arXiv:2603.06015v1 [math.RT] 6 Mar 2026

扭曲海森堡-维拉索罗代数与间隙-p 维拉索罗代数上的一类权模

徐成康和张芬

摘要。本文利用扭曲海森堡-维拉索罗代数某个正部子代数上的受限模，构造了扭曲海森堡-维拉索罗代数与间隙-p 维拉索罗代数上的一类单权模。这些模是新的。特别地，当$p = 2$ 时，间隙-p 维拉索罗代数就是镜像海森堡-维拉索罗代数，我们为镜像海森堡-维拉索罗代数得到了许多新的单权模。

1. 引言

扭曲海森堡-维拉索罗代数的表示论 $\mathbb{T}$在过去几十年中得到了广泛研究。在 [10], 中，对不可约哈里什-钱德拉模进行了分类 $\mathbb{T}$。它们是中间系列模、最高权模或最低权模。中间系列模的张量积与最高权模曾在 [11]中得到研究。许多数学家也研究了 $\mathbb{T}$ 上的非权模。在 [11]中，利用海森堡子代数上的受限模构造了广义振子表示。 $\mathbb{T}$ 上的受限模已分别在 [2, 4] 和 [12] 中得到分类。它们本质上是维拉索罗代数上的受限模与海森堡代数上的受限模的张量积，或者是由 $\mathbb{T}$的某些有限维可解子商诱导得到的模。

镜像海森堡-维拉索罗代数最早在 [1]中被研究，并在 [9]中被命名。其结构与扭曲海森堡-维拉索罗代数相似。在 [9], 中，作者对镜像海森堡-维拉索罗代数 $\mathbb{M}$的不可约哈里什-钱德拉模进行了分类，它们是中间系列模、最高权模或最低权模。他们还对 $\mathbb{M}$的零级不可约受限模进行了分类。 $\mathbb{M}$的非零级不可约受限模在 [12]中得到分类。与扭曲海森堡-维拉索罗代数类似， $\mathbb{M}$ 的不可约受限模是某些张量积模，或由 $\mathbb{M}$的某些有限维可解子商诱导的模。中间系列模与 $\mathbb{M}$ 的最高权模的张量积在 [6]中得到研究。

设 $p > 1$ 为一个整数。间隙-p维拉索罗代数$\mathfrak{g}$最初在 [13], 中引入，并在那里对不可约哈里什-钱德拉模进行了分类。这些模是中间系列模、最高权模或最低权模。代数 $\mathfrak{g}$ 与扭曲海森堡-维拉索罗代数以及有理量子环面上的导子代数有密切联系。此外，当 $p = 2$ 时，$\mathfrak{g}$同构于镜像海森堡-维拉索罗代数 $\mathbb{M}$ （见第5节）。文献 [5]对零级不可约受限模进行了分类。这些模是由 $\mathfrak{g}$ 的某些有限维可解子商诱导而来的。近期，文献 [14], 对一些非权$\mathfrak{g}$模进行了分类，其中包括惠特克模以及 $\mathcal{U}(\mathbb{C}L_0)$-自由模。

2020 数学学科分类。 17B10,17B65,17B68.关键词和短语。 扭曲海森堡-维拉索罗代数，镜像海森堡-维拉索罗代数，gap-p 维拉索罗代数，权模。

在 [3], 中，利用扭曲海森堡-维拉索罗代数上的不可约受限模，构造了一类具有平凡中心作用的单权模 $\mathbb{T}$，这些模来自 $\mathbb{T}$的某些正部子代数。本文采用相同的方法，从 $\mathbb{T}$的某些正部子代数上的不可约受限模出发，为扭曲海森堡-维拉索罗代数 $\mathbb{T}$、间隙-p维拉索罗代数（特别是镜像海森堡-维拉索罗代数 $\mathbb{M}$）构造具有平凡中心作用的单权模。本文为 $\mathbb{T}$构造的模推广了文献 [3]中的模。我们确定了这些新构造模的不可约性及其同构类。我们还利用文献 [8]中的扭变技巧，为 $\mathbb{T}$和$\mathfrak{g}$构造了一些非权模。

现在简要介绍本文的结构。在第 2 节中，我们回顾代数 $\mathbb{T}$和 $\mathfrak{g}$，并介绍 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$和 $\mathcal{U}(\mathbb{T})$中的一些有用算子。在第 3 节中，我们为 $\mathbb{T}$ 和 $\mathfrak{g}$ 构造上述模，并证明在一个较弱的条件下，这些模是不可约的。第 4 节致力于确定 $\mathbb{T}$和 $\mathfrak{g}$ 上这些模的同构类，第 5 节则证明这些模是新的。在最后一节中，我们利用第 3 节所得的模，为 $\mathbb{T}$ 和 $\mathfrak{g}$ 构造一些非权模。

本文中，符号 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{N}$、 $\mathbb{Z}_+$、 $\mathbb{C}$和 $\mathbb{C}^\times$ 分别表示整数集、非负整数集、正整数集、复数和非零复数。所有向量空间和代数均定义在 $\mathbb{C}$ 上，李代数 $\mathcal{L}$ 的泛包络代数记为 $\mathcal{U}(\mathcal{L})$。最后，本文固定一个正整数$p > 1$，并对任意$k \in \mathbb{Z}$，记$\bar{k}$ 为k 除以p所得的余数。

2. 预备知识

本节回顾扭曲海森堡-维拉索罗代数和间隔-p 维拉索罗代数，并介绍一些相关记号。

定义 2.1。 扭曲海森堡-维拉索罗是一个复李代数 $\mathbb{T}$，其基为

$$\{L_n, I_n, C_L, C_{LI}, C_I \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

且李括号为

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)C_L\delta_{m+n,0}, \\ [L_m, I_n] &= nI_{m+n} + (m^2+m)C_{LI}\delta_{m+n,0}, \quad [I_m, I_n] = mC_I\delta_{m+n,0}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 m，$n \in \mathbb{Z}$，且 C_L、C_{LI}、C_I为中心元。

对于任意 $n \in \mathbb{N}$，子空间

$$\mathbb{T}_n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{L_k, I_{n+k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

