arXiv:2603.06026v1 [math-ph] 6 Mar 2026

自相互作用量子场论中相干态动力学的高阶近似

Zied Ammari ♯、Julien Malartre ♮、Maher Zerzeri ♭

2026年3月6日

摘要

我们研究半经典（平均场）区域中自相互作用玻色子量子场论里的相干态传播。依托 Hepp方法，并详细分析相关的经典与量子场动力学（分别为非线性和线性），我们为相干态的量子演化构造了任意阶渐近展开式。首先，在满足确保哈密顿量本质自伴性及经典流适定性的标准假设下，针对空间截断的 $P(\phi)_2$ 模型建立结果，随后将其推广至一类非多项式解析相互作用。本文细化并推广了早期结果；早期研究仅确定了展开式的首项。

关键词。经典极限、相干态、量子场论、Wick量子化、Fock空间， $P(\phi)_2$ 模型、解析相互作用、超压缩性。

2020年数学主题分类。81R30,81Q20, 81T08, 34A34, 35A01, 81V80.

目录

1 背景与主要结果 41.1 量子场论形式体系 .41.2 多项式 Wick 量子化.71.3 主要结果 .9

2 部分　部分截断　$P(\phi)_2$ 模型 1　　6
2.1 模型介绍 .162.2 经典场方程 .182.3 二次动力学 .232.4 完整渐近展开 .29

♯LMB - UMR6623 CNRS，玛丽与路易·巴斯德大学。格雷路16号，25030 贝桑松 Cedex，法国。zied.ammari@umlp.fr♮巴黎北索邦大学，分析、几何与应用实验室，LAGA，CNRS，UMR 7539，F-93430，维勒塔讷兹，法国。malartre@math.univ-paris13.fr♭巴黎北索邦大学，分析、几何与应用实验室，LAGA，CNRS，UMR 7539，F-93430，维勒塔讷兹，法国。zerzeri@math.univ-paris13.fr

3 解析相互作用 **33**
3.1 非多项式 Wick 算子 .333.2 经典场方程 .353.3 二次动力学 .363.4 一些辅助结果 .373.5 完整渐近展开 .39

A 外尔算子与数目估计 **41**

引言

玻尔对应原理在经典力学与量子力学之间架起了一座深刻的桥梁，指出在量子数趋于无穷大的极限下，这两种理论的预测相一致。从数学角度来看，这一原理自然引出了对如下形式的薛定谔型方程的研究

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\varepsilon\,\partial_t \psi_t = H_\varepsilon\,\psi_t \\ \psi_t\big|_{t=0} = \varphi_\varepsilon\,, \end{cases} \tag{0.1}$$

在半经典区间 $\varepsilon \to 0$。这正是半经典分析所研究的领域（例如参见 [16, 37]），该领域为玻尔原理提供了严谨的表述，这通常被称为经典极限。

当初始数据 φ_ε 在 (0.1) 中被选为使不确定性原理达到最小的状态时，经典动力学与量子动力学之间的联系尤为显著。这类状态称为相干态，最早由 E. Schrödinger 在 1926 [33] 中引入，并将其视为空间局域性最强、最接近经典状态的量子态。术语 相干态 则由 J. R. Glauber 于 1963 年在激光物理领域提出 [20]。此后，相干态逐渐成为物理学和数学领域的核心主题，相关例子参见 [12]。由于相干态广泛应用于凝聚态物质、量子光学和量子信息理论等数学与物理领域，它们持续受到越来越多的关注 [10, 23, 28, 27]。

1974年，K. Hepp [24]取得了一项决定性进展，提出了一个严谨的框架，阐明了相干态在经典极限中的关键作用。他开创性的方法取得了卓著成效，启发了后来大量采用相干态方法研究半经典动力学的工作。尤其是，该方法能够为薛定谔方程(0.1) 在相干态初始数据 [31]下的解，导出关于 $\varepsilon^{1/2}$ 幂次的完整渐近展开。

此后，Hepp方法已扩展至多种渐近情形，包括平均场极限（其中半经典参数 ε 对应于粒子数的倒数），以及无限维相空间分析和量子场模型（分别参见 [19, 32,2], [6], 和 [17]）。在后者的研究背景下， [7] 证明，对于某一类自相互作用玻色量子场哈密顿量，相干态在经历由幺正 Bogoliubov变换所支配的压缩过程时，仍会沿经典轨道保持局域化。

本文旨在沿着这一研究方向进一步发展，采用 Hepp方法，以 D. Robert 对薛定谔算子的分析为指导，为经典极限下的相干态演化提供完整渐近描述 [31]。我们尤其关注空间上的

截断 $P(\phi)_2$ 模型，该模型因其在理论物理中的基础作用而被选用（参见 [22] 以及 [15]）。对于该模型，经典场方程由一个非线性 Klein-Gordon 方程给出(1.40)，对于能量空间中的初始数据，该方程具有整体适定性，见定理 2.9。更一般地，我们研究具有解析相互作用的某些自相互作用玻色量子场哈密顿量模型，其中包括 Høegh-Krohn 模型的一个变体 [25]。

遵循 [7]，的框架，我们采用动力学视角研究经典极限。 [1, 8] 讨论了另一种基于变分视角的方法。还值得一提的是， [6]，基于将 Wigner（或半经典）测度推广至无穷维相空间，发展出另一种方法。迄今为止，该方法主要应用于平均场区间的多体哈密顿量、量子电动力学，以及不同标度下的汤川模型和极化子型模型（例如参见 [3, 4, 18, 13]）。将其推广至自相互作用量子场论模型超出了本文的范围，留待未来研究。

利用 Hepp方法，并围绕相应的经典非线性场方程对量子动力学进行系统展开，我们构造了经典极限下相干态时间演化的任意阶渐近展开。首阶由经典哈密顿流支配，而次阶项则由随时间变化的二次（Bogoliubov）动力学和更高阶的 Wick序修正描述。对于每个固定时刻，我们都得到了范数精确的展开式，并对余项进行了明确控制。这些结果改进并推广了第一和第三作者此前的工作 [7]，以及 K. Hepp 的工作 [24],；后者仅建立了半经典展开的首阶项。

特别地，我们通过证明对于物理空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中的每个初始数据，方程 (1.38) 都存在唯一的全局温和解，进一步阐明了非线性 Klein-Gordon $P(\phi)_2$ 场方程的研究，参见推论 2.10。由此，我们证明了从 $L^2(\mathbb{R})$ 中任意初始数据出发的经典轨道上相干态的传播，并且适用于埃伦费斯特时间以下的任意有限时间，参见定理 1.4。上述结果要求对空间截断函数 g 增加一项假设，参见 (1.34)；此外，该函数取自索伯列夫空间 $H^1(\mathbb{R})$，而非 $L^2(\mathbb{R})$。更多细节参见小节 2.2 和注 2.11。

对于更一般的、具有解析非线性项的经典非线性场方程 (1.46)，其定义在抽象希尔伯特空间 $\mathcal{Z}$ 上，我们指出，文献 [7], 中用于构造 (1.46)在 $\mathcal{Z}$-空间上的全局温和解的论证并不正确，尽管其结论本身仍可能成立。尽管如此，对于任意属于 (1.46)的初始数据 $\mathcal{Z}$，我们仍能证明局部温和解的存在唯一性，参见定理 3.6。在此情形下，我们相应地证明了相干态在其存续期间沿经典轨道传播，并在埃伦费斯特时间以下获得高阶近似，参见定理 1.6。

论文概述。 第 1 节简要回顾量子场论形式体系和Wick量子化，并陈述我们的两个主要结果：定理 1.6 讨论 [7], 中所描述的一大类解析相互作用，而定理 1.4 则针对 $P(\phi)_2$ 模型，给出更为详细且明确的结果。第 2 节首先简要介绍$P(\phi)_2$ 模型及其对应经典场方程的整体适定性结果。随后，我们建立关于时变二次哈密顿量动力学的两个定理 2.12 和 2.14 。第一个结果（定理 2.12）证明了时变二次算子的酉传播子存在且唯一，这是附录 [2, 附录C]中证明的一般对易子方法的推论。第二个定理 2.14涉及Wick可观测量的量子二次演化，其一般形式源于S. Breteaux [11]。最后，我们完成定理 1.4

在小节2.4中。第3节专门证明定理 1.6。由于许多论证与 $P(\phi)_2$, 情形相似，我们只强调其中的创新之处。在附录 A中，我们建立了Weyl算子的数算符型估计，从而可以证明这些算子保持数算子的所有幂的定义域。此类信息为近似余项提供了精确控制。

1 背景与主要结果

对称 Fock 空间是自然的希尔伯特空间，其中自由玻色场的哈密顿算符得到了很好的描述，并以非常显式的方式表达。此外，我们已有正则对易关系的波表示，见定理1.1（见下文），它使我们能够以粒子表示或波表示来描述量子场哈密顿算符。借助后一种描述，我们将看到本文所考虑的相互作用项具有特别方便的形式，从而简化了对它们的研究。

为使本文尽可能自洽，我们在下一小节中介绍量子场论的一些基本概念，遵循 [7]。

1.1 量子场论的形式体系

设 $\mathcal{Z}$ 为一个可分的复希尔伯特空间，其内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$关于左变量是反线性的，相应的范数为 $|u| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$。我们赋予 $\mathcal{Z}$ 一个共轭 $\mathfrak{c}:\ \mathcal{Z} \to \overline{\mathcal{Z}}$，即 $\mathcal{Z}$上保范数的反线性对合。我们定义

$$\mathcal{Z}_0 = \{z \in \mathcal{Z},\quad \mathfrak{c}z = z\}\,, \tag{1.1}$$

$\mathcal{Z}$的实子空间。

$\mathcal{Z}$ 上的玻色福克空间定义为希尔伯特直和

$$\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathcal{Z}\,, \tag{1.2}$$

其中， $\otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathcal{Z}$ 表示由正交投影 $\otimes^{n}\mathcal{Z}$ 得到的值域

$$\mathcal{S}_n : u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)}\,, \tag{1.3}$$

其中， $\mathfrak{S}_n$ 是 n次对称群。空间 $\otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathcal{Z}$作为 $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$的子空间，称为 n粒子扇区。对于 $n = 0$，这给出真空扇区 $\otimes_{\mathrm{s}}^{0}\mathcal{Z} = \mathbb{C}\,\Omega$，其中

$$\Omega = (1, 0, 0, \dots) \in \Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z}) \tag{1.4}$$

称为真空向量。借助这些对应关系，任何 $\psi = \big(\psi^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 都可以写成

$$\psi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \psi^{(n)} \quad \text{with} \quad \|\psi\|^2_{\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \|\psi^{(n)}\|^2_{\otimes^n\mathcal{Z}} < +\infty\,. \tag{1.5}$$

极化公式

$$\mathcal{S}_n(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = \frac{1}{2^n\, n!} \sum_{\rho_1,\ldots,\rho_n \in \{\pm 1\}} \rho_1 \cdots \rho_n \left[\otimes^n \left(\sum_{j=1}^n \rho_j u_j \right) \right] \tag{1.6}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$，可得

$$\overline{\mathrm{Span}\{\otimes^n w, \quad w \in \mathcal{Z}\}} = \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{Z}\,. \tag{1.7}$$

希尔伯特空间 $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 配备内积

$$\langle \varphi | \psi \rangle_{\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\langle \varphi^{(n)} \middle| \psi^{(n)} \right\rangle_{\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{Z}}\,.$$

我们用 $\|\cdot\|$表示相应的范数。

最后，有限粒子空间定义为代数直和

$$\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}}^{\mathrm{alg}} \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{Z}\,, \tag{1.8}$$

在 $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$中稠密。

现在我们定义量子场论中的标准算子。设 $\varepsilon \in (0,1]$ 为一个半经典参数。对于所有 $u \in \mathcal{Z}$，与 u相关的 ε-依赖的产生算符和湮灭算符分别定义在 $\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$上，其表达式为

$$\mathrm{a}_\varepsilon^*(u)\Big|_{\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{Z}} = \sqrt{\varepsilon(n+1)}\, \mathcal{S}_{n+1}\Big(|u\rangle \otimes (\otimes^n \mathbb{1}) \Big) \tag{1.9}$$

and

$$\mathrm{a}_\varepsilon(u)\Big|_{\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{Z}} = \sqrt{\varepsilon n}\, \mathcal{S}_{n-1}\Big(\langle u| \otimes (\otimes^{n-1} \mathbb{1}) \Big)\,, \tag{1.10}$$

其中 $\langle u|:\ v \in \mathcal{Z} \mapsto \langle u|v\rangle \in \mathbb{C}$ 且 $|u\rangle = [\langle u|]^*:\ \mathbb{C} \to \mathcal{Z}$。这两个算子满足正则对易关系（CCR）：

$$[\mathrm{a}_\varepsilon(u), \mathrm{a}_\varepsilon(v)] = [\mathrm{a}_\varepsilon^*(u), \mathrm{a}_\varepsilon^*(v)] = 0 \text{ and } [\mathrm{a}_\varepsilon(u), \mathrm{a}_\varepsilon^*(v)] = \varepsilon\, \langle u|v\rangle\, \mathbb{1},\ \forall\, u, v \in \mathcal{Z}\,. \tag{1.11}$$

对于所有 $u \in \mathcal{Z}$，Segal场算符

$$\phi_\varepsilon(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\mathrm{a}_\varepsilon^*(u) + \mathrm{a}_\varepsilon(u) \Big) \tag{1.12}$$

在 $\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}$（$\mathcal{Z}$）上本质自伴，参见例如 [30, 定理 X。41], 这使我们能够（根据 Stone定理）定义 Weyl算子

$$\mathrm{W}_\varepsilon(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi_\varepsilon(u)}\,. \tag{1.13}$$

这些算子对所有 $u_1,\ u_2 \in \mathcal{Z}$ 都满足，

$$\mathrm{W}_\varepsilon(u_1)\,\mathrm{W}_\varepsilon(u_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varepsilon}{4}\mathsf{w}(u_1,u_2)}\,\mathrm{W}_\varepsilon(u_1+u_2)\,, \tag{1.14}$$

其中 $\mathsf{w}(u_1,u_2) = -2\,\mathrm{Im}\,\langle u_1|u_2\rangle$ 是典范辛形式。

在此语境下，相干态集合是玻色福克空间 $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 中构成完备族的向量，定义如下

$$\left\{\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}u\right)\Omega,\quad u\in\mathcal{Z}\right\}, \tag{1.15}$$

其中 Ω 是真空向量 (1.4)。具体而言，我们有

$$\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}u\right)\Omega = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\varepsilon}|u|^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{-\frac{n}{2}}\frac{\otimes^n u}{\sqrt{n!}},\quad \forall\, u\in\mathcal{Z}\,. \tag{1.16}$$

对于任意自伴算子 $A : D(A) \subset \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}$，相应的提升算子定义为

$$\Gamma(A)\Big|_{\otimes_{\mathrm{s}}^{n,\mathrm{alg}}D(A)} = \otimes^n A\,,$$

其中 $\otimes^n{}_{\mathrm{s}}{}^{\mathrm{alg}}D(A)$ 是代数对称 n-张量积；而 A 的二次量子化是由下式给出的算子 $\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)$

$$\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)\Big|_{\otimes_{\mathrm{s}}^{n,\mathrm{alg}}D(A)} = \varepsilon\sum_{j=1}^{n}(\otimes^{j-1}\mathbb{1})\otimes\underbrace{A}_{j^{\mathrm{th}}\mathrm{position}}\otimes(\otimes^{n-j}\mathbb{1})\,,$$

它描述了粒子表示中自由玻色场的哈密顿量。特别地，依赖于 ε 的数算子定义为 $\mathsf{N}_\varepsilon = \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\mathbb{1})$。我们还注意到，只要 $\mathfrak{c}$ 是 $\mathcal{Z}$ 上的共轭，$\Gamma(\mathfrak{c})$ 就在玻色福克空间 $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 上定义了一个共轭。

我们以一个重要定理结束本小节。该定理通常称为福克空间的波表示，它源自以实希尔伯特空间为指标的高斯随机过程的表示（例如，参见 [22, 命题 2.1。1]以及 [36, 定理 I。1]）。

定理 1.1。 存在一个概率空间 $(Q,\mathfrak{T},\mu)$ 以及一个酉映射

$$\mathcal{R} : \Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z}) \to L^2(Q,\mathrm{d}\mu)$$

满足以下条件：

1. $\mathcal{R}\Omega = 1$，2. $\mathcal{R}\mathfrak{M}\mathcal{R}^* = L^\infty(Q,\mathrm{d}\mu)$，其中 $\mathfrak{M}$ 表示由外尔算子$\mathrm{W}_\varepsilon(u)$生成的 W^*-代数，$u\in\mathcal{Z}_0$。

此外，对于所有 $V\in\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$</style}，我们有

$$\mathcal{R}\Gamma(\mathfrak{c})\,V = \overline{\mathcal{R}V} \tag{1.17}$$

并且，对于所有 $u \in \mathcal{Z}_0$, $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{R}^*\Big(\mathcal{R}(\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right) V)\Big)\mathcal{R}(\mathrm{W}_\varepsilon\left(u\right)\Omega) = \mathrm{W}_\varepsilon\left(u\right)\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right) V\,. \tag{1.18}$$

福克空间的波表示似乎非常适合研究本文所考虑的相互作用项，因为我们将看到，这些项对应于 $L^2(Q,\ \mathrm{d}\mu)$中由可测函数定义的无界乘法算子。

1.2 多项式Wick量子化

在本小节中，我们按照 [6]的做法，引入多项式符号的概念。

映射 $b:\ \mathcal{Z} \to \mathbb{C}$ 称为阶数为$(p,\ \ q) \in \mathbb{N}^2$ 的单项式符号，若存在一个有界~算子 $b \in \mathcal{L}(\otimes_{\mathrm{s}}^p \mathcal{Z},\ \otimes_{\mathrm{s}}^q \mathcal{Z})$，使得对所有 $z \in \mathcal{Z}$,

$$b(z) = \left\langle \otimes^q z \middle| \widetilde{b}(\otimes^p z) \right\rangle_{\otimes_{\mathrm{s}}^q \mathcal{Z}}\,. \tag{1.19}$$

在这种情况下，我们记作$b \in \mathcal{P}_{p,\ q}(\mathcal{Z})$，并称 $m = p + q$ 为 b的总阶数。我们将 $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$定义为单项式符号的线性组合所构成的空间，称为多项式符号空间。对所有 $m \in \mathbb{N}$,$\mathcal{P}_m(\mathcal{Z})$，分别地，$\mathcal{P}_{\leqslant m}(\mathcal{Z})$ 表示总阶数为 m、分别至多为m的多项式符号空间。

对于所有 $b \in \mathcal{P}_{p,q}(\mathcal{Z})$、$z, h \in \mathcal{Z}$，我们可以写成

$$b(z+h) = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant q \\ 0 \leqslant k \leqslant p}} \frac{1}{j!}\,\frac{1}{k!}\left\langle \otimes^j h \middle| \partial_z^k \partial_{\bar{z}}^j b(z)(\otimes^k h) \right\rangle\,, \tag{1.20}$$

