斯图姆-刘维尔算子前两个特征值之和的极大化子刻画

Gang Meng[1], YuzhouTian[2,*], Bing Xie[3], Meirong Zhan g[4]

[1] 中国科学院大学数学科学学院，中国北京 100049[2] 暨南大学数学系，中国广州 510632[3] 山东大学数学与统计学院，山东威海 264209[4] 清华大学数学科学系，中国北京 100084 电子邮箱：menggang@ucas.ac.cn（G. Meng）、tianyuzhou2016@163.com（Y. Tian）、xiebing@sdu.edu.cn（B. Xie）、zhangmr@tsinghua.edu.cn（M. Zhang）

arXiv:2603.06019v1 [math.DS] 6 Mar 2026

摘要

本文研究非紧空间 L^1 中势函数取值于该空间的斯图姆-刘维尔算子的前两个狄利克雷特征值之和的极大化问题。我们证明，存在唯一一个达到最大值的势函数，该函数非负、分段光滑且对称。利用测度微分方程和弱 * 收敛，我们证明极大化子的非零部分可由摆方程$\theta'' + \ell \sin\theta = 0$的解确定。

关键词： Sturm-Liouville 算子、特征值最大化、测度微分方程、摆方程、非线性薛定谔方程

MSC：34L15，47N10。

*通讯作者。

1 引言

给定勒贝格空间 $\mathcal{L}^p$ 中的一个（实）势 $q := L^p(I, \mathbb{R})$，其中 $I = [0,1]$ 且 $1 \le p < \infty$，我们考虑斯图姆–刘维尔问题

$$y'' + (\lambda + q(t))y = 0, \qquad t \in I, \tag{1.1}$$

满足狄利克雷边界条件

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{1.2}$$

众所周知，问题 (1.1)-(1.2) 存在一列特征值

$$\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \cdots < \lambda_m(q) < \cdots, \qquad \lambda_m(q) \to +\infty.$$

自数学家克莱因的开创性工作以来 [21], , 斯图姆–刘维尔问题一直是谱理论和微分方程领域的核心课题。在众多关于斯图姆–刘维尔问题的研究中，主要进展涉及特征值间隙 [2, 5, 15,18, 24, 26, 29], 单个特征值 [12, 32], 比值 [1, 9, 17], 节点 [8, 10, 11, 16] 及其应用 [3]。

除了上述特征值问题，学者们也十分关注微分算子的特征值和，因为这对理解几何、偏微分方程和波利亚猜想大有裨益。参见 [6, 7, 19, 20]及其中的参考文献。在一篇近期论文中 [27], , 他们证明，问题 (1.1)-(1.2) 的前 m 个特征值之和的最优界，可以由具有指数 $p > 1$的 $\mathcal{L}^p$ 中的某些势取得。此外，他们还建立了一个理论框架，用以寻找这些最优势。对于指数 $p = 1$，问题 (1.1)-(1.2) 的特征值和的最优界与 $p > 1$的情形有本质区别，因为 $\mathcal{L}^1$ 空间缺乏局部紧性。甚至前两个特征值之和仍然未知。这正是本文的研究动机。

在本文中，我们研究前两个特征值的最大化问题

$$\check{\mathbf{M}}(r) := \sup\{\lambda_1(q) + \lambda_2(q) : q \in S_1[r]\} = \sup\{\lambda_1(q) + \lambda_2(q) : q \in B_1[r]\}, \tag{1.3}$$

其中，对于 $r \in (0, \infty)$,

$$S_1[r] := \left\{q \in \mathcal{L}^1 : \|q\|_1 = r\right\}, \qquad B_1[r] := \left\{q \in \mathcal{L}^1 : \|q\|_1 \le r\right\}$$

是（$\mathcal{L}^1$, $\|\cdot\|_1$）中的球面和球。由于 $\mathcal{L}^1$ 空间缺乏局部紧性，最大化问题 (1.3) 能否达到，先验上并不明确。若问题 (1.3) 可由某些势 $\check{}q_r$ 达到，那么自然会进一步探讨 $\check{}q_r$ 的唯一性和对称性，以及其构造方法。我们的主要结果表明，最大势 $\check{}q_r$ 存在，而且它不仅具有唯一性和对称性，还与摆方程有着深刻的联系。

定理 1.1 对于任意 $r > 0$，存在唯一的势 $\check{q}_r \in S_1[r]$，使得最大值在 *(1.3)* 中由 $\check{q}_r$ 达到，即

$$\check{\mathbf{M}}(r) = \lambda_1(\check{q}_r) + \lambda_2(\check{q}_r). \tag{1.4}$$

与此同时，这个势 $\check{q}_r$ 非正、分段光滑且对称。此外，存在一个常数 $\check{c}$，使得 $\check{q}_r$ 的非零部分由下式给出

$$\check{q}_r(t) = \check{c} + \ell \cos\theta(t), \tag{1.5}$$

其中长度 ℓ 为

$$\ell := \lambda_2(\check{q}_r) - \lambda_1(\check{q}_r) > 0, \tag{1.6}$$

且 $\theta = \theta(t) \in (-\pi, \pi)$ 是摆方程的一个解的一段

$$\theta'' + \ell \sin\theta = 0. \tag{1.7}$$

证明上述结果的关键在于将问题拓展至测度微分方程（MDE）的框架，并利用测度的弱* 收敛。通过一些巧妙的技巧，我们分析了当 $p \downarrow 1$时， $\mathcal{L}^p, p > 1$势对应的临界系统的极限行为。此外，值得特别关注的是，一些基本的方程类别，如 Ambrosetti 型方程和非线性薛定谔方程，在我们的证明中发挥着关键作用。我们指出，借助本文提出的方法，可以证明下面相应的最小化问题无法达到

$$\inf\left\{\lambda_1(q) + \lambda_2(q) : q \in S_1[r]\right\}.$$

本文组织如下。第 2 节介绍测度和测度微分方程的一些性质，包括解的正则性和特征值性质。随后，我们回顾关于 $\mathcal{L}^p, p > 1$ 势对应的临界系统的一些已知结果。第 3 节分析当 $p \downarrow 1$时临界系统的极限行为，并为 $p = 1$的情形构造最大化势 $\check{q}_r$，展示其分段光滑性以及与摆方程解的联系。

2 预备知识

2.1 测度与测度微分方程

为了描述弦的振动（其分布相对于勒贝格测度可能并非绝对连续），必须将常微分方程理论扩展到所谓的广义常微分方程 [23, 25], ，这类方程涉及佩龙－斯蒂尔杰斯积分等更一般的积分理论。在博士论文中，Meng仅使用黎曼–斯蒂尔切斯积分 [4, 13] ，就将常微分方程完整地扩展到了所谓的二阶线性测度微分方程 （MDEs）。主要结果发表于 [22]。

用 $\mathcal{C} := C(I,\mathbb{R})$表示由 I 上的连续函数构成、赋予上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$的巴拿赫空间。所谓 I的测度 μ，是指 μ 属于对偶空间$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(I,\mathbb{R}) := (\mathcal{C},\|\cdot\|_\infty)^*$。根据黎斯表示定理 [13], ，测度空间 $\mathcal{M}_0$ 可以用有界变差函数来刻画。更确切地说,

$$\mathcal{M}_0 = \big\{\mu : I \to \mathbb{R} : \mu(0+) = 0,\ \mu(t+) = \mu(t)\ \forall t \in (0,1),\ \|\mu\|_{\mathbf{V}} < \infty\big\},$$