是 $\mathbb{T}$ 的子代数。

定义 2.2. 李代数 $\mathbb{T}_n$ 上的模 V 称为受限的，如果对任意 $v \in V$，都存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $m \geq N$，$L_m v = I_m v = 0$。令 $h,q \in \mathbb{N}$ 满足 $h \geq n$。若对所有 $k > h, l > q$，均有 $I_h V \neq 0, L_q V \neq 0$ 且 $I_k V = L_l V = 0$，则称 V 具有湮灭层级 (h,q)。

注 2.3. *(1)* 设 V 是一个具有湮灭层级(h,q)的不可约 $\mathbb{T}_n$-模。那么 I_h 在 V 上的作用是一个线性同构（见 [3, 引理 3.1]）。

(2) [3, 例3。4], 给出了一个具有固定湮灭层级的不可约受限 $\mathbb{T}_0$（或 $\mathbb{T}_1$）-模的例子，而此类模的一般构造则见 [2, 章节 4]。

间隙-p 维拉索罗代数可以实现为无中心扭海森堡-维拉索罗代数的某个子代数的泛中心扩张

$$\mathbb{T}' = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{L_k, I_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

满足式 (2.1) 中的李括号关系，其中省略了 复数域$_L$,复数域$_{LI}$,复数域$_I$（见 [13]）。

定义 2.4. 间隔-p ***Virasoro*** 代数是一个复李代数 $\mathfrak{g}$，其基为

$$\left\{L_{pn}, I_{pn+i}, C_j \mid n \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le p-1, 0 \le j \le [\frac{p}{2}]\right\}$$

满足以下李括号关系

$$\begin{aligned}
&[L_{pm}, L_{pn}] = p(n-m)L_{pm+pn} + \frac{1}{12}(m^3-m)C_0\delta_{m+n,0},\\
&[I_{pm+i}, I_{pn+j}] = (pm+i)\delta_{i+j,p}\delta_{m+n+1,0}C_{\min\{i,p-i\}}, \qquad [C_k, \mathfrak{g}] = 0,\\
&[L_{pm}, I_{pn+i}] = (pn+i)I_{pm+pn+i},
\end{aligned}$$

其中 $m, n \in \mathbb{Z}$, $1 \le i, j \le p-1$, $0 \le k \le [\frac{p}{2}]$, 和 $[\frac{p}{2}]$ 表示不大于 $\frac{p}{2}$ 的最大整数。

注 2.5. *(1)* 当 $p = 2$ 时，间隔-*2 Virasoro* 代数恰好是文献 [1] 中引入并在 [9] 中命名的镜像 *Heisenberg-Virasoro* 代数。
(2) 由于本文研究的模具有平凡中心作用，我们可以通过忽略中心元 $C_L, C_{LI}, C_I, C_i, 0 \le i \le [\frac{p}{2}]$，将 $\mathfrak{g}$ 视为 $\mathbb{T}$ 的子代数。这也是我们将 $\mathbb{T}$ 和 $\mathfrak{g}$中的元素用相同方式表示的原因。

定义 2.6. 李代数 $\mathbb{T}$或 $\mathfrak{g}$ 上的模 V 称为权模，如果 V 在 L_0 的作用下可分解为特征子空间的直和。

为结束本章节，我们引入 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 与 $\mathcal{U}(\mathbb{T})$ 中的若干算子，以备后用。对任意$s \in \mathbb{N}$，l，$m \in \mathbb{Z}$ 以及 $1 \le i, j \le p-1$，定义

$$\Omega_{l,m}^{(i,j,s)} = \sum_{k=0}^{s}(-1)^{s-k}\binom{s}{k}I_{pl-pm-pk+i}I_{pm+pk+j}. \tag{2.2}$$

显然，$\Omega^{(i,j,0)}{}_{l,m} = I_{pl-pm+i}I_{pm+j}$，并且容易证明如下递归公式

$$\Omega_{l,m}^{(i,j,s)} = \Omega_{l,m+1}^{(i,j,s-1)} - \Omega_{l,m}^{(i,j,s-1)} \quad \text{for } s > 0. \tag{2.3}$$

3. 构造权模

在本章节中，我们由受限的 $\mathbb{T}_0$ （或 $\mathbb{T}_1$）-模构造 $\mathbb{T}$ 与 $\mathfrak{g}$ 上的若干权模，并确定其不可约性。

在本章节中，固定一个p元组$\boldsymbol{d} = (d_0, d_1, \ldots, d_{p-1}) \in \{0,1\}^p$ 以及 $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ 的一个子集P。记

$$\min\{\boldsymbol{d}\} = \min\{d_0, d_1, \ldots, d_{p-1}\} \quad \text{and} \quad \min\{\boldsymbol{d}, P\} = \min\{d_i \mid i \in P\}.$$

于是我们得到 $\mathbb{T}$ 的子代数 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d}\}}$ 和 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P\}}$，以及 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P\}} \subseteq \mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d}\}}$。

设 $a \in \mathbb{C}$，V 为一个受限的 $\mathbb{T}_{\min\{d\}}$-模，并令 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 表示以不定元 x 为变量的 Laurent 多项式环。我们在空间 $V \otimes \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 上定义一个 $\mathbb{T}$-作用如下：

$$\begin{aligned} L_m \cdot v(k) &= \left(a + k + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{m^{j+1}}{(j+1)!} L_j\right) v(m+k); \\ I_{pm+i} \cdot v(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(pm+i)^{j+d_i}}{(j+d_i)!} I_{j+d_i} v(pm+i+k); \\ C_L \cdot v(k) &= C_{LI} \cdot v(k) = C_I \cdot v(k) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $m, k \in \mathbb{Z}, v \in V, 0 \le i \le p-1$ 以及 $v(k) = v \otimes x^k$。

记

$$\mathbb{C}[P] = \bigoplus_{r \in P} x^r \mathbb{C}[x^{\pm p}] \subseteq \mathbb{C}[x^{\pm 1}] \quad \text{and} \quad \mathcal{P} = \left\{k \in \mathbb{Z} \mid \bar{k} \in P\right\} = \left\{k \in \mathbb{Z} \mid x^k \in \mathbb{C}[P]\right\}.$$