其中

$$\partial_z^k \partial_{\bar{z}}^j b(z) = \frac{p!}{(p-k)!}\,\frac{q!}{(q-j)!}\,\mathcal{S}_j\Big(\left\langle \otimes^{q-j} z\right| \otimes (\otimes^j \mathbb{1})\Big)\,\widetilde{b}\,\mathcal{S}_p\Big(\left|\otimes^{p-k} z\right\rangle \otimes (\otimes^k \mathbb{1})\Big) \in \mathcal{L}(\otimes_{\mathrm{s}}^k \mathcal{Z}, \otimes_{\mathrm{s}}^j \mathcal{Z})\,. \tag{1.21}$$

该公式为多项式符号提供了一种导数概念。特别地，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\partial_z^k b(z) = \frac{p}{(p-k)!}\,\left\langle \otimes^q z\right|\,\widetilde{b}\,\mathcal{S}_p\Big((\otimes^{p-k} z) \otimes (\otimes^k \mathbb{1})\Big) \in \left(\otimes_{\mathrm{s}}^k\ \mathcal{Z}\right)^* \tag{1.22}$$

and

$$\partial_{\bar{z}}^k b(z) = \frac{q!}{(q-k)!}\,\mathcal{S}_k\left(\left\langle \otimes^{q-k} z\right| \otimes (\otimes^k \mathbb{1})\right)\,\widetilde{b}\,(\otimes^p z) \in \otimes_{\mathrm{s}}^k \mathcal{Z}\,. \tag{1.23}$$

W ick 对单项式符号 $b \in \mathcal{P}_{p,q}(\mathcal{Z})$ 的量子化定义在 $\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 上，其公式为 as

$$\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b\right)\Big|_{\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{Z}} = \mathbb{1}_{[p,+\infty)}(n)\,\frac{\sqrt{n!\,(n+q-p)!}}{(n-p)!}\,\varepsilon^{\frac{p+q}{2}}\,\mathcal{S}_{n+q-p}\left(\widetilde{b} \otimes (\otimes^{n-p} \mathbb{1})\right)\,, \tag{1.24}$$

其中 $\mathcal{S}_{n+q-p}$ 是由下式给出的对称化算子：(1.3)。表达式 $\mathrm{Wick}_\varepsilon(b)$ 通过线性延拓到任意多项式符号 $b \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$，而 b 称为算子的维克符号

$\mathrm{Wick}_\varepsilon(b)$。我们注意到齐次性

$$\mathrm{Wick}_\varepsilon(b) = \varepsilon^{\frac{j}{2}}\,\mathrm{Wick}_1(b) \quad \text{for all } b \in \mathcal{P}_j(\mathcal{Z})\,. \tag{1.25}$$

对于所有 $\varphi,\ \psi \in \Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 以及所有多项式符号 b，我们有

$$\langle\varphi|\mathrm{Wick}_\varepsilon(b)\ \psi\rangle = \left\langle \mathrm{Wick}_\varepsilon\left(\overline{b}\right)\ \varphi \middle| \psi\right\rangle\,, \tag{1.26}$$

其中 $\overline{b}$ 是由 $b(z) = b(z)$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$ 定义的多项式符号。这个恒等式表明，$\mathrm{Wick}_\varepsilon(b)^*$ 是 $\mathrm{Wick}_\varepsilon(\overline{b})$ 的扩展：特别地，算子 $\mathrm{Wick}_\varepsilon(b)$ 是可闭的。我们对其闭包仍使用相同的记号。

$\widetilde{}$将 b 和 b 通过恒等式 (1.19)对应起来后，下面给出 Wick量子化最重要的几个例子。

$\widetilde{b}$	$\mathrm{Wick}_\varepsilon(b)$
$\lambda \in \mathbb{C}$	$\lambda\mathbb{1}$
$\langle u\|$	$\mathrm{a}_\varepsilon(u)$
$\|u\rangle$	$\mathrm{a}_\varepsilon^*(u)$
$\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\langle u\|z\rangle$	$\phi_\varepsilon(u)$
$\mathbb{1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$	N_ε
$A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$	$\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)$

现在陈述 Wick量子化的主要性质， [6] 证明见此处。

命题 1.2。设 $b \in \mathcal{P}_{p,\,q}(\mathcal{Z})$。

1.（伴随）在 $\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 上，我们有

$$\mathrm{Wick}_\varepsilon(b)^* = \mathrm{Wick}_\varepsilon\left(\overline{b}\right)\,. \tag{1.27}$$

2. 对于任意定义在 $\mathcal{Z}$ 上的自伴算子 A，以及任意 $t \in \mathbb{R}$，在 $\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 上，我们有：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)}\,\mathrm{Wick}_\varepsilon(b)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)} = \mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\,\bullet)\right)\,, \tag{1.28}$$

其中，$b\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\,\bullet\right)$：$z \in \mathbb{C} \mapsto b\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\,z\right)$ 是一个多项式符号。因此，对于所有 $u \in \mathcal{Z}$，我们有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)}\,\mathrm{W}_\varepsilon(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)} = \mathrm{W}_\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\,u\right)\,. \tag{1.29}$$

3. 空间

$$\mathscr{H}_0 = \mathrm{Span}\left\{\mathrm{W}_\varepsilon(u)\,\varphi,\quad u \in \mathcal{Z},\,\varphi \in \Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})\right\} \tag{1.30}$$

是算子 $\mathrm{Wick}\varepsilon(b)$、 $b \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 的核。

4.（平移）在 $\mathscr{H}_0$ 上，对于所有 $u \in \mathcal{Z}$，我们有：

$$\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}u\right)^*\,\mathrm{Wick}_\varepsilon(b)\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}u\right) = \mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b(\bullet + u)\right)\,, \tag{1.31}$$

其中 $b\,(\bullet + u)$： $z \in \mathbb{C} \mapsto b\,(z + u)$ 是一个多项式符号。

5.（复合）对于所有 $b_1 \in \mathcal{P}_{p_1,\ q_1}(\mathcal{Z})$ 、$b_2 \in \mathcal{P}_{p_2,\ q_2}(\mathcal{Z})$ ，

$$\operatorname{Wick}_{\varepsilon}(b_1)\operatorname{Wick}_{\varepsilon}(b_2) = \sum_{k=0}^{\min(p_1,q_2)} \frac{\varepsilon^k}{k!} \operatorname{Wick}_{\varepsilon}\left(\partial_z^k b_1 \cdot \partial_{\bar{z}}^k b_2\right), \tag{1.32}$$

其中 $\partial_z^k b_1 \cdot \partial_{\bar{z}}^k b_2(z) = \left\langle \partial_z^k b_1(z) \middle| \partial_{\bar{z}}^k b_2(z) \right\rangle_{(\otimes_{\mathrm{s}}^k \mathcal{Z})^*, \otimes_{\mathrm{s}}^k \mathcal{Z}}$。我们将算子 $\operatorname{Wick}_{\varepsilon}(b_1)\operatorname{Wick}_{\varepsilon}(b_2)$的维克符号记为 $b_1 \sharp_{\varepsilon} b_2$。

我们以陈述众所周知的数目估计结束本小节，参见 [15, 命题 3。13]。

命题 1.3。对于所有 $b \in \mathcal{P}_{p,q}(\mathcal{Z})$ 以及满足 $\alpha + \beta \geqslant p + q$ 的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，我们有 e

$$\left\| (\mathrm{N}_1 + 1)^{-\frac{\alpha}{2}} \operatorname{Wick}_{\varepsilon}(b) (\mathrm{N}_1 + 1)^{-\frac{\beta}{2}} \right\| \leqslant \varepsilon^{\frac{p+q}{2}} C(p, q, \alpha, \beta) \left\| \widetilde{b} \right\|, \tag{1.33}$$

其中 $C(p, q, \alpha, \beta)$ 是一个正的、与 ε 无关的常数。

1.3 主要结果

我们首先陈述关于空间截断的相干态传播的主要结果。我们在小节 2.1中回顾这类模型构造的一些标准事实。考虑单粒子希尔伯特空间 $\mathcal{Z} = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}k)$上的空间截断 $P(\phi)_2$ 哈密顿量

$$H_{\varepsilon} = \mathrm{d}\Gamma_{\varepsilon}(\omega) + \int_{\mathbb{R}} g(x) : P\left(\sqrt{2}\,\phi_{\varepsilon}\left(\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{\omega(k)}}\right)\right) : \mathrm{d}x\,, \tag{1.34}$$

其中

- $\mathbb{R} \ni k \longmapsto \omega(k) = \sqrt{m_0^2 + k^2}$ 是色散关系，其中 $m_0 > 0$,^{2n}
- $P = \sum \beta_j X^j$ 是一个偶数次实多项式，且首项系数为正 $\beta_{2n} > 0$,$^{j=0}$
- $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ 是一个非负偶截断函数。

这里，对于所有 $u \in \mathcal{Z}$， $\phi_{\varepsilon}(u)$ 是由 (1.12) 给出的 Segal 场算子，并且

$$: \phi_{\varepsilon}(v)^j := 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} \mathrm{a}_{\varepsilon}^*(v)^{\ell}\, \mathrm{a}_{\varepsilon}(v)^{j-\ell} \tag{1.35}$$

是 $\phi_{\varepsilon}(u)^j$ 的 Wick 正规序。关于 Wick 正规序的更多细节，可参阅 [15, 第 5] 节。哈密顿量 (1.34) 的自伴性被视为标准结论，参见 [21, 34, 26]。

现在，我们可以陈述关于 $\varepsilon \to 0$ $P(\phi)_2$ 模型中相干态在经典极限下完整渐近演化的主要结果。我们采用以下约定

$$\widehat{g}(k) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k\, x} \mathrm{d}x \tag{1.36}$$

傅里叶变换，有时为便于阅读记作 $\mathcal{F}$。

定理 1.4。 设 $\varphi_0 \in \mathcal{Z} = L^2(\mathbb{R},\mathrm{d}k)$ 为固定对象。存在一个时变多项式符号序列 $\Big(b_k(t,\cdot)\Big)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})^{\mathbb{N}}$，使得对于所有 $\psi \in \bigcap D\left(\mathrm{N}_1^{\ell/2}\right)$、所有 $N \in \mathbb{N}$ 和所有 $\ell\in\mathbb{N}T > 0$，都存在一个与 ε 无关的有限上界 $C(T,\psi,N) > 0$，使得对于所有 $t \in [-T,T]$，不等式

$$\left\| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_0\right)\psi - \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta_\circ(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)U_2^\circ(t,0)\mathrm{Wick}_1\left(b_k(t)\right)\psi\right\| \leqslant C(T,\psi,N)\cdot\varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \tag{1.37}$$

在 $\varepsilon\in(0,1]$上一致成立。这里， $\varphi_t \in C^0\Big(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R})\Big)$ 表示在推论 *2.10*中构造的经典 *Klein-Gordon* 场方程的唯一全局温和解

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dot\varphi_t = \omega\,\varphi_t + \mathscr{P}(\varphi_t) \\ \varphi_t\big|_{t=0} = \varphi_0 \end{cases} \tag{1.38}$$

使得

$$\mathscr{P}(\varphi_t) = \sum_{j=1}^{2n} j\,\beta_j \int_{\mathbb{R}^{j-1}} \prod_{m=1}^{j-1}\left(\frac{\overline{\varphi_t(k_m)}+\varphi_t(-k_m)}{\sqrt{\omega(k_m)}}\right)\times \widehat{g}(k_1+\cdots+k_{j-1}+\bullet)\,\omega^{-1/2}(\bullet)\,\mathrm{d}k_1\cdots\mathrm{d}k_{j-1} \in L^2(\mathbb{R},\mathrm{d}k)\,.$$

函数 $\delta_\circ$ 由下式给出

$$\delta_\circ(t) = -\beta_0\|g\|_1\,t + \sum_{j=1}^{2n}\frac{j-2}{2}\,\beta_j\times \int_0^t\int_{\mathbb{R}^j}\widehat{g}(k_1+\cdots+k_j)\prod_{\ell=1}^{j}\left(\frac{\overline{\varphi_s(k_\ell)}+\varphi_s(-k_\ell)}{\sqrt{\omega(k_\ell)}}\right)\mathrm{d}k_1\cdots\mathrm{d}k_j\,\mathrm{d}s, \tag{1.39}$$

以及 $U_2^\circ(t,s)$ 是含时博戈留波夫变换，其特征为推论 *2.13*中给出的时变二次哈密顿量所对应的唯一酉传播子。多项式符号$b_k(t,\cdot)\in\mathcal{P}_{\leqslant 3k}(\mathcal{Z})$ 由递归公式 (2.62)唯一确定。

注 1.5。 我们来强调几点：

1. 对于空间变量，经典场方程 (1.38) 对应于非线性 Klein-Gordon 方程

$$\left(\Box + m_0^2\right)\zeta_t = \mathscr{Q}(\zeta_t)\,, \tag{1.40}$$

其中 $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$ 是达朗贝尔算子，且

$$\mathscr{Q}(\zeta_t)(x) = -\frac{1}{2\,\pi}\sum_{j=1}^{2n} j\,\beta_j\,2^{j/2}\times \int_{\mathbb{R}^j}\left(\prod_{m=1}^{j-1}\widehat{\zeta}_t(-k_m)\right)\widehat{g}(k_1+\cdots+k_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k_j\,x}\,\mathrm{d}k_1\ldots\mathrm{d}k_j\,. \tag{1.41}$$

2. 对于次二次多项式相互作用，即 $n \leqslant 1$ 其中 $2n$ 是多项式的次数 P 在 (1.34)中，我们有精确公式

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_0\right)\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta_\circ(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)U_2^\circ(t,0)\,\psi\,, \tag{1.42}$$

参见注释 2.16。

3. 对每个 $N \in \mathbb{N}$，(1.37) 甚至对所有 $\psi \in D\left(\mathrm{N}_\varepsilon^{L/2}\right)$，只要 $L = 3N + 2n + 3$。

4. 相干态动力学的近似 (1.37) 在时间 T 小于埃伦费斯特时间时是相关的，该时间的阶为 $\frac{N}{\lambda}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$，其中 λ 是由格朗沃尔不等式得到的给定李雅普诺夫指数。

5. 在较弱的假设 $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$下，局部 L^2值温和解的存在唯一性(1.38) 仍然成立。在此情形下，上述定理的局部版本适用；更一般的表述见下文定理 1.6。

哈密顿量的相互作用项 (1.34) 形式为 $\mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V)$ 其中

$$F_V(z) = \sum_{j=0}^{2n}\left\langle\frac{\otimes^j(z+\mathfrak{c}z)}{\sqrt{j!}}\middle|V^{(j)}\right\rangle,$$

其中 $\mathfrak{c}z(k) = z(-k)$ 在 $L^2(\mathbb{R},\mathrm{d}k)$ 上定义了一个共轭，且 $V = \left(V_{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 由下式给出 (2.28)，见下文。事实上，得益于公式 (1.18)，由 (1.24) 定义的多项式 Wick 量子化可以扩展到如下形式的符号

$$F_V(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\left\langle\frac{\otimes^j(z+\mathfrak{c}z)}{\sqrt{j!}}\middle|V^{(j)}\right\rangle, \tag{1.43}$$

其中 $V = \left(V^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 满足 $\Gamma(\mathfrak{c})\,V = V$。此外，采用定理 1.1 中的记号，算子 $\mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V)$ 经由 $\mathcal{R}$ 对应于在 $L^2(Q,\mathrm{d}\mu)$ 上乘以 $\mathcal{R}(\Gamma(\sqrt{\varepsilon})\,V)$ 的乘法算子。这使我们能够推广定理 1.4。

设 $A\colon D(A) \to \mathcal{Z}$ 是一个自伴算子，使得

(H1) $A\mathfrak{c} = \mathfrak{c}A$ 且 $A \geqslant m_0\,\mathbb{1}_{\mathcal{Z}}$ 对某个 $m_0 > 0$ 成立。

设 $V \in \Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 使得 $\Gamma(\mathfrak{c})\,V = V$。按照 [26, 定理 2。16], 我们假设 V 满足：

(H2) $\mathcal{R}(\Gamma(\sqrt{\varepsilon})\,V) \in \bigcup_{q>2} L^q(Q,\mathrm{d}\mu)$ and $\mathrm{e}^{-t\mathcal{R}(\Gamma(\sqrt{\varepsilon})V)} \in L^1(Q,\mathrm{d}\mu)$ for all $t > 0$ and $\varepsilon \in (0,1]$.

这里， $\mathcal{R}$ 是定理 1.1给出的变换。

在假设 **(H1)** 与 **(H2)**下，哈密顿量

$$H_\varepsilon = \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A) + \mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V) \tag{1.44}$$

在 $\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 上本质自伴，定义域为 $D(\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)) \cap D(\mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V))$，参见定理 3.5。我们回顾一下，$\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 由 (1.8) 给出。

为了陈述我们的第二个主要结果——关于自相互作用玻色子量子场哈密顿量模型（即解析相互作用的情形）在经典极限下相干态演化的完整渐近描述——我们需要以下附加假设：

(H3) $\exists\,\alpha>0,\qquad \exists\,\lambda>1,\qquad V\in D\left(\mathrm{e}^{\alpha\,\Gamma(\lambda)}\right).$

定理 *1.6.* 假设条件 *(H1)*、*(H2)* 和 *(H3)* 均成立。设 $\varphi_0\in\mathcal{Z}$ 为固定值。存在一个序列 $(b_k(t,\cdot))_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{P}(\mathcal{Z})^{\mathbb{N}}$，以及 $T_0=T(\varphi_0)\in(0,+\infty]$，使得对于所有 $\psi\in\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$、所有 $N\in\mathbb{N}$ 以及所有 $T\in(0,T_0)$，存在一个有限的、与 ε 无关的界$C(T,\psi,N)>0$，使得对于所有 $t\in[-T,T]$，不等式

$$\left\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_0\right)\psi-\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)U_2(t,0)\,\mathrm{Wick}_1\left(b_k(t)\right)\psi\right\|\leqslant C(T,\psi,N)\cdot\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}\tag{1.45}$$

在 $\varepsilon\in(0,1/3]$ 上一致成立。这里，φ_t 是经典场方程在 $(-T_{\min},T_{\max})$ 上的唯一极大温和解

$$\begin{cases}\mathrm{i}\,\dot{\varphi}_t=A\,\varphi_t+\partial_{\bar{z}}F_V(\varphi_t)\\ \varphi_t\big|_{t=0}=\varphi_0\,,\end{cases}\tag{1.46}$$

由定理 *3.6* 和 $T_0=\min(T_{\min},T_{\max})$ 给出，表示其最小存在时间。函数δ 满足

$$\begin{cases}\dot{\delta}(t)=\mathrm{Re}\,\langle\varphi_t|\partial_{\bar{z}}F_V(\varphi_t)\rangle-F_V(\varphi_t)\\ \delta(0)=0\,,\end{cases}\tag{1.47}$$

以及 $U_2(t,s)$ 是含时博戈留波夫变换，其特征是它们是由定理 *3.7*给出的时变二次哈密顿量所生成的唯一酉传播子。多项式符号 $b_k(t,\cdot)\in\mathcal{P}_{\leqslant 3k}(\mathcal{Z})$ 由递归公式 (2.62)唯一确定。

注 1.7。 显式地，函数 δ 由下式给出

$$\delta(t)=\int_0^t\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j-2}{2}\left\langle\frac{\otimes^j(\varphi_s+\mathfrak{c}\varphi_s)}{\sqrt{j!}}\middle|V^{(j)}\right\rangle\mathrm{d}s\,.\tag{1.48}$$

