arXiv:2603.06016v1 [math.NT] 6 Mar 2026

关于格的丢番图指数谱

Oleg N. German

摘要

本文描述了任意维数格的弱一致丢番图指数的取值谱。

1 格的丢番图指数

设 Λ 是 $\mathbb{R}^d$中的一个满秩格。关于格点各坐标的乘积能接近零到何种程度，存在许多相关问题。例如，对于代数格，即全实代数扩张 $\mathbb{Q}$中的完备模的格（见 [1]），这种乘积与零点之间存在正距离。但是，如果非零格点各坐标的乘积可以任意小，那么一个自然的问题便是：这个乘积趋于零的速度有多快。对这一现象最简单的定量刻画由格的丢番图指数给出。

对于每个 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$，令

$$|\mathbf{x}| = \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i|, \qquad \Pi(\mathbf{x}) = \prod_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i|^{1/d}.$$

考虑格 Λ 的无理性测度函数的一种类似物

$$\psi_\Lambda(t) = \min_{\substack{\mathbf{x}\in\Lambda \\ 0<|\mathbf{x}|\leqslant t}} \Pi(\mathbf{x}).$$

定义 1。设 Λ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个满秩格。量

$$\omega(\Lambda) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \liminf_{t\to+\infty} \left(t^\gamma \psi_\Lambda(t)\right) < +\infty\right\}$$

称为 Λ的（常规）丢番图指数。量

$$\bar{\omega}(\Lambda) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \limsup_{t\to+\infty} \left(t^\gamma \psi_\Lambda(t)\right) < +\infty\right\}$$

称为 Λ的（弱）一致丢番图指数。

$\bar{\omega}$（Λ）名称中含有“弱”一词，是因为正则指数至少有两种一致类比的定义，分别导出强一致指数和弱一致指数。详情可见论文 [2]和 [3], ，其中证明了强一致指数的

在任意维数下都只能取平凡值，而弱一致指数在二维情形下可以取线段 $[0,+\infty]$中的所有值。本文旨在描述任意维数下 $\bar{\omega}$（Λ）所有可取值构成的谱。

明可夫斯基凸体定理和格的丢番图指数的定义立即推出以下不等式

$$\omega(\Lambda) \geqslant \bar{\omega}(\Lambda) \geqslant 0.$$

直到最近，关于维数为 $d \geqslant 3$ 时 $\omega(\Lambda)$ 的谱，即 .
关于集合

$$\mathbf{\Omega}_d = \left\{ \omega(\Lambda) \,\middle|\, \Lambda \text{ is a full-rank lattice in } \mathbb{R}^d \right\},$$

是它包含射线 $[3-d(d-1)^{-2},\ +\infty]$、点 0 以及某个有限点集（见 [4], [5], [6], [7]）。然而，人们自然会预期，对于每个 d，ΩΩΩ 的谱$_d$ 都与射线 $[0,+\infty]$重合。最近，Nikolay Moshchevitin 在 [8]中解决了这个问题。因此，我们现在知道以下结论成立，这要归功于 Moshchevitin。

定理 1. 对于任意 $d \geqslant 2$，都有 $\Omega\Omega\Omega_d = [0,+\infty]$。

本文证明了关于 $\bar{\omega}(\Lambda)$ 的一个类似结论。集合

$$\bar{\mathbf{\Omega}}_d = \left\{ \bar{\omega}(\Lambda) \,\middle|\, \Lambda \text{ is a full-rank lattice in } \mathbb{R}^d \right\}.$$

以下陈述是本文的主要结果。

¯定理2. 对于任意 $d \geqslant 2$，都有 $\Omega\Omega\Omega_d = [0,+\infty]$。

值得注意的是，在定理 2 的证明中，我们主要采用了 Moshchevitin 论文 [8]中所包含的思想。

本文结构如下。第 2节定义双曲极小值——这是解决乘法问题的一个非常有用的工具。第 3节研究二维乘法问题，这有助于我们处理更高维的情形。第 4 节和 5节致力于构造一个秩为 2 的格 $\mathbb{R}^d$，并将其补充为一个秩为 d的格。第 6 节证明一个度量性质的关键结论，从而能够恰当地将秩为 2 的格补充为秩为 d的格。最后，第 7 节证明定理2，并说明如何借助本文发展的构造证明 Moshchevitin 的定理 1 。

2 格的双曲极小值

在丢番图逼近理论的许多经典问题中，最佳逼近发挥着重要作用，而其定义因具体情形而异。对于涉及格的丢番图指数的问题，我们面对的是这类问题本质上的乘法性质。因此，最佳逼近的角色由所谓的双曲极小值承担。

定义2。 设Λ 是 $\mathbb{R}^d$中的一个满秩格。若不存在非零点$\mathbf{x} \in \Lambda$ 使得双曲极小点 Λ 中不存在非零点$\mathbf{y} \in \Lambda$ 满足

$$|\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| \qquad \text{and} \qquad \Pi(\mathbf{y}) < \Pi(\mathbf{x}).$$

请注意，上确界范数 $|\cdot|$的选择相当常见。选择任何其他范数都不会影响丢番图指数的取值，因为 $\mathbb{R}^d$中的所有范数都等价，而且格的位似变换会保持其指数。在某些问题中，使用不同于上确界范数的范数会非常方便。因此，我们对定义2作出修改。

定义3。设Λ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个满秩格，且 $|\cdot|_*$ 是$\mathbb{R}^d$中的任意范数。若不存在非零点 $\mathbf{y} \in \Lambda$ 满足以下条件，则称非零点$\mathbf{x} \in \Lambda$ 是关于 $|\cdot|_*$ 的双曲极小点

$$|\mathbf{y}|_* \leqslant |\mathbf{x}|_* \qquad \text{and} \qquad \Pi(\mathbf{y}) < \Pi(\mathbf{x}).$$

在此先说明，由于所有范数都等价，也就是说，对于每个范数 $|\cdot|_*$，都存在正常数 c_1， c_2 使得对任意$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$，均有

$$c_1|\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{x}|_* \leqslant c_2|\mathbf{x}|,$$

每当我们使用符号 $\gg$、 $\ll$、 $\asymp$时，通常假定其中隐含的常数取决于范数 $|\cdot|_*$，尽管我们没有明确指出这一点。

我们设

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \Big\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |\mathbf{y}|_* \leqslant |\mathbf{x}|_*,\ \Pi(\mathbf{y}) < \Pi(\mathbf{x})\Big\}.$$

由定义 3 显然可知， Λ 的非零点 $\mathbf{x}$ 是 Λ 关于 $|\cdot|_*$ 的双曲极小点，当且仅当 $\mathcal{H}(\mathbf{x}) \cap \Lambda = \{\mathbf{0}\}$。

若 $\mathbf{x}$ 是 Λ 的双曲极小点（关于$|\cdot|_*$），则当然 $-\mathbf{x}$ 也是 Λ 的双曲极小点。可能还存在其他双曲极小值，其泛函 $|\cdot|_*$ 与 $\Pi(\cdot)$ 取相同的值。我们从每一个这样的集合中选取一个代表，并按范数递增 $|\cdot|_*$ 将它们排序。由此得到双曲极小值序列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}3, \ldots$（见图1），满足 $|\mathbf{x}_k|_* < |\mathbf{x}_{k+1}|_*$, $\Pi(\mathbf{x}_{k+1}) \leqslant \Pi(\mathbf{x}_k)$ 以及 $\mathcal{H}(\mathbf{x}_k) \cap \Lambda = \{\mathbf{0}\}$，其中

$$\bar{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_k) = \Big\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |\mathbf{y}|_* < |\mathbf{x}_{k+1}|_*,\ \Pi(\mathbf{y}) < \Pi(\mathbf{x}_k)\Big\}.$$