设V 为一个 $\mathbb{T}_{\min\{d,P\}}$-模，并在空间 $V \otimes \mathbb{C}[P]$ 上定义 g-作用如下：

$$\begin{aligned} L_{pm} \cdot v(k) &= \left(a + k + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(pm)^{j+1}}{(j+1)!} L_j\right) v(pm+k); \\ I_{pm+i} \cdot v(k) &= \delta_{\overline{i+k},P} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(pm+i)^{j+d_i}}{(j+d_i)!} I_{j+d_i} v(pm+i+k); \\ C_l \cdot v(k) &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $m \in \mathbb{Z}, k \in \mathcal{P}, v \in V$，$1 \le i \le p-1, 0 \le l \le [\mp_2]$ 且 $\delta_{j,P}$ 是定义的克罗内克符号 by

$$\delta_{j,P} = \begin{cases} 1 & \text{if } j \in P; \\ 0 & \text{if } j \notin P. \end{cases}$$

由于 V 是受限的，(3.1) 和 (3.2) 中的作用仅包含有限项，因此是有意义的。此外，我们有如下

命题 3.1. *(1)* （3.1）中的作用使 $V \otimes \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 成为一个权 $\mathbb{T}$-模。*(2)* （3.2）中的作用使 $V \otimes \mathbb{C}[P]$ 成为一个权 $\mathfrak{g}$-模。

证明。 (1) 对任意k、m、$n \in \mathbb{Z}$，$0 \le i$、$j \le p-1$ 以及$v \in V$，显然

$$\left(I_{pm+i} I_{pn+j} - I_{pn+j} I_{pm+i}\right) \cdot v(k) = 0,$$

并且我们有

$$
\begin{aligned}
&\left(L_m I_{pn+i} - I_{pn+i} L_m\right) \cdot v(k) \\
=&\left(a + pn + i + k + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{m^{q+1}}{(q+1)!} L_q\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(pn+i)^{l+d_i}}{(l+d_i)!} I_{l+d_i}\right) v(m + pn + i + k) \\
&-\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(pn+i)^{l+d_i}}{(l+d_i)!} I_{l+d_i}\right)\left(a + k + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{m^{q+1}}{(q+1)!} L_q\right) v(m + pn + i + k) \\
=&(pn+i) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(pn+i)^{l+d_i}}{(l+d_i)!} I_{l+d_i} v(m + pn + i + k) \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(pn+i)^{l+d_i} m^{q+1}}{(l+d_i)!(q+1)!} [L_q, I_{l+d_i}] v(m + pn + i + k) \\
=&(pn+i) \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=\delta_{d_i,0}}^{q+1} \frac{(pn+i)^{l+d_i-1} m^{q-l+1}}{(l+d_i-1)!(q-l+1)!} I_{q+d_i} v(m + pn + i + k) \\
=&(pn+i) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(m+pn+i)^{q+d_i}}{(q+d_i)!} I_{q+d_i} v(m + pn + i + k) = (pn+i) I_{m+pn+i} \cdot v(k).
\end{aligned}
$$

此外，对于任意的 k、m、$n \in \mathbb{Z}$、$v \in V$，我们有

$$
\begin{aligned}
&(L_m L_n - L_n L_m) \cdot v(k) \\
=&\left(a + n + k + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m^{i+1}}{(i+1)!} L_i\right)\left(a + k + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^{j+1}}{(j+1)!} L_j\right) v(m + n + k) \\
&-\left(a + m + k + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^{j+1}}{(j+1)!} L_j\right)\left(a + k + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m^{i+1}}{(i+1)!} L_i\right) v(m + n + k) \\
=&(n-m)(a+k) v(m+n+k) + \left(n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^{j+1}}{(j+1)!} - m \sum \frac{m^{j+1}}{(j+1)!}\right) L_j v(m+n+k) \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{m^{i+1} n^{j+1}}{(i+1)!(j+1)!} (j-i) L_{i+j} v(m+n+k) \\
=&(n-m)(a+k) v(m+n+k) \\
&+ \left(n \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{j+1} \frac{m^{i+1} n^{j-i}}{(i+1)!(j-i)!} - m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{j+1} \frac{m^{i} n^{j-i+1}}{i!(j-i+1)!}\right) L_j v(m+n+k) \\
=&(n-m)\left(a + k + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m+n)^{j+1}}{(j+1)!} L_j\right) v(m+n+k) = (n-m) L_{m+n} \cdot v(k).
\end{aligned}
$$

这表明$V \otimes \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 是一个 $\mathbb{T}$-模。由于对于任意$v \in V$，$k \in \mathbb{Z}$ 和$L_0 \cdot v(k) = (a + k) v(k)$

$$
V \otimes \mathbb{C}[x^{\pm 1}] = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V \otimes x^k,
$$

由此可知，$V \otimes \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 是一个权 $\mathbb{T}$-模。

（2）证明与（1）类似，细节从略。 □

记 $M_{\mathbb{T}}(V, a, \boldsymbol{d})$ 为在（ $\mathbb{T}$-模，其定义见（3.1）；记 $M_{\mathfrak{g}}(V, a, \boldsymbol{d}, P)$ 为在（$\mathfrak{g}$-模，其定义见（3.2）。下文将确定它们的不可约性。为此，我们需要下面关于算子 $\Omega^{(i,j,s)}{}_{l,m}$ 的结果，该算子定义见（2.2）。

引理3.2。 令 $l, m \in \mathbb{Z}$， $1 \le i, j \le p-1$ 且 V 为一个 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d}\}}$-模，其湮灭层级为（$h$，$q$），且 $v \in V$。则有以下等式

$$\Omega^{(i,j,2h)}_{l,m} \cdot v(k) = (-1)^h p^{2h} \binom{2h}{h} I_h^2 v(pl+k+i+j),$$
$$\Omega^{(i,j,s)}_{l,m} \cdot v(k) = 0 \quad for\ s > 2h$$

在 $\mathbb{T}$-模 $M_{\mathbb{T}}(V, a, \boldsymbol{d})$ 上对任意 $k \in \mathbb{Z}$成立，并且在$\mathfrak{g}$-模 $M_{\mathfrak{g}}(V, a, \boldsymbol{d}, P)$ 上成立，进一步要求 k，$j+k$，$i+j+k \in \mathcal{P}$。