其中 $\mu(t+) = \lim_{s\downarrow t}\mu(s)$ 表示右极限，而 $\|\mu\|_{\mathbf{V}}$ 表示全变差，其定义如下:

$$\|\mu\|_{\mathbf{V}} := \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1}|\mu(t_{i+1}) - \mu(t_i)| : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1,\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

例如，单位狄拉克测度 $\delta_a, a \in [0,1]$ 如下。对于 $a = 0$,

$$\delta_0(t) := \begin{cases} -1 & \text{for } t = 0 \\ 0 & \text{for } t \in (0,1] \end{cases} \in \mathcal{M}_0. \tag{2.1}$$

对于 $a \in (0,1]$,

$$\delta_a(t) := \begin{cases} 0 & \text{for } t \in [0,a) \\ 1 & \text{for } t \in [a,1] \end{cases} \in \mathcal{M}_0. \tag{2.2}$$

此外，对于所有 $a \in [0,1]$ 和所有 $r \in [0,\infty)$, $\|\delta_a\|_{\mathbf{V}} = 1$ 和 $r\delta_a \in S_0[r]$。

带有测度 $\mu \in \mathcal{M}_0$ 的二阶标量线性测度微分方程写作

$$\mathrm{d}y^\bullet + y\,\mathrm{d}\mu(t) = 0, \qquad t \in I. \tag{2.3}$$

根据 [22], ，给定初值 $(y(0)\ y^\bullet(0)) = (y_0, z_0)$，测度微分方程 (2.3) 的解 $y(t)$ 及其广义右导数 $y^\bullet(t)$ 由以下积分方程组确定

$$y(t) = y_0 + \int_{[0,t]} y^\bullet(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1], \tag{2.4}$$

$$y^\bullet(t) = \begin{cases} z_0, & t = 0, \\ z_0 - \int_{[0,t]} y(s)\,\mathrm{d}\mu(s), & t \in (0,1], \end{cases} \tag{2.5}$$

其中积分分别是勒贝格积分和黎曼–斯蒂尔切斯积分 [4, 13]。y 和 $y^\bullet$ 在 I上均有唯一的定义。关于 MDEs 的解 $y(t)$ 的一些正则性结果如下。

注 2.1 任意解 $y(t)$ 自身在 I 上绝对连续，并且

$$y'(t) = y^\bullet(t) \qquad \textit{a.e. } t \in I.$$

广义速度 $y^\bullet(t)$ 在所有 $t \in (0,1)$处都是经典右导数，即

$$y^\bullet(t) = y'_+(t), \qquad t \in (0,1). \tag{2.6}$$

此外， $y^\bullet \in \mathcal{M} := \mathcal{M}(I, \mathbb{R})$ 是 I上的一个（未归一化）测度。因此， $y^\bullet(t)$ 在 I 上有界，因而 y 属于索*об*列夫空间 $W^{1,\infty}(I)$。

根据对测度微分方程（2.3）的解 y（t）的解释（2.4）–（2.5），对所有 $0 < t_0 < t \leq 1$,

$$y(t) = y(t_0) + \int_{(t_0,t]} y^{\bullet}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.7}$$

$$y^{\bullet}(t) = y^{\bullet}(t_0) - \int_{(t_0,t]} y(s)\,\mathrm{d}\mu(s). \tag{2.8}$$

这里（2.7）涉及勒贝格积分，因此在（t_0， t] 和 $[t_0, t]$ 上的积分是一致的。然而，（2.8）涉及勒贝格–斯蒂尔杰斯积分，因此在（t_0， t] 和 $[t_0, t]$ 上的积分可能不同。

与 MDE（2.3）相关的特征值问题为

$$\mathrm{d}y^{\bullet} + \lambda y\,\mathrm{d}t + y\,\mathrm{d}\mu(t) = 0, \qquad t \in I. \tag{2.9}$$

利用若干拓扑思想，已经建立了关于（2.9）特征值的一些基本理论。例如，在狄利克雷边界条件（1.2）下，问题（2.9）的特征值构成一个（实）序列 $\{\lambda_m(\mu)\}_{m\in\mathbb{N}}$，使得 $\lambda_m(\mu) \nearrow +\infty$，当 $m \to +\infty$ 时。如果 $\mu \in \mathcal{M}_0$ 具有密度 $\mu' = q \in \mathcal{L}^1$，则（2.3）的解和（2.9）的特征值将回归到（1.1）中的相应对象。

在 $\mathcal{M}_0$ 测度空间中，有两种拓扑。一种由全变差范数 $\|\cdot\|_{\mathbf{v}}$ 诱导，因此（$\mathcal{M}_0$， $\|\cdot\|_{\mathbf{v}}$）是一个巴拿赫空间。由于 $\mathcal{M}_0 = (\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)^*$，在 $\mathcal{M}_0$ 中有由 w^* 表示的弱* 拓扑，即 $\mu_n \to \mu$ 在（$\mathcal{M}_0$， w^*）中当且仅当

$$\int_I u(t)\,\mathrm{d}\mu_n(t) \to \int_I u(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \qquad \forall u \in \mathcal{C}.$$

例如，对于（2.1）和（2.2）中的狄拉克测度，有 $\delta_a \to \delta_{a_0}$ 在（$\mathcal{M}_0$， w^*）中，且 $a \to a_0$。关于 MDE（2.9）的特征值 λ_m（μ）的 [22] 一些连续性结果如下。

引理 2.2 （[22]）设 $m \in \mathbb{N}$。在测度的弱* 拓扑 w^* 中， λ_m（μ）在 $\mu \in$ （$\mathcal{M}_0, w^*$）中连续。

2.2 优化问题的临界系统

对于指数 $1 < p < \infty$，我们用 $\mathcal{L}^p := L^p([0,1], \mathbb{R})$ 表示范数为 $\|\cdot\|_p$ 的勒贝格空间。对于半径 $r > 0$，球面和球分别为

$$S_p[r] := \{q \in \mathcal{L}^p : \|q\|_p = r\}, \qquad B_p[r] := \{q \in \mathcal{L}^p : \|q\|_p \leq r\}.$$

我们考虑 $\mathcal{L}^p$ 中如下带约束的优化问题

$$\check{\mathbf{M}}_p(r) = \max(\lambda_1(q) + \lambda_2(q)) \quad \text{subject to } \|q\|_p = r. \tag{2.10}$$

根据以下极限结果，可以得到问题（1.3）的答案。证明可参见 [28, 30]。

引理 2.3 给定任意 $r \in$ （0， ∞），有

$$\lim_{p\downarrow 1} \check{\mathbf{M}}_p(r) = \check{\mathbf{M}}(r). \tag{2.11}$$

在近期的一篇论文中， [27], 关于问题 (2.10) 得到了一些如下结果。存在某些势 $q_p = q_{p,\ r} \in S_p[r]$使问题 (2.10) 可达到。记

$$\xi_p = \lambda_1(q_p), \qquad \eta_p = \lambda_2(q_p),$$

存在分别与 ξ_p 和 η_p 对应的特征函数 $y_p(t)$ 和 $z_p(t)$，使它们满足以下非线性常微分方程组

$$\begin{cases} y_p'' + \xi_p y_p - \left(y_p^2 + z_p^2\right)^{p^*-1} y_p = 0, \\ z_p'' + \eta_p z_p - \left(y_p^2 + z_p^2\right)^{p^*-1} z_p = 0. \end{cases} \tag{E}$$

这里， $p^* := p/(p-1) \in (1, \infty)$ 是 p 的共轭指数。这些特征函数满足

$$\|y_p\|_2 = \|z_p\|_2, \tag{2.12}$$

$$\left\|y_p^2 + z_p^2\right\|_{p^*} = r^{p-1}. \tag{2.13}$$

此外，最大化势由下式给出

$$q_p(t) = -\left(y_p^2(t) + z_p^2(t)\right)^{p^*-1}, \qquad t \in I. \tag{2.14}$$