若 $\Pi(\cdot)$ 在 Λ 的非零点处取任意小的值，但在这些点处均不为零，则双曲极小点集是无限的。在这种情况下， $\omega(\Lambda)$、 $\bar{\omega}(\Lambda)$ 满足以下关系

$$\omega(\Lambda) = \sup\Big\{\gamma \in \mathbb{R} \,\Big|\, \forall\, K \in \mathbb{N}\ \ \exists\, k \geqslant K:\ \Pi(\mathbf{x}_k) \leqslant |\mathbf{x}_k|_*^{-\gamma}\Big\}, \tag{1}$$

$$\bar{\omega}(\Lambda) = \sup\Big\{\gamma \in \mathbb{R} \,\Big|\, \exists\, K \in \mathbb{N}:\ \forall k \geqslant K\ \ \Pi(\mathbf{x}_k) \leqslant |\mathbf{x}_{k+1}|_*^{-\gamma}\Big\}. \tag{2}$$

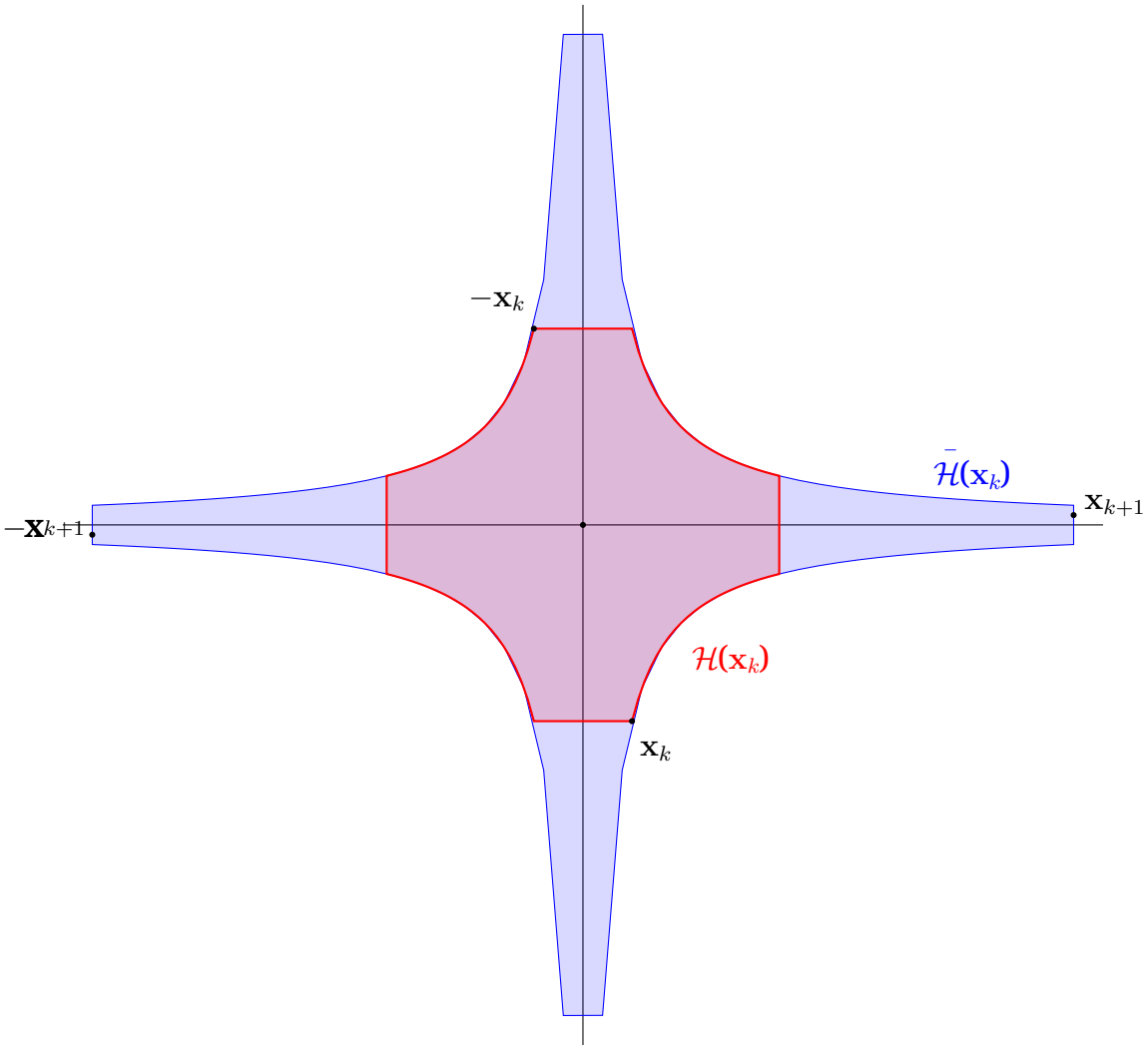


图1：连续双曲极小值

3 二维情形与附加线性形式

二维情形将在定理证明中发挥关键作用2。更具体地说，对于 $d \geqslant 3$，我们考虑一个处于一般位置的二维子空间 $\mathcal{L}$，在其中构造一个秩2格，使其在前两个坐标平面上的投影具有给定的常规指数或一致指数，随后将该格补全为 $\mathbb{R}^d$ 中的满秩格。相应地，由于我们必须控制 d 中各点所有 $\mathcal{L}$坐标的乘积，因此必须学会如何处理二维情形下常规指数和一致指数的以下修正形式。

设 $\ell_1, \dots, \ell_n$ 是关于两个变量 $n \geqslant 1$ 的任意非零线性形式。为简洁起见，我们将这个 n 元组记为 $\mathbf{L}$，即 $\mathbf{L} = (\ell_1, \dots, \ell_n)$。

对于每个$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，令

$$\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = \left| x_1 x_2 \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \ell_i(\mathbf{x}) \right|^{1/(n+2)}.$$

对于每个秩2格 Γ in $\mathbb{R}^2$，令

$$\psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t) = \min_{\substack{\mathbf{x}\in\Gamma \\ 0<|\mathbf{x}|\leqslant t}} \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x})$$

并定义指数

$$\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \sup\Big\{\gamma\in\mathbb{R}\;\Big|\; \liminf_{t\to+\infty}\big(t^{\gamma}\psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t)\big) < +\infty\Big\},$$

$$\bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \sup\Big\{\gamma\in\mathbb{R}\;\Big|\; \limsup_{t\to+\infty}\big(t^{\gamma}\psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t)\big) < +\infty\Big\}. \tag{3}$$

注意， $\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma)$、 $\bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma)$不一定非负。定义和闵可夫斯基定理给出的唯一不等式是

$$\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma) \geqslant \bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma) \geqslant -\frac{n}{n+2}\,. \tag{4}$$

我们称$\mathbf{L}$关于 Γ 对数劣可逼近，如果存在常数$\varepsilon>0$和 $c>0$，使得对于每个 $i=1,\ldots,n$ 以及每个非零 $\mathbf{x}\in\Gamma$，都有

$$|\ell_i(\mathbf{x})| > \frac{c}{|\mathbf{x}|\log^{1+\varepsilon}(1+|\mathbf{x}|)}.$$