证明。 将 $\Omega^{(i,j,s)}{}_{l,m} \cdot v(k)$ 视为关于m的多项式，其系数属于$V \otimes x^{pl+k+i+j}$。利用对$s \ge 0$ 的归纳法和 (2.3)，可以证明 $\Omega^{(i,j,s)}{}_{l,m} \cdot v(k)$ 的首项为

$$\frac{(-1)^h p^{2h} m^{2h-s} (2h)!}{(h!)^2 (2h-s)!} I_h^2 v(pl+k+i+j).$$

于是，取$s = 2h$即可得到该引理。 □

现在我们可以证明本章节的主要结果。

定理 3.3。 设 $a \in \mathbb{C}, h, q \in \mathbb{N}, \boldsymbol{d} = (d_0, d_1, \cdots, d_{p-1}) \in \{0,1\}^p$ 且 $P \subseteq \{0, 1, \ldots, p-1\}$满足 $h \ge \min\{\boldsymbol{d}, P\}$。设 V 是一个 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P\}}$-模，其湮灭层级为$(h,q)$。那么，$\mathfrak{g}$-模 $M_{\mathfrak{g}}(V,a,\boldsymbol{d},P)$ 不可约，当且仅当 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P\}}$-模 V 不可约。

证明。 “仅当”部分显然。为证明“当”部分，假设W是$M_{\mathfrak{g}}(V,a,\boldsymbol{d},P)$的非零 g-子模。由于$W$是一个权模，我们可以写成

$$W = \bigoplus_{k \in \mathcal{P}} \tilde{W}_k \otimes x^k,$$

˜其中W_k’s 是V的子空间。令

$$\tilde{W} = \bigcap_{k \in \mathcal{P}} \tilde{W}_k.$$

我们断言 $\tilde{W} \neq 0$。取一个非零向量 $v(k) \in W$，其中 $k \in \mathcal{P}$，$v \in \tilde{W}_k$。对于任意 l，$m \in \mathbb{Z}, 1 \le i, j \le p-1$，使得 $j + \overline{k}$，$\overline{i + j + k} \in P$，由引理3.2和注 2.3可得

$$\Omega^{(i,j,2h)}_{l,m} \cdot v(k) = (-1)^h p^{2h} \binom{2h}{h} I_h^2 v(pl+k+i+j) \in \tilde{W}_{pl+k+i+j} \otimes x^{pl+k+i+j} \setminus \{0\},$$

这意味着 $I^2{}_h v \in \tilde{W}$，从而证明了该断言。

对于任意满足$v \in \tilde{W}$、l、$m \in \mathbb{Z}$、$k \in \mathcal{P}$、$i \in P \setminus \{0\}$ 以及$k - i \in \overline{P}$的情形，我们有

$$v(k-pm) \in \tilde{W}_{k-pm} \otimes x^{k-pm} \quad \text{and} \quad v(k-pm-i) \in \tilde{W}_{k-pm-i} \otimes x^{k-pm-i}.$$

由以下方程可得

$$L_{pm}\cdot v(k-pm)=\left(a+k-pm+\sum_{j=0}^{q}\frac{(pm)^{j+1}}{(j+1)!}L_j\right)v(k)\in\tilde{W}_k\otimes x^k,$$

$$I_{pm+i}\cdot v(k-pm-i)=\sum_{j=0}^{h-d_i}\frac{(pm+i)^{j+d_i}}{(j+d_i)!}I_{j+d_i}v(k)\in\tilde{W}_k\otimes x^k,$$

我们看到

$$\sum_{j=0}^{q}\frac{(pm)^{j+1}}{(j+1)!}L_jv\in\tilde{W}_k\quad\text{and}\quad\sum_{j=0}^{h-d_i}\frac{(pm+i)^{j+d_i}}{(j+d_i)!}I_{j+d_i}v\in\tilde{W}_k\quad\text{for any } m\in\mathbb{Z},1\le i\le p-1.$$

因此，对于所有 j ∈ ℕ、k ∈ ℘，都有 L jv、I j+min{d,P\{0}}v ∈ ˜W。于是，对于所有 j ∈ ℕ，都有 L_jv、I j+min{d,P\{0}}v ∈ ˜W。这˜证明了 W 是 V 的一个非零 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P\setminus\{0\}}}$-子模。

如果 min{d, P \ {0}} > min{d, P}，则这种情况仅在 0 ∈P、d_0 = 0 且 d_i = 1 对所有 i ∈P\{0} 都成立时发生，或者等价地，$I_0\in\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P\}}\setminus\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P\setminus\{0\}}}$。注意，$I_0$ 在 V 上的作用是一个固定标量，因为˜ ˜I_0 在 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P\}}$ 中心，且 V 是不可约的。因此，I_0v ∈ W，且 W 是 V 的一个非零 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P\}}$- 子模˜。所以，根据 V 的不可约性，W = V，从而 $M_{\mathfrak{g}}$(V, a, d, P) 是不可约的。□

定理 3.4. 设 $a\in\mathbb{C}$，h，$q\in\mathbb{N}$，$\boldsymbol{d}=(d_0,d_1,\cdots,d_{p-1})\in\{0,1\}^p$，并设 V 是一个湮灭层级为$(h,\ q)$的 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d}\}}$-模。那么，$\mathbb{T}$-模 $M_{\mathbb{T}}(V,\ a,\ \boldsymbol{d})$ 不可约，当且仅当$\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d}\}}$-模 V 不可约。

证明。“仅当”显然。为证明“当”这一部分，我们将 $M_{\mathbb{T}}$(V, a, d) 视为 g-模 $M_{\mathfrak{g}}$(V, a, d, P)，其中 P = {0, 1,. . . , p − 1}，根据定理 3.3，该模不可约。因此，$M_{\mathbb{T}}$(V, a, d) 作为 $\mathbb{T}$-模不可约。□