利用 $q_p(t)$ 的 (2.14)，系统 (E) 也可以写成特征值问题的线性方程

$$y_p'' + \xi_p y_p + q_p(t) y_p = 0, \qquad t \in I, \tag{2.15}$$

$$z_p'' + \eta_p z_p + q_p(t) z_p = 0, \qquad t \in I. \tag{2.16}$$

除了 y_p 和 z_p 的狄利克雷边界条件 (1.2)，即

$$y_p(0) = y_p(1) = 0, \qquad z_p(0) = z_p(1) = 0,$$

y_p 和 z_p 满足以下节点性质

$$y_p(t) > 0 \ \forall t \in (0,1), \quad z_p(t) > 0 \ \forall t \in (0, \tau_p), \quad z_p(t) < 0 \ \forall t \in (\tau_p, 1). \tag{2.17}$$

这里， $\tau_p \in$ (0，1) 是 $z_p(t)$ 的唯一零点，称为 $z_p(t)$ [16] 的节点。因此，通过求出正的初始速度，可以确定 $y_p(t)$ 和 $z_p(t)$

$$a_p := y_p'(0) > 0, \quad b_p := z_p'(0) > 0. \tag{2.18}$$

此外，$\check{\mathbf{M}}_p(r)$ 由下式给出

$$\check{\mathbf{M}}_p(r) = \xi_p + \eta_p. \tag{2.19}$$

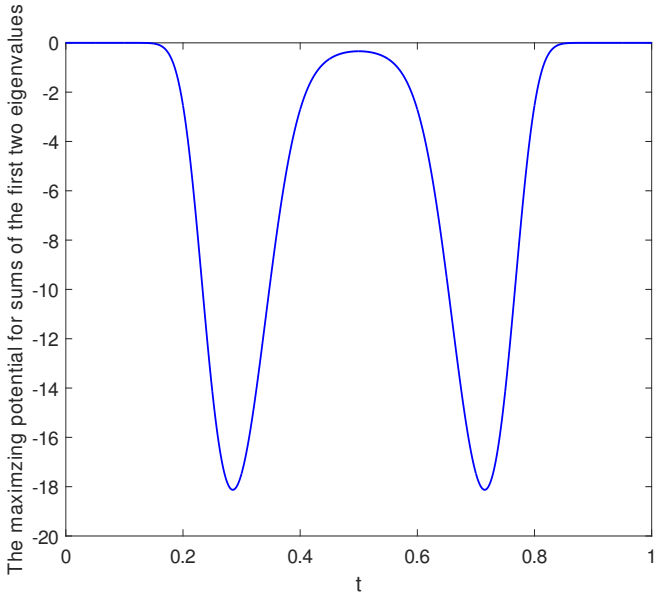

图1：最大化势 $q_p(t) = q_{p,r}(t)$，其中 $r = 5$和 $p = 15/14$。

最后，我们从 [27, 第 3] 节注意到，(E) 是一个哈密顿系统，因此 y_p 和 z_p满足

$$(y_p')^2 + (z_p')^2 + \xi_p y_p^2 + \eta_p z_p^2 - \frac{1}{p^*}\left(y_p^2 + z_p^2\right)^{p^*} \equiv a_p^2 + b_p^2. \tag{2.20}$$

我们可以用数值方法得到固定 $r > 0$和 $p > 1$ 时的最大化势 $q_p(t) = q_{p,r}(t)$。 $r = 5$和 $p = 15/14$.的情形见图1

考虑函数

$$u_p(t) := y_p^2(t) + z_p^2(t), \qquad t \in I, \tag{2.21}$$

$$h_p(t) := 2a_p^2 + 2b_p^2 - 4\xi_p y_p^2(t) - 4\eta_p z_p^2(t), \qquad t \in I. \tag{2.22}$$

显然，有

$$(u_p(0), u_p'(0)) = (u_p(1), u_p'(1) = (0, 0), \qquad h_p(0) = h_p(1). \tag{2.23}$$

此外， $u_p(t) > 0$ 在(0,1)上。我们有如下结论。

引理2.4 （*2.21*）的函数 $u_p(t)$ 满足一个非齐次线性常微分方程

$$u_p'' + 2(1 + 1/p^*)q_p(t)u_p = h_p(t), \qquad t \in I. \tag{2.24}$$

证明 利用系统（E），由（2.21）可得

$$\begin{aligned}
u_p' &= 2y_p y_p' + 2z_p z_p', \\
u_p'' &= 2\left((y_p')^2 + (z_p')^2\right) + 2y_p y_p'' + 2z_p z_p'' \\
&= 2\left(a_p^2 + b_p^2 - \xi_p y_p^2 - \eta_p z_p^2 + \frac{1}{p^*}\left(y_p^2 + z_p^2\right)^{p^*}\right) + 2y_p\left(\left(y_p^2 + z_p^2\right)^{p^*-1} y_p - \xi_p y_p\right) \\
&\quad + 2z_p\left(\left(y_p^2 + z_p^2\right)^{p^*-1} z_p - \eta_p z_p\right).
\end{aligned}$$

这里用到了 (2.20) 和 (E)。利用 (2.21) 和 (2.22)，可将其简化为

$$u_p'' = 2(1 + 1/p^*)u_p^{p^*} + h_p(t). \tag{2.25}$$

利用 $q_p(t)$ 的公式 (2.14)，可得方程 (2.24)。 □

Remark 2.5 方程 *(2.25)* 也可以写成一个非线性 *Ambrosetti* 型方程

$$u_p'' - 2(1 + 1/p^*)|u_p|^{p^*} = h_p(t), \qquad t \in I. \tag{2.26}$$

由于 *(2.23)*，$h_p(t)$ 和 $u_p(t)$ 都可以延拓为1-周期函数。因此，$u_p(t)$可以理解为常微分方程 *(2.26)* 的一个正1-周期解。

3 主要结果

我们课题组先前的工作可作为对系统 (E) 进行极限分析时最重要步骤的依据。参见 [28, 30, 31]。我们先从以下事实开始。

引理 3.1 设 $u_\gamma \in \mathcal{C}$, $\gamma \in (1, \infty)$ 是定义在 I 上的一族连续函数，使得当$\gamma \to +\infty$时，

$$u_\gamma \to u \quad \textit{in } (\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty). \tag{3.1}$$

Then

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \|u_\gamma\|_\gamma = \|u\|_\infty. \tag{3.2}$$

证明 当 u_γ 与 γ 无关时，结论 (3.2) 是一个众所周知的事实。对于 (3.1) 中的一般情形，只需对原证明稍作修改，同样可以得到 (3.2)。□

回顾一下，势 $q_p(t)$诱导出绝对连续测度

$$\mu_p(t) := \int_{[0,t]} q_p(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{[0,t]} \left(y_p^2(s) + z_p^2(s)\right)^{p^*-1}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in I.$$

由于对于所有 $p \in (1, \infty)$，都有 $\|\mu_p\|_{\mathrm{V}} = \|q_p\|_1 \le \|q_p\|_p = r$，不失一般性，我们可以假设当 $p \downarrow 1$ 时，

$$\mu_p \to \mu \qquad \text{in } (\mathcal{M}_0(I), w^*). \tag{3.3}$$

我们将在下面的引理 3.4 中证明 $\mu \in S_0[r]$。由测度微分方程的特征值具有完全连续性可知，根据 (3.3) 有

$$\xi_p = \lambda_1(q_p) \to \lambda_1(\mu) =: \xi, \qquad \eta_p = \lambda_2(q_p) \to \lambda_2(\mu) =: \eta. \tag{3.4}$$