引理 1. 设 Γ是 $\mathbb{R}^2$中的一个秩为2 的格。假设$\mathbf{L}$ 中线性形式的所有系数均非零，且 $\mathbf{L}$ 中任意两个形式都不成比例。设$\mathbf{L}$ 关于 Γ对数劣可逼近。令

$$\omega(\Gamma) = \delta.$$

Then

$$\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \max\left(0,\, \frac{2\delta-n}{n+2}\right).$$

证明。 考虑集合

$$\mathcal{S}_0 = \Big\{\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\;\Big|\; \min\big(|x_1|,|x_2|\big)<1\Big\}, \tag{5}$$

$$\mathcal{S}_j = \Big\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\;\Big|\; |\ell_j(\mathbf{x})|<1\Big\}, \qquad j=1,\ldots,n. \tag{6}$$

由线性形式的条件可知，对于$\mathbf{x}\in\mathcal{S}_0\backslash\{\mathbf{0}\}$

$$\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) \asymp_{\mathbf{L}} \Big(\Pi(\mathbf{x})^2|\mathbf{x}|^n\Big)^{\frac{1}{n+2}} > |\mathbf{x}|^{-\frac{2\delta-n}{n+2}+o(1)} \quad \text{as} \quad |\mathbf{x}|\to\infty,$$

对于任意的$\mathbf{x}\in\mathcal{S}_j\backslash\{\mathbf{0}\}$ $j=1,\ldots,n$

$$\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) \gg_{\mathbf{L}} \left(\frac{|\mathbf{x}|^{n+1}}{|\mathbf{x}|\log^{1+\varepsilon}(1+|\mathbf{x}|)}\right)^{\frac{1}{n+2}} \gg_{\varepsilon} 1.$$

但如果$\mathbf{x}\notin\mathcal{S}_0\cup\mathcal{S}_1\cup\ldots\cup\mathcal{S}_n$，那么 $\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x})\geqslant 1$。

根据（1），存在一个子序列（$\mathbf{x}^{k_j}$）$_{j\in\mathbb{N}}$ 关于 Γ 上确界范数的双曲极小值，使得

$$\Pi(\mathbf{x}_{k_j}) = |\mathbf{x}_{k_j}|^{-\delta+o(1)} \quad \text{as} \quad j \to \infty.$$

对于这些点，我们有

$$\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_{k_j}) \asymp_{\mathbf{L}} \left(\Pi(\mathbf{x}_{k_j})^2 |\mathbf{x}_{k_j}|^n\right)^{\frac{1}{n+2}} = |\mathbf{x}_{k_j}|^{-\frac{2\delta-n}{n+2}+o(1)} \quad \text{as} \quad j \to \infty.$$

若 $\delta < n/2$，则

$$\frac{2\delta - n}{n+2} < 0,$$

因此，在这种情况下，泛函 $\Pi_{\mathbf{L}}(\cdot)$ 与零保持正距离，这意味着 $\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma) = 0$。若 $\delta \geqslant n/2$，则得到

$$\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \frac{2\delta - n}{n+2}\,.$$

引理得证。 □

引理 2. 设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个秩为2 的格。假设线性形式 $\mathbf{L}$ 的所有系数均非零，且 $\mathbf{L}$ 中任意两个形式都不成比例。设$\mathbf{L}$ 关于 Γ 是对数劣可逼近的。另假设，关于某个范数 $|\cdot|_*$，Γ 的双曲极小值序列 $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 满足下列关系

$$|\mathbf{x}_{k+1}|_* \asymp |\mathbf{x}_k|_*^{\beta}, \qquad \Pi(\mathbf{x}_k) \asymp |\mathbf{x}_k|_*^{(1-\beta^2)/2}, \qquad \beta \geqslant \sqrt{n+1}. \tag{7}$$

Then

$$\bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \frac{\beta - (n+1)\beta^{-1}}{n+2}\,.$$

证明。定义集合 $\mathcal{S}_0$、$\mathcal{S}_1$、……、$\mathcal{S}_n$，使其满足 (5)、(6)。正如我们在引理1的证明中所示，我们有 $\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) \gg_{\mathbf{L}} 1$，对于 $\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_0$。对于 $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0\backslash\{\mathbf{0}\}$，由于线性形式的系数均非零，我们有

$$\prod_{j=1}^{n} |\ell_j(\mathbf{x})| \asymp_{\mathbf{L}} |\mathbf{x}|_*^n\,. \tag{8}$$

考虑关于$\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的双曲极小值序列 Γ 相对于 $|\cdot|_*$。根据连续双曲极小值的定义及关系式（8），对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 以及每个满足$\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0$ 的

$$|\mathbf{x}_k|_* \leqslant |\mathbf{x}|_* < |\mathbf{x}_{k+1}|_*,$$

我们有

$$\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) \asymp_{\mathbf{L}} \left(\Pi(\mathbf{x})^2 |\mathbf{x}|_*^n\right)^{\frac{1}{n+2}} \geqslant \left(\Pi(\mathbf{x}_k)^2 |\mathbf{x}_k|_*^n\right)^{\frac{1}{n+2}} \asymp_{\mathbf{L}} \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_k).$$

同时，由（7）可得

$$\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_{k+1}) \asymp_{\mathbf{L}} \left(\Pi(\mathbf{x}_{k+1})^2 |\mathbf{x}_{k+1}|_*^n\right)^{\frac{1}{n+2}} \asymp |\mathbf{x}_{k+1}|_*^{-\frac{\beta^2-(n+1)}{n+2}} \leqslant$$

$$\leqslant |\mathbf{x}_k|_*^{-\frac{\beta^2-(n+1)}{n+2}} \asymp \left(\Pi(\mathbf{x}_k)^2 |\mathbf{x}_k|_*^n\right)^{\frac{1}{n+2}} \asymp_{\mathbf{L}} \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_k).$$

因此，以下类似于（2）的结论成立：

$$\bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists\, K \in \mathbb{N} : \forall k \geqslant K \;\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_k) \leqslant |\mathbf{x}_{k+1}|_*^{-\gamma}\right\}. \tag{9}$$

再次应用（8）和（7），可得

$$\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_k) \asymp_{\mathbf{L}} \left(\Pi(\mathbf{x}_k)^2 |\mathbf{x}_k|_*^n\right)^{\frac{1}{n+2}} \asymp |\mathbf{x}_k|_*^{-\frac{\beta^2-(n+1)}{n+2}} \asymp |\mathbf{x}_{k+1}|_*^{-\frac{\beta-(n+1)\beta^{-1}}{n+2}}.$$

因此，由（9），立即可得

$$\bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \frac{\beta-(n+1)\beta^{-1}}{n+2}.$$

□

注。在引理2 的证明中，我们实际上证明了 Γ的双曲极小值在一定有界因子的意义下，起到了泛函 $\Pi_{\mathbf{L}}$（·的双曲极小值的类似作用。我们可以给出一个精确定义：若不存在非零点$\mathbf{x} \in \Gamma$ 满足以下条件，则称其为**L**-双曲极小点： Γ 不存在非零点$\mathbf{y} \in \Gamma$ 使得

$$|\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| \qquad \text{and} \qquad \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{y}) < \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}).$$

当然，与通常的双曲极小值情形相同，我们也可以定义连续的**L**-双曲极小值，并给出（1）、（2）的直接类似结果（见引理9的证明中的关系式（2））。

引理3。设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中秩为2 的格。假设**L**中线性形式的所有系数均非零。那么，对于几乎所有实数 τ， n 元组**L** 相对于 $D_\tau\Gamma$ 都是对数劣可逼近的，其中

$$D_\tau = \begin{pmatrix} 2^\tau & 0 \\ 0 & 2^{-\tau} \end{pmatrix}.$$

证明。令 $\Gamma = A\mathbb{Z}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}).$$