在有限维情形下 $\mathcal{Z}=\mathbb{C}^d$，该量与经典作用量密切相关。事实上，将 (1.47) 与 (1.46)结合，可形式地得到

$$\dot{\delta}(t)=\frac{1}{2}\,\mathsf{w}\left(\varphi_t,\dot{\varphi}_t\right)-h(\varphi_t)\,,$$

whe实部 $\mathsf{w}\left(u_1,u_2\right)=-2$ 虚部 $\langle u_1|u_2\rangle$ 是 (1.14) 中出现的典范辛形式，并且

$$h(z)=\langle z|A\,z\rangle+F_V(z)$$

是与哈密顿量相关联的能量泛函(1.44)。令我们通过坐标 $\mathbb{C}^d$ 将 $\mathbb{R}^{2d}$ 对应起来

$$z=\frac{q+\mathrm{i}\,p}{\sqrt{2}}\in\mathbb{C}^d\leftrightarrow(q,p)\in\mathbb{R}^{2d}\,.\tag{1.49}$$

将 $h(z)$ 对应为经典哈密顿量 $h(q,\ p)$ 并记 $\varphi_t = \frac{q_t + \mathrm{i}\, p_t}{\sqrt{2}}$ 为经典场方程的解(1.46)，即可得到

$$\dot{\delta}(t) = L(q_t, \dot{q}_t, p_t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\, q_t \cdot p_t\right),$$

此处 $L(q_t,\ \dot{q}_t,\ p_t) = \dot{q}_t \cdot p_t - h(q_t,\ p_t)$ 是该系统的拉格朗日量。最后，我们得到

$$\delta(t) = S_t(q,p) - \frac{1}{2}(q_t \cdot p_t - q_0 \cdot p_0)\,, \tag{1.50}$$

其中 $S_t(q,\ p) = \int_0^t L(q_s,\ \dot{q}_s,\ p_s)\,\mathrm{d}s$ 是该系统的经典作用量。表达式 (1.50) 例如可见于 [12, 第 4 章，第 94]页。

注 1.8。 我们来强调由假设 **(H3)**所得到的一些含义：

- 明确地说，假设 **(H3)** 意味着定义相互作用的项满足

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{2\alpha\lambda^j} \left\| V^{(j)} \right\|^2 < \infty\,.$$

- 假设 **(H3)** 蕴含 $\mathcal{R}(V) \in \bigcap L^q(Q,\ \mathrm{d}\mu)$。因此，通过超收缩估计，我们得到 $\mathcal{R}\big(\Gamma(\sqrt{\varepsilon})\ V\big) \in \bigcap L^p(Q,\ \mathrm{d}\mu)$，见下文定理 3.2。

- 假设 **(H3)** 意味着 $V \in D\left(\Gamma\left(\sqrt{2}\right)\right)$。因此，若我们定义

$$V_\ell^{(j)}(z_0) = \mathcal{S}_\ell\big(\left\langle \otimes^{j-\ell}(z_0 + \mathfrak{c}z_0)\right| \otimes (\otimes^\ell \mathbb{1})\big) V^{(j)} \in \otimes_{\mathrm{s}}^\ell \mathcal{Z} \tag{1.51}$$

对所有 $z_0 \in \mathcal{Z}$，序列

$$\big(V_\ell(z_0)\big)_{\ell\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{j=\ell}^{\infty} \sqrt{\frac{\ell!}{j!}} \binom{j}{\ell} V_\ell^{(j)}(z_0)\right)_{\ell\in\mathbb{N}} \tag{1.52}$$

定义了 $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 的一个元素。这使我们能够对所有 $z \in \mathcal{Z}$ 写出：

$$F_V(z+z_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\langle \frac{\otimes^\ell(z+\mathfrak{c}z)}{\sqrt{\ell!}} \middle| V_\ell(z_0) \right\rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty} F_{V_\ell(z_0)}(z)\,. \tag{1.53}$$

因此，我们得到展开式

$$F_V(z+z_0) = F_V(z_0) + 2\ \mathrm{Re}\,\langle z|\partial_{\bar{z}} F_V(z_0)\rangle + F_{V_2(z_0)}(z) + F_{R_3(z_0)}(z)\,, \tag{1.54}$$

其中 $R_3(z_0) = \bigoplus_{\ell=3}^{\infty} V_\ell(z_0)$ 且

$$\partial_{\bar{z}} F_V(z_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\sqrt{j!}} \left(\left\langle \otimes^{j-1}(z_0 + \mathfrak{c}z_0)\right| \otimes \mathbb{1}\right) V^{(j)} \in \mathcal{Z}\,. \tag{1.55}$$

例 1.9。 解析相互作用的一个特例是 Høegh-Krohn 模型的一种变体，它带有空间和动量截断，并具有解析相互作用，参见 [7, 小节 3.4，第 2]。在单粒子空间 $\mathcal{Z} = L^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}k)$中，考虑色散关系

$$\omega(k) = \sqrt{m_0^2 + |k|^2} \text{ with } m_0 > 0\,. \tag{1.56}$$

令 $u(k) = \sqrt{2}\,\overline{\omega}(k)^{-1/2}$，并且对于 $\kappa \geqslant 1$ 固定的

$$u_\kappa(k) = u(k)\,\widehat{\chi}\left(\frac{k}{\kappa}\right)\,, \tag{1.57}$$

其中 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 是径向函数，总质量为 1，且支集包含于单位球内。这里，$\widehat{\chi}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot x}\mathrm{d}x$ 表示 χ 的傅里叶变换。最后，令 $V(\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j\,\lambda^j$, $a_j \in \mathbb{R}$ 为解析函数。对于 $r \geqslant 1$ 固定的，与 V相关的空间截断的 Høegh-Krohn 模型对应的哈密顿量为

$$H_\varepsilon^{\mathrm{HK}} = \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon\,(\omega) + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_{|x|\leqslant r} :\,(\phi_\varepsilon\,(\tau_x\,u_\kappa))^j\,:\,\mathrm{d}x\,, \tag{1.58}$$

其中 $\tau_x u\,(k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,u\,(k)$ 是向量 x 在傅里叶变量中的平移，并且：$:\phi_\varepsilon\,(v)^{\,j}:$ 表示 $\phi_\varepsilon\,(v)^{\,j}$的 Wick 正规序，见 （1.35）。对于该模型，相互作用项的形式为 $\mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V)$ 其中

$$\begin{cases} V^{(j)} = \sqrt{j!}\,2^{-\frac{j}{2}}\,a_j\,f_j \\ f_j(k_1,\ldots,k_j) = \prod_{m=1}^{j} u_\kappa(k_m)\,\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{|x|\leqslant r}\right)(k_1+\cdots+k_j) \in L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dj}) \simeq \otimes_{\mathrm{s}}^j L^2(\mathbb{R}^d)\,. \end{cases} \tag{1.59}$$

注意，我们有如下估计

$$\left\|V^{(j)}\right\|^2 \leqslant r^{2d}\,V_d^2\,j!\left(\frac{(2\pi\kappa)^d\|\chi\|_2^2}{m_0}\right)^j a_j^2\,,$$

其中 V_d 表示 $\mathbb{R}^d$ 中欧几里得单位球的体积。因此，若系数 a_j 满足 y

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{2\alpha'\lambda^j}\,j!\,a_j^2 < +\infty \text{ for some } \alpha' > 0 \text{ and } \lambda > 1\,, \tag{1.60}$$

假设 **(H3)** 成立，且常数为 $0 < \alpha < \alpha'$ 和 $\lambda > 1$。

定理 1.4 和 1.6 的证明概要。首先回顾，$P(\phi)_2$ 模型的相互作用项具有 $\mathrm{Wick}(F_V)$ 的形式，其中 V 由 (2.28) 给出。在这种形式下，$P(\phi)_2$ 情形中涉及的量 $\mathscr{P}$、$\delta_\circ(\bullet)$ 和 $U_2^\circ(t,s)$ 分别等于 $\partial_z F_V$、$\delta(\bullet)$ 和 $U_2(t,s)$。 –

围绕 F_V 满足经典场方程 (1.46)的经典轨道 φ_t

$$F_V(\bullet+\varphi_t) = F_V(\varphi_t) + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\varphi_t|\partial_{\overline{z}}F_V(\varphi_t)\rangle + F_{V_2(t)} + F_{R_3(t)}\,, \tag{1.61}$$

$_\infty$其中 $V_\ell(t) = V_\ell(\varphi_t)$ (参见 (1.52)), 且 $R_3(t) = \bigoplus_{\ell=3} V_\ell(t)$。

令 $\psi \in \Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 固定。对于 $\delta \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足 (1.47) (另见备注 1.7), 对于 $\big(b_j(t)\big)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})^{\mathbb{N}}$ 待稍后选定, 定义

$$\psi_N(t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^{\frac{j}{2}} \operatorname{Wick}_1\left(b_j(t)\right)\psi$$

and

$$\Theta_N(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right) U_2(t,0)\,\psi_N(t)\,, \tag{1.62}$$

使得 (1.45) 的左端等于 $\|\Theta_N(t) - \Theta_N(0)\|$。对(1.62) 作形式求导, 得到

$$\dot\Theta_N(t) = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)\cdot\Big(\operatorname{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_3(t)}\right)\,U_2(t,0)\,\psi_N(t) - \mathrm{i}\,\varepsilon\,U_2(t,0)\dot\psi_N(t)\Big)\,. \tag{1.63}$$

$_{N+2-j}$记 $R_3(t) = \bigoplus V_\ell(t) + R_{N+3-j}(t)$ 对每个 $0 \leqslant j \leqslant N$, 应用齐次性$_{\ell=3}$(1.25) 并选取适当的维克符号 $b_j(t)$, 得到

$$\dot\Theta_N(t) = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^{\frac{j}{2}}\operatorname{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_{N+3-j}(t)}\right)\,U_2(t,0)\operatorname{Wick}_1\left(b_j(t)\right)\psi\right)\,,$$

因此

$$\begin{aligned}\|\Theta_N(t) - \Theta_N(0)\| &\leqslant \int_0^{|t|}\left\|\dot\Theta_N(s)\right\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{|t|}\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^{\frac{j}{2}}\left\|\operatorname{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_{N+3-j}(s)}\right)\,U_2(s,0)\operatorname{Wick}_1\left(b_j(s)\right)\psi\right\|\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

最后, (3.25) 给出了如下形式的控制

$$\left\|\operatorname{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_{N+3-j}(s)}\right)\,U_2(s,0)\operatorname{Wick}_1\left(b_j(s)\right)\psi\right\| \leqslant C'(s,\psi,N,j)\cdot\varepsilon^{\frac{N+3-j}{2}}\,,$$

这表明, (1.45)的左端被 $C(t,\psi,N)\cdot\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}$所控制, 其中 $C(t,\psi,N)$在 t的紧集上一致。

简而言之, 主要的技术挑战在于控制各种无界玻色场算子所引发的定义域问题, 并对上述方案给出严格论证。现在让我们强调两个证明之间的主要区别: 定理 1.4的证明主要依赖数目估计 (1.33), 而这些估计对于非多项式相互作用并不成立。因此, 为了证明定理 1.6, 我们必须推广这些估计, 将 (N_1+1) 的幂替换为变量 (N_1+1)的解析函数, 并为其选取具有适当超指数衰减率的系数。

2 空间截断的 $P(\phi)_2$ 模型

本节致力于 $P(\phi)_2$ 模型。我们首先回顾关于构造空间截断 $P(\phi)_2$ 哈密顿量的标准事实，详见小节 2.1。与该模型相关的经典非线性克莱因-戈尔登场方程见小节 2.2。描述与 $P(\phi)_2$ 模型相关的二次动力学的酉传播子的存在性和唯一性，将在小节 2.3中证明。本节最后分三步证明定理 1.4，详见小节 2.4中的段落 2.4.1、2.4.2和 2.4.3。

2.1 模型简介

我们沿用 $P(\phi)_2$ 模型的构造，该模型为 [15, 第 6 节1]所介绍。考虑单粒子希尔伯特空间 $\mathcal{Z} = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}k)$，其带有通常的范数 $\|\cdot\|_2$ 以及共轭运算

$$\mathfrak{c} z(k) = \overline{z(-k)}\,. \tag{2.1}$$

色散关系为

$$\mathbb{R} \ni k \longmapsto \omega(k) = \sqrt{m_0^2 + k^2} \quad \text{with } m_0 > 0\,, \tag{2.2}$$

于是，动能定义为 $\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega)$。令 $u(k) = \sqrt{2}\,\omega(k)^{-1/2}$，并设 P为一个实多项式，其表达式为

$$P = \sum_{j=0}^{2n} \beta_j\, X^j \text{ with } \beta_{2n} > 0\,, \tag{2.3}$$

其为 b 下有界。空间截断的 $P(\phi)_2$ 模型对应于哈密顿量

$$\begin{aligned} H_\varepsilon =& \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega) + \int_{\mathbb{R}} g(x) : P\left(\phi_\varepsilon\left(\tau_x u\right)\right) : \mathrm{d}x \\ =& \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega) + \sum_{j=0}^{2n} \beta_j \int_{\mathbb{R}} g(x) : \phi_\varepsilon\left(\tau_x u\right)^j : \mathrm{d}x\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $\tau_x u(k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, u(k)$ 是向量 x 在傅里叶变量中的平移， $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$是一个非负的偶截断函数，并且 $: \phi_\varepsilon(v)^j :$ 表示 $\phi_\varepsilon(v)^j$ 的 Wick 正规序，其显式表达式由 (1.35) 给出。

由于 u 不属于 $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}k)$，形式记号

$$I_\infty = \int_{\mathbb{R}} g(x) : P\big(\phi_\varepsilon\left(\tau_x u\right)\big) : \mathrm{d}x \tag{2.5}$$

表示 相互作用项 I_∞ 定义为一族相互作用的极限这一事实

$$\text{“}I_\infty = \lim_{\kappa \to \infty} I_\kappa\text{”}\,.$$

确切地说, 设 χ 为一个施瓦茨非负函数，其总质量为 1，并对所有 $\kappa \geqslant$定义 1,

$$u_\kappa(k) = u(k)\,\widehat{\chi}\left(\frac{k}{\kappa}\right),$$

其中， $\widehat{\chi}$ 表示 χ的傅里叶变换。相互作用

$$I_\kappa = \int_{\mathbb{R}} g(x) : P\big(\phi_\varepsilon\left(\tau_x u_\kappa\right)\big) : \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{2n} \sum_{\ell=0}^{j} 2^{-\frac{j}{2}}\,\beta_j \binom{j}{\ell} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{a}_\varepsilon^*\left(\tau_x u_\kappa\right)^\ell\,\mathrm{a}_\varepsilon\left(\tau_x u_\kappa\right)^{j-\ell}\,\mathrm{d}x}_{=:I_{j,\ell,\kappa}}$$

在 $\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$上定义良好。此外，对于所有 $0 \leqslant j \leqslant 2n$ 和 $0 \leqslant \ell \leqslant j$， $I_{j,\,\ell,\,\kappa}$ 是一个符号为

$$b_{j,\ell,\kappa}(z) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\langle z|\tau_x u_\kappa\rangle^\ell\,\langle \tau_x u_\kappa|z\rangle^{j-\ell}\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.6}$$

注意到，我们有

$$b_{j,\ell,\kappa}(z) = \big\langle (\otimes^\ell z) \otimes (\otimes^{j-\ell}\mathfrak{c} z)\big| w_{j,\kappa}\big\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathrm{d}k)}\,, \tag{2.7}$$

其中$w_{0,\,\kappa} = w_0 :\, = \|g\|_1$， 且对于 $j \geqslant 1$,

$$w_{j,\kappa}(k_1,\cdots,k_j) = \widehat{g}(k_1+\cdots+k_j)\prod_{m=1}^{j} u_\kappa(k_m) \tag{2.8}$$

是一个属于 $L^2(\mathbb{R}^j)$ 的施瓦茨核，依据 [15, 引理 6.1]。同一引理指出，当 $\kappa \to +\infty$时，$(w_{j,\,\kappa})_{\kappa\geqslant 1}$在 $L^2(\mathbb{R}^j)$中收敛到

$$w_j(k_1,\ldots,k_j) = \widehat{g}(k_1+\cdots+k_j)\prod_{m=1}^{j} u(k_m) \in L^2(\mathbb{R}^j)\,. \tag{2.9}$$

因此，若我们定义

$$b_{j,\ell}(z) = \big\langle (\otimes^\ell z) \otimes (\otimes^{j-\ell}\mathfrak{c} z)\big| w_j\big\rangle_{L^2(\mathbb{R}^j)} \in \mathcal{P}_{j-\ell,\ell}(\mathcal{Z})\,, \tag{2.10}$$

相互作用项(2.5) 可被严格定义为

$$I_\infty = \mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b^\circ\right),\ \text{where } b^\circ = \sum_{j=0}^{2n}\sum_{\ell=0}^{j} 2^{-\frac{j}{2}}\,\beta_j \binom{j}{\ell} b_{j,\ell} \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})\,. \tag{2.11}$$

注 2.1。在定理1.1给出的波表示中，每个算子 $\mathcal{R}\,I_\kappa\,\mathcal{R}^*$ 都是作用在 $L^2(Q,\mathrm{d}\mu)$ 上的无界乘法算子，它与函数 $G_\kappa \in L^2(Q,\mathrm{d}\mu)$相关。事实上，我们有

$$G_\kappa \in \bigcap_{1\leqslant p<+\infty} L^p(Q,\mathrm{d}\mu)$$

并且存在函数 $G \in \bigcap_{1\leqslant p<+\infty} L^p(Q,\,\mathrm{d}\mu)$，使得

$$\|G_\kappa - G\|_{L^p(Q,\mathrm{d}\mu)} \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} 0 \text{ for all } 1 \leqslant p < +\infty,$$

参见 [26, 引理 3。16]。与 G 相关联的乘法算子为 $\mathcal{R}\, I_\infty\, \mathcal{R}^*$。

定理 2.2 ([26, 定理 3。15])。 哈密顿量 $H_\varepsilon = \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega) + I_\infty$ 在 I_∞ 由下式给出 (2.5)在 $\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 上本质自伴，其定义域为 $D(H_\varepsilon) = D(\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega)) \cap D(I_\infty)$。

2.2 经典场方程（ $P(\phi)_2$ 模型

形式上，哈密顿量 (2.4) 具有如下形式 $H_\varepsilon = \mathrm{Wick}_\varepsilon(h)$，其中

$$h(z) = \langle z|\omega\, z\rangle + \sum_{j=0}^{2n}\sum_{\ell=0}^{j} 2^{-\frac{j}{2}}\,\beta_j \binom{j}{\ell} b_{j,\ell}(z) =: \left\|\omega^{1/2}\, z\right\|_2^2 + b^\circ(z)\,, \tag{2.12}$$

由此得到经典场方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dot{\varphi}_t = \omega\,\varphi_t + \partial_{\bar{z}} b^\circ(\varphi_t) \\ \varphi_t\big|_{t=0} = \varphi_0\,. \end{cases} \tag{2.13}$$

若映射 $\varphi_t \in C^0\big(I, L^2(\mathbb{R},\mathrm{d}k)\big)$ 满足以下条件，则称其为 (2.13) 在 I 上的温和解：对所有 $t \in I$，积分方程

$$\varphi_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,\varphi_0 - \mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-\tau)\omega}\,\partial_{\bar{z}} b^\circ(\varphi_\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{2.14}$$