这里，ξ 和 η 分别是具有极限测度 μ [22]的测度微分方程的第一和第二个狄利克雷特征值。

利用测度微分方程的理论 [22]，我们得到关于 $y_p(t)$和 $z_p(t)$的以下重要观察。证明借鉴自 [31]。

引理 3.2 当 $p \downarrow 1$时，有

$$y_p \to y \neq 0, \qquad z_p \to z \neq 0 \quad \textit{in } (\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty). \tag{3.5}$$

证明 设$\hat{}y_p(t)$和$\hat{}z_p(t)$分别为方程（2.15）和（2.16）满足初值$(y(0)\ y'(0)) = (z(0)\ z'(0)) = (0,1)$. 的解。由（3.3），根据测度微分方程解的全连续性结果 [22]，我们已知

$$\hat{y}_p \to \hat{y}, \qquad \hat{z}_p \to \hat{z} \quad \text{in } (\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty). \tag{3.6}$$

这里，$\hat{}y(t)$和$\hat{}z(t)$分别是极限测度微分方程的解

$$\mathrm{d}y^\bullet + \xi y\,\mathrm{d}t + y\,\mathrm{d}\mu(t) = 0, \qquad t \in I, \tag{3.7}$$
$$\mathrm{d}z^\bullet + \eta z\,\mathrm{d}t + z\,\mathrm{d}\mu(t) = 0, \qquad t \in I, \tag{3.8}$$

其初值为$(y(0)\ y^\bullet(0)) = (z(0)\ z^\bullet(0)) = (0,1)$。特别地，$\hat{}y(t)$和$\hat{}z(t)$均不为零。

对于解 $y_p(t)$ 和 $z_p(t)$，利用初始速度 (2.18)，由线性常微分方程 (2.15) 和 (2.16) 可得

$$y_p(t) \equiv a_p \hat{y}_p(t), \qquad z_p(t) \equiv b_p \hat{z}_p(t). \tag{3.9}$$

根据条件 (2.12)，由 (3.9) 可得

$$a_p \|\hat{y}_p\|_2 = \|y_p\|_2 = \|z_p\|_2 = b_p \|\hat{z}_p\|_2.$$

由 (3.6) 可得

$$\frac{b_p}{a_p} = \frac{\|\hat{y}_p\|_2}{\|\hat{z}_p\|_2} \to \frac{\|\hat{y}\|_2}{\|\hat{z}\|_2} =: \kappa \in (0, \infty) \qquad \text{as } p \downarrow 1. \tag{3.10}$$

这表明，当 $p \downarrow 1$ 时，b_p 与 a_p 同阶。

我们断言

$$\liminf_{p \downarrow 1} a_p > 0. \tag{3.11}$$

否则，若（3.11）不成立，则有 $a_p \to 0$，并且由（3.10）还可得 $b_p \to 0$。根据（3.6）和（3.9），我们得到

$$y_p \to 0, \qquad z_p \to 0 \quad \text{in } (\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty).$$

为将引理 3.1 应用于 (2.13)，我们可以在 $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$ 中选取 $\gamma = p^* \to +\infty$ 和 $u_\gamma := y_p^2 + z_p^2 \to 0$。因此得到的极限为

$$\left\|y_p^2 + z_p^2\right\|_{p^*} \to \|0\|_\infty = 0.$$

另一方面，由 (2.13) 可得 $\left\|y_p^2 + z_p^2\right\|_{p^*} \to 1$，这就产生了矛盾。

我们还断言

$$\limsup_{p\downarrow 1} a_p < +\infty. \tag{3.12}$$

否则，若 (3.12) 不成立，则有 $a_p \to +\infty$。注意

$$\left\|y_p^2 + z_p^2\right\|_{p^*} = a_p^2 \left\|\hat{y}_p^2 + (b_p/a_p)^2 \hat{z}_p^2\right\|_{p^*}.$$

利用 (3.9)—(3.10)，可得

$$\left\|\hat{y}_p^2 + (b_p/a_p)^2 \hat{z}_p^2\right\|_{p^*} \equiv \frac{r^{p-1}}{a_p^2}.$$

由于 $p \downarrow 1$，再次应用引理 3.1，得到

$$\|\hat{y}^2 + \kappa^2 \hat{z}^2\|_\infty = \lim_{p\downarrow 1} \left\|\hat{y}_p^2 + (b_p/a_p)^2 \hat{z}_p^2\right\|_{p^*} = \lim_{p\downarrow 1} \frac{r^{p-1}}{a_p^2} = 0.$$

这是不可能的，因为 $\kappa\hat{z}(t)$ 和 $\hat{y}(t)$ 是测度微分方程的不同特征函数，且 $\|\hat{y}^2 + \kappa^2 \hat{z}^2\|_\infty \neq 0$。因此，我们证明了 (3.12)。

结合 (3.11) 和 (3.12)，我们得出以下收敛结果

$$\lim_{p\downarrow 1} a_p = a \in (0, +\infty), \qquad \lim_{p\downarrow 1} b_p = b \in (0, +\infty). \tag{3.13}$$

最后，由 (3.6)、(3.9) 和 (3.13) 可得

$$y_p = a_p \hat{y}_p \to a\hat{y} =: y, \qquad z_p = b_p \hat{z}_p \to b\hat{z} =: z \qquad \text{in } (\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty). \tag{3.14}$$

这些就是 (3.5) 中所述的一致收敛结果。 □

注 *3.3* 在引理 *3.2* 的证明中，y_p 和 z_p 被视为常微分方程 *(2.15)* 和 *(2.16)* 的初值问题的解。由 *(3.14)*，y 和 z 分别是测度微分方程 *(3.7)* 和 *(3.8)* 的解，其初值分别为 $(y(0)\ y^\bullet(0)) = (0, a)$ 和 $(z(0)\ z^\bullet(0)) = (0, b)$。另一方面，$y_p$ 和 z_p 是常微分方程的狄利克雷特征函数，极限解 y 和 z 分别是与特征值 $\lambda_1(\mu) = \xi$ 和 $\lambda_2(\mu) = \eta$ 相关联的特征函数。因此 $y(t)$ 和 $z(t)$ 具有与 *(2.17)* 中类似的节点性质。

引理 3.4 引理 *3.2* 中的极限特征函数 $y(t)$ 和 $z(t)$ 以及 *(3.3)* 中的极限测度 μ满足

$$\|y\|_2 = \|z\|_2, \tag{3.15}$$

$$\|y^2 + z^2\|_\infty = 1, \tag{3.16}$$

$$\int_I (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}\mu = -r. \tag{3.17}$$

特别地，有 $\mu \in S_0[r]$。

证明 由 (3.5) 可知，等式 (3.15) 可立即由 (2.12) 得出。

在 (2.13) 中取 $\gamma = p^* \to \infty$并应用引理 3.1，可得 (3.16)。

利用 (2.14)，等式 (2.13) 可写为

$$-r^p = \int_I -\left(y_p^2(t) + z_p^2(t)\right)^{p^*}\,\mathrm{d}t = \int_I q_p(t)\cdot(y_p^2(t) + z_p^2(t))\,\mathrm{d}t.$$

令 $p \downarrow 1$，则左端的极限为 $-r$。由 (3.5) 可知，$y_p^2 + z_p^2 \to y^2 + z^2$属于 $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$。结合弱* 收敛 (3.3)，可知右端的极限为 $\int_I (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}\mu$。因此得到结果 (3.17)。