4. 同构类

本节确定上一节构造的模在扭曲海森堡-维拉索罗代数及 gap-p 维拉索罗代数上的同构类。我们首先讨论 gap-p维拉索罗代数的情形。

定理 *4.1.* 设 $d, e\in\{0,1\}^p$, $a, b\in\mathbb{C}$, $h, q, n, t\in\mathbb{N}$，使得 $h\ge min\{d\}$，$n\ge min\{e\}$，且 P, Q 是 {0, 1, 。 . . . , $p-1$} 的子集。设 V 是湮灭层级为 (h, q) 的不可约 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d}\}}$-模，$W$ 是湮灭层级为 (n, t) 的不可约 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{e}\}}$-模。那么，$M_{\mathfrak{g}}(V, a, d, P)\cong M_{\mathfrak{g}}(W, b, e, Q)$ 作为 g-模同构，当且仅当 $a-b\in\mathbb{Z}$，$h=n$，$q=t$，$Q=\sigma^{a-b}(P)$，$d_i=e_i$ 对所有 $i\in P-P$ 成立，且 $V\cong W$ 作为 $\mathbb{T}_{\underline{\min\{\boldsymbol{d},P-P\}}}$-模同构，其中 $P-P=\{i-j\mid i,j\in P\}$，且 σ 是置换 $(0, 1, \ldots, p-1)$，作用于集合 {0, 1, 。 . . . , $p-1$}。

证明。“若”部分由以下事实可得：线性映射 $\varphi: M_{\mathfrak{g}}(V, a, \boldsymbol{d}, P)\longrightarrow M_{\mathfrak{g}}(W, b, \boldsymbol{e}, Q)$ 定义为

$$\varphi(v(l))=\psi(v)(l+a-b)\quad\text{for any } v\in V, l\in\mathbb{Z},$$

其中 $\psi: V\longrightarrow W$ 是一个 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P-P\}}$-模同构，也是一个 g-模同构。

接下来我们证明“仅当”部分。设 $\varphi M_{\mathfrak{g}}(V, a, \boldsymbol{d}, P)\longrightarrow M_{\mathfrak{g}}(W, b, \boldsymbol{e}, Q)$ 是一个 g-模同构。对于任意 $v\in V, m\in\mathcal{P}$，记作

$$\varphi(v(m))=\sum_{i\in\mathcal{Q}}w_{i,m}(i),$$

其中 $\mathcal{Q}=\{k\in\mathbb{Z}\mid \bar{k}\in Q\}$,$w_{i,m}\in W$ 且只有有限多个 $w_{i,m}$' 不为零。对于任意 $k\in\mathbb{N}$，有

$$(a+m)^k\sum_{i\in\mathcal{Q}}w_{i,m}(i)=\varphi\left(L_0^k\cdot v(m)\right)=L_0^k\cdot\varphi\left(v(m)\right)=\sum_{i\in\mathcal{Q}}(b+i)^k w_{i,m}(i).$$

这意味着$a-b\in\mathbb{Z}$,$Q=\sigma^{a-b}(P)$和

$$\varphi(v(m))=w_{m+a-b,m}(m+a-b)\in W\otimes x^{m+a-b}\quad\text{for any } v\in V,m\in\mathbb{Z}$$

对于任意$i\in P$，我们可以定义线性映射 $\psi_i:\ V\longrightarrow V$，使得

$$\varphi(v(i))=\psi_i(v)(i+a-b)\quad\text{for any } v\in V.$$

显然，所有的 ψ_i都是线性同构。

对于任意l、$m\in\mathbb{Z}$,$1\le i$、$j\le p-1$、$v\in V$、$k\in\mathcal{P}$，满足$j+k\in\mathcal{P}$、$i+j+k\in\mathcal{P}$，由等式

$$\begin{aligned}&\Omega_{l,m}^{(i,j,2h)}\cdot\left(\psi_{\bar{k}}(v)(k+a-b)\right)=\Omega_{l,m}^{(i,j,2h)}\cdot\varphi(v(k))=\varphi\left(\Omega_{l,m}^{(i,j,2h)}\cdot v(k)\right)\\&=(-1)^h p^{2h}\binom{2h}{h}\varphi\left(I_h^2 v(pl+i+j+k)\right)\in W\otimes x^{pl+i+j+k+a-b}\setminus\{0\}\end{aligned}$$

由引理3.2 可知$h\le n$。将 φ^{-1} 应用于上述论证，可得 $n\le q$。因此$h=n$。于是上述等式变为

$$\varphi\left(I_h^2 v(pl+i+j+k)\right)=I_h^2\psi_{\bar{k}}(v)(pl+i+j+k+a-b)$$

根据引理 3.2，或者（注意到 I_h 在 V 上的作用是线性同构）

$$\varphi\left(v(pl+i+j+k)\right)=I_h^2\psi_{\bar{k}}\left(I_h^{-2}v\right)(pl+i+j+k+a-b)$$

对于任意$l\in\mathbb{Z}$、$v\in V$、$1\le i$、$j\le p-1$、$k\in\mathcal{P}$，满足$j+k\in\mathcal{P}$、$i+j+k\in\mathcal{P}$。取$l\in\mathbb{Z}$使得$pl+i+j+k=\overline{i+j+k}$，于是得到

$$\psi_{\overline{i+j+k}}(v)=I_h^2\psi_{\bar{k}}\left(I_h^{-2}v\right),$$

这意味着 $\psi_i=\psi_j$ 对于所有i、$j\in P$。对任意$i\in P$，令 $\psi=\psi_i$。于是有

$$\varphi(v(l))=\psi(x)(l+a-b)\quad\text{for any } v\in V,l\in\mathcal{P}.$$

F由 $\varphi(L_{pm}\cdot v(j-pm))=L_{pm}\cdot\varphi(v(j-pm))$，其中$m\in\mathbb{Z}$、$v\in V$、$j\in P$，我们有 e

$$\psi\left(\left(a+j-pm+\sum_{k=0}^{q}\frac{(pm)^{k+1}}{(k+1)!}L_k\right)v\right)=\left(a+j-pm+\sum_{k=0}^{t}\frac{(pm)^{k+1}}{(k+1)!}L_k\right)\psi(v).$$

这意味着$q=t$ 并且

$$\sum_{k=0}^{q}\frac{(pm)^{k+1}}{(k+1)!}(\psi(L_k v)-L_k\psi(v))=0\quad\text{for any } m\in\mathbb{Z}.$$