对于 $s \geqslant 0$，定义 $\mathcal{H}^s_\omega = D(\omega^s)$，并赋予其图范数

$$\|\cdot\|^2_{\mathcal{H}^s_\omega} = \|\omega^s\,\cdot\|_2^2 + \|\cdot\|_2^2\,.$$

本小节旨在证明柯西问题 (2.13) 对任意初始数据 $\varphi_0 \in \mathcal{Z} = L^2(\mathbb{R},\mathrm{d}k)$都存在唯一的全局温和解。首先，我们通过转到相互作用表象，证明在 $\mathcal{H}^{1/2}_\omega$中存在唯一的极大温和解，参见例如 [30,第 X.12 节，第 283]页。该方法是对 φ_t 施行随时间变化的未知量变换，即用传播子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}$对其作共轭，从而消去 ω 中的自由部分 (2.13)，使演化仅由变换后的相互作用驱动，参见 (2.16)。

命题 2.3。 令 $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$。那么，向量场

$$\begin{array}{rccc} X & : & \mathbb{R}\times\mathcal{H}^{1/2}_\omega & \longrightarrow & \mathcal{H}^{1/2}_\omega \\ & & (t,z) & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\,\partial_{\bar{z}} b^\circ\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,z\big) \end{array}$$

是良定义且连续的。此外，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 以及 z_1、$z_2 \in \mathcal{H}^{1/2}_\omega$，都有

$$\|X(t,z_1) - X(t,z_2)\|_{\mathcal{H}^{1/2}_\omega} \leqslant C\Big(\max\big(\|z_1\|_{\mathcal{H}^{1/2}_\omega}, \|z_2\|_{\mathcal{H}^{1/2}_\omega}\big)\Big)\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}^{1/2}_\omega}\,, \tag{2.15}$$

其中 C 是一个多项式函数。

以下结论是柯西-利普希茨定理的推论。

推论 2.4. 令 $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$。那么，对于任意初始数据 $\varphi_0 \in \mathcal{H}^{1/2}_\omega$，该柯西问题

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dot{\widetilde{\varphi}}_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\,\partial_{\bar{z}} b^\circ\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,\widetilde{\varphi}_t\big) \\ \widetilde{\varphi}_t\big|_{t=0} = \varphi_0 \end{cases} \tag{2.16}$$

存在唯一的极大解 $\widetilde{\varphi}_t \in C^1\left(I, \mathcal{H}_\omega^{1/2}\right)$，其中 I 是包含原点的开区间。此外，映射

$$\varphi_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,\widetilde{\varphi}_t \in C^0\left(I, \mathcal{H}_\omega^{1/2}\right)$$

是唯一的极大 $\mathcal{H}_\omega^{1/2}$值温和解，满足(2.13)和(2.14)。

证明　估计(2.15)。只需对所有 $j \in \mathbb{N}$ 和 $1 \leqslant \ell \leqslant j$估计以下量　　s

$$\|\partial_{\bar{z}} b_{j,\ell}(z_1) - \partial_{\bar{z}} b_{j,\ell}(z_2)\|_2 \text{ for } z_1, z_2 \in L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}k)$$

and

$$\left\|\omega^{1/2}\Big(\partial_{\bar{z}} b_{j,\ell}(z_1) - \partial_{\bar{z}} b_{j,\ell}(z_2)\Big)\right\|_2 \text{ for } z_1, z_2 \in \mathcal{H}_\omega^{1/2},$$

其中$b_{j,\ell} \in \mathcal{P}_{j-\ell,\ell}(\mathcal{Z})$ 由(2.10)给出。

- 表达式(1.23)给出

$$\partial_{\bar{z}} b_{j,\ell}(z) = \ell\,\left(\langle \otimes^{\ell-1} z| \otimes \mathbb{1}\right)\,\widetilde{b}_{j,\ell}\,(\otimes^{j-\ell} z)\,,$$

由此

$$\begin{aligned}\|\partial_{\bar{z}} b_{j,\ell}(z_1) - \partial_{\bar{z}} b_{j,\ell}(z_2)\|_2 \leqslant\ & \ell\left\|\left(\langle \otimes^{\ell-1} z_1 - \otimes^{\ell-1} z_2| \otimes \mathbb{1}\right)\,\widetilde{b}_{j,\ell}\,(\otimes^{j-\ell} z_1)\right\|_2 \\ & + \ell\left\|\left(\langle \otimes^{\ell-1} z_2| \otimes \mathbb{1}\right)\,\widetilde{b}_{j,\ell}\,(\otimes^{j-\ell} z_1 - \otimes^{j-\ell} z_2)\right\|_2.\end{aligned}$$

此外，恒等式

$$\otimes^k z_1 - \otimes^k z_2 = \sum_{\ell=1}^{k} \mathcal{S}_k\left((z_1 - z_2) \otimes (\otimes^{k-\ell} z_1) \otimes (\otimes^{\ell-1} z_2)\right) \text{ for all } k \in \mathbb{N}^* \tag{2.17}$$

得到

$$\left\|\otimes^k z_1 - \otimes^k z_2\right\|_2 \leqslant k\,\max\left(\|z_1\|_2, \|z_2\|_2\right)^{k-1}\,\|z_1 - z_2\|_2\,. \tag{2.18}$$

最后，我们得到

$$\begin{aligned}\|\partial_{\bar{z}} b_{j,\ell}(z_1) - \partial_{\bar{z}} b_{j,\ell}(z_2)\|_2 \leqslant & \ell\left\|\widetilde{b}_{j,\ell}\right\| \times \\ & \Big((\ell-1)\max\left(\|z_1\|_2, \|z_2\|_2\right)^{\ell-2}\,\|z_1\|_2^{j-\ell} \\ & + (j-\ell)\max\left(\|z_1\|_2, \|z_2\|_2\right)^{j-\ell-1}\,\|z_2\|_2^{\ell-1}\Big)\cdot\|z_1 - z_2\|_2\,,\end{aligned}$$

对 j 和 ℓ求和后，得到如下形式的估计

$$\|X(t, z_1) - X(t, z_2)\|_2 \leqslant C\Big(\max\left(\|z_1\|_2, \|z_2\|_2\right)\Big)\|z_1 - z_2\|_2\,. \tag{2.19}$$

- 对于 所有 $z \in \mathcal{H}_\omega^{1/2}$，令 $f_z(x) = \langle \omega^{1/2}\, z | \omega^{-1/2}\, \tau_x u \rangle$。符号$b_{j,\ell}$由(2.10)定义并满足

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z} b_{j,\ell}(z) =& \ell \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f_z(x)^{\ell-1}\, \overline{f_z(x)}^{\,j-\ell}\, \tau_x u_\kappa \,\mathrm{d}x \in L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}k) \\ =& \ell\, u\, \mathcal{F}\left(g\, f_z^{\ell-1}\, \overline{f_z}^{\,j-\ell} \right),\end{aligned}$$

这里我们回顾一下 $\mathcal{F}$ 表示由 (1.36)定义的傅里叶变换。因此，估计式

$$\|f_z\|_\infty \leqslant \|z\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} \left\| \omega^{-1/2}\, u \right\|_2 \tag{2.20}$$

可得

$$\begin{aligned}\left\| \omega^{1/2}\, \partial_{\bar z} b_{j,\ell}(z) \right\|_2 \leqslant& \ell \left\| \omega^{1/2}\, u \right\|_\infty \left\| \mathcal{F}\left(g\, f_z^{\ell-1}\, \overline{f_z}^{\,j-\ell} \right) \right\|_2 \\ \leqslant& 2\sqrt{\pi}\, \ell \left\| g\, f_z^{\ell-1}\, \overline{f_z}^{\,j-\ell} \right\|_2 \\ \leqslant& 2\sqrt{\pi}\, \ell\, \|g\|_2 \|f_z\|_\infty^{j-1} \\ \leqslant& 2\sqrt{\pi}\, \ell\, \|g\|_2\, \|z\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}^{j-1} \left\| \omega^{-1/2}\, u \right\|_2^{j-1} < +\infty .\end{aligned}$$

现在，对于所有的 $z_1,\ z_2 \in \mathcal{H}_\omega^{1/2}$，$\left(\partial_z b_{j,\ell}(z_1) - \partial_z b_{j,\ell}(z_2) \right)$ 都是如下形式各项的线性组合

$$\ell \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f_{z_1 - z_2}(x)^\natural \left(f_{z_1}(x)^\natural \right)^m \left(f_{z_2}(x)^\natural \right)^n \tau_x\, u \,\mathrm{d}x ,$$

其中 $m,\ n \in \mathbb{N}$ 以及 $f_z(x)^\natural \in \left\{ f_z(x),\ \overline{f_z(x)} \right\}$，由此可得如下形式的估计

$$\left\| \omega^{1/2}\, \partial_{\bar z} b_{j,\ell}(z_1) - \omega^{1/2}\, \partial_{\bar z} b_{j,\ell}(z_2) \right\|_2 \leqslant C_{j,\ell}\left(\|z_1\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}, \|z_2\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} \right) \|g\|_2 \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} .$$

□

注 2.5。 根据 (2.15)，向量场 X 在 $\mathcal{H}_\omega^{1/2}$上连续且局部有界。因此，我们可以应用以下爆破准则，见 [29, 定理 2，第 9]页：若 $T := \sup I$有限，则映射 $t \longmapsto \|\varphi_t\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}$在 T的邻域内无界。

Le引理 2.6。 令 $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$。则存在 $c \geqslant 0$，使得对所有 $z \in \mathcal{H}_\omega^{1/2}$，

$$h(z) \geqslant \left\| \omega^{1/2}\, z \right\|_2^2 - c . \tag{2.21}$$

证明。 回顾一下多项式 P定义为 (2.3) 其次数为偶数 $2n$且首项系数为正。因此， P 有下界。利用b_j的(2.6) 和(2.11) 表达式，$\ell,\ \kappa(z)$以及$b^\circ(z)$，我们得到，对所有 $z \in L^2(\mathbb{R},\ \mathrm{d}k)$，

$$\begin{aligned}b^\circ(z) =& \lim_{\kappa \to \infty} \sum_{j=0}^{2n} 2^{-\frac{j}{2}}\, \beta_j \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} b_{j,\ell,\kappa}(z) \\ =& \lim_{\kappa \to \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, P\Big(\sqrt{2}\, \mathrm{Re}\, \langle z | \tau_x u_\kappa \rangle \Big) \,\mathrm{d}x \\ \geqslant& -\|g\|_1 \left| \inf_{\mathbb{R}} P \right| > -\infty .\end{aligned}$$

□

在对空间截断 $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$作出更强假设的条件下，下面证明解 φ_t 由推论 2.4 给出，对于任意初始数据 $\varphi_0 \in \mathcal{H}_\omega^{3/2}$都在整体上有定义。证明结合了上的整体适定性、引理2.7、能量泛函守恒、引理 2.8以及备注2.5中陈述的爆破准则。

引理 2.7. 设 $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$。那么，对于任意初始数据 $\varphi_0 \in \mathcal{H}_\omega^{3/2}$，柯西问题(2.13) 存在唯一的全局温和解 $\varphi_t \in C^0\big(\mathbb{R},\ \mathcal{H}_\omega^{3/2}\big) \cap C^1\big(\mathbb{R},\ \mathcal{H}_\omega^{1/2}\big)$。此外，能量泛函 h 由 (2.12) 定义，并沿曲线 φ_t保持不变。

证明。 这是 [29, 定理 1（第 5 页）和定理 2（第 9] 页）的推论。我们在以下设定中应用这些结果： $\mathcal{H}_\omega^{1/2}$是底层希尔伯特空间， ω ： $\mathcal{H}_\omega^{3/2} \to \mathcal{H}_\omega^{1/2}$是作用于 $\mathcal{H}_\omega^{1/2}$上的自伴算子，而 $\partial_z b^\circ(z)$是非线性项。所需的两个主要估计如下：

$$\|\partial_{\bar z} b^\circ(z)\|_{\mathcal{H}_\omega^{3/2}} \leqslant C\left(\|z\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}\right)\|z\|_{\mathcal{H}_\omega^{3/2}} \tag{2.22}$$

and

$$\|\partial_{\bar z} b^\circ(z_1) - \partial_{\bar z} b^\circ(z_2)\|_{\mathcal{H}_\omega^{3/2}} \leqslant C\left(\|z_1\|_{\mathcal{H}_\omega^{3/2}}, \|z_2\|_{\mathcal{H}_\omega^{3/2}}\right)\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}_\omega^{3/2}}. \tag{2.23}$$

我们分两步进行：

1. 回忆一下，$u = \sqrt{2}\,\omega^{-1/2}$，并且对于 $0 \leqslant j \leqslant 2n$、 $0 \leqslant \ell \leqslant j$,

$$\partial_{\bar z} b_{j,\ell}(z) = \ell\, u\, \mathcal{F}\left(g\, \mathcal{F}(\bar z u)^{\ell-1}\, \overline{\mathcal{F}(\bar z u)}^{\,j-\ell}\right) \in L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}k). \tag{2.24}$$

注意到，只要 $z \in \mathcal{H}_\omega^{1/2}$，函数 $f_z = \mathcal{F}(z\,u)$ 就属于 $H^1(\mathbb{R})$，其中

$$\|f_z\|_{H^1(\mathbb{R})} \lesssim_{m_0} \|z\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}.$$

符号 $\lesssim_{m_0}$ 表示不等式中所涉及的常数取决于场的质量 m_0。

利用表达式(2.24)，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\omega^{3/2}\,\partial_{\bar z} b_{j,\ell}(z)\right\|_2 &= \sqrt{2}\,\ell\left\|\omega\,\mathcal{F}\left(g\, f_z^{\ell-1}\, \overline{f_z}^{\,j-\ell}\right)\right\|_2 \\ &\lesssim_{m_0} \left\|g\, f_z^{\ell-1}\, \overline{f_z}^{\,j-\ell}\right\|_{H^1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

由于 $H^1(\mathbb{R})$ 是一个代数，这就得到

$$\begin{aligned}\left\|g\, f_z^{\ell-1}\, \overline{f_z}^{\,j-\ell}\right\|_{H^1(\mathbb{R})} &\leqslant \|g\|_{H^1(\mathbb{R})}\, \|f_z\|_{H^1(\mathbb{R})}^{j-1} \\ &\lesssim_{m_0} \|g\|_{H^1(\mathbb{R})}\, \|z\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}^{j-1},\end{aligned}$$

由此最终得到

$$\|\partial_{\bar z} b_{j,\ell}(z)\|_{\mathcal{H}_\omega^{3/2}} \lesssim_{m_0} \|g\|_{H^1(\mathbb{R})}\, \|z\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}^{j-1}.$$

T这就完成了(2.22)的证明。为证明(2.23)，我们仿照上文，对其进行控制

$$\|\partial_{\bar z} b_{j,\ell}(z_1) - \omega\,\partial_{\bar z} b_{j,\ell}(z_2)\|_{\mathcal{H}_\omega^{3/2}}.$$

后一个估计使我们能够应用 [29, 第 1 定理，第 5] 页，从而得到局部温和解的存在唯一性 $\varphi_t \in C^0(I,\ \mathcal{H}_\omega^{3/2}) \cap C^1(I,\ \mathcal{H}_\omega^{1/2})$，它是方程(2.13) 在初始数据$\varphi_0 \in \mathcal{H}_\omega^{3/2}$下的解。

2. 正弦能量泛函中出现的符号 b° h (见 (2.12)) 是实值的，因此我们有 e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(\varphi_t) = 2\ \mathrm{Re}\,\langle \dot{\varphi}_t | \omega\varphi_t + \partial_{\overline{z}} b^\circ(\varphi_t)\rangle = 2\ \mathrm{Re}\,\langle \dot{\varphi}_t | \mathrm{i}\,\dot{\varphi}_t\rangle = 0\,, \tag{2.25}$$

这证明 h 沿 φ_t保持常数。特别地，由 (2.21) 可知 φ_t 在 $\mathcal{H}_\omega^{1/2}$中有界：这一事实以及估计 (2.22)使我们能够应用 [29, 第 9]页的定理 2，并得出 φ_t 是全局定义的。

□

引理 2.8。设 $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$。则由 h 给出的能量泛函 (2.12) 沿柯西问题 φ_t 的任意温和解 (2.13) （其初始数据为 $\varphi_0 \in \mathcal{H}_\omega^{1/2}$）保持常数。

证明。固定 $\varphi_0 \in \mathcal{H}_\omega^{1/2}$，取 $\left(\varphi_0^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathcal{H}_\omega^{3/2}\right)^{\mathbb{N}}$ 使得 $\left\|\varphi_0^{(n)} - \varphi_0\right\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，并令 $\varphi_t^{(n)} \in C^0\left(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\omega^{3/2}\right)$ 为 (2.13) 在初始数据 $\varphi_0^{(n)}$ 下的全局解。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，恒等式 (2.25)给出

$$h\left(\varphi_t^{(n)}\right) = h\left(\varphi_0^{(n)}\right)\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.26}$$

此外，根据 [29, 定理 14，第 52]页，并利用(2.15)，得到

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_t - \varphi_t^{(n)}\right\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} &\leqslant \left\|\varphi_0 - \varphi_0^{(n)}\right\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} + \int_0^{|t|} \left\|X\left(\tau, \widetilde{\varphi}_\tau\right) - X\left(\tau, \widetilde{\varphi}_\tau^{(n)}\right)\right\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} \mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \left\|\varphi_0 - \varphi_0^{(n)}\right\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} + C\left(t, \|\varphi_0\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}\right) \int_0^{|t|} \left\|\varphi_\tau - \varphi_\tau^{(n)}\right\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} \mathrm{d}\tau\,,\end{aligned}$$

因此，由Grönwall引理

$$\left\|\varphi_t - \varphi_t^{(n)}\right\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} \leqslant \left\|\varphi_0 - \varphi_0^{(n)}\right\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}} \cdot M\left(t, \|\varphi_0\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}\right) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0\,.$$

由于能量泛函 h：$\mathcal{H}_\omega^{1/2} \to \mathbb{R}$ 关于范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}$连续，令$n \longrightarrow +\infty$ 代入(2.26)，最终得到

$$h(\varphi_t) = h(\varphi_0)\,.$$

□

最后，我们可以陈述本小节的主要结果。

定理 2.9。设 $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$。对于所有初始数据 $\varphi_0 \in \mathcal{H}_\omega^{1/2}$，柯西问题(2.13)存在唯一的全局温和解 $\varphi_t \in C^0\left(\mathbb{R},\ \mathcal{H}_\omega^{1/2}\right)$ 满足(2.14)。

证明。设 $\varphi_t \in C^0\left(I, \mathcal{H}_\omega^{1/2}\right)$ 是方程 (2.13) 的唯一极大温和解。曲线 $\widetilde{\varphi}_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\varphi_t \in C^1\left(I, \mathcal{H}_\omega^{1/2}\right)$ 根据推论 (2.16) 和推论2.4，是 $T := \sup I$ 的唯一极大解。反设