由弱* 收敛 (3.3) 可知，μ的变差范数满足

$$\|\mu\|_{\mathbf{v}} \le \liminf_{p\downarrow 1} \|\mu_p\|_{\mathbf{v}} \le r.$$

此外，由 (3.16) 和 (3.17) 可得

$$r = -\int_I (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}\mu \le \|y^2 + z^2\|_\infty \|\mu\|_{\mathbf{v}} = \|\mu\|_{\mathbf{v}}.$$

这表明 $\|\mu\|_{\mathbf{v}} = r$，即 $\mu \in S_0[r]$。 □

以下极限非齐次线性 MDE (3.20) 是本文的重要工具之一。

引理 3.5 当 $p \downarrow 1$时，有

$$u_p \to u := y^2 + z^2, \tag{3.18}$$

$$h_p \to h := 2a^2 + 2b^2 - 4\xi y^2 - 4\eta z^2 \tag{3.19}$$

在 $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$ 中。此外，极限函数 u 满足以下非齐次线性 *MDE*

$$\mathrm{d}u^\bullet + 2u\,\mathrm{d}\mu(t) = h(t)\,\mathrm{d}t, \qquad t \in I, \tag{3.20}$$

以及初值 $(u(0)\ u^\bullet(0)) = (0, 0)$。

证明 由于 $p \downarrow 1$，由 (3.5) 可得结果 (3.18)。此外，由 (3.13) 可知

$$a_p^2 + b_p^2 \to a^2 + b^2.$$

于是由 (2.22) 得到 $h_p \to 2a^2 + 2b^2 - 4\xi y^2 - 4\eta z^2 \in (\mathcal{C}, \ \|\cdot\|_\infty)$。这证明了 (3.19)。

我们将线性常微分方程 (2.24) 视为非齐次线性 MDE。根据引理 3.9，在[22]中，u_p 是满足初值条件 $u_p(0) = 0$，$u_p'(0) = 0$ 的问题 (2.24) 的解，当且仅当对每个$t \in [0,1]$，均满足

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \int_0^1 G(t,s)(-2(1+1/p^*)q_p(s)u_p(s) + h_p(s))\,\mathrm{d}s \\ &= -\int_0^1 G(t,s)2(1+1/p^*)u_p(s)\,\mathrm{d}\mu_p(s) + \int_0^1 G(t,s)h_p(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.21}$$

其中 $G\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ 定义为

$$G(t,s) := \begin{cases} t-s & \text{for } 0 \le s \le t \le 1, \\ 0 & \text{for } 0 \le t < s \le 1. \end{cases}$$

由收敛结果 (3.3)、(3.18) 和 (3.19)，从 (3.21) 可得，当$p \to 1$,

$$u(t) = -\int_0^1 G(t,s)2u(s)\,\mathrm{d}\mu(s) + \int_0^1 G(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in [0,1].$$

因此，得到极限 MDE (3.20)。 □

由 (3.16) 和 (3.18) 可知 $\|u\|_\infty = \|y^2 + z^2\|_\infty = 1$。我们引入 I的以下子集

$$I_0 := \left\{t \in I : y^2(t) + z^2(t) < 1\right\}, \qquad I_1 := \left\{t \in I : y^2(t) + z^2(t) = 1\right\}.$$

于是，I_0 和 I_1 均非空，且 I 具有不相交的分解 $I = I_0 \cup I_1$. 。集合 I_0 是 I中的一个（相对）开子集，$\{0,1\} \subset I_0$，且 I_0 由至多可数个开子区间组成。与此同时，集合 $I_1 \subset$ (0,1) 是闭且紧的，而 I_1 由至多可数个闭子区间组成，这些区间可能收缩为单点。特别地，$\partial I_1 \neq \emptyset$ 是一个可数子集。此外，还有以下性质。

引理 3.6 极限测度 μ 满足 $\mathrm{supp}(\mu) \subset I_1$。因此，$\mu$ 在 I_0 上是无质量的，并且$\mu(t)$ 在每个开子区间 I_0上都是常数。此外，解 $y(t)$ 和 $z(t)$ 以及测度 $\mu(t)$ 在 I_0上是 C^∞ 。

证明 任取 I_0 的一个极大子区间 $\check{I}$。对于 $t \in \check{I}$，有 $y^2(t) + z^2(t) < 1$ 和$q_p(t) = -\left(y_p^2(t) + z_p^2(t)\right)^{p^*-1} \to 0$。由于极限测度 μ 单调不增，因此

ˇˇ 其连续点集在 I 中稠密。对于任意连续点 t_1， $t_2 \in I$，由亚历山德罗夫定理 [13,p. 316]可得

$$\mu(t_2) - \mu(t_1) = \int_{[t_1,t_2]} \mathrm{d}\mu = \lim_{p\downarrow 1} \int_{[t_1,t_2]} \mathrm{d}\mu_p = \lim_{p\downarrow 1} \int_{t_1}^{t_2} q_p(s)\,\mathrm{d}s = 0,$$

ˇ这意味着 μ 在 I 上为常数。因此，测度 μ 具有如下密度

$$q(t) := \mu'(t) = 0, \qquad t \in I_0. \tag{3.22}$$

由于 (3.22)，测度微分方程 (3.7) 和 (3.8) 因而化为常微分方程

$$y'' + \xi y = 0, \qquad t \in I_0, \tag{3.23}$$
$$z'' + \eta z = 0, \qquad t \in I_0. \tag{3.24}$$

由 (3.22)、(3.23) 和 (3.24) 可知， $y(t)$、 $z(t)$ 和 $\mu(t)$ 在 I_0 上为 C^∞ . □

引理 3.7 假设 I_1 有一个非平凡的极大子区间 $[\alpha, \beta]$。那么，解$y(t)$ 和 $z(t)$ 以及测度 $\mu(t)$ 在(α, β)上为 C^∞。此外，在(α, β)上， $y(t)$ 满足常微分方程

$$y'' + \left(\xi + a^2 + b^2 - 2\eta\right) y + 2(\eta - \xi)y^3 = 0, \tag{3.25}$$

且测度 $\mu(t)$ 具有如下密度

$$q(t) := \mu'(t) = a^2 + b^2 - 2\eta + 2(\eta - \xi)y^2. \tag{3.26}$$

证明 下文中，我们考虑 $t \in (\alpha, \beta)$。由 (2.6) 可得

$$u^\bullet(t) = u'_+(t) = 0.$$

现在，我们像在 (2.4) 和 (2.5) 中那样，利用对测度微分方程 (3.20) 的解的解释。另见 (2.7) 和 (2.8)。因此

$$\begin{aligned} 0 = u^\bullet(t) &= u^\bullet(\alpha) - 2\int_{(\alpha,t]} u(s)\,\mathrm{d}\mu(s) + \int_{(\alpha,t]} h(s)\,\mathrm{d}s \\ &= -2\int_{(\alpha,t]} \mathrm{d}\mu(s) + \int_{[\alpha,t]} h(s)\,\mathrm{d}s \\ &= -2\mu(t) + 2\mu(\alpha) + \int_{[\alpha,t]} h(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由于 $h(t)$ 在 I 上是 C^1，我们知道 $\mu(t)$ 在 (α, β) 上是 C^2。因此，由 (3.19) 可得

$$\begin{aligned} q(t) = \mu'(t) &= \frac{1}{2}h(t) = a^2 + b^2 - 2\xi y^2 - 2\eta z^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2\xi y^2 - 2\eta(1 - y^2) = a^2 + b^2 - 2\eta + 2(\eta - \xi)y^2, \end{aligned}$$