因此，对于任意$v\in V$、$k\in\mathbb{N}$，有 $\psi(L_k v)=L_k\psi(v)$。

由 $\varphi(I_{pm+i}\cdot v(j-pm))=I_{pm+i}\cdot\varphi(v(j-pm))$，其中 $m\in\mathbb{Z}$,$1\le i\le p-1$，$j\in P$ 且 $i+j\in\overline{P}$，可知

$$\sum_{k=0}^{h-d_i}\frac{(pm+i)^{k+d_i}}{(k+d_i)!}\psi(I_{k+d_i}v)=\sum_{k=0}^{h-e_i}\frac{(pm+i)^{k+e_i}}{(k+e_i)!}I_{k+e_i}\psi(v)\quad\text{for any } m\in\mathbb{Z}.$$

将上述等式两边视为以 m 为变量、系数属于 W 的多项式，可得 $d_i = e_i$ 对所有 $i \in P - P$均成立，且对任意 $k \geq 0$，$\psi(I_{k+d_i}v) = I_{k+d_i}\psi(v)$。等价地，

$$\psi(I_k v) = I_k \psi(v) \quad \text{for any } v \in V, k \geq \min\{\boldsymbol{d}, P - P\}.$$

这证明了 ψ 是一个 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P-P\}}$-模同构，证明完毕。 □

现在，我们确定当 $\mathbb{T}$ 时，模 $M_{\mathbb{T}}(V,a,\boldsymbol{d})$ 的同构类。

定理 *4.2*。设 d、e、a、b、h、q、n、t、V、W 如定理 *4.1* 中所述。则 $M_{\mathbb{T}}(V, a, d) \cong M_{\mathbb{T}}(W, b, e)$ 作为 $\mathbb{T}$-模当且仅当 $a - b \in \mathbb{Z}$、$h = n$、$q = t$、$d = e$，且 $V \cong W$ 作为 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d}\}}$-模。

证明。注意，$M_{\mathbb{T}}(V, a, d) \cong M_{\mathbb{T}}(W, b, e)$ 作为 $\mathbb{T}$-模这一陈述意味着，g-模 $M_{\mathfrak{g}}(V, a, d, P)$ 和 $M_{\mathfrak{g}}(W, b, e, Q)$ 同构，其中 $P = Q = \{0, 1, \ldots, p - 1\}$。然后结论由定理 4.1 得出。□

注 4.3。设 a、b、$c \in \mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}v$ 是一个 $\mathbb{T}_0$-模，满足 $L_0 v = bv$，$I_0 v = cv$，$L_k v = I_k v = 0$ 对 $k > 0$ 成立。

(1) 则 $v \otimes \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 上存在一个 $\mathbb{T}$-模结构，其作用为

$$L_m \cdot v(k) = (a + k + bm)v(m + k),\ I_m \cdot v(k) = cv(m + k) \quad \textit{for any } m, k \in \mathbb{Z}.$$

所得 $\mathbb{T}$-模是中间系列模 $A_{a,\ b,\ c}$（参见 [7]）。

(2) 设 P 是 $\{0, 1, \ldots, p - 1\}$ 的一个子集，且 $(d_1, d_2, \ldots, d_{p-1}) \in \{0, 1\}^{p-1}$ 满足 t

$$\min\{d_1, d_2, \ldots, d_{p-1}\} = 0 \quad \textit{and} \quad \overline{i + j} \in P \textit{ provided that } j \in P, d_i = 0.$$

设 $F = (F_{i,\ j})$ 为一个以 $1 \leq i \leq p-1$，$0 \leq j \leq p-1$ 为指标，且 $F_{i,\ j} = c\delta_{d_i,\ 0}\delta_{j,\ P}$ 的 $(p-1)\times p$ 矩阵。则 $v \otimes \mathbb{C}[P]$ 上存在一个 $\mathfrak{g}$-模结构，其作用为

$L_{pm} \cdot v(k) = (a + k + bpm)v(m + k)$，$I_{pm+i} \cdot v(k) = F_{i,\ k}v(pm + i + k)$ 对于 $m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathcal{P}$，$1 \leq i \leq p-1$。

所得的$\mathfrak{g}$-模是 [13] 中构造的中间系列模 $V(a,b,F)$。

5. 这些模是新的

本节将证明，第 3 节中构造的模对于 $\mathbb{T}$和 $\mathfrak{g}$ 都是新的模。

这些 $\mathbb{T}$-模 $M_{\mathbb{T}}(V, a, \boldsymbol{d})$ 是 $M(V,a)$ 在 [3]中的推广。据我们所知，这些模是 $\mathbb{T}$ 的新单权模。

对于$p > 2$，据我们所知，本文之前研究过的 gap-p 维拉索罗代数 g 上的权模仅有 Harish-Chandra 模。注意，任何不可约的 $\mathbb{T}_0$ (或 $\mathbb{T}_1$)-模 V 若 $\dim V > 1$，则必为无限维。因此，若 $\dim V > 1$，则 g-模$M_{\mathfrak{g}}(V, a, \boldsymbol{d}, P)$ 是 g 上具有无限维权空间的新单权模。

在本章节的其余部分中，我们设定 $p = 2$，此时 g 与镜像海森堡-维拉索罗代数同构。

定义 5.1. 镜像海森堡-维拉索罗代数是一个复李代数 $\mathbb{M}$，其基为

$$\left\{d_i, h_r, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{l} \mid i \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right\}$$

且交换关系为

$$[d_m, d_n] = (m-n)d_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\boldsymbol{c}\delta_{m+n,0};$$
$$[d_m, h_r] = -rh_{m+r}; \quad [h_r, h_s] = r\boldsymbol{l}\delta_{r+s,0}, \quad [\boldsymbol{c}, \mathbb{M}] = [\boldsymbol{l}, \mathbb{M}] = 0,$$

其中 $m,\ n \in \mathbb{Z},\ r,\ s \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$。

容易看出，由下式定义的线性映射

$$L_{2m} \mapsto 2d_{-m}, \quad I_{2m+1} \mapsto 2h_{-m-\frac{1}{2}}, \quad C_0 \mapsto 4\boldsymbol{c}, \quad C_1 \mapsto -2\boldsymbol{l}$$

对$m \in \mathbb{Z}$，是从 g 到 $\mathbb{M}$ 的李代数同构。

由于对于 g （V，a，$\boldsymbol{d}$，P）的模 $\mathfrak{g}$ 且 $\dim V > 1$ 具有无限维权空间，因此它们并非 [9], 中分类的 Harish-Chandra 模，也当然不是 [2, 4] 和 [12] 中研究的非最高权型受限模。