为方便起见，我们约定将 ℓ_i 视为列向量。那么，**L** 关于 $D_\tau\Gamma = D_\tau A\mathbb{Z}^2$ 对数劣可逼近，当且仅当 n元组

$$A^\top D_\tau \mathbf{L} = (A^\top D_\tau \ell_1, \ldots, A^\top D_\tau \ell_n)$$

关于 $\mathbb{Z}^2$对数劣可逼近。固定 i ，并假设 ℓ_i 的系数等于 a和 b。那么

$$A^\top D_\tau \ell_i = \begin{pmatrix} 2^\tau a_{1,1} & 2^{-\tau} a_{2,1} \\ 2^\tau a_{1,2} & 2^{-\tau} a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^\tau a_{1,1} a + 2^{-\tau} a_{2,1} b \\ 2^\tau a_{1,2} a + 2^{-\tau} a_{2,2} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\tau) \\ b(\tau) \end{pmatrix}.$$

若 τ 在某个不包含函数 $b(\tau)$ 零点的区间内取遍各值，则比值$a(\tau)/b(\tau)$也会取遍某个区间内的值，因为 $ab \neq 0$和 $a_{1,\ 1}a_{2,\ 2} - a_{1,\ 2}a_{2,\ 1} \neq 0$。此外，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$ ，级数

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t \log^{1+\varepsilon}(1+t)}$$

收敛。因此，根据辛钦定理（见 [9]），给定任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $c = c(\varepsilon) > 0$，使得对于几乎所有 $\tau \in \mathbb{R}$，不等式

$$|a(\tau)x_1 + b(\tau)x_2| > \frac{c}{|\mathbf{x}| \log^{1+\varepsilon}(1 + |\mathbf{x}|)}$$

对每个非零$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$均成立。鉴于有限个全测度集合的交集仍是全测度集合，我们得到了所需的结论。

□

4 构造二维子空间及其中的秩2 格

设 $d \in \mathbb{N}$、$d \geqslant 3$。令 $n = d - 2$。

任取实数 $a_1, \ldots, a_n$、$b_1, \ldots, b_n$，使得

$$0 < a_i < 1/2, \qquad 0 < b_i < 1/2, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

通过以下方式定义向量$\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ 和矩阵 L

$$\mathbf{a} = (1, 0, a_1, \ldots, a_n), \qquad \mathbf{b} = (0, 1, b_1, \ldots, b_n), \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

考虑子空间

$$\mathcal{L} = L\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$$

$\mathbb{R}^d$的。对于每个格 $\Gamma = A\mathbb{Z}^2$, $A \in \mathbf{GL(2, \mathbb{R})}$，设

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = L\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} A\mathbb{Z}^2.$$

那么，$\Gamma_{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{L}$ 中的一个秩2格，而 Γ 中的所有点都可以通过删除 $\Gamma_{\mathcal{L}}$ 中各点的最后 n 个坐标得到。

我们定义$\mathbf{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$如下。对于每个 $i = 1, \ldots, n$ 以及每个$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，设

$$\ell_i(\mathbf{x}) = a_i x_1 + b_i x_2.$$

引理 4. 给定一点$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，考虑点 $L\mathbf{x} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}$ 属于 $\mathcal{L}$。那么

$$|L\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| \qquad \textit{and} \qquad \Pi(L\mathbf{x}) = \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}).$$

证明。 用向量记法，我们有

$$x_1\mathbf{a}+x_2\mathbf{b}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\a_1x_1+b_1x_2\\\vdots\\a_nx_1+b_nx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ell_1(\mathbf{x})\\\vdots\\\ell_n(\mathbf{x})\end{pmatrix}.$$

这立即意味着

$$\Pi(L\mathbf{x})=\Big|x_1x_2\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\ell_i(\mathbf{x})\Big|^{1/d}=\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}).$$

考虑到（10），我们得到

$$|\ell_i(\mathbf{x})|=|a_ix_1+b_ix_2|\leqslant\frac{1}{2}|x_1|+\frac{1}{2}|x_2|\leqslant\max(|x_1|,|x_2|).$$

因此 $\max\big(|x_1|,|x_2|,|\ell_1(\mathbf{x})|,\ldots,|\ell_n(\mathbf{x})|\big)=\max(|x_1|,|x_2|)=|\mathbf{x}|$。

□

5 将 $\Gamma_{\mathcal{L}}$ 补充为秩为 d 的格

我们选择 $\Gamma_{\mathcal{L}}$ 中由正坐标向量组成的一组基。由于对$\mathbf{a}$ 和$\mathbf{b}$的选择，这是可行的。将所选基向量记为$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$。令向量$\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$将$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$补充为秩为 d 的格 Λ 的一组基。于是，向量$\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$线性无关，并且

$$\Lambda=\mathbb{Z}\mathbf{e}_1+\ldots+\mathbb{Z}\mathbf{e}_n+\mathbb{Z}\mathbf{v}_1+\mathbb{Z}\mathbf{v}_2.$$

引理5。定义子空间 $\mathcal{L}$ 和格 Γ, $\Gamma_{\mathcal{L}}$，如第4节中所述。设存在常数 $\varepsilon>0$ 和 $c>0$，使得对于每个 $\mathbf{v}\in\Lambda\backslash\Gamma_{\mathcal{L}}$，都有

$$\Pi(\mathbf{v})>\frac{c}{\log^{1+\varepsilon}(1+|\mathbf{v}|)}\,. \tag{11}$$

Then

$$\omega(\Lambda)=\max(0,\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma))\qquad\textit{and}\qquad\bar{\omega}(\Lambda)=\max(0,\bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma)).$$

证明。 若 $\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma)\leqslant 0$ (见 (4))，则由引理 4 和条件 (11)，对每个非零**向量** $\in\Lambda$，有

$$\Pi(\mathbf{v})>|\mathbf{v}|^{o(1)}\quad\text{as}\quad|\mathbf{v}|\to\infty.$$

在这种情况下，我们得到 $\omega(\Lambda)=\bar{\omega}(\Lambda)=0$。

设 $\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma)=\delta>0$。对于 **向量** $\in\Lambda\backslash\Gamma_{\mathcal{L}}$，条件 (11) 给出的估计为

$$\Pi(\mathbf{v})\gg|\mathbf{v}|^{-\delta/3}.$$

因此，每个足够大的$\mathbf{v}\in\Lambda$，只要满足不等式

$$\Pi(\mathbf{v})<|\mathbf{v}|^{-2\delta/3}$$

属于 $\Gamma_{\mathcal{L}}$。考虑到引理 4，我们得到，对于 $\gamma > 2\delta/3$

$$\liminf_{t\to+\infty}\big(t^{\gamma}\psi_{\Lambda}(t)\big) = \liminf_{t\to+\infty}\big(t^{\gamma}\psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t)\big),$$