因为 $y^2(t) + z^2(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上 $= 1$。由此得到关系式 (3.26)。此外，借助 (3.26)，测度微分方程 (3.7) 变为常微分方程

$$y'' + \xi y = -yq(t) = -y\left(a^2 + b^2 - 2\eta + 2(\eta - \xi)y^2\right).$$

这给出了常微分方程 (3.25)。根据常微分方程理论，我们知道，作为常微分方程 (3.25) 的一个解，$y(t)$ 在 (α, β) 上是 C^∞。由 (3.26) 可知， $\mu(t)$ 的 C^∞ 光滑性成立。最后， $z(t)$ 也是C^∞，因为 $z(t)$ 满足特征值方程

$$z'' + \eta z + q(t)z = 0, \qquad t \in (\alpha, \beta).$$

□

方程 (3.25) 是一维三次非线性薛定谔方程。这类方程也用于 [28, 30]，以确定 Sturm-Liouville 算子的特征值的最优界。

由于 ∂I_1 至多可数，我们可以利用 (3.22) 和 (3.26) 在 I 上定义一个可积势函数 $\check{}q$。这样的势函数 $\check{}q$ 在 I 的子区间上分段取值为 0 或 C^∞，并定义了一个绝对连续测度

$$\mu_{\mathrm{ac}}(t) = \int_{[0,t]} \check{q}(s)\,\mathrm{d}s \in \mathcal{M}_0. \tag{3.27}$$

在来自 ∂I_1的边界点处，测度 $\mu(t)$ 可能含有非零的狄拉克测度。因此，我们得到测度 μ 的如下分解。

引理3.8 存在一个由不同位置 $\{\tau_i\} \subset \partial I_1$ 构成的可能序列，以及一个由非零质量 $\{r_i\}$ 构成的可能序列，它们定义了一个完全奇异测度

$$\mu_{\mathrm{cs}} = \sum_i -r_i \delta_{\tau_i}. \tag{3.28}$$

此外，结合式 *(3.27)* 中的绝对连续测度，我们知道 μ 可分解为

$$\mu = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{cs}}. \tag{3.29}$$

此外，有

$$y^2(\tau_i) + z^2(\tau_i) = 1 \quad \forall i, \tag{3.30}$$

$$r_i > 0 \quad \forall i, \tag{3.31}$$

$$-\check{q}(t) = |\check{q}(t)| \geq 0 \quad \forall t \in I, \tag{3.32}$$

$$\|\mu\|_{\mathrm{V}} = \|\check{q}\|_1 + \sum_i |r_i| = r. \tag{3.33}$$

证明 我们已经解释了分解结果 (3.27)—(3.29)。（3.30）来自 $\{\tau_i\} \subset \partial I_1$。

对于事实 (3.31) 和 (3.32)，注意到 $\lambda_1(\nu) + \lambda_2(\nu)$ 关于测度 $\nu \in \mathcal{M}_0$ 严格递减。由于 μ 在端点 0 和 1 处没有狄拉克测度，我们知道，对于最大化问题，作为一个函数，$\mu(t)$ 关于 $t \in I$必须是非递增的。这就推出了 (3.31) 和 (3.32)。

由 (3.29) 可得

$$\|\mu\|_{\mathbf{V}} = \|\check{q}\|_1 + \sum_i |-r_i| = \|\check{q}\|_1 + \sum_i r_i.$$

因此，根据引理 3.4 中的事实 $\|\mu\|_{\mathbf{V}} = r$，可得 (3.33)。 □

现在我们可以得到关于最大化函数 $\check{q}$ 的一个重要引理。

引理 3.9 对于最大化问题 *(1.3)*，分解 *(3.29)* 中的完全奇异部分 $\mu_{\mathrm{cs}} = 0$。也就是说，问题 *(1.3)* 由此前定义的势 $\check{q}$ 取得。此外，对于所有 $t \in I$ 和 $\|\check{q}\|_1 = r$，有 $\check{q}(t) \le 0$，即 $\check{q} \in S_1[r]$。

证明 对于最大化问题 (1.3)，假设在 (3.28) 中存在一些负质量 $-r_i < 0$。根据对测度微分方程 (3.7) 和 (3.8) 的解的说明，我们知道

$$y'(\tau_i+) - y'(\tau_i-) = r_i y(\tau_i), \qquad z'(\tau_i+) - z'(\tau_i-) = r_i z(\tau_i).$$

Thus

$$\begin{aligned} u'(\tau_i+) - u'(\tau_i-) &= (2y(\tau_i)y'(\tau_i+) + 2z(\tau_i)z'(\tau_i+)) - (2y(\tau_i)y'(\tau_i-) + 2z(\tau_i)z'(\tau_i-)) \\ &= 2y(\tau_i)\left(y'(\tau_i+) - y'(\tau_i-)\right) + 2z(\tau_i)\left(z'(\tau_i+) - z'(\tau_i-)\right) \\ &= 2r_i\left(y^2(\tau_i) + z^2(\tau_i)\right) \\ &= 2r_i > 0. \end{aligned}$$

这是不可能的，因为 $u(t)$ 在 $t = \tau_i$ 处取得其最大值 1。 □

根据引理 3.9，I_1 必定包含某个非平凡子区间 $[\alpha, \beta]$。注意，非线性薛定谔方程 (3.25) 是可积的。因此，可以利用方程 (3.25) 的解 y，通过 (3.26) 确定势 $\check{q}$。

现在我们可以证明关于前两个狄利克雷特征值之和的极大化子的主要结果。

定理 1.1 的证明。关于唯一性，设 q_1 与 q_2 为两个极大化势。则它们的平均 $q_3 = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2 \in \mathcal{B}_1[r]$. 我们引入第一归一化特征函数$u_1$，$u_2$，$u_3$，它们对应于第一特征值 $\lambda_1(q_1)$ $\lambda_1(q_2)$ $\lambda_1(q_3)$，以及第二归一化特征函数 v_1，v_2，v_3，它们对应于第二特征值 $\lambda_2(q_1)$ $\lambda_2(q_2)$ $\lambda_2(q_3)$。如 [14],所示

$$\begin{aligned} \lambda_1(q) + \lambda_2(q) &= \min_{u,v \in H_0^1, \langle u,v\rangle = 0} R(u,v,q) \\ &= \min_{u,v \in H_0^1, \langle u,v\rangle = 0} \left(\frac{\int_0^1 u'^2 \,\mathrm{d}t - \int_0^1 q u^2 \,\mathrm{d}t}{\int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}t} + \frac{\int_0^1 v'^2 \,\mathrm{d}t - \int_0^1 q v^2 \,\mathrm{d}t}{\int_0^1 v^2 \,\mathrm{d}t} \right), \end{aligned}$$

其中 $\langle u,\ v\rangle = \int_0^1 u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$. 除非 $span\{u_1, v_1\} = span\{u_3, v_3\}$ 与 $span\{u_2, v_2\} = span\{u_3, v_3\}$, 我们有

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}(r) \geq \lambda_1(q_3) + \lambda_2(q_3) = R(u_3, v_3, q_3)\\ =&\frac{1}{2}R(u_3, v_3, q_1) + \frac{1}{2}R(u_3, v_3, q_2)\\ >&\frac{1}{2}\left(\lambda_1(q_1) + \ \lambda_2(q_1)\right) + \frac{1}{2}\left(\lambda_1(q_2) + \lambda_2(q_2)\right)\\ =&\mathbf{M}(r).\end{aligned}$$

因此, $span\{u_1, v_1\} = span\{u_2, v_2\}$ 然后

$$q_1(t) + \lambda_1(q_1) + q_1(t) + \lambda_2(q_1) = q_2(t) + \lambda_1(q_2) + q_2(t) + \lambda_2(q_2) \text{ a.e. } t \in [0, 1],$$

这意味着 $q_1(t) = q_2(t)$ 几乎处处成立。 $t \in [0, 1]$.