注 2.5，映射 $t \longmapsto \left\|\omega^{1/2}\,\widetilde{\varphi}_t\right\|_2$ 在 T 的邻域内无界。因此，经过抽取子列，我们有 $\left\|\omega^{1/2}\,\widetilde{\varphi}_t\right\|_2 \xrightarrow[t\to T]{} +\infty$。结合这一结果与 (2.21) 以及引理 2.8，得到

$$h(\varphi_0)+c=h(\varphi_t)+c\geqslant\left\|\omega^{1/2}\,\varphi_t\right\|_2^2=\left\|\omega^{1/2}\,\widetilde{\varphi}_t\right\|_2^2\xrightarrow[t\to T]{}+\infty\,,$$

这是一个矛盾。于是 $\sup I=+\infty$。时间反演论证表明 $\inf\ I=-\infty$。 □

推论 2.10. 设 $g\in L^1(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})$。对所有初始数据 $\varphi_0\in\mathcal{Z}=L^2(\mathbb{R},\mathrm{d}k)$，柯西问题 (2.13) 存在唯一的全局温和解 $\varphi_t\in C^0\big(\mathbb{R},\ \mathcal{Z}\big)$ 满足 (2.14)。

证明。 设 $\varphi_0\in\mathcal{Z}$ 固定，并设 $\varphi_t\in C^0(I_0,\mathcal{Z})$ 是 (2.13) 的局部温和解，初始数据为 φ_0，其良定义得益于估计(2.19) 以及将柯西-利普希茨定理应用于方程 (2.16)。我们假设 $T_0=\sup I_0$ 是有限的。我们的目标是将解 φ_t 延拓到任意区间 $[0,T_0+\eta]$，其中 $\eta>0$，从而通过时间反演论证得到全局性。

令 $\left(\varphi_0^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathcal{H}_\omega^{1/2}\right)^{\mathbb{N}}$ 使得 $\varphi_0^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\varphi_0$ 属于 $\mathcal{Z}$，并且对于每个 $n\in\mathbb{N}$，令 $\varphi_t^{(n)}$ 为方程 (2.13) 的全局温和解，其初始数据为 $\varphi_0^{(n)}$，由定理 2.9 给出。令 $\eta>0$。利用 (2.19)，并按照引理 2.8 的证明，将 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\omega^{1/2}}$ 替换为 $\|\cdot\|_2$，我们得到序列 $\left(\varphi_t^{(n)}\Big|_{[0,T_0+\eta]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 在巴拿赫空间 $C^0([0,T_0+\eta],\mathcal{Z})$ 中是柯西序列。其极限在 $[0,T_0+\eta]$ 上满足方程 (2.14)，并且在 $[0,T_0)$ 上与 φ_t 重合；这将 φ_t 延拓至 $[0,T_0+\eta]$，从而完成证明。

□

注 2.11. 我们对本小节的结果作几点说明：只要截断函数 g 具有相同的正则性，这些结果便可以推广：

- 设 $0<s\leqslant 1/2$。将估计 (2.20) 替换为

$$\|f_z\|_\infty\leqslant\|z\|_{\mathcal{H}_\omega^s}\left\|\omega^{-s}\,u\right\|_2$$

  对于 $z\in\mathcal{H}_\omega^s$，当 $g\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ 时，我们可以调整 (2.15) 的证明以处理 $\mathcal{H}_\omega^s$ 的情形。因此，对于任意初始数据 $\varphi_0\in\mathcal{H}_\omega^s$, $0<s\leqslant 1/2$，方程 (2.13) 存在唯一的极大温和解 $\varphi_t\in C^0(I_s,\mathcal{H}_\omega^s)$。此外，假设 $g\in L^1(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})$，并调整推论 2.10 的证明，可知 $I_s=\mathbb{R}$。

- 对于所有 $1/2<s\leqslant 3/2$，类似地调整引理 2.7的证明，可得 (2.13) 对任意初始数据 $\varphi_0\in\mathcal{H}_\omega^s$均全局适定，$g\in L^1(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})$。

2.3 $P(\phi)_2$ 模型的二次动力学

为了研究经典极限下相干态的传播，我们需要了解一些关于时变二次哈密顿量动力学的信息。尽管本小节的结果针对希尔伯特空间中的 $P(\phi)_2$ 模型 $\mathcal{Z}=L^2(\mathbb{R},\mathrm{d}k)$，但我们稍后会看到，这些结果可以轻易推广到更一般的情形。因此，我们倾向于遵循 [7, 第 4]节。

对于所有 $k \in \mathbb{N}$，我们将配备内积的空间 $\mathcal{D}_{+,k}$ $D\left(\mathrm{N}_1^{k/2}\right)$ 记作

$$\langle\varphi|\psi\rangle_{\mathcal{D}_{+,k}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^k \left\langle \varphi^{(n)} \middle| \psi^{(n)} \right\rangle ,$$

并且通过，相对于内积的 $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$的完备化

$$\langle\varphi|\psi\rangle_{\mathcal{D}_{-,k}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-k} \left\langle \varphi^{(n)} \middle| \psi^{(n)} \right\rangle .$$

这给出了希尔伯特配对空间

$$\mathcal{D}_{+,k} \subset \Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{D}_{-,k} .$$

我们还定义

$$\mathcal{D}_{+,\infty} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{+,k} .$$

设 $\left(\mathfrak{Q}_t\right)_{t\in I}$ 是 $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$上的一族自伴算子。若一族酉算子（$U(t,\ s)$）$_{t,\ s\in I}$满足以下条件，则称其为该问题的酉传播子

$$\text{(2.27)} \qquad \begin{cases} \mathrm{i}\,\partial_t u_t = \mathfrak{Q}_t\, u_t \\ u_t\big|_{t=0} = u_0 \in \mathcal{D}_{+,k} \end{cases}$$

若其满足：

1. $U(t,t) = \mathbb{1}$ 对所有 $t \in I$成立，2. $U(t,r) \circ U(r,s) = U(t,s)$ 对所有 $r,s,t \in I$成立，3. 对每个 $s \in I$，有 $U(\bullet, s) \in C^0\big(I, \mathcal{L}(\mathcal{D}_{+,k})\big) \cap C^1\big(I, \mathcal{L}(\mathcal{D}_{+,k}, \mathcal{D}_{-,k})\big)$ 并且，对所有 $u_0 \in \mathcal{D}_{+,k}$,

$$\mathrm{i}\,\partial_t U(t,s)\, u_0 = \mathfrak{Q}_t\, U(t,s)\, u_0 .$$

这里，$C^k(I,\ \mathfrak{B})$ 表示 $\mathfrak{B}$ 值函数空间，其中函数是 k 次连续可微的，且 $\mathfrak{B}$ 赋予强算子拓扑。

2.3.1 酉传播子的存在性

现在我们回到 $P(\phi)_2$ 模型，该模型在第 2.1 小节中引入。从现在起，我们假设空间截断 g属于 $L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$。注意，相互作用项(2.11)的维克符号具有如下形式

$$\text{(2.28)} \quad b^{\circ}(z) = F_V(z) = \sum_{j=0}^{2n} \left\langle \frac{\otimes^j (z + \mathfrak{c}z)}{\sqrt{j!}} \middle| V^{(j)} \right\rangle$$

$$\text{with } V^{(j)} = \begin{cases} \beta_0 \left\|g\right\|_1 \text{ if } j = 0 \\ \sqrt{j!}\, 2^{-j/2}\, \beta_j\, w_j \in L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^j) \simeq \otimes^j_{\mathrm{s}} L^2(\mathbb{R}) \text{ if } 1 \leqslant j \leqslant 2n \\ 0 \text{ if } j > 2n , \end{cases}$$

其中 n 和 $(\beta_j)_{0\leqslant j\leqslant 2n}$ 出现在多项式 (2.3) 中，$\mathfrak{c}z(k) = z(-k)$ 是$L^2(\mathbb{R},\,\mathrm{d}k)$上的共轭，且

$$w_j(k_1,\dots,k_j) = 2^{j/2}\,\widehat{g}(k_1+\cdots+k_j)\prod_{m=1}^{j}\omega(k_m)^{-1/2} \in L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^j) \simeq \otimes^j_{\mathrm{s}} L^2(\mathbb{R})$$

其施瓦茨核由下式给出 (2.9) (另见 [15,引理 6。1])。

对于所有 $t\in\mathbb{R}$，定义

$$V_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=2}^{2n} j\,(j-1)\,2^{-\frac{j}{2}}\,\beta_j\,\mathcal{S}_2\Big(\big\langle\otimes^{j-2}(\varphi_t+\mathfrak{c}\varphi_t)\big|\otimes(\otimes^2\mathbb{1})\Big)\,w_j \in L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^2)\,, \tag{2.29}$$

它对应于二次多项式

$$F_{V_2(t)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big\langle\otimes^2(z+\mathfrak{c}z)\big|V_2(t)\big\rangle \tag{2.30}$$

出现在泰勒展开式 (1.61)中。回顾一下，$\varphi_t\in C^0(\mathbb{R},\ L^2(\mathbb{R},\,\mathrm{d}k))$ 是由推论 (2.13) 给出的2.10的温和解。本段旨在证明算子 $\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega)+\mathrm{Wick}_\varepsilon\big(F_{V_2(t)}\big)$存在唯一的酉传播子。同样，通过转到相互作用表象，我们转而考虑与算子相关的柯西问题 (2.27)

$$\mathfrak{Q}_t = \varepsilon^{-1}\,\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)\,, \tag{2.31}$$

其中

$$F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big\langle\otimes^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,z+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\,\mathfrak{c}z)\big|V_2(t)\big\rangle\,. \tag{2.32}$$

值得注意的是，算子 $\mathfrak{Q}_t$（见 (2.31)）ε 与 无关，因为它们是产生湮灭算子的二次式。

我们将使用 [2, 推论 C。4], 下文将以较弱的形式陈述该结果，以满足我们的需要。

定理 2.12。设 $I\subset\mathbb{R}$ 为一个闭区间，$k\in\mathbb{N}^*$ 为固定值。设 $(\mathfrak{Q}_t)_{t\in I}$ 是定义在 $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 上的一族自伴算子，且 $\mathfrak{Q}_t\in\mathcal{L}\big(\mathcal{D}_{+,k},\mathcal{D}_{-,k}\big)$。我们假设

1. 映射 $t\longmapsto\|\mathfrak{Q}_t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}_{+,k},\mathcal{D}_{-,k})}$ 是连续的；*2.* 存在连续函数 $f_k:\ I\longrightarrow\mathbb{R}_+$，使得对所有 φ, $\psi\in\Gamma^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 和 $t\in I$,

$$\big|\big\langle(\mathrm{N}_1+1)^k\varphi\big|\mathfrak{Q}_t\psi\big\rangle-\big\langle\mathfrak{Q}_t\varphi\big|(\mathrm{N}_1+1)^k\psi\big\rangle\big| \leqslant f_k(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{D}_{+,k}}\,\|\psi\|_{\mathcal{D}_{+,k}}\,. \tag{2.33}$$

那么，柯西问题 (2.27) 存在唯一的酉传播子 $(U(t,s))_{t,s\in I}$。

注意，我们有

$$F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\langle\otimes^2(z+\mathfrak{c}_t z)\Big|\widetilde{V}_2(t)\Big\rangle$$

其中 $\mathfrak{c}_t z=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t\omega}\mathfrak{c}z$ 和 $\widetilde{V}_2(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega)}V_2(t)$。假设 $\Gamma(\mathfrak{c})\,V_2(t)=V_2(t)$ 与恒等式 $\mathfrak{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,\mathfrak{c}$ 结合可得

$$\Gamma(\mathfrak{c}_t)\,\widetilde{V}_2(t)=\widetilde{V}_2(t)\,. \tag{2.34}$$

因此，将定理 1.1 中的 $\mathfrak{c}$ 替换为 $\mathfrak{c}_t$ 并应用命题 3.1，可得算子 $\mathfrak{Q}_t$ （见 (2.31) ）本质自伴。我们对其闭包沿用相同的记号。现在验证这些算子满足定理 2.12的假设。

1. 对所有 $T>0$和 $s,\ t\in[-T,T]$，估计

$$\left\|\otimes^{j-2}(\varphi_t+\mathfrak{c}\varphi_t)-\otimes^{j-2}(\varphi_s+\mathfrak{c}\varphi_s)\right\|_2\leqslant 2\,(j-2)\,\|\varphi_t-\varphi_s\|_2\left(\sup_{|\tau|\leqslant T}\left(2\|\varphi_\tau\|_2\right)\right)^{j-3}, \tag{2.35}$$

对所有 $j\geqslant 3$成立，由此得到（见 (2.18)）

$$\|V_2(t)-V_2(s)\|_2\leqslant\sqrt{2}\,\|\varphi_t-\varphi_s\|_2\sum_{j=3}^{2n}j\,(j-1)\,(j-2)\,2^{-\frac{j}{2}}\,|\beta_j|\left(\sup_{|\tau|\leqslant T}\left(2\|\varphi_\tau\|_2\right)\right)^{j-3}\|w_j\|_2\,,$$

这表明映射 $t\longmapsto\|V_2(t)\|_2$ 是连续的。回顾一下， w_j 表示由 (2.9)给出的施瓦茨核。现在，我们写出

$$F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}=b_{2,0}(t)+b_{0,2}(t)+b_{1,1}(t)\,, \tag{2.36}$$

其中，多项式符号 $b_{p,\ q}(t)\in\mathcal{P}_{p,\ q}(\mathcal{Z})$， $p+q=2$ 与以下算子相关

$$\widetilde{b}_{0,2}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\widetilde{V}_2(t)\right\rangle,\quad \widetilde{b}_{1,1}(t)=\sqrt{2}\left(\mathbb{1}\otimes\langle\mathfrak{c}_t\,\bullet|\right)\widetilde{V}_2(t)\quad\text{and}\quad \widetilde{b}_{2,0}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle\widetilde{V}_2(t)\right|.$$

对所有 $\psi\in\Gamma^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$，通过显式计算可得

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)\psi\right\|^2_{\mathcal{D}_{-,k}}&\leqslant 3\Big(\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b_{2,0}(t)\right)\psi\|^2_{\mathcal{D}_{-,k}}\\&\qquad+\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b_{0,2}(t)\right)\psi\|^2_{\mathcal{D}_{-,k}}\\&\qquad+\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b_{1,1}(t)\right)\psi\|^2_{\mathcal{D}_{-,k}}\Big)\\&\leqslant 9\,\varepsilon^2\,\|V_2(t)\|_2^2\,\|\psi\|^2_{\mathcal{D}_{+,k}}\,.\end{aligned} \tag{2.37}$$

同样，对所有 $t,\ s\in\mathbb{R}$，有

$$\left\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)\psi-\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_s}_{\widetilde{V}_2(s)}\right)\psi\right\|^2_{\mathcal{D}_{-,k}}\leqslant\ 9\,\varepsilon^2\,\|V_2(t)-V_2(s)\|_2^2\,\|\psi\|^2_{\mathcal{D}_{+,k}}.$$

因此，映射 $t\longmapsto\|\mathfrak{Q}_t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}_{+,k},\mathcal{D}_{-,k})}$ 是连续的。

2. 我们现在建立如下形式的估计 (2.33)。利用公式

$$\left[(\mathrm{N}_1+1)^k,\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b\right)\right]\psi^{(n)}=\left((n+q-p+1)^k-(n+1)^k\right)\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b\right)\psi^{(n)}$$

对于$b\in\mathcal{P}_{p,\ q}\left(\mathcal{Z}\right)$ 以及 $\psi^{(n)}\in\otimes^n_{\mathrm{s}}\mathcal{Z}$，并利用分解(2.36)，显式计算表明

$$\left\langle(\mathrm{N}_1+1)^k\varphi\middle|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)\psi\right\rangle-\left\langle\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)\varphi\middle|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left((\mathrm{N}_1+1)^k\psi\right)\right\rangle$$

等于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+3)^k-(n+1)^k\right)\left(\left\langle\varphi^{(n+2)}\middle|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b_{0,2}(t)\right)\psi^{(n)}\right\rangle-\left\langle\varphi^{(n)}\middle|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(b_{2,0}(t)\right)\psi^{(n+2)}\right\rangle\right)$$

对所有 $\varphi,\ \psi\in\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$。由于 $(n+3)^k-(n+1)^k\leqslant 2\,k\,(n+3)^{k-1}$，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle(\mathrm{N}_1+1)^k\varphi\middle|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)\psi\right\rangle-\left\langle\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)\varphi\middle|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left((\mathrm{N}_1+1)^k\psi\right)\right\rangle\right|\\&\quad\leqslant\sqrt{2}\,\varepsilon\,k\,\|V_2(t)\|\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)^{k-1}\sqrt{(n+1)(n+2)}\left(\left\|\varphi^{(n+2)}\right\|\left\|\psi^{(n)}\right\|+\left\|\varphi^{(n)}\right\|\left\|\psi^{(n+2)}\right\|\right)\\&\quad\leqslant\sqrt{2}\,\varepsilon\,k\,\|V_2(t)\|\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)^{k}\left(\left\|\varphi^{(n+2)}\right\|\left\|\psi^{(n)}\right\|+\left\|\varphi^{(n)}\right\|\left\|\psi^{(n+2)}\right\|\right).\end{aligned}$$

用 $3^{k/2}(n+1)^{k/2}(n+3)^{k/2}$ 控制 $(n+3)^k$，并应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle(\mathrm{N}_1+1)^k\varphi\middle|\mathfrak{Q}_t\,\psi\right\rangle-\left\langle\mathfrak{Q}_t\,\varphi\middle|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left((\mathrm{N}_1+1)^k\right)\psi\right\rangle\right|\\&\qquad\leqslant 2\sqrt{2}\,k\,3^{k/2}\|V_2(t)\|\|\varphi\|_{\mathcal{D}_{+,k}}\|\psi\|_{\mathcal{D}_{+,k}}.\end{aligned}\tag{2.38}$$

最后，我们可以陈述关于 $P(\phi)_2$ 模型的时变二次哈密顿量动力学的主要结果。

推论2.13。对于所有满足 $k\in\mathbb{N}^*$ 的初始数据 $u_0\in\mathcal{D}_{+,\,k}$，非自治柯西问题

$$\begin{cases}\mathrm{i}\,\varepsilon\,\partial_t\widetilde{u}_t=\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)\widetilde{u}_t\\ \widetilde{u}_t\big|_{t=0}=u_0\in\mathcal{D}_{+,k}\end{cases}\tag{2.39}$$

存在唯一的酉传播子 $\left(\widetilde{U}_2^\circ(t,s)\right)_{t,\ s\in\mathbb{R}}$。此外，我们有如下估计

$$\left\|\widetilde{U}_2^\circ(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}_{+,k})}\leqslant\mathrm{e}^{2\sqrt{2}\,k\,3^{k/2}\left|\int_s^t\|V_2(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right|}.\tag{2.40}$$

最后，若令 $U_2^\circ(t,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\varpi)}\widetilde{U}_2^\circ(t,s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{s}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega)}$，映射 $t\longmapsto U_2^\circ(t,s)\,u_s$ 是该柯西问题的温和解

$$\begin{cases}\mathrm{i}\,\varepsilon\,\partial_t u_t=\left(\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon\left(\omega\right)+\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{V_2(t)}\right)\right)u_t\\ u_t\big|_{t=0}=u_0\in\mathcal{D}_{+,k}\,.\end{cases}\tag{2.41}$$