由此立即可得 $\omega(\Lambda) = \omega_{\mathbf{L}}(\Gamma)$。

现在，令 $\bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \delta > 0$。正如我们先前所指出的，对于 $\mathbf{v} \in \Lambda\backslash\Gamma_{\mathcal{L}}$，我们有下界估计

$$\Pi(\mathbf{v}) \gg |\mathbf{v}|^{-\delta/3},$$

而对于函数 $\psi_{\Lambda,\,\mathbf{L}}(t)$，我们有上界估计

$$\psi_{\Lambda,\mathbf{L}}(t) \ll t^{-2\delta/3},$$

由定义等式 (3) 得出。结合定义1、关系式 (3) 和引理4，可得

$$\psi_{\Lambda}(t) = \min_{\substack{\mathbf{v}\in\Lambda\\ 0<|\mathbf{v}|\leqslant t}} \Pi(\mathbf{v}) \leqslant \min_{\substack{\mathbf{v}\in\Gamma_{\mathcal{L}}\\ 0<|\mathbf{v}|\leqslant t}} \Pi(\mathbf{v}) = \min_{\substack{\mathbf{x}\in\Gamma\\ 0<|\mathbf{x}|\leqslant t}} \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = \psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t) \ll t^{-2\delta/3}.$$

因此，我们有

$$\psi_{\Lambda}(t) = \psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t)$$

对于所有充分大的 t，由此立即可得 $\bar{\omega}(\Lambda) = \bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma)$。 □

6 主要度量引理

设点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 和格 $\Gamma_{\mathcal{L}} = \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2$ 与第 5 节中的相同。和之前一样，设$n = d - 2$。给定点 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{b}_i = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,d})$, $i = 1, \ldots, n$, 考虑单位立方体

$$\mathcal{B}_i = \Big\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \;\Big|\; b_{i,j} \leqslant |x_j| \leqslant b_{i,j} + 1,\ j = 1, \ldots, d\Big\}.$$

再设 $\mathbf{B} = \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n$。那么 $\mathbf{B}$ 也是 $\mathbb{R}^{nd}$ 中的一个单位立方体。对于每一种 $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{B}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathcal{B}_n$ 的取法， n 元组 $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ 满足

$$\mathbf{E} \in \mathbf{B}.$$

引理 6。 设立方体 $\mathbf{B}$ 的选取满足：对于每个 $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \in \mathbf{B}$，向量$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 线性无关。对每个 $\mathbf{E} \in \mathbf{B}$，令

$$\Lambda_{\mathbf{E}} = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbb{Z}\mathbf{e}_n + \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2.$$

那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个常数 $c = c(\varepsilon) > 0$，使得对于几乎所有的 $\mathbf{E} \in \mathbf{B}$，不等式

$$\Pi(\mathbf{x}) > \frac{c}{\log^{1+\varepsilon}(1 + |\mathbf{x}|)}$$

对每个$\mathbf{x} \in \Lambda_{\mathbf{E}}\backslash\Gamma_{\mathcal{L}}$都成立。

证明。 令 $\varepsilon > 0$固定。对于所有正的 t，令

$$\varphi(t) = \frac{1}{\log^{d+\varepsilon}(1+t)}\,.$$

定义“禁集”

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varphi) = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, \Pi(\mathbf{x})^d \leqslant \varphi(|\mathbf{x}|),\ |\mathbf{x}| \geqslant 1\Big\}$$

并考虑“例外集合”

$$\mathcal{M} = \Big\{\mathbf{E} \in \mathbf{B} \,\Big|\, \text{the set } \big(\Lambda_{\mathbf{E}} \backslash \Gamma_{\mathcal{L}}\big) \cap \mathcal{F} \text{ is infinite}\Big\}.$$

我们来证明 $\mu(\mathcal{M}) = 0$，其中 μ 是空间 $\mathbb{R}^{nd}$上的 Lebesgue测度。我们将论证分为几个步骤。

化归到 Borel–Cantelli引理。每个向量 $\mathbf{x} \in \Lambda_{\mathbf{E}}$ 都有如下表示

$$\mathbf{x} = z_1\mathbf{e}_1 + \ldots + z_n\mathbf{e}_n + z_{n+1}\mathbf{v}_1 + z_{n+2}\mathbf{v}_2 \tag{12}$$

其中 z_1为整数，$\ldots, z_{n+2}$(回顾 $n = d-2$)。反过来，对于固定的 $\mathbf{E}$，每个$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{Z}^d$ 都确定一个向量 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{z}, \mathbf{E})$，其形式为（ 12 ）。此外，

$$\mathbf{x}(\mathbf{z}, \mathbf{E}) \in \Gamma_{\mathcal{L}} \iff \mathbf{z} \in \mathcal{V},$$

其中 $\mathcal{V}$ 是最后两个坐标的坐标子空间。

对于每个 $\nu \in \mathbb{Z}$、 $\nu \geqslant 0$，我们来考虑集合

$$\mathcal{M}_\nu = \Big\{\mathbf{E} \in \mathbf{B} \,\Big|\, \exists\, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \backslash \mathcal{V} :\ 2^\nu \leqslant |\mathbf{z}| < 2^{\nu+1},\ \mathbf{x}(\mathbf{z}, \mathbf{E}) \in \mathcal{F}\Big\}.$$

Then

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\nu_0=0}^{\infty} \bigcup_{\nu=\nu_0}^{\infty} \mathcal{M}_\nu.$$

根据 Borel–Cantelli引理，只需证明该级数收敛

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \mu(\mathcal{M}_\nu). \tag{13}$$

集合 $\mathcal{F}_\nu^i$和 $\mathcal{M}_\nu^i$。 注意，如果

$$2^\nu \leqslant |\mathbf{z}| < 2^{\nu+1},$$

那么根据 $\mathbf{B}$ 的紧致性；存在一个正整数 η ，它仅取决于$\mathbf{B}$ ， 使得 t

$$2^{\nu-\eta} \leqslant |\mathbf{x}(\mathbf{z}, \mathbf{E})| \leqslant 2^{\nu+\eta}.$$

Set

$$\mathcal{F}_\nu = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, \Pi(\mathbf{x})^d \leqslant \varphi(|\mathbf{x}|),\ 2^{\nu-\eta} \leqslant |\mathbf{x}| \leqslant 2^{\nu+\eta}\Big\}.$$

另外，对每个 $i = 1,\ldots,d$,

$$\mathcal{F}_\nu^i = \Big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{F}_\nu \;\Big|\; |\mathbf{x}| = x_i \Big\}.$$

Then

$$\mathcal{M}_\nu \subseteq \bigcup_{i=1}^{d} \mathcal{M}_\nu^i,$$

其中

$$\mathcal{M}_\nu^i = \Big\{ \mathbf{E} \in \mathbf{B} \;\Big|\; \exists\, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \backslash \mathcal{V} :\; 2^\nu \leqslant |\mathbf{z}| < 2^{\nu+1},\; \mathbf{x}(\mathbf{z}, \mathbf{E}) \in \mathcal{F}_\nu^i \Big\}.$$

覆盖 $\mathcal{F}_\nu^1$用平行多面体。 我们用一族平行多面体覆盖集合 $\mathcal{F}_\nu^1$。这样便可以估计 $\mathcal{M}_\nu^1$ 的测度。所有其他 $\mathcal{M}_\nu^i$ 的测度也可用同样的方法估计。

对于每个 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$，令 $\mathbf{x} = \underline{=}(x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$。对于每个 $\tau \in \mathbb{Z}$,$\tau \geqslant 0$, 定义如下的 $(d-1)$ 维集合

$$\mathcal{H}_\tau = \Big\{ \underline{\mathbf{x}} = (x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \;\Big|\; |\underline{\mathbf{x}}| \leqslant 2^{\tau+1},\; |x_2 \cdot \ldots \cdot x_d| \leqslant \frac{\varphi(2^\tau)}{2^\tau} \Big\}.$$