我们断言，最大化函数 $\check{}q_r(t)$ 关于 $1/2$ 对称，即对于所有 $t \in [0, 1].$，$\check{}q_r(t) = \check{}q_r(1-t)$。事实上，可以验证 $q^*(t) := \check{}q_r(1-t)$ 也可作为优化问题 (1.3) 的最大化势。因此，可直接由最大化函数的唯一性推出其对称性。

设 $[\alpha, \beta]$ 是 I_1 的任意非平凡极大子区间。对于 $t \in (\alpha,\ \beta)$，由 (3.7) 和 (3.8) 可得以下常微分方程

$$y'' + \xi y + \check{q}(t)y = 0, \qquad z'' + \eta z + \check{q}(t)z = 0. \tag{3.34}$$

由 (3.34) 消去 $\check{}q(t)$，得到

$$\frac{z''}{z} - \frac{y''}{y} + \eta - \xi = 0, \qquad t \in (\alpha, \beta) \setminus \{\tau\}. \tag{3.35}$$

注意由 $y^2 + z^2 = 1$ 可知

$$z = \pm\sqrt{1 - y^2}, \qquad z'' = \pm\frac{(y^3 - y)y'' - y'^2}{\left(\sqrt{1 - y^2}\right)^3}.$$

于是方程 (3.35) 简化为如下二阶非线性常微分方程

$$(1 - y^2)y'' + yy'^2 - (\eta - \xi)y(1 - y^2)^2 = 0 \tag{3.36}$$

对于 $t \in (\alpha, \beta) \setminus \{\tau\}$。当 $\tau \in (\alpha, \beta)$ 时，有 $y(\tau) = 1,\ y'(\tau) = 0$，因此 (3.36) 在 $t = \tau$ 处仍然成立。从而方程 (3.36) 对所有 $t \in (\alpha, \beta)$ 都是良定义的。

注意， $y^2(t) + z^2(t) = 1$ 在 $[\alpha, \beta]$上。由引理 3.7， $y(t)$ 和 $z(t)$ 在 (α, β) 上是 C^∞。因此，存在一个 C^∞ 函数 $\theta = \theta(t)$，使得

$$(y(t), z(t)) = (\cos(\theta(t)/2), \sin(\theta(t)/2)), \qquad t \in (\alpha, \beta). \tag{3.37}$$

由于 $y(t)$ 为正，可以选取 $\theta(t) \in (-\pi, \pi)$。此外，对于 $t \in (\alpha, \beta) \setminus \{\tau\}$，由 (3.37) 可得

$$y'' = -\frac{1}{2}\theta'' \sin(\theta/2) - \frac{1}{4}\theta'^2 \cos(\theta/2).$$

因此，(3.36) 为

$$\begin{aligned} 0 &= (1-y^2)y'' + yy'^2 - (\eta - \xi)y(1-y^2)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(\theta'' + (\eta - \xi)\sin\theta)\sin^3(\theta/2). \end{aligned}$$

去掉非零因子 $-\frac{1}{2}\sin^3(\theta/2)$ 后，我们知道 $\theta(t) \in (-\pi, \pi)$ 满足摆方程

$$\theta'' + (\eta - \xi)\sin\theta = 0, \tag{3.38}$$

对于 $t \in (\alpha, \beta) \setminus \{\tau\}$。由于 $\theta(t)$ 是 C^∞，式 (3.38) 在 $t = \tau$ 处也得到验证。

对于 $\check{q}(t)$，由 (3.26) 得到

$$\begin{aligned} \check{q}(t) &= a^2 + b^2 - 2\eta + 2(\eta - \xi)\cos^2(\theta(t)/2) \\ &= a^2 + b^2 - \eta - \xi + (\eta - \xi)\cos\theta(t) \\ &= \check{c} + \ell\cos\theta(t), \end{aligned}$$

其中 $\check{c} = a^2 + b^2 - \eta - \xi$ 和 $\ell = \eta - \xi$. 这就得到了 (1.5)。 □

注3.10 当 $r = 5$ 时，最大化势及其对应的特征函数可以进行数值模拟，如图*2*所示。类似地，$r = 20$时的结果见图*3*。基于数值模拟，我们猜想存在一个常数 r^*（≈ 15.5292），使得最大化函数 $\check{q}_r$ 在 $r < r^*$时包含两个非零部分，而在 $r > r^*$. 时包含一个非零部分。$r = r^*$.时的情形见图*4*。

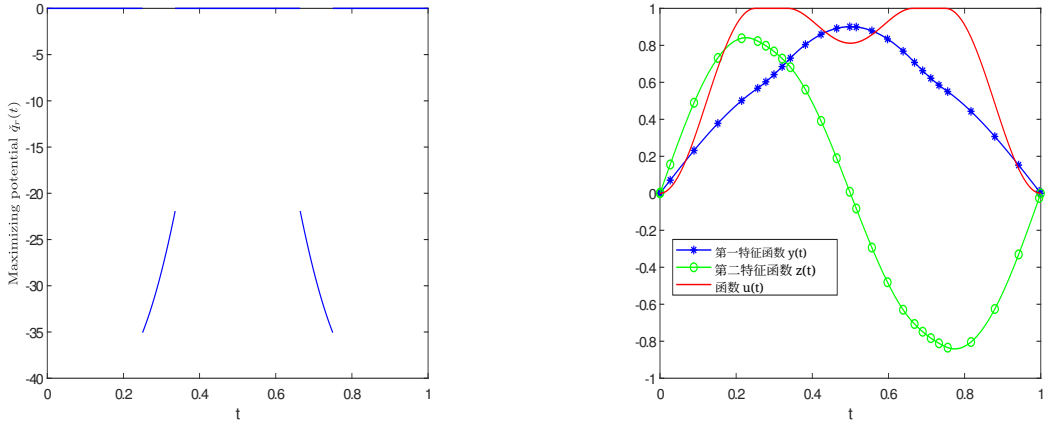

图 2：最大化势 $\check{q}_r(t)$（左）及特征函数（右），其中 $r = 5$.

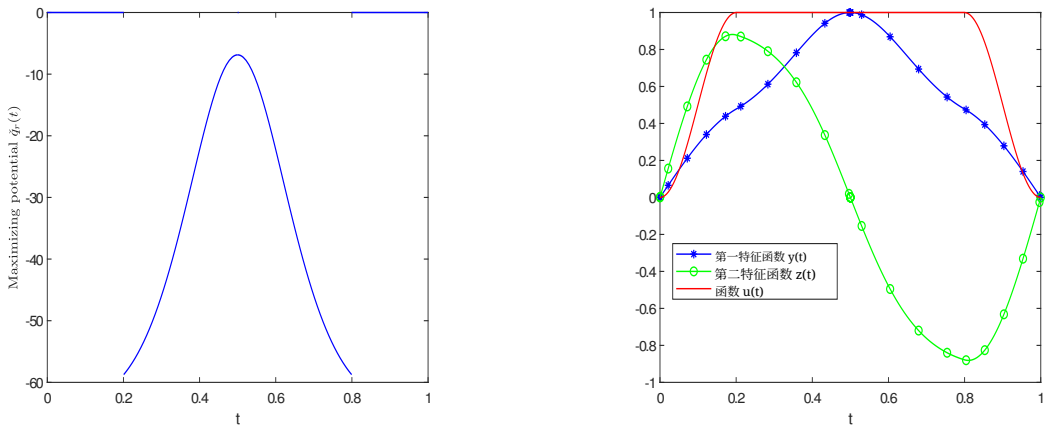

图 3：最大化势 $\check{q}_r(t)$（左）和特征函数（右），其中 $r = 20$.