~证明。存在性与唯一性 $U_2^\circ(t,\ s)$ 由定理 2.12得出。算子范数估计 (2.40) 的证明与 (2.38)类似，因为对该量求导

$$u(t)=\left\|(\mathrm{N}_1+1)^{k/2}\,\widetilde{U}_2^\circ(t,0)\,\psi\right\|^2$$

以二次型的意义得到

$$\mathrm{i}\,\varepsilon\,\dot{u}(t)=\left\langle\widetilde{U}_2^\circ(t,0)\,\psi\middle|\left[(\mathrm{N}_1+1)^k,\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)\right]\widetilde{U}_2^\circ(t,0)\,\psi\right\rangle.$$

Grönwall引理完成了证明。 □

2.3.2 多项式可观测量的二次传播

现在我们陈述一个由 S. Breteaux 提出的结果， [11] 该结果涉及多项式可观测量在时变二次哈密顿量作用下的传播。

记

$$F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}(z) = \langle z|\alpha_t\, z\rangle + \mathrm{Im}\left\langle \beta_t\middle|^{\otimes^2} z\right\rangle$$

其中 $\beta_t = -\mathrm{i}\sqrt{2}\widetilde{V}_2(t) \in C^0(\mathbb{R}, \otimes^2_{\mathrm{s}}\mathcal{Z})$，而 $\alpha_t = \sqrt{2}\Big(\mathbb{1}\otimes\langle \mathfrak{c}_t\bullet|\Big)\,\widetilde{V}_2(t)$ 定义了一族有界、强连续的自伴算子。应用 [30, 定理 X.69], ，我们得到假设 **H1** 和 **H2** 在 [11, 第 3 节，第 82] 页中对 $F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}$ 均成立。

与该算子相关联的经典演化为

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dot{\widetilde{z}}_t = \partial_{\overline{z}} F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}(\widetilde{z}_t) \\ \widetilde{z}_t\big|_{t=0} = z_0 \in \mathcal{Z}\,, \end{cases} \tag{2.42}$$

其中

$$\partial_{\overline{z}} F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}(u) = \sqrt{2}\,\big(\langle (u+\mathfrak{c}_t u)| \otimes \mathbb{1}\big)\widetilde{V}_2(t)$$

是关于 u 的 $\mathbb{R}$-线性的。不等式

$$\left|\partial_{\overline{z}} F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}(u) - \partial_{\overline{z}} F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}(v)\right| \leqslant 2\sqrt{2}\left\|\widetilde{V}_2(t)\right\| |u-v|$$

~表明柯西问题的经典流 ϕ_t (2.42) 在全局上有定义（回顾一下， $|\cdot|$~表示 $\mathcal{Z}$上的范数）。每个映射 ϕ_t : $\mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ 都是辛同胚，即保持辛形式$\mathsf{w}(z_1, z_2) = -2\,\mathrm{Im}\,\langle z_1|z_2\rangle$的复数域线性连续自同构。事实上，我们有唯一分解

$$\widetilde{\phi}_t = \widetilde{L}_t + \widetilde{A}_t$$

~ ~ ~ ~其中 $L_t, A_t \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ 分别是 $\mathbb{C}$线性和 $\mathbb{C}$反线性算子，而 $[A_t]^* A_t$ 是一个迹类算子，参见 [11, 附录 A]。令 Λ_t 为作用于 $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 上的时变算子，其定义如下

$$\Lambda_t\, b(z) = -2\,\mathrm{Tr}\Big([\widetilde{A}_t]^*\widetilde{A}_t\partial_z\partial_{\overline{z}} b(z)\Big) + \left\langle v_t\middle|\partial^2_{\overline{z}} b(z)\right\rangle_{\otimes^2\mathcal{Z}} + \left\langle \partial^2_z b(z)\middle|v_t\right\rangle_{(\otimes^2\mathcal{Z})^*,\otimes^2\mathcal{Z}}\,, \tag{2.43}$$

其中 $v_t \in \otimes^2\mathcal{Z}$ 是满足以下条件的唯一向量：对所有 $z_1, z_2 \in \mathcal{Z}$，均有 $\langle z_1\otimes z_2|v_t\rangle_{\otimes^2\mathcal{Z}} = \left\langle z_1\middle|\widetilde{L}_t\,[\widetilde{A}_t]^*\, z_2\right\rangle_{\mathcal{Z}}$。应用 [11, 定理 3.2], ，我们得到以下结果。

定理 2.14。 令 $\phi_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,\widetilde{\phi}_t$ 为下列方程的经典流

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dot{z}_t = \omega\, z_t + \partial_{\overline{z}} F_{V_2(t)}(z_t) \\ z_t\big|_{t=0} = z_0 \in \mathcal{Z}\,, \end{cases} \tag{2.44}$$

并令 $U_2^\circ(t,\ s)$ 为 (2.41) 的量子传播子。对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $b_t \in \mathcal{P}_{\leqslant m}(\mathcal{Z})$， $m \geqslant 1$，有

$$U_2^\circ(t,0)^*\ \mathrm{Wick}_1\,(b_t)\ U_2^\circ(t,0) = \mathrm{Wick}_1\left(\widehat{b}_t\right) \tag{2.45}$$

with

$$\widehat{b}_t = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k k!} \Lambda_t^k (b_t \circ \phi_t) \in \mathcal{P}_{\leqslant m}(\mathcal{Z}) \,. \tag{2.46}$$

2.4 $P(\phi)_2$ 模型的完整渐近展开

在本小节中，我们分三个步骤证明第一个主要结果——定理1.4。首先，我们以严格的方式对表达式（1.62）求导。然后，我们选择出现在（1.62）中的参数 $\delta_\circ(t)$ 和 $b_j(t)$ 以满足我们的需要。最后，我们完成定理1.4的证明。

Let $\psi \in \mathcal{D}_{+,\infty} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D\left(\mathrm{N}_1^{k/2}\right)$ and $N \in \mathbb{N}$ be fixed.

2.4.1 对（1.62）求导

对于稍后选取的 $\delta_\circ \in C^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ 和 $\left(b_j(t)\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})^{\mathbb{N}}$，对所有 $t \in \mathbb{R}$，定义如下量

$$\Theta_N(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta_\circ(t)}{\varepsilon}}\, \mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right) U_2^\circ(t,0)\,\psi_N(t)\,, \tag{2.47}$$

其中

- H_ε 是空间截断的 $P(\phi)_2$ 哈密顿量（2.4），
- φ_t 是经典场方程（2.13）的温和解，
- $U_2^\circ(t,\ 0)$ 是推论 2.13给出的二次传播子

and

$$\psi_N(t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^{\frac{j}{2}}\, \mathrm{Wick}_1\left(b_j(t)\right)\psi\,. \tag{2.48}$$

为了对 $\Theta_N(t)$求导，利用 (1.29)，我们写作

$$\Theta_N(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta_\circ(t)}{\varepsilon}}\, \mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\widetilde{\varphi}_t\right) \widetilde{U}_2^\circ(t,0)\,\psi_N(t)\,, \tag{2.49}$$

其中 $\widetilde{\varphi}_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\varphi_t$和 $\widetilde{U}_2^\circ(t,\ 0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega)} U_2^\circ(t,\ 0)$。应用推论 2.13和数值~估计 (1.33)，我们得到 $U_2^\circ(t,\ 0)\ \psi_N(t)$ 的导数为

$$\partial_t\left(\widetilde{U}_2^\circ(t,0)\,\psi_N(t)\right) = -\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\,\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)\widetilde{U}_2^\circ(t,0)\,\psi_N(t) + \widetilde{U}_2^\circ(t,0)\,\dot{\psi}_N(t)$$

其中 $F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)} \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 由 (2.32) 定义，属于 $\mathcal{D}_{+,\ \infty}$。此外，由于 $\widetilde{\varphi}_t \in C^1(\mathbb{R},\ \mathcal{Z})$，量 $\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\widetilde{\varphi}_t\right)$ 在 $\mathcal{D}_{+,\ 1}$ 上由 [19, 引理31]（另见 [2, 引理6.1，第(iii)点]）可微，其公式为

$$\mathrm{i}\,\varepsilon\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\widetilde{\varphi}_t\right) = \mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\widetilde{\varphi}_t\right)\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(\mathrm{Re}\left\langle\widetilde{\varphi}_t\middle|\mathrm{i}\dot{\widetilde{\varphi}}_t\right\rangle + 2\ \mathrm{Re}\left\langle z\middle|\mathrm{i}\,\dot{\widetilde{\varphi}}_t\right\rangle\right). \tag{2.50}$$

接下来只需对算子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega)}$ 求导。 - -

引理 2.15. 算子 $B_t := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(\omega)}$ 在 $\mathcal{D}_{+,2n}$上强可微，其公式为

$$\dot{B}_t = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\, B_t\, \mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}(t)}\right), \tag{2.51}$$

其中

$$F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}(t)}(z) = \sum_{j=0}^{2n}\left\langle \frac{\otimes^j(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\, z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\,\mathfrak{c}z)}{\sqrt{j!}}\middle| V^{(j)}\right\rangle.$$

证明. 数目估计 (1.33)给出

$$\left\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\,(b)\,(\mathrm{N}_1+1)^{-\frac{j}{2}}\right\| \leqslant C(j)\,\varepsilon^{\frac{j}{2}}\sum_{p+q=j}\left\|\widetilde{b}_{p,q}\right\|$$

对所有 $b = \sum b_{p,q} \in \mathcal{P}_j(\mathcal{Z})$均成立。将此结果应用于符号 $F_{V^{(j)}}$，其中 $V^{(j)}$ 由 (2.28)$_{p+q=j}$给出，并对 $0 \leqslant j \leqslant 2n$求和，得到

$$\left\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\,(F_V)\,(\mathrm{N}_1+1)^{-n}\right\| \leqslant C(n)\left\|\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)V\right\|. \tag{2.52}$$

我们使用与 [19, 引理 3.1] 中类似的论证完成证明。 □

现在，利用 (2.40) 和估计(A.1)，可得空间 $\mathcal{D}_{+,\infty}$ 在~二次传播子 $U_2^\circ(t,0)$及外尔算子的作用下保持不变。特别地，向量

$$\chi_N(t) = \mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\widetilde{\varphi}_t\right)\widetilde{U}_2^\circ(t,0)\,\psi_N(t) \tag{2.53}$$

属于 $\mathcal{D}_{+,\,\infty}$，以及它们的时间导数。因此，我们可以对表达式(2.49)求导：利用命题 1.2和恒等式

$$\left\langle\widetilde{\varphi}_t\middle|\mathrm{i}\dot{\widetilde{\varphi}}_t\right\rangle = \langle\varphi_t|\partial_{\overline{z}}F_V(\varphi_t)\rangle \;\text{ and }\; \left\langle z\middle|\mathrm{i}\,\dot{\widetilde{\varphi}}_t\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}z\middle|\partial_{\overline{z}}F_V(\varphi_t)\right\rangle, \tag{2.54}$$

我们得到

$$\dot{\Theta}_N(t) = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta_\circ(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)\left(\mathrm{Wick}_\varepsilon\,(f_t)\;U_2^\circ(t,0)\,\psi_N(t) - \mathrm{i}\,\varepsilon\,U_2^\circ(t,0)\dot{\psi}_N(t)\right), \tag{2.55}$$

对于所有 $\varepsilon \in (0,1]$, 其中

$$f_t(z) = F_V(z+\varphi_t) + \dot{\delta}_\circ(t) - \mathrm{Re}\,\langle\varphi_t|\partial_{\overline{z}}F_V(\varphi_t)\rangle - 2\,\mathrm{Re}\,\langle z|\partial_{\overline{z}}F_V(\varphi_t)\rangle - F_{V_2(t)}(z)\,. \tag{2.56}$$

2.4.2 参数的选择

现在我们来讨论参数的选择 $\delta_\circ(t)$ 和 $b_j(t)$，它们出现在 (1.62)中。对于所有 $0 \leqslant j \leqslant 2n$, $0 \leqslant \ell \leqslant j$ 和 $t \in \mathbb{R}$，定义如下

$$V_\ell^{(j)}(t) = \mathcal{S}_\ell\big(\left\langle\otimes^{j-\ell}(\varphi_t + \mathfrak{c}\varphi_t)\right|\otimes(\otimes^\ell\mathbb{1})\big)V^{(j)} \in \otimes^\ell_{\mathrm{s}}\mathcal{Z} \tag{2.57}$$

and

$$V_\ell(t) = \sum_{j=\ell}^{2n} \sqrt{\frac{\ell!}{j!}} \binom{j}{\ell} V_\ell^{(j)}(t)\,. \tag{2.58}$$

于是，我们得到展开式

$$F_V(z+\varphi_t) = F_V(\varphi_t) + 2\,\mathrm{Re}\,\langle z|\partial_{\overline{z}} F_V(\varphi_t)\rangle + F_{V_2(t)}(z) + \sum_{\ell=3}^{2n} F_{V_\ell(t)}(z)\,. \tag{2.59}$$

若我们选取函数 $\delta_\circ$ 使之满足 (1.47)，则函数 f_t （由 (2.56) 定义）重合于

$$F_{R_3(t)} := \sum_{\ell=3}^{2n} F_{V_\ell(t)}\,,$$

由此得到

$$\dot\Theta_N(t) = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta_\circ(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)\times \left(\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_3(t)}\right)\,U_2^\circ(t,0)\,\psi_N(t) - \mathrm{i}\,\varepsilon\,U_2^\circ(t,0)\dot\psi_N(t)\right)\,. \tag{2.60}$$

我们指出，齐次性 (1.25)给出

$$\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_3(t)}\right) = \sum_{\ell=3}^{2n} \varepsilon^{\frac{\ell}{2}}\,\mathrm{Wick}_1\left(F_{V_\ell(t)}\right)\,.$$

利用显式表达式 (2.48) （即 $\psi_N(t)$ 的表达式）以及定理 2.14 （另见 [11, 定理 3.2]），由此我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_3(t)}\right)\,U_2^\circ(t,0)\,\psi_N(t) &= \sum_{j=0}^{N}\sum_{\ell=3}^{2n} \varepsilon^{\frac{j+\ell}{2}}\,\mathrm{Wick}_1\left(F_{V_\ell(t)}\right)\,U_2^\circ(t,0)\,\mathrm{Wick}_1\left(b_j(t)\right)\psi \\
&= \sum_{k=1}^{N+2n-2}\ \sum_{\substack{3\leqslant \ell\leqslant 2n\\ 0\leqslant j\leqslant N\\ j+\ell=k+2}} \varepsilon^{\frac{k+2}{2}}\,U_2^\circ(t,0)\,\mathrm{Wick}_1\left(\widehat{F}_{V_\ell(t)}\right)\mathrm{Wick}_1\left(b_j(t)\right)\psi \\
&= U_2^\circ(t,0)\sum_{k=1}^{N+2n-2} \varepsilon^{\frac{k+2}{2}} \sum_{j=0}^{\min(N,k-1)} \mathrm{Wick}_1\left(\widehat{F}_{V_{k+2-j}(t)}\,\sharp_1\,b_j(t)\right)\psi\,,
\end{aligned}$$

其中 $a\,\sharp_1\,b$ 表示算子 $\mathrm{Wick}_1(a)\mathrm{Wick}_1(b)$ 的符号（见 (1.32)）。因此，(2.60) 中的最后一个因子，即：$\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_3(t)}\right)\,U_2^\circ(t,0)\,\psi_N(t) - \mathrm{i}\,\varepsilon\,U_2^\circ(t,0)\,\dot\psi_N(t)$，等于

$$\begin{aligned}
&U_2^\circ(t,0)\sum_{k=1}^{N+2n-2} \varepsilon^{\frac{k+2}{2}} \sum_{j=0}^{\min(N,k-1)} \mathrm{Wick}_1\left(\widehat{F}_{V_{k+2-j}(t)}\,\sharp_1\,b_j(t)\right)\psi - \mathrm{i}\,\varepsilon\,U_2^\circ(t,0)\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{Wick}_1\left(\partial_t b_k(t)\right)\,\psi \\
=&U_2^\circ(t,0)\left(\sum_{k=1}^{N+2n-2} \varepsilon^{\frac{k+2}{2}} \sum_{j=0}^{\min(N,k-1)} \mathrm{Wick}_1\left(\widehat{F}_{V_{k+2-j}(t)}\,\sharp_1\,b_j(t)\right)\psi - \mathrm{i}\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^{\frac{k+2}{2}}\,\mathrm{Wick}_1\left(\partial_t b_k(t)\right)\,\psi\right)\,.
\end{aligned}$$

将总和按 ε 的幂次排列，可得

$$
\begin{aligned}
U_2^\circ(t,0)\Big(& -\mathrm{i}\,\varepsilon\,\mathrm{Wick}_1\left(\partial_t b_0(t)\right)\psi \\
& + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{\frac{k+2}{2}} \Big(-\mathrm{i}\,\mathrm{Wick}_1\left(\partial_t b_k(t)\right) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{Wick}_1\left(\widehat{F}_{V_{k+2-j}(t)} \,\sharp_1\, b_j(t)\right)\Big)\psi \\
& + \sum_{k=N+1}^{N+2n-2} \varepsilon^{\frac{k+2}{2}} \sum_{j=0}^{N} \mathrm{Wick}_1\left(\widehat{F}_{V_{k+2-j}(t)} \,\sharp_1\, b_j(t)\right)\psi\Big)\,.
\end{aligned}
$$

现在我们假设 $n \geqslant 2$ （次二次情形见下文注释 2.16 ） $n \leqslant 1$。我们的目标是选取多项式符号 $b_k(t)$ 使第一项和第一重求和消失。取$\left(b_k(t)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ 定义为

$$
\left\{
\begin{array}{l}
b_0 \equiv 1 \\
-\mathrm{i}\,\partial_t b_k(t) + \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \widehat{F}_{V_{k+2-j}(t)} \,\sharp_1\, b_j(t) = 0 \text{ with } b_k(0) = 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*\,,
\end{array}
\right. \tag{2.61}
$$

即,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
b_0 \equiv 1 \\
b_k(t) = -\mathrm{i} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^t \widehat{F}_{V_{k+2-j}(s)} \,\sharp_1\, b_j(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*\,,
\end{array}
\right. \tag{2.62}
$$

最终得到

$$
\begin{aligned}
\dot{\Theta}_N(t) = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta_\circ(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right) \times \\
\sum_{k=N+1}^{N+2n-2} \varepsilon^{\frac{k+2}{2}} \sum_{j=0}^{N} \mathrm{Wick}_1\left(F_{V_{k+2-j}(t)}\right)\, U_2^\circ(t,0)\,\mathrm{Wick}_1\left(b_j(t)\right)\psi\,.
\end{aligned} \tag{2.63}
$$

2.4.3 证明结束

最终我们可以证明估计(1.37)。注意，估计左端等于 $\|\Theta_N(t) - \Theta_N(0)\|$。因此，该量由 $\int_0^{|t|} \left\|\dot{\Theta}_N(s)\right\|\mathrm{d}s$控制，而后者可由以下量控制

$$
\varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \sum_{k=N+1}^{N+2n-2} \sum_{j=0}^{N} \int_0^{|t|} \left\|\mathrm{Wick}_1\left(F_{V_{k+2-j}(s)}\right)\, U_2^\circ(s,0)\mathrm{Wick}_1\left(b_j(s)\right)\psi\right\|\mathrm{d}s \tag{2.64}
$$