Then

$$\mathcal{F}_\nu^1 \subset \bigcup_{\tau=\nu-\eta}^{\nu+\eta} \Big([2^\tau, 2^{\tau+1}] \times \mathcal{H}_\tau \Big). \tag{14}$$

我们按如下方式用平行多面体覆盖集合 $\mathcal{H}_\tau$。通过以下不等式定义一个整数 $\sigma = \sigma(\tau)$

$$2^{-\sigma-1} < \left(\frac{\varphi(2^\tau)}{2^\tau} \right)^{\frac{1}{d-1}} \leqslant 2^{-\sigma}.$$

Then

$$\sigma = \sigma(\tau) = \left[\frac{\tau - \log_2(\varphi(2^\tau))}{d-1} \right]. \tag{15}$$

考虑由整数构成的 $(d-1)$ 元组族

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\tau) = \Big\{ \underline{\boldsymbol{\tau}} = (\tau_2, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{Z}^{d-1} \;\Big|\; \tau_2 + \ldots + \tau_d = 0,\; |\underline{\boldsymbol{\tau}}| \leqslant (d-1)(\sigma + \tau + 2) \Big\}$$

并为每个 $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}$确定平行多面体

$$\mathcal{P}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) = \Big\{ \underline{\mathbf{x}} = (x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \;\Big|\; |x_i| \leqslant 2^{\tau_i - \sigma + (d-2)},\; i = 2, \ldots, d \Big\}.$$

下面证明

$$\mathcal{H}_\tau \subset \bigcup_{\underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathcal{T}} \mathcal{P}(\underline{\boldsymbol{\tau}}). \tag{16}$$

事实上，令$\mathbf{y} \in \mathcal{H}_\tau$, $|y_2 \cdot \ldots \cdot y_d| = \frac{\varphi(2^\tau)}{2^\tau}$。集合

$$\underline{\mathbf{w}} = (w_2, \ldots, w_d) = \underline{\mathbf{y}} \cdot 2^{-\sigma} \cdot \left(\frac{\varphi(2^\tau)}{2^\tau} \right)^{-\frac{1}{d-1}}.$$

点$\mathbf{y}$ 和$\mathbf{w}$ 成比例，

$$|\underline{\mathbf{y}}| \leqslant |\underline{\mathbf{w}}| < 2|\underline{\mathbf{y}}| \leqslant 2^{\tau+2}, \qquad \text{and} \qquad |w_2 \cdot \ldots \cdot w_d| = 2^{-(d-1)\sigma}. \tag{17}$$

令 $\tau_i = \sigma + \lceil \log_2 |w_i| \rceil$、$i = 2$、……、$d-1$ 以及 $\tau_d = -\tau_2 - \ldots - \tau_{d-1}$。这里 $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整函数。于是由（17）

$$2^{\tau_i - \sigma - 1} < |w_i| \leqslant 2^{\tau_i - \sigma}, \qquad |\tau_i| \leqslant \sigma + \tau + 2, \qquad i = 1, \ldots, d-1,$$

$$|w_d| < 2^{\tau_d - \sigma + (d-2)}, \qquad |\tau_d| \leqslant (d-1)(\sigma + \tau + 2).$$

因此，$\underline{\mathbf{w}}$ 以及，所以，$\mathbf{y}$ 属于平行多面体 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau})$。也就是说，包含关系（16）确实成立。

考虑到（14），我们得到对 $\mathcal{F}^1_\nu$ 的如下平行多面体覆盖：

$$\mathcal{F}^1_\nu = \bigcup_{\substack{\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\ldots,\tau_d)\in\mathbb{Z}^d \\ \nu-\eta\leqslant\tau_1\leqslant\nu+\eta \\ \underline{\boldsymbol{\tau}}\in\mathcal{T}(\tau_1)}} \mathcal{Q}(\boldsymbol{\tau}), \qquad \text{where} \qquad \mathcal{Q}(\boldsymbol{\tau}) = [2^{\tau_1}, 2^{\tau_1+1}] \times \mathcal{P}(\underline{\boldsymbol{\tau}}).$$

反过来，这一覆盖给出了集合 $\mathcal{M}^1_\nu$ 的如下覆盖：

$$\mathcal{M}^1_\nu = \bigcup_{\substack{\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\ldots,\tau_d)\in\mathbb{Z}^d \\ \nu-\eta\leqslant\tau_1\leqslant\nu+\eta \\ \underline{\boldsymbol{\tau}}\in\mathcal{T}(\tau_1)}} \bigcup_{\substack{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^d\setminus\mathcal{V} \\ 2^\nu\leqslant|\mathbf{z}|<2^{\nu+1}}} \mathcal{N}(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau}),$$

其中

$$\mathcal{N}(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau}) = \Big\{ \mathbf{E}\in\mathbf{B} \;\Big|\; \mathbf{x}(\mathbf{z},\mathbf{E}) \in \mathcal{Q}(\boldsymbol{\tau}) \Big\}.$$

因此，$\mathcal{M}^1_\nu$ 的测度可估计为

$$\mu(\mathcal{M}^1_\nu) \leqslant \sum_{\tau_1=\nu-\eta}^{\nu+\eta} \sum_{\underline{\boldsymbol{\tau}}\in\mathcal{T}(\tau_1)} \sum_{\substack{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^d\setminus\mathcal{V} \\ 2^\nu\leqslant|\mathbf{z}|<2^{\nu+1}}} \mu(\mathcal{N}(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau})). \tag{18}$$

对 $\mathcal{N}(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\tau})$ 进行分析。将$\mathbf{e}_1$、……、$\mathbf{e}_n$和$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$的坐标分别写入矩阵 E 和 V的各列中：

$$E = \begin{pmatrix} e_{1,1} & \cdots & e_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{1,d} & \cdots & e_{n,d} \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} \\ \vdots & \vdots \\ v_{1,d} & v_{2,d} \end{pmatrix}.$$

用$\mathbf{e}^1$，……，$\mathbf{e}^d$表示 E的行，并用$\mathbf{v}^1$，……，$\mathbf{v}^d$–表示 V的行。对$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)$，我们令

$$\mathbf{z}_E = (z_1, \ldots, z_n) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{z}_V = (z_{n+1}, z_{n+2}).$$

我们用 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示内积。则条件$\mathbf{x(z,\ E)}\ \in\ \mathcal{Q}(\boldsymbol{\tau})$等价于不等式组

$$\begin{cases} 2^{\tau_1} \leqslant \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{z}_E\rangle + \langle \mathbf{v}^1, \mathbf{z}_V\rangle \leqslant 2^{\tau_1+1} \\ |\langle \mathbf{e}^2, \mathbf{z}_E\rangle + \langle \mathbf{v}^2, \mathbf{z}_V\rangle| \leqslant 2^{\tau_2-\sigma+(d-2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\langle \mathbf{e}^d, \mathbf{z}_E\rangle + \langle \mathbf{v}^d, \mathbf{z}_V\rangle| \leqslant 2^{\tau_d-\sigma+(d-2)} \end{cases}, \tag{19}$$

其中 $\sigma = \sigma(\tau_1)$ 由 (15) 定义。

对于每个 $j = 1,\ldots,d$，$\mathbf{e}^j$ 的所有可能取值构成的集合，即集合

$$\Big\{\mathbf{e}^j \ \Big|\ \mathbf{E}\in\mathbf{B}\Big\},$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单位立方体。将此立方体记为 $\mathcal{B}^j$。那么

$$\mathcal{N}(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{N}^1(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau})\times\ldots\times\mathcal{N}^d(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau}),$$