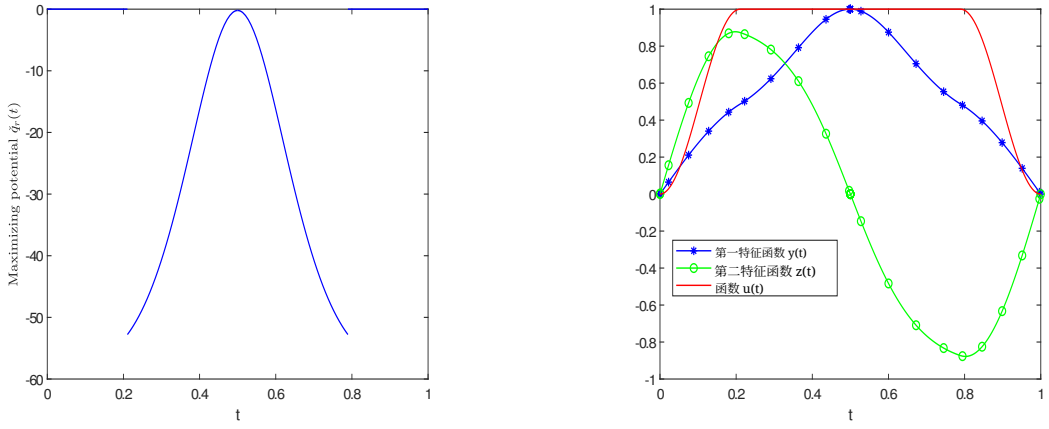

图 4：最大化势 $\check{q}_r(t)$（左）和特征函数（右），其中 $r = r^*$.

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12471174、12401205和12371182）、广东省基础与应用基础研究基金（项目编号：2023A1515110430）、广州市科技计划项目（项目编号：2025A04J3404）、中国博士后科学基金会（项目编号：2025M773097）、中国博士后科学基金会博士后资助计划（C档）（项目编号：GZC20230970）以及中央高校基本科研业务费（项目编号：21624347）的资助。

参考文献

[1] M.S. Ashbaugh, R.D. Benguria, 斯图姆-刘维尔算子的特征值比值, J. Differential Equations, 103 (1993), 205–219.[2] M. S. Ashbaugh, E. M. Harrell, R. Svirsky, 关于特征值间隙的最小值与最大值及其成因, 《太平洋数学杂志》, 147 (1991), 1–24.[3] B. Benson, 关于谱与切格常数的斯图姆-刘维尔估计, 《国际数学研究通知》, (2015), 7510–7551.[4] M. Carter, B. van Brunt, 勒贝格-斯蒂尔切斯积分：实用入门, 纽约, 施普林格出版社, 2000.[5] D. Chen, M. Huang, 实数轴上薛定谔算子的特征值间隙比较定理, 《亨利·庞加莱年刊》, 13 (2012), 85–101.[6] H. Chen, M. Bhakta, H.Hajaiej, 关于涉及混合分数阶拉普拉斯算子的狄利克雷问题中特征值之和的界, J. Differential Equations, 317 (2022), 1–31.[7] Q.-M. Cheng, G. Wei, 固支板问题中特征值的一个下界, 《微积分与偏微分方程》, 42 (2011), 579–590.[8] J. Chu, K.Jiang, G.Meng, 带负权的斯图姆-刘维尔问题所有节点的精确界, 《地中海数学杂志》, 22 (2025), Paper No. 127, 12 pp.[9] J. Chu, G. Meng, Camassa-Holm方程狄利克雷特征值比值的精确界, 《数学年刊》, 388 (2024),1205–1224.[10] J. Chu, G. Meng, F. Wang, M. Zhang, 带 L^p 势的斯图姆-刘维尔算子节点的优化问题, 《数学年刊》, 390 (2024), 1401–1417.[11] J. Chu, G. Meng, N. Xie, 具有固定节点的斯图姆-刘维尔方程反问题, J. Differential Equations, 454 (2026), p. 113966.[12] J. Chu, G. Meng, Z. Zhang, 一般不定 Sturm-Liouville 问题正周期特征值与狄利克雷特征值的极小化, 《数学进展》, 432 (2023), 109272, 38 pp.[13] N. Dunford, J. T. Schwartz, 线性算子， 第一部分, 纽约 , Interscience Pub- lishers, 1958.[14] K. Fan, 关于 Weyl 的线性变换特征值定理. I, 《美国国家科学院院刊》, 35 (1949), 652–655.[15] S. Guo, G. Meng, P. Yan, M. Zhang, 斯图姆-刘维尔算子狄利克雷特征值最大间隙的最优值, J. Math. Phys., 63 (2022), Paper No. 072701, 11 pp.[16] S. Guo, M. Zhang, 关于第二个狄利克雷特征函数节点最优位置的变分方法, 《数学方法与应用科学》, 46 (2023), 11983–12005.[17] J. Hedhly, 单阱密度振动弦方程的特征值比值, J. Differential Equations, 307 (2022),476–485.[18] M. Horváth, 关于斯图姆-刘维尔算子的前两个特征值, 《美国数学会会刊》, 131 (2003), 1215–1224.

[19] X. Hu, Y. Ou, P. Wang, H. Zhu, 哈密顿系统的 Hill 型公式与 Krein 型迹公式, Anal. Theory Appl., 37 (2021), 74–101.[20] X. Hu, P. Wang, 常微分方程中 S周期解的 Hill 型公式与 Krein 型迹公式, Discrete Contin. Dyn. Syst., 36 (2016), 763–784.[21] M. G. Krein, 关于特征值最大值与最小值的若干问题以及 Lyapunov 稳定区, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 1 (1955), 163–187.[22] G. Meng, M.Zhang, 测度微分方程的解与特征值对测度的依赖性, J. Differential Equations, 254 (2013), 2196–2232.[23] Š. Schwabik, 广义常微分方程, 新加坡, World Scien- tific, 1992.[24] I. M. Singer, B. Wong, S.-T. Yau, S. S.-T. Yau, 薛定谔算子前两个特征值之差的一个估计, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 12 (1985), 319–333.[25] A. Slavík, 关于抽象广义微分方程与测度泛函微分方程适定性的结果, J. Differential Equations, 259 (2015), 666– 707.[26] Y. Tian, Q. Wei, M. Zhang, 关于最优特征值间隙临界系统的多项式可积性, J. Math. Phys., 64 (2023), 092701, 18 pp.[27]Y. Tian, M. Zhang, 带 L^p 势的斯图姆-刘维尔算子特征值之和的优化问题, J. Math. Phys., 66 (2025), 092703, 11 pp.[28] Q. Wei, G. Meng, M. Zhang, 势属于 L^1 球的斯图姆-刘维尔算子特征值极值, J. Differential Equations, 247 (2009), 364–400.[29] A. Zettl, Sturm-Liouville 理论, 普罗维登斯, Amer. Math. Soc., 2005.[30] M. Zhang, 势属于 L^1 球的 Hill 算子最小特征值的极值, J. Differential Equations, 246 (2009), 4188–4220.[31] M. Zhang, 可积势下第零 Neumann 特征值的极小化, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 29 (2012), 501–523.[32] Z. Zhang, X. Wang, 一般不定 Sturm-Liouville 问题最低正 Neumann 特征值的精确估计, J. Differential Equations, 382 (2024), 302– 320.