根据 (2.63)。应用估计 (1.33) 和 (2.40) 以及 $\varepsilon = 1$，我们得到

$$
\left\|\mathrm{Wick}_1\left(F_{V_{k+2-j}(s)}\right)\, U_2^\circ(s,0)\mathrm{Wick}_1\left(b_j(s)\right)\psi\right\| \leqslant C'(s,k,j,\psi) \tag{2.65}
$$

对每个 k, j, 其中

$$C'(s,\ k,\ j,\ \psi) = C(k,\ j)\|V_{k+2-j}(s)\|\times \\ \|\mathrm{Wick}_1\left(b_j(s)\right)\psi\|_{+,(k+2-j)}\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,(k+2-j)\,3^{\frac{k+2-j}{2}}\int_0^{|s|}\|V_2(\tau)\|\mathrm{d}\tau} \tag{2.66}$$

关于 s 连续。注意到, $C'(s,\ k,\ j,\ \psi)$ 有限只要求温和解L^2具有正则性 φ_s , 该解满足(2.13)。

最后, (1.37)的左端有如下界

$$\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}\sum_{k=N+1}^{N+2n-2}\sum_{j=0}^{N}\int_0^{|t|}C'(s,k,j,\psi)\,\mathrm{d}s = C(t,\psi,N)\,\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}\,,$$

由此完成定理 1.4 的证明。 □

注 2.16. 注意到 $V_{k+2-j}(t) = 0$ 对 $j \leqslant k-(2n-1)$ 成立, 其中 $2n$ 是多项式 (2.3) 的次数。因此, 在次二次情形 $n \leqslant 1$ 下, 对于所有 $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{V}_N(t) \equiv \psi$, 我们有 $b_k(t) \equiv 0$; 并且对于所有 $N \in \mathbb{N}$, $\Theta_N(t) \equiv 0$成立, 由此得到精确公式 (1.42)。

3 解析相互作用

本节聚焦于具有解析相互作用的自相互作用玻色量子场哈密顿量。在第 3.1 小节中, 我们大致介绍如何沿着第一作者和第三作者工作的思路, 将 Wick 量子化推广到非多项式符号, 参见 [7]。如第 1.3 小节所述, 证明概要与上一节中针对 $P(\phi)_2$ 哈密顿量的证明完全相同。不过, 有些工具需要调整, 以适用于解析相互作用框架。我们给出与相应哈密顿量关联的经典场方程的极大解的寿命下界, 参见第 3.2 小节中的 (3.13)。我们指出, 为证明整体适定性而给出的定理 4.1] 的证明 [7, 中的论证并不正确。第 3.3 小节证明了描述相应二次动力学的传播子的局部存在性和唯一性。如第 1.3 小节末尾所述, 我们需要推广数目估计 (1.33)。第 3.4 小节通过引入关于变量 (N_1+1) 的解析函数来实现这一点, 该函数具有经过适当选择的指数衰减系数。完成这些准备后, 定理 1.6 的证明与针对 $P(\phi)_2$ 模型的证明相同, 参见第 3.5 小节。

3.1 非多项式 Wick 算子

我们首先为哈密顿量$\mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V)$ （1.44）中出现的表达式 F_V 赋予严格的含义, 因为由 （1.43）给出的函数可能不是多项式。我们定义

$$\mathcal{D}_c = \mathrm{Span}\{\mathrm{W}_\varepsilon\left(u\right)\Omega,\quad u \in \mathcal{Z}_0\}\,. \tag{3.1}$$

该空间在 $\Gamma_s(\mathcal{Z})$中稠密, 见 [7,引理 3。4]。

我们现在将 $\mathcal{K}(\mathcal{Z})$ 定义为如下形式的映射空间 $F\colon \mathcal{Z} \to \mathbb{C}$

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\left\langle \frac{\otimes^j(z+\mathfrak{c}z)}{\sqrt{j!}}\middle| V^{(j)}\right\rangle = F_V(z) \text{ where } V = \left(V^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \Gamma_s(\mathcal{Z})\,.$$

赋予内积

$$\langle F_{V_1}|F_{V_2}\rangle_{\mathcal{K}(\mathcal{Z})}=\langle V_1|V_2\rangle_{\Gamma_{\rm s}(\mathcal{Z})}\ ,$$

$\mathcal{K}(\mathcal{Z})$ 是一个希尔伯特空间，并且与 $\Gamma_{\rm s}(\mathcal{Z})$等距同构。注意，由 (2.5) 给出的 $P(\phi)_2$ 相互作用项的维克符号，根据 (2.28)，属于 $\mathcal{K}(\mathcal{Z})$。

对于每个 $V\in\Gamma_{\rm s}(\mathcal{Z})$，算子

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_V\right) & : & \mathcal{D}_c & \longrightarrow & \Gamma_{\rm s}(\mathcal{Z}) \\ & & \mathrm{W}_\varepsilon\left(u\right)\Omega & \longmapsto & \mathrm{W}_\varepsilon\left(u\right)\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)V\end{array} \tag{3.2}$$

稠密定义，并且由于 $\mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V)\subset\mathrm{Wick}_\varepsilon\left((F_V)^*\right)$，它是可闭的。该算子的闭包（仍记作 $\mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V)$）称为映射 $F_V\in\mathcal{K}(\mathcal{Z})$的 **Wick量子化**；若 $F_V\in\mathcal{K}(\mathcal{Z})\cap\mathcal{P}(\mathcal{Z})$，则它与定义 (1.24) 一致。

命题 3.1 ([7, 命题 3.11])**.** 假设 $V\in\Gamma_{\rm s}(\mathcal{Z})$ 满足 $\Gamma\left(\mathfrak{c}\right)V=V$。那么，算子 $\mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V)$ 是本质自伴的。

证明。 在波表示中，算子 $\mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V)$ 对应于乘以 $\mathcal{R}(\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)V)$，由 (1.18)可知。在假设 $\Gamma\left(\mathfrak{c}\right)V=V$下，根据 (1.17)，函数 $\mathcal{R}(\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)V)$ 取实值，因此相应的乘法算子是本质自伴的。 □

现在陈述一个基本不等式，它可由众所周知的超收缩估计推出，参见例如 [36, 定理 I。17]回顾一下，福克空间 $\Gamma_{\rm s}(\mathcal{Z})$ 与某个空间 $L^2(Q,\mathrm{d}\mu)$ 酉等价，其中 μ 根据定理 1.1，它是一个概率测度。

定理 3.2。 令 $1<p\leqslant q<+\infty$和 $0<c_0\leqslant\sqrt{\dfrac{p-1}{q-1}}$。对于所有 $f\in L^2(Q,\,\mathrm{d}\mu)$，我们有

$$\left\|\Gamma\left(c_0\right)f\right\|_{L^q(Q,\mathrm{d}\mu)}\leqslant\|f\|_{L^p(Q,\mathrm{d}\mu)}\,. \tag{3.3}$$

由此估计可推得，对于所有 $V\in\Gamma_{\rm s}(\mathcal{Z})$ 和 $\psi\in D\left(\Gamma\left(\sqrt{3}\right)\right)$，我们有

$$\left\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_V\right)\psi\right\|\leqslant\|V\|\left\|\Gamma\left(\sqrt{3}\right)\psi\right\| \tag{3.4}$$

对于所有 $\varepsilon\in(0,1/3]$，参见 [7, 引理 3.14]。事实上，根据 [7, 命题 3.15]， $\Gamma_{\rm s}^{\rm fin}(\mathcal{Z})$ 是 $\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_V\right)$ 的核；并且若对所有 $\kappa\in\mathbb{N}$ 定义 $V_\kappa=(V(0)\ldots,V(\kappa)\,0,\ldots)$，则估计 (3.4) 给出

$$\left\|\left(\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{V_\kappa}\right)-\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_V\right)\right)\psi\right\|\leqslant\|V_\kappa-V\|\left\|\Gamma\left(\sqrt{3}\right)\psi\right\| \tag{3.5}$$

对所有 $\psi\in D\left(\Gamma\left(\sqrt{3}\right)\right)$。这使我们能够将多项式符号的两项性质推广到 $\mathcal{K}(\mathcal{Z})$ 中的相互作用。首先，我们可以推广平移性质 (1.31)。

引理 3.3 ([7, 引理 3.18])。 设 $V\in D\left(\Gamma\left(\sqrt{2}\right)\right)$。对所有 $u\in\mathcal{Z}$，有 $F_V(\bullet+u)\in\mathcal{K}(\mathcal{Z})$且

$$\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}u\right)^*\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_V\right)\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}u\right)=\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_V\left(\,\cdot+u\right)\right) \tag{3.6}$$

对所有 $\varepsilon\in(0,\ 1/3]$。

此外，我们可以将估计 (2.52) 推广到非多项式相互作用。

命题 3.4 ([7, 命题 3.17])。 设 $S(x)=\sum a_k x^k$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的整函数，满足$_{k=0}a_k>0$ 对所有 $k\in\mathbb{N}$，并记

$$\mathbf{S}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mathrm{N}_1+1)^k\,. \tag{3.7}$$

设 $V=\left(V_{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\in\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 使得 $\Gamma(\mathfrak{c})\,V=V$。对所有 $\lambda_1>8e$，存在 $C>0$ 使得不等式

$$\|\mathrm{Wick}_{\varepsilon}\left(F_V\right)\psi\|\leqslant 2\left\|\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)V\right\|\|\psi\|+C\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda_1\varepsilon)^k}{a_{k+2}}\left\|V^{(k)}\right\|^2\right)^{1/2}\left\|\mathbf{S}^{1/2}\,\psi\right\| \tag{3.8}$$

在右端有限时成立。

最后，我们给出一个关于本质自伴性的关键定理。该结果的一般形式由 Segal 在 [34], 中陈述，是 Nelson、Glimm、Jaffe、Simon 和 Høegh-Krohn 等众多学者杰出工作的成果。

定理 3.5. 在假设 **(H1)** 与 **(H2)**下，哈密顿量 (1.44)在 $\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 上本质自伴，定义域为 $D(\mathrm{d}\Gamma_{\varepsilon}(A))\cap D(\mathrm{Wick}_{\varepsilon}(F_V))$。

3.2 经典场方程

在 $P(\phi)_2$ 模型的情形下，我们证明了经典场方程(2.13) 在初始数据 $\varphi_0\in L^2(\mathbb{R},\mathrm{d}k)$下存在唯一的全局温和解，见推论2.10。同样地，我们可以建立(1.46)的唯一极大温和解的存在性，即一个函数 $\varphi_t\in C^0(I,\mathcal{Z})$ 满足

$$\varphi_t=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\,\varphi_0-\mathrm{i}\int_0^t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-s)A}\,\partial_{\bar{z}}F_V(\varphi_s)\,\mathrm{d}s\,, \tag{3.9}$$

其中$\partial_z F_V(\varphi_t)$ 由(1.55)定义。该结果已在 [7, 定理 4.1] 中针对 $I=\mathbb{R}$给出，然而，在我们看来，基于 Bihari 引理 [9] 所给出的论证不足以证明这些解是全局定义的。因此，我们重新审视该证明，并将讨论限制在极大解上。

设 $\varphi_0\in\mathcal{Z}$与 $V\in D\left(\Gamma\left(\sqrt{2}\right)\right)$、 $V\neq 0$固定。对所有 u， $v\in\mathcal{Z}$，我们有

$$|\partial_{\bar{z}}F_V(u)-\partial_{\bar{z}}F_V(v)|\leqslant 2\,\|V\|\,\mathrm{g}\big(\max(|u|,|v|)\big)|u-v|\,, \tag{3.10}$$

其中 $\mathrm{g}(x)=\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{(k+1)(k+2)\,k!\,x^{2k}}}$ 定义了 $\mathbb{R}_+$ 上一个正的、非递减函数。回顾一下， $|\cdot|$ 表示 $\mathcal{Z}$ 上的范数。因此，该向量场

$$X:(t,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{Z}\longmapsto\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\,\partial_{\bar{z}}F_V\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}u\right)$$

是连续的 ous 且关于第二个变量局部 Lipschitz，从而保证存在一个唯一 e

非自治柯西问题的极大解 $\widetilde{\varphi}_t \in C^1(I, \mathcal{Z})$:

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dot{\widetilde{\varphi}}_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\,\partial_{\bar{z}} F_V\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\widetilde{\varphi}_t\right) \\ \widetilde{\varphi}_t\big|_{t=0} = \varphi_0 \in \mathcal{Z}\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

此外，积分形式

$$\widetilde{\varphi}_t = \varphi_0 - \mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}sA}\,\partial_{\bar{z}} F_V\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sA}\widetilde{\varphi}_s\right)\mathrm{d}s \tag{3.12}$$

给出，对于所有 $t \in I \cap \mathbb{R}_+$,

$$|\widetilde{\varphi}_t| \leqslant |\varphi_0| + \|V\| \int_0^t \sqrt{f\left(4\,|\widetilde{\varphi}_s|^2\right)}\,\mathrm{d}s\,,$$

其中 $f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x$。因此，考虑由以下内容定义的函数 G

$$G(u) = \frac{1}{\|V\|}\int_0^u \frac{1}{\sqrt{f(4x^2)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\|V\|}\int_0^u \frac{\mathrm{e}^{-2x^2}}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$$

Bihari 引理 [9] 得出

$$|\varphi_t| \leqslant G^{-1}\big(G(|\varphi_0|) + t\big)$$

f对于所有满足 $G(|\varphi_0|) + t \in \mathrm{Dom}(G^{-1})$ 的 $t \in I \cap \mathbb{R}_+$，也就是说，对于所有满足以下条件的 $t \in I \cap [0, T_0)$

$$T_0 = T(|\varphi_0|) = \frac{1}{\|V\|}\int_{|\varphi_0|}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2x^2}}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x \in (0, +\infty)\,. \tag{3.13}$$

最终，我们得到 $[0, T_0) \subset I$，并且通过时间反演论证得到 $(-T_0,\ 0] \subset I$。现在，令$\varphi_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\,\widetilde{\varphi}_t \in C^0(I,\ \mathcal{Z})$，我们便能够重新表述 [7, 定理 4.1]。

定理 3.6。 对于任意初始数据 $\varphi_0 \in \mathcal{Z}$，柯西问题 (1.46) 存在唯一的极大温和解 $\varphi_t \in C^0(I, \mathcal{Z})$。此外，我们有 $(-T_0, T_0) \subset I$ 其中 T_0 由 (3.13)给出。

3.3 二次动力学

首先，根据推论 2.13，我们得到下面所述的结果。回顾一下， I 是定理 3.6中的温和解的存在时间。

定理 3.7 ([7, 推论 4。6])。 设 $t \in I \longmapsto \varphi_t$ 是由定理 (1.46) 给出的经典场方程 *3.6*的温和解。对于所有 $t \in I$，定义

$$V_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j\,(j-1)}{\sqrt{j!}}\mathcal{S}_2\big(\,\langle \otimes^{j-2}(\varphi_t + \mathfrak{c}\varphi_t)| \otimes (\otimes^2 \mathbb{1})\big)V^{(j)} \in \otimes^2_{\mathrm{s}}\mathcal{Z}\,, \tag{3.14}$$

and

$$F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}(z) = \left\langle \frac{\otimes^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\,\mathfrak{c}z)}{\sqrt{2}}\middle| V_2(t)\right\rangle\,. \tag{3.15}$$

那么，对于所有初始数据 $u_0 \in \mathcal{D}_{+,k}$, $k \in \mathbb{N}^*$，柯西问题

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\varepsilon\,\partial_t u_t = \mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{\widetilde{V}_2(t)}\right)u_t \\ u_t\big|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{3.16}$$

~存在唯一的酉传播子 $(U_2(t,s))_{t,s\in I}$。此外，如果我们定义

$$U_2(t,s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)}\,\widetilde{U}_2(t,s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{s}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)}\,, \tag{3.17}$$

映射 $t\longmapsto U_2(t,s)\,u_s$ 是以下方程的温和解

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\varepsilon\,\partial_t u_t = \Big(\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon\,(A) + \mathrm{Wick}_\varepsilon\,\big(F_{V_2(t)}\big)\Big)u_t \\ u_t\big|_{t=s} = u_s\,. \end{cases} \tag{3.18}$$

对于 $P(\phi)_2$ 模型，我们得到了关于 $\|U_2(t,s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}_{+,k})}$ 对所有 $k\in\mathbb{N}^*$的界，这见 (2.40)。下面给出该界的一个改进形式，这将有助于证明定理 1.6。

命题3.8 ([7, 命题4.5])。采用定理 3.7的记号，对所有 $\lambda>1$，存在 $c>0$ 使得，对所有 $k\in\mathbb{N}^*$，不等式

$$\begin{aligned}\Big\|(\mathrm{N}_1+1)^{k/2}\,U_2(t,s)\,\psi\Big\| \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,k\,\lambda^k\left|\int_s^t\|V_2(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right|}\times \\ \left(k\,c^k\left|\int_s^t\|V_2(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right|\|\psi\|^2+\Big\|(\mathrm{N}_1+1)^{k/2}\,\psi\Big\|^2\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{3.19}$$

对任意 $\psi\in\mathcal{D}_{+,k}$均成立。

最终，定理 2.14 仍然成立，只需将 ω 替换为满足 **(H1)**的自伴算子。

3.4 一些辅助结果

为了证明定理 1.6，我们需要在一个稠密子空间上对表达式 (1.62) 进行强微分。在非多项式情形中，主要困难在于为算子

$$B_t := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)}$$

在 (2.49)中出现，同时保持这些定义域在推论 2.13中的外尔算子和酉传播子作用下的不变性。在这种情况下，我们注意到，数目估计 (1.33) 不再适用。我们先给出一些辅助结果。

命题 3.9 ([7])。设 $V=\left(V_{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\in\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 满足 $\Gamma(\mathfrak{c})\,V=V$满足条件 **(H3)**，其常数为 $\alpha>0$，$\lambda>1$。令

$$S_{\alpha_0}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_0\,\lambda^k}x^k \tag{3.20}$$

其中 $0<\alpha_0<\dfrac{2\alpha}{-\lambda^2}$。那么，存在 $C'>0$，使得对所有 $\varepsilon\in(0,1]$，

$$\Big\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\,(F_V)\,\mathbf{S}_{\alpha_0}^{-1/2}\Big\|\leqslant C'\Big\|\mathrm{e}^{\alpha\lambda^{\mathrm{N}_1}}\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)V\Big\|\,, \tag{3.21}$$

其中 $\mathbf{S}_{\alpha_0}$ 由 (3.7) 定义。特别地，$B_t:=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)}$ 在 $\mathcal{D}_{\alpha_0}=D\left(\mathbf{S}_{\alpha_0}^{1/2}\right)$上可微

其公式为

$$\dot{B}_t = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\, B_t\, \mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F^{\mathfrak{c}_t}_{V(t)}\right). \tag{3.22}$$

证明。设 $0<\alpha_0<\dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$。应用命题 3.4，令 $a_k=\mathrm{e}^{-\alpha_0\,\lambda^k}$ 和 $\lambda_1>8\mathrm{e}$ 固定，则对所有 $\psi\in\mathcal{D}_{\alpha_0}$ 以及 $\varepsilon\in(0,1/3]$,