其中

$$\mathcal{N}^1(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau}) = \Big\{\mathbf{e}^1\in\mathcal{B}^1 \ \Big|\ 2^{\tau_1} \leqslant \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{z}_E\rangle + \langle \mathbf{v}^1, \mathbf{z}_V\rangle \leqslant 2^{\tau_1+1}\Big\}$$

and

$$\mathcal{N}^j(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau}) = \Big\{\mathbf{e}^j\in\mathcal{B}^j \ \Big|\ |\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{z}_E\rangle + \langle \mathbf{v}^j, \mathbf{z}_V\rangle| \leqslant 2^{\tau_j-\sigma+(d-2)}\Big\}$$

对于 $j = 2,\ldots,d$。

我们粗略估计 $\mathcal{N}^1(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\tau})$ 的测度：

$$\mu(\mathcal{N}^1(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau})) \leqslant 1.$$

对于给定的 $j\ =\ 2,\ldots,d$，集合 $\mathcal{N}^j(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\tau})$ 通常可能为空。若它非空，则其测度显然可以估计为

$$\mu(\mathcal{N}^j(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau})) \ll \frac{2^{\tau_j-\sigma+(d-2)}}{|\mathbf{z}_E|} \ll_d \frac{2^{\tau_j-\sigma}}{|\mathbf{z}_E|}\,.$$

由于 $\tau_2+\ldots+\tau_d = 0$ 和 $\sigma = \sigma(\tau_1)$ 由 (15) 定义，我们得到

$$\mu(\mathcal{N}(\mathbf{z},\boldsymbol{\tau})) \ll_d \frac{2^{-(d-1)\sigma}}{|\mathbf{z}_E|^{d-1}} \ll_d \frac{2^{-\tau_1+\log_2(\varphi(2^{\tau_1}))}}{|\mathbf{z}_E|^{d-1}} = \frac{2^{-\tau_1}\cdot\varphi(2^{\tau_1})}{|\mathbf{z}_E|^{d-1}}\,. \tag{20}$$

注意，这个估计对 $\boldsymbol{\tau}$ 是一致的。并且仅当集合 $\mathcal{N}^j(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\tau})$、$j = 2,\ldots,d$ 中每一个都非空时，它才是非平凡的。

估算固定 $\mathcal{N}^j(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\tau})$ 时非空项的数量$_E$。回顾一下，向量 $\mathbf{v}^j$, $j = 2,\ldots,d$ 均为固定向量，且都不是零向量（因为$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ 的坐标均为正）。现在固定一个向量 $\mathbf{z}_E$、一个指标 j, $2\leqslant j\leqslant d$ 和一个正常数 C。我们来看看集合的基数是多少

$$\mathcal{R}^j(\mathbf{z}_E, C) = \Big\{\mathbf{z}_V\in\mathbb{Z}^2 \ \Big|\ |\mathbf{z}_V|\leqslant C,\ \exists\,\mathbf{e}\in\mathcal{B}^j:\ |\langle \mathbf{e}, \mathbf{z}_E\rangle + \langle \mathbf{v}^j, \mathbf{z}_V\rangle| \leqslant 1\Big\}.$$

当$\mathbf{e}$ 遍历立方体 $\mathcal{B}^j$ 时， $\langle \mathbf{e},\mathbf{z}_E\rangle$ 的取值构成一条长度约为 $|\mathbf{z}_E|$的线段。因此，集合 $\mathcal{R}^j(\mathbf{z}_E, C)$ 包含在一个边长分别约为 C 和 $|\mathbf{z}_E|$的矩形内。该矩形中的整数点数量有一个上界，其量级不超过矩形的面积，即

$$|\mathcal{R}^j(\mathbf{z}_E, C)| \ll C|\mathbf{z}_E|.$$

最后，我们注意到，由于

$$\sum_{j=2}^{d} \big(\tau_j - \sigma + (d-2)\big) = -(d-1)\sigma + O(d) < -\tau_1 + \log_2(\varphi(2^{\tau_1})) + O(d),$$

且 τ_1 足够大，存在 j 使得 $2^{\tau_j - \sigma + (d-2)} < 1$。因此，对于集合

$$\mathcal{R}(\mathbf{z}_E, C) = \bigcap_{j=2}^{d} \mathcal{R}^j(\mathbf{z}_E, C),$$

我们有

$$|\mathcal{R}(\mathbf{z}_E, C)| \ll_{\mathbf{B}} C|\mathbf{z}_E|. \tag{21}$$

对 $\mathcal{M}_\nu$ 的测度进行估计。 由 (18)、(20)、(21) 可得 $\mathcal{M}_\nu^1$ 的测度估计：

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{M}_\nu^1) &\leqslant \sum_{\tau_1=\nu-\eta}^{\nu+\eta} \sum_{\underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathcal{T}(\tau_1)} \sum_{\substack{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^d\setminus\mathcal{V} \\ 2^\nu \leqslant |\mathbf{z}| < 2^{\nu+1}}} \mu(\mathcal{N}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\tau})) \ll_{\mathbf{B}} \\
&\ll_{\mathbf{B}} \sum_{\tau_1=\nu-\eta}^{\nu+\eta} \sum_{\underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathcal{T}(\tau_1)} \sum_{\substack{\mathbf{z}_E\in\mathbb{Z}^n \\ 0<|\mathbf{z}_E|<2^{\nu+1}}} \sum_{\mathbf{z}_V \in \mathcal{R}(\mathbf{z}_E, 2^{\nu+1})} \frac{2^{-\tau_1}\cdot\varphi(2^{\tau_1})}{|\mathbf{z}_E|^{d-1}} \ll_{\mathbf{B}} \\
&\ll_{\mathbf{B}} \sum_{\tau_1=\nu-\eta}^{\nu+\eta} |\mathcal{T}(\tau_1)| \cdot 2^{-\tau_1}\cdot\varphi(2^{\tau_1}) \sum_{\substack{\mathbf{z}_E\in\mathbb{Z}^n \\ 0<|\mathbf{z}_E|<2^{\nu+1}}} \frac{2^{\nu+1}}{|\mathbf{z}_E|^{d-2}} \ll_{\mathbf{B}} \\
&\ll_{\mathbf{B}} \sum_{\tau_1=\nu-\eta}^{\nu+\eta} \big(d\tau_1 - \log_2(\varphi(2^{\tau_1}))\big)^{d-2} \cdot 2^{-\tau_1+\nu+1}\cdot\varphi(2^{\tau_1}) \sum_{T=1}^{2^{\nu+1}} \sum_{\substack{\mathbf{z}_E\in\mathbb{Z}^n \\ |\mathbf{z}_E|=T}} \frac{1}{|\mathbf{z}_E|^{d-2}} \ll_{\mathbf{B}} \\
&\ll_{\mathbf{B}} \Big(\nu + \big|\log_2\big(\varphi(2^{\nu+\eta})\big)\big|\Big)^{d-2} \cdot \varphi(2^{\nu-\eta}) \sum_{T=1}^{2^{\nu+1}} \frac{1}{T} \ll_{\mathbf{B}} \\
&\ll_{\mathbf{B}} \nu\cdot\varphi(2^{\nu-\eta})\cdot\Big(\nu^{d-2} + \big|\log_2(\varphi\big(2^{\nu+\eta}\big))\big|^{d-2}\Big).
\end{aligned}$$