在 [6]，中，研究了 $\mathbb{M}$ 上不可约最高权模与中间系列模的张量积。这些模具有无限维权空间。下面回顾 $\mathbb{M}$ 上的最高权模与中间系列模。

设 α、$\beta \in \mathbb{C}$、$\gamma \in \mathbb{C}^\times$，并令 Q 为 $\{0,1\}$ 的非空子集。则向量空间$A(\alpha,\beta,\gamma,Q) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_{r+2k} \mid r \in Q, k \in \mathbb{Z}\}$ carries a g-模结构，其作用为

$$L_{2m}v_{r+2k} = (\alpha + 2\beta m + 2k + r)v_{r+2m+2k}; \quad \boldsymbol{c}v_k = \boldsymbol{l}v_k = 0;$$
$$I_{2m+1}v_{r+2k} = \begin{cases} 0 & \text{if } Q = \{0\} \text{ or } Q = \{1\}; \\ v_{2m+2n+1} & \text{if } Q = \{0,1\}, r = 0; \\ \gamma v_{2m+2n+2} & \text{if } Q = \{0,1\}, r = 1 \end{cases}$$

对 m、n、k $\in \mathbb{Z}$，r $\in$Q。g-模 A(α,β,γ, Q) 可约当且仅当 Q $\neq \{0,1\}$、$\alpha \in 2\mathbb{Z}$且 $\beta \in \{0,1\}$。我们用 A′(α,β,γ, Q) 表示 A(α,β,γ, Q) 的唯一不可约子商。回顾 (2.2) 中的算子 $\Omega^{(i,j,s)}$ l,m，容易验证

$$\Omega^{(1,1,s)}_{l,m}u = 0 \quad \text{for any } l,m \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}, u \in A'(\alpha,\beta,\gamma,Q). \tag{5.1}$$

以下结果来自 [9,定理 3.9] 和 [13, 定理 4.3]。

引理 5.2. 任意中间系列的不可约 $\mathfrak{g}$-模均同构于 $A'(\alpha,\beta,\gamma,Q)$，其中 $\alpha,\beta \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{C}^\times, \emptyset \neq Q \subseteq \{0,1\}$。

令 $\mathfrak{g}_+ = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{L_{2m}, I_{2m+1}, C_0, C_1 \mid m \in \mathbb{N}\}$。对于$c$、$h$、$l \in \mathbb{C}$，令 $\mathbb{C}\mathbf{1}$ 为一维 $\mathfrak{g}_+$-模，其

$$L_0\mathbf{1} = h\mathbf{1}, \quad C_0\mathbf{1} = c\mathbf{1}, \quad C_1\mathbf{1} = l\mathbf{1}, \quad L_{2m}\mathbf{1} = I_{2m-1}\mathbf{1} = 0 \quad \text{for any } m \in \mathbb{Z}_+.$$

g 上的 Verma 模定义为

$$M(c,h,l) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)} \mathbb{C}\mathbf{1}.$$

用J表示$M(c, h, l)$的唯一极大子模，并令

$$L(c,h,l) = M(c,h,l)/J,$$

称其为层级为（c,h,l）的最高权 g-模。用$\mathbf{1}$ 表示$\mathbf{1}$ 在$L(c, h, l)$中的像。

张量积L(复数域, h, l) $\otimes A'(\alpha,\beta,\gamma,Q)$ 的不可约性已在 [6, 定理 3.11] 中给出。在下面的命题中，我们证明第 3 节所研究的模与这些张量积模均不同构

于其中任何一个。因此，我们得出结论：构造出了一类新的镜像海森堡-维拉索罗代数不可约权模。

命题 *5.3.* 设 $a \in \mathbb{C}$，$d = (d_0, d_1) \in \{0,1\}^2$，$P \subseteq \{0,1\}$，并设 V 是一个湮灭层级为 (n, t) 的不可约 $\mathbb{T}_{\min\{d,P\}}$-模。那么，g-模 $M_{\mathfrak{g}}(V, a, d, P)$ 不同构于 $L(c, h, l) \otimes A'(\alpha, \beta, \gamma, Q)$，其中 $c, h, l, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \emptyset \neq Q \subseteq \{0,1\}$任意。

证明。 取 l，$m \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $l-m-n > 0$。则易见 $I_{2m+2k+1}\mathbf{1} = I_{2l-2m-2k+1}\mathbf{1} = 0$对于任意 $0 \leq k \leq \bar{n}$。对于任意 $u \in A(\alpha, \beta, \gamma, Q)$，由（5.1）可得

$$\Omega_{l,m}^{(1,1,2n)}(\bar{\mathbf{1}} \otimes u) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} \binom{2n}{k} I_{2l-2m-2k+1} I_{2m+2k+1}(\bar{\mathbf{1}} \otimes u)$$

$$= \bar{\mathbf{1}} \otimes \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} \binom{2n}{k} I_{2l-2m-2k+1} I_{2m+2k+1} u \right) = \bar{\mathbf{1}} \otimes \left(\Omega_{l,m}^{(1,1,2n)} u \right) = 0.$$

另一方面，根据引理3.2，算子 $\Omega^{(1,1,2n)}$l,m 在 $M_{\mathfrak{g}}$(V, a, d, P) 上的作用是线性同构。因此，$M_{\mathfrak{g}}$(V, a, d, P) 不可能与任何 L(c, h, l) $\otimes$ A′(α, β, γ, Q) 同构。□

6. 一些不可约非权模

本章节旨在通过对模 $\mathbb{T}$ 和 $\mathfrak{g}$ 应用 [8] 中的扭变技巧，构造一类新的、具有平凡中心作用的非权模 $M_{\mathbb{T}}(V, a, \boldsymbol{d})$ 和$M_{\mathfrak{g}}(V, a, \boldsymbol{d}, P)$.

