。因此，对角悖论的连续延迟正是将否定判断推入不可计算的无限极限之中的原因，从而重新得到停机问题的半可判定性。

□

4 备注

Lawvere定理。 模拟开销背后的对角论证——A 无法在自身时间界内模拟自身——是Lawvere不动点定理 [2]的一个实例。在笛卡尔闭范畴中，若存在点满射 $e:\ X \to Y^X$，则每个自同态Y都有一个不动点；反过来说，若某个自同态没有不动点，则不存在这样的满射。有界机器的状态空间无法满射到其自身上的函数空间。我们的观察是，这一障碍推动了一个迭代过程，其不动点位于更高的计算层级。

一般性。 该构造不依赖于具体的计算模型。任何有界设备——例如固定深度电路或有界寄存器机——在自模拟中都会面临相同的开销，并且都适用相同的迭代构造。关键要素包括：(i) 有限资源界，(ii) 严格为正的模拟开销，以及 (iii) 能使所得链收敛的域理论结构。

参考文献

[1] S.C. Kleene，《元数学导论》，North-Holland，1952。

[2] F.W. Lawvere，《对角论证与笛卡尔闭范畴》，《数学讲义》，92，134–145，1969。[3] D. Scott，《连续格》，载于《拓扑斯、代数几何与逻辑》，LNM 274，Springer，97–136，1972。[4] N. Yanofsky，自指悖论、不完备性与不动点的通用方法，《符号逻辑公报》，9(3)，362–386，2003。