集合 $\mathcal{M}_\nu^2, \dots, \mathcal{M}_\nu^d$的测度可用同样的方法估计。因此

$$\mu(\mathcal{M}_\nu) \ll_{\mathbf{B}} \varphi(2^{\nu-\eta})\cdot\Big(\nu^{d-1} + \nu\big|\log_2(\varphi\big(2^{\nu+\eta}\big))\big|^{d-2}\Big),$$

其中 η 是一个依赖于$\mathbf{B}$的正常数。考虑到

$$\varphi(t) = \frac{1}{\log^{d+\varepsilon}(1+t)},$$

我们得到

$$\mu(\mathcal{M}_\nu) \ll_{\mathbf{B}} \nu^{-1-\varepsilon},$$

即级数 (13) 收敛。由 Borel–Cantelli引理可知，“例外”集合 $\mathcal{M}$ 的测度为零。因此，对于几乎所有 $\mathbf{E} \in \mathbf{B}$ ，不等式$\Pi(\mathbf{x})^d \leqslant \varphi(|\mathbf{x}|)$ 仅对集合 $\Lambda_{\mathbf{E}} \backslash \Gamma_{\mathcal{L}}$中的有限多个点成立。这立即推出所需结论。

□

7 定理1和2的证明

我们用一个共同的方案证明这两个定理。适当选取数 θ， $\eta \in \mathbb{R}$后，考虑格

$$\Gamma_{\theta,\eta} = \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2.$$

我们按照第4节中的方法构造 $\mathbf{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$。由引理 3 可知，存在 $\tau \in \mathbb{R}$ 使得$\mathbf{L}$ 相对于格 $D_\tau \Gamma_{\theta,\,\eta}$是对数劣可逼近的。取这样的$\tau$ 并令

$$\Gamma = D_\tau \Gamma_{\theta,\eta}\,.$$

显然，双曲旋转 D_τ 保持格的丢番图指数不变，即

$$\omega(\Gamma) = \omega(\Gamma_{\theta,\eta}). \tag{22}$$

关于格 $\Gamma_{\theta,\,\eta}$ 相对于范数 $|\cdot|$的双曲极小值，它们映射为格 Γ 相对于范数 $|\cdot|_\tau = |D_\tau(\,\cdot\,)|$的双曲极小值。因此，$\Gamma_{\theta,\,\eta}$满足引理（7）中的条件，当且仅当 Γ也满足该条件。

接下来，我们构造一个子空间 $\mathcal{L}$ 和一个格 $\Gamma_{\mathcal{L}}$ ，如第 4 节所述。我们按照引理 **6** 的陈述选取 $= (\mathbf{e}_1, \ldots\ldots, \mathbf{e}_n)$，并令

$$\Lambda = \Lambda_{\mathbf{E}}\,.$$

由引理 5,

$$\omega(\Lambda) = \max(0, \omega_{\mathbf{L}}(\Gamma)), \qquad \bar{\omega}(\Lambda) = \max(0, \bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma)), \tag{23}$$

并通过应用引理1、2完成证明。

选取 θ 与 η 以证明定理 1。 给定 $\beta \geqslant 0$，对每个整数 $k \geqslant 0$，我们令 $a_0 = 1$ 与 $a_{k+1} = \lfloor q_k^\beta \rfloor + 1$，其中 q_k 是渐近分数 $p_k/q_k = [a_0$ 的分母；$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_k]$。考虑数 $\theta = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$ 以及格 $\Gamma_{\theta,\,\theta}$。于是，正如 [3] 中所证明的（另见 [10]），

$$\omega(\Gamma_{\theta,\theta}) = \delta, \qquad \text{where} \qquad \delta = \frac{\beta - 1}{2}\,.$$

由（22）可得 $\omega\left(\Gamma\right) = \omega\left(\Gamma_{\theta,\,\theta}\right) = \delta$。因此，对于 $\delta \geqslant n/2$，即对于 $\beta \geqslant n+1$，根据（23）以及引理 1 的陈述，我们得到

$$\omega(\Lambda) = \omega_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \frac{2\delta - n}{n+2} = \frac{\beta - n - 1}{n+2}\,.$$

因此，当 β遍历 $[n+1, +\infty]$时，指数 $\omega(\Lambda)$ 遍历 $[0, +\infty]$，这就证明了定理 1。

取 θ 和 η 来证明定理 2。 给定 $\beta > 1$，令 $a_0 = b_0 = 1$，$a_1 = 2$，$b_1 = [2^{\beta}] + 1$，并且

$$a_k = \left[\frac{s_{k-1}^{\beta} - q_{k-2}}{q_{k-1}}\right] + 1, \qquad b_k = \left[\frac{q_k^{\beta} - s_{k-2}}{s_{k-1}}\right] + 1, \tag{24}$$

对每个整数 $k \geqslant 2$，其中 q_k 是渐近分数 $p_k/q_k = [a_0$的分母；a_1，a_2，……，$a_k]$ 且 s_k是渐近分数 $r_k/s_k = [b_0$的分母；b_1，b_2，……，$b_k]$。考虑数 $\theta = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$, $\eta = [b_0;\ b_1,\ b_2,\ \ldots]$ 以及格 $\Gamma_{\theta,\,\eta}$。那么，正如文献 [3], 所示，Γ_{θ的双曲极小值序列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 满足关系式

$$|\mathbf{x}_{k+1}| \asymp |\mathbf{x}_k|^{\beta}\,, \qquad \Pi(\mathbf{x}_k) \asymp |\mathbf{x}_k|^{(1-\beta^2)/2}.$$

因此，对于 $\beta \geqslant \sqrt{n+1}$，格 $\Gamma_{\theta,\,\eta}$ 满足引理 2 的条件（7）。那么，正如前面所述，Γ 也满足引理 2 的条件（7）。因此，对于 $\beta \geqslant \sqrt{n+1}$，根据（23）和引理 2的陈述，我们得到

$$\bar{\omega}(\Lambda) = \bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \frac{\beta - (n+1)\beta^{-1}}{n+2}\,.$$

因此，随着 β遍历 $\left[\sqrt{n+1}, +\infty\right]$，指数 $\bar{\omega}$（Λ）遍历$[0, +\infty]$，这就证明了定理 2。

致谢

作者是理论物理与数学发展基金会“BASIS”举办的“Leader”竞赛的获奖者，并谨向其赞助方和评审团致谢。

参考文献

[1] Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich 数论。 Academic Press Inc. (1966).

[2] O. N. German 关于格的一致丢番图指数的平凡性。数学通讯，**31**:2 (2023),27–33。

[3] O. N. German 关于格的一致丢番图指数。《数学汇刊》，**217**:2 (2026), 20–33。

[4] O. N. German 给定丢番图类型的线性形式与格指数。《数学消息》，**84**:1 (2020), 3–22。

[5] O. N. German 格的丢番图指数。《斯捷克洛夫数学研究所论文集》（增刊），**296:2 (2017), 29–35**。[6] O. N. German 多参数数论几何及其在分裂转移定理中的应用，《数学月刊》，**197(2022), 579–606**。[7] O. N. German 丢番图指数几何。《俄罗斯数学综述》，**78:2 (2023), 273–347**。[8] N. G. Moshchevitin 关于格的丢番图指数。预印本：https://arxiv.org/pdf/2512.24913。[9] A. Ya. Khintchine 连分数。多佛出版社 **(1997)**。[10] O. N. German 关于实数的弱一致丢番图指数。《数学消息》，付印中。