令 $f = \sum_i a_i x^i \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$。在 $M_{\mathbb{T}}(V, a, \boldsymbol{d})$ 上定义一种新的 $\mathbb{T}$-模结构如下：

$$L_m \circ v = \left(L_m + \sum_i a_i I_{m+i} \right) \cdot v; \quad I_m \circ v = I_m \cdot v \quad \text{for any } m \in \mathbb{Z}, v \in M_{\mathbb{T}}(V, a, \boldsymbol{d}).$$

所得的 $\mathbb{T}$-模记为 $M_{\mathbb{T}}^f(V, a, \boldsymbol{d})$。

定理 6.1。 设 $\boldsymbol{d} \in \{0,1\}^p, a \in \mathbb{C}$ 且 V 是某个固定湮灭层级的不可约 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d}\}}$-模。那么对任意 $f \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$，$\mathbb{T}$-模 $M_{\mathbb{T}}^f(V, a, \boldsymbol{d})$ 都是不可约的。

证明。记

$$\alpha = \sum_i \frac{a_i}{i} I_i \in \mathbb{T} \quad \text{and} \quad \theta_\alpha = \exp(\mathrm{ad}\alpha).$$

于是可知，$\mathbb{T}$-模 $M_{\mathbb{T}}^f(V, a, \boldsymbol{d})$ 是 $M_{\mathbb{T}}(V, a, \boldsymbol{d})$ 的 θ_α-扭曲，即有

$$u \circ v = \theta_\alpha(u) \cdot v \quad \text{for any} \quad u \in \mathbb{T}, v \in M_{\mathbb{T}}(V, a, \boldsymbol{d}).$$

那么，$M_{\mathbb{T}}^f(V, a, \boldsymbol{d})$ 的不可约性等价于 $M_{\mathbb{T}}(V, a, \boldsymbol{d})$ 的不可约性，由3.4定理可得。□

设 $g = \sum_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} a_i x^i \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$。在 $M_{\mathfrak{g}}(V, a, \boldsymbol{d}, P)$ 上定义了一种新的 g-模结构

$$L_{pm} \circ v = \left(L_{pm} + \sum_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} a_i I_{pm+i} \right) \cdot v; \quad I_{pm+j} \circ v = I_{2m+j} \cdot v$$

对于任意 $1 \leq j \leq p-1, m \in \mathbb{Z}, v \in M_{\mathfrak{g}}(V, a, \boldsymbol{d}, P)$，我们将所得的 g-模记为$M^g{}_{\mathfrak{g}}(V, a, \boldsymbol{d}, P)$。

定理 6.2. 设$\boldsymbol{d} \in \{0,1\}^p, a \in \mathbb{C}, P \subseteq \{0,1,\ldots,p-1\}$和 V 是某个固定湮灭层级的不可约 $\mathbb{T}_{\min\{\boldsymbol{d},P\}}$-模。那么对于任意 $g = \sum_{i\in\mathbb{Z}\setminus p\mathbb{Z}} a_i x^i \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$，$g$-模 $M^g{}_{\mathfrak{g}}(V,a,\boldsymbol{d},P)$ 都是不可约的。

证明。 证明与定理 6.1的证明类似，细节从略。 □

注 6.3。 *(1)* $\mathbb{T}$-模 $M^f_{\mathbb{T}}(V, a, \boldsymbol{d})$ 推广了 [3, 章节 5], 中研究的模，因此不同构于 [2, 4]和 [12] （见 [3, 命题 5。1]）。因此，它们是 $\mathbb{T}$ 的新的非权模。

(2) 通过与命题 *5.3*类似的证明，可以证明 $\mathfrak{g}$-模 $M^g{}_{\mathfrak{g}}(V, a, \boldsymbol{d}, P)$ 不同构于 [5] 中的受限模（当 $p > 2$ 时），并且不同构于 [12]中的受限模（当 $p = 2$ 时）。因此，它们是 $\mathfrak{g}$ 的新的非权模。

致谢： C. Xu 受到国家自然科学基金（编号：12261077）的资助。

参考文献

[1] K. Barron，关于 N = 2 超对称顶点算子超代数的扭模，载于：李理论及其在物理学中的应用。施普林格数学与统计学会议录，第36卷。东京：施普林格，2013，411-420。1, 3[2] H. Chen 与 X. Guo，海森堡-维拉索罗代数的新单模，J. Algebra 390 (2013)，77-86。1, 2, 10, 12[3] H. Chen、J. Han 与 Y. Su，扭曲海森堡-维拉索罗代数上的一类单权模，J. Math. Phys. 57 (2016)，101705。2, 9, 12[4] D. Gao，海森堡-维拉索罗代数的单受限模，J. Algebra 574 (2021)，233-251。1, 10, 12[5] H. Guo 与 C. Xu，间隔-p Virasoro 代数的受限模及某些顶点代数的扭模，J. Pure Appl. Algebra 227 (2023)，107322。1, 12[6] D. Gao 与 K. Zhao，镜像海森堡-维拉索罗代数的张量积权模，J. Pure Appl. Algebra 226 (2022)，106929。1, 10[7] D. Liu 与 C. Jiang，扭曲海森堡-维拉索罗代数上的 Harish-Chandra 模，J. Math. Phys. 49 (2008)，012901。9[8] R. L¨u、X. Guo 与 K. Zhao，维拉索罗代数上的不可约模，Doc. Math. 16 (2011)，709-721。2, 11[9] D. Liu、Y. Pei、L. Xia 与 K. Zhao，镜像海森堡-维拉索罗代数上的不可约模，Commun. Contemp. Math. 24 (2022)，2150026。1, 3, 10[10] R. L¨u 与 K. Zhao，扭曲海森堡-维拉索罗代数上不可约权模的分类。Commun. Contemp. Math. 12 (2010)，183-205。1[11] R. L¨u 与 K. Zhao，扭曲海森堡-维拉索罗代数的广义振子表示，Algebr. Represent. Theory 23 (2020)，1417-1442。1[12] H. Tan、Y. Yao 与 K. Zhao，作为顶点算子代数模的海森堡-维拉索罗代数上的单受限模，arXiv:2110.05714v2。1, 10, 12[13] C. Xu，gap-p 维拉索罗代数上不可约哈里什-钱德拉模的分类，J. Algebra 542 (2020)，1-34。1, 3, 9, 10[14] C. Xu、F. Chen 与 S. Tan，gap-p 维拉索罗代数上的非权模，arXiv:2505.15273。1

C. Xu：上饶师范学院数学科学学院，上饶，江西，中华人民共和国电子邮箱：xiaoxiongxu@126.com

F. Zhang：上饶师范学院数学科学学院，上饶，江西，中华人民共和国电子邮箱：1024866868@qq.com，通讯作者