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_V\right)\psi\right\| &\leqslant 2\left\|\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)V\right\|\|\psi\| \\ &\quad + C\left(\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{(\alpha_0\,\lambda^2)\lambda^j}(\lambda_1\varepsilon)^j\left\|V^{(j)}\right\|^2\right)^{1/2}\left\|\mathbf{S}_{\alpha_0}^{1/2}\,\psi\right\| \\ &\leqslant 2\left\|\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)V\right\|\|\psi\| + C_1\left\|\mathrm{e}^{\alpha\lambda^{\mathrm{N}_1}}\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)V\right\|\left\|\mathbf{S}_{\alpha_0}^{1/2}\,\psi\right\|.\end{aligned}$$

由于算子$\mathbf{S}_{\alpha_0}^{-1/2}$: $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})\longrightarrow\mathcal{D}_{\alpha_0}$ 有界，因此令 (3.21) 中的 $\psi'=\mathbf{S}_{\alpha_0}^{1/2}\,\psi$，即可得到式（3.21）。$B_t$ 关于可微性的证明与 [19, 引理 3.1],的证明非常相似，只需使用 (3.21)。 □

命题 3.10。对所有 $u\in\mathcal{Z}$ 和 $0<\alpha_1<\alpha_0$，算子

$$\mathbf{S}_{\alpha_0}^{1/2}\,\mathrm{W}_\varepsilon(u)\,\mathbf{S}_{\alpha_1}^{-1/2}$$

有界。

证明。固定 $u\in\mathcal{Z}$。令 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\psi^{(n)}\in\otimes_{\mathrm{s}}^n\mathcal{Z}$。对所有 k，$\ell\in\mathbb{N}$，我们有

$$\frac{1}{k!}\left\|(\mathrm{N}_1+1)^\ell\phi_\varepsilon(u)^k\,\psi^{(n)}\right\| \leqslant \frac{\left\|\psi^{(n)}\right\|}{n!}\frac{\sqrt{(n+k)!}}{k!}\left(\sqrt{2\varepsilon}\,|u|\right)^k(n+k+1)^{\frac{\ell}{2}},$$

由此可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\|\mathbf{S}_{\alpha_0}\,\phi_\varepsilon(u)^k\;\psi^{(n)}\right\|<+\infty.$$

我们推得 $\mathscr{H}_0\subset D(\mathbf{S}_{\alpha_0})$。因此，对于所有 $\psi\in\mathscr{H}_0$，我们可以写成，

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{S}_{\alpha_0}^{1/2}\,\mathrm{W}_\varepsilon(u)\,\psi\right\|^2 &= \langle \mathrm{W}_\varepsilon(u)\,\psi|\mathbf{S}_{\alpha_0}\mathrm{W}_\varepsilon(u)\,\psi\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_0\,\lambda^k}\left\|(\mathrm{N}_1+1)^{k/2}\,\mathrm{W}_\varepsilon(u)\,\psi\right\|^2 \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_0\,\lambda^k}\,M(|u|)\,|u|^{\frac{k}{2}}2^{\frac{k^2}{4}}\left\|(\mathrm{N}_1+1)^{k/2}\,\psi\right\|^2 \\ &\leqslant C\Big(\alpha_0,\alpha_1,\lambda,|u|\Big)\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_1\lambda^k}\left\|(\mathrm{N}_1+1)^{k/2}\,\psi\right\|^2 \\ &= C\Big(\alpha_0,\alpha_1,\lambda,|u|\Big)\left\|\mathbf{S}_{\alpha_1}^{1/2}\,\psi\right\|^2,\end{aligned}$$

其中我们使用了 (A.1) 来得到第一个不等式。该不等式可推广至 $\psi\in\mathcal{D}_{\alpha_1}$，从而完成证明。

□

命题 3.11 ([7, 引理 4 的证明9])。 对所有 $\psi \in \Gamma_{\rm s}^{\rm fin}(\mathcal{Z})$ 以及 $t \in I$，我们有 $U_2(t,\,0)\,\psi \in \mathcal{D}_{\alpha_0}$对所有 $\alpha_0 > 0$成立。此外，我们有

$$\left\|\mathbf{S}_{\alpha_0}^{1/2}\,U_2(t,0)\,\psi\right\| \leqslant \left(c\,\mathrm{g}_t'(c)\int_0^{|t|}\|V_2(\tau)\|\mathrm{d}\tau\cdot\|\psi\|^2 + \left\|\mathrm{g}_t(\mathrm{N}_1+1)^{1/2}\,\psi\right\|^2\right)^{1/2}, \tag{3.23}$$

其中 $c > 0$,

$$\mathrm{g}_t(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha_0\,\lambda^k}\,\mathrm{e}^{2\,\sqrt{2}\,k\,\lambda_0^k\int_0^{|t|}\|V_2(\tau)\|\mathrm{d}\tau}\,r^k\,, \quad 1 < \lambda_0 < \lambda\,, \tag{3.24}$$

and

$$\mathrm{g}_t'(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{g}_t(r)\,.$$

证明。 这一结果由估计 (3.19) 应用于 $1 < \lambda_0 < \lambda$。

m ∞右端 (3.11) 是有限的：事实上，若 $\psi \in \bigoplus \otimes_{\rm s}^n \mathcal{Z}$，记 $\mathrm{g}_t(r) = \sum a_k$ $(t)\ r^k$，则有$n=0$ $k=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\left\|(\mathrm{N}_1+1)^{k/2}\,\psi\right\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\,m^k\,\|\psi\|^2 < +\infty\,.$$

□

推论 3.12 ([7, 引理 4.9])。 对所有 $\psi \in \Gamma_{\rm s}^{\rm fin}(\mathcal{Z})$ 以及 $t \in I$，向量 $U_2(t,0)\,\psi$ 属于$D(\mathrm{Wick}_\varepsilon\,(F_V))$，并具有如下形式的估计

$$\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\,(F_V)\;U_2(t,0)\,\psi\| \leqslant C\left\|\mathrm{e}^{\alpha\lambda^{\mathrm{N}_1}}\Gamma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)V\right\|\times \left(\left\|\left(\mathrm{g}_t(\mathrm{N}_1+1)\right)^{1/2}\psi\right\|^2 + c\,\mathrm{g}_t'(c)\int_0^{|t|}\|V_2(\tau)\|\mathrm{d}\tau\|\psi\|^2\right)^{1/2} \tag{3.25}$$

对所有 $\varepsilon \in (0,1/3]$ 以及 $\psi \in \Gamma_{\rm s}^{\rm fin}(\mathcal{Z})$，其中 g_t 由 (3.24)给出。

证明。 这是不等式的一个推论

$$\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\,(F_V)\;U_2(t,0)\,\psi\| \leqslant \left\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\,(F_V)\,\mathbf{S}_{\alpha_0}^{-1/2}\right\|\cdot\left\|\mathbf{S}_{\alpha_0}^{1/2}\,U_2(t,0)\,\psi\right\|$$

结合估计(3.21)和(3.23)。 □

3.5 完整渐近展开式

在本小节中，我们证明定理1.6。由于证明与定理1.4的证明非常相似，我们仅强调其中的主要差异。

设 $V = \left(V(j)\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \Gamma_{\rm s}(\mathcal{Z})$，使得 Γ(c) $V = V$且 (H3) 成立，常数为 $\alpha > 0$, $\lambda > 1$。设$\psi \in \Gamma_{\rm s}^{\rm fin}$ $(\mathcal{Z})$ 与 $N \in \mathbb{N}$ 固定。对于分别由 (1.47) 与 (2.61) 给出的 $\delta(t)$ 与 $\left(b_j(t)\right)_{j\in\mathbb{N}}$，我们需要对如下量求导

$$\Theta_N(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)U_2(t,0)\,\psi_N(t),$$

其中 $H_\varepsilon = \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A) + \mathrm{Wick}_\varepsilon(F_V)$， φ_t 是 (1.46) 的温和解， $U_2(t,0)$ 是由定理3.7 给出的二次传播子，且

$$\psi_N(t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^{\frac{j}{2}} \mathrm{Wick}_1(b_j(t))\,\psi\,.$$

根据命题 3.10 和 3.11，向量

$$\chi_N(t) = \mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\widetilde{\varphi}_t\right)\widetilde{U}_2(t,0)\,\psi_N(t) \tag{3.26}$$

都属于空间

$$\bigcap_{0<\lambda^2\alpha_0<2\alpha} \mathcal{D}_{\alpha_0}\,,$$

算子 $B_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(A)}$ 可微，这由命题 3.9可知。最终，我们可以对 (2.49) 中的 $\Theta_N(t)$的修正表达式求导。利用命题 1.2 以及恒等式 (2.54) 和平移性质 (3.6)，我们得到

$$\dot{\Theta}_N(t) = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)\cdot\Big(\mathrm{Wick}_\varepsilon(f_t)\;U_2(t,0)\,\psi_N(t) - \mathrm{i}\,\varepsilon\,U_2(t,0)\dot{\psi}_N(t)\Big) \tag{3.27}$$

对所有 $\varepsilon\in(0,1/3]$，其中 $f_t(z)$ 由 (2.56)定义。现在，利用 (1.54) 中 F_V 在$z_0=\varphi_t$ 附近的展开式，以及 (1.47) 中 $\delta(t)$的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_N(t) = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)\times\\ \Big(\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_3(t)}\right)\;U_2(t,0)\,\psi_N(t) - \mathrm{i}\,\varepsilon\,U_2(t,0)\dot{\psi}_N(t)\Big)\,,\end{aligned} \tag{3.28}$$

其中

$$V_\ell^{(j)}(t) = \mathcal{S}_\ell\big(\langle\otimes^{j-\ell}(\varphi_t+\mathfrak{c}\varphi_t)|\otimes(\otimes^\ell\mathbb{1})\big)V^{(j)}\in\otimes_{\mathrm{s}}^\ell\mathcal{Z}\,, \tag{3.29}$$

$$V_\ell(t) = \sum_{j=\ell}^{\infty}\sqrt{\frac{\ell!}{j!}}\binom{j}{\ell}V_\ell^{(j)}(t) \tag{3.30}$$

∞和 $R_3(t) = \bigoplus V_\ell(t)$。此外，对于所有 $N\in\mathbb{N}$和 $0\leqslant j\leqslant N$，我们有公式$\ell=3$

$$\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_3(t)}\right) = \sum_{\ell=3}^{N+2-j}\varepsilon^{\frac{\ell}{2}}\,\mathrm{Wick}_1\left(F_{V_\ell(t)}\right) + \mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_{N+3-j}(t)}\right)$$

∞ ∞其中 $R_{N+3-j}(t) = \sum V_\ell(t) \in \bigoplus \otimes_{\mathrm{s}}^\ell\mathcal{Z}$。利用 (2.48) 中 $\psi_N(t)$
$\ell=N+3-j$ $\ell=N+3-j$

以及 Theo 余 2.14，以及(2.61) 中多项式符号 $b_k(t)$，由此得 in

$$\dot{\Theta}_N(t) = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{\varepsilon}H_\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta(t)}{\varepsilon}}\,\mathrm{W}_\varepsilon\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)\times \left(\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^{\frac{j}{2}}\,\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_{N+3-j}(t)}\right)\,U_2(t,0)\,\mathrm{Wick}_1\left(b_j(t)\right)\psi\right). \tag{3.31}$$

现在我们来完成定理1.6的证明。式(1.45) 的左端由以下量控制

$$\int_0^{|t|}\left\|\dot{\Theta}_N(s)\right\|\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{|t|}\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^{\frac{j}{2}}\left\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_{N+3-j}(s)}\right)\,U_2(s,0)\,\mathrm{Wick}_1\left(b_j(s)\right)\psi\right\|\mathrm{d}s\,.$$

由于 V满足**(H3)**，其常数为 $\alpha>0,\quad \lambda>1$，序列 $\left(V_\ell(t)\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$ 满足**(H3)**，其常数为 $0<\gamma<\alpha$ 和 $\lambda>1$。

+∞因此，我们可以将(3.25) 应用于势 $R_{N+3-j}(s)\in \bigoplus \otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathcal{Z}$ 以及函数$n=N+3-j$Wick$_1$ $(b_j(s))\,\psi\in\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$，得到

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{Wick}_\varepsilon\left(F_{R_{N+3-j}(s)}\right)\,U_2(s,0)\mathrm{Wick}_1\left(b_j(s)\right)\psi\right\|^2 \leqslant & C\,\varepsilon^{N+3-j}\left\|\mathrm{e}^{\gamma\lambda^{\mathrm{N}_1}}R_{N+3-j}(s)\right\|^2\times\\ &\left(\left\|\mathrm{g}_s^{1/2}\,\mathrm{Wick}_1\left(b_j(s)\right)\psi\right\|^2\right.\\ &\left.+\,c\,\mathrm{g}_s'(c)\int_0^{|s|}\|V_2(\tau)\|\mathrm{d}\tau\|\mathrm{Wick}_1\left(b_j(s)\right)\psi\|^2\right)\\ =&C'(s,\psi,N,j)\,\varepsilon^{N+3-j}\end{aligned}$$

其中 $C'(s,\ \psi,\ N,\ j)$ 关于 s 和g_s 连续，且(3.24)给出了$\mathbf{g}_s$的定义方式，与(3.7)中的相同。最终，式(1.45) 的左端由以下量控制

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{|t|}\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^{\frac{j}{2}}\,C(s,\psi,N,j)\cdot\varepsilon^{\frac{N+3-j}{2}}\mathrm{d}s = C(t,\psi,N)\cdot\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}\,,$$

由此完成定理1.6的证明。 □

外尔算子与数目估计

本附录旨在建立数目-Weyl 估计 (A.1)。此类估计是标准结果，参见 [14, 第 3 节。5]以了解更多讨论。不过，命题3.10 的证明需要应用(A.1) 并给出针对我们需求的精确量化界。因此，我们选择在此给出详细证明。

我们用.....表示

$$\mathbb{C}_+ = \{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(z)\geqslant 0\}$$

闭右半平面。对于所有 $z\in\mathbb{C}_+$，令 $D\left((\mathbf{N}_1+1)^z\right)$ 为算子 $\left((\mathbf{N}_1+1)^z,\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})\right)$ 闭包的定义域。

定理 A.1. 设 $z \in \mathbb{C}_+$、 $u \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$ 和 $0 < \varepsilon \leqslant 1$ 为固定值。则，外尔算子 $\mathrm{W}_\varepsilon(u)$ 保持定义域 $D\Big((\mathrm{N}_1+1)^z\Big)$ 不变。此外，我们有如下形式的估计

$$\left\|(\mathrm{N}_1+1)^z\,\mathrm{W}_\varepsilon(u)\,(\mathrm{N}_1+1)^{-z}\right\| \leqslant M(|u|)\,|u|^{\mathrm{Re}(z)}\,2^{\mathrm{Re}(z)^2}\,, \tag{A.1}$$

其中 $M(|u|)$ 是一个与 ε 无关的常数。

我们陈述一个技术引理，用以给出（A.1）的 $z \in \mathbb{N}$估计。随后，我们借助复插值论证推导出一般情形。

整数情形的证明

引理 A.2。 对于所有 $u \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$、 $k \in \mathbb{N}$ 和 $0 < \varepsilon \leqslant 1$，算子

$$T_k = \Big(\mathrm{N}_1 + 1 + \phi_\varepsilon(\mathrm{i}u) + \frac{\varepsilon}{2}\,|u|^2\Big)^k\,(\mathrm{N}_1+1)^{-k} \tag{A.2}$$

在 $\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 上有界。此外，我们有如下形式的估计

$$\|T_k\| \leqslant M'(|u|)\,|u|^k\,2^{k^2}\,, \tag{A.3}$$

其中 $M'(|u|)$ 是一个与 ε 无关的常数。

在开始证明这一结果之前，我们先说明在 $z = k \in \mathbb{N}$的情况下如何得到定理A.1 。我们回顾一下，由 $\mathscr{H}_0$ 定义的空间(1.30) 是 Wick 算子的核$\mathrm{Wick}_\varepsilon(b)$ $b \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$。特别地，对于所有 $\mathscr{H}_0 \subset \phi_\varepsilon(u)$，我们有 $\mathscr{H}_0 \subset D(\mathrm{N}_\varepsilon^k)$，以及对于所有 $u \in \mathcal{Z}$, $k \in \mathbb{N}$，平移性质(1.31) 给出

$$\mathrm{W}_\varepsilon(u)^*\,\phi_\varepsilon(v)\,\mathrm{W}_\varepsilon(u) = \phi_\varepsilon(v) + \varepsilon\,\mathrm{Im}\,\langle u|v\rangle\,\mathbb{1} \tag{A.4}$$

and

$$\mathrm{W}_\varepsilon(u)^*\,\mathrm{N}_\varepsilon\mathrm{W}_\varepsilon(u) = \mathrm{N}_\varepsilon + \varepsilon\,\phi_\varepsilon(\mathrm{i}u) + \frac{\varepsilon^2}{2}\,|u|^2\mathbb{1} \tag{A.5}$$

在 $\mathscr{H}_0$ 上。因此，算子 $\mathrm{W}_\varepsilon(u)^*\,\phi_\varepsilon(v)\mathrm{W}_\varepsilon(u)$ 和 $\mathrm{W}_\varepsilon(u)^*\,\mathrm{N}_\varepsilon\mathrm{W}_\varepsilon(u)$ 保持 $\Gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Z})$ 不变，所以$\phi_\varepsilon(v)$ 和 N_1 保持 $\mathscr{H}_0$ 不变。这使我们能够对所有 $k \in \mathbb{N}$ 写出:

$$\mathrm{W}_\varepsilon(u)^*\,(\mathrm{N}_1+1)^k\,\mathrm{W}_\varepsilon(u) = T_k\,(\mathrm{N}_1+1)^k \text{ on } \mathscr{H}_0 \tag{A.6}$$

with T_k 由(A.2)给出。因此，对于所有 $\psi \in \mathscr{H}_0$ 和 $\varphi \in D(\mathrm{N}_\varepsilon^k)$ 满足 $\|\varphi\| = 1$的，我们有

$$\left|\left\langle \mathrm{W}_\varepsilon(u)^*\,(\mathrm{N}_1+1)^k\,\varphi|\psi\right\rangle\right| \leqslant \|T_k\|\,\left\|(\mathrm{N}_1+1)^k\psi\right\|.$$

将此不等式推广到 $\psi \in D(\mathrm{N}_\varepsilon^k)$，对所有 $\chi \in \Gamma_{\mathrm{s}}(\mathcal{Z})$ 可得，

$$\left|\left\langle (\mathrm{N}_1+1)^k\varphi\middle|\mathrm{W}_\varepsilon(u)\,(\mathrm{N}_1+1)^{-k}\,\chi\right\rangle\right| \leqslant \|T_k\|\|\chi\|\,.$$

最后，我们得到 $\mathrm{W}_\varepsilon(u)\,(\mathrm{N}_1+1)^{-k}\,\chi \in D\Big([(\mathrm{N}_1+1)^k]^*\Big) = D\Big((\mathrm{N}_1+1)^k\Big)$，而估计(A.1) 关于 $z = k \in \mathbb{N}$ 可由 (A.3)得出。

现在我们转而证明引理 A.2，其灵感源自数-能量估计 [14,第 3 节。5] （另见 [5, 命题 3。5] 这些估计也可应用于其他情境）。定义

$$A = \mathrm{N}_1 + 1 + \phi_\varepsilon(\mathrm{i}u) + \frac{\varepsilon}{2}|u|^2 \text{ and } B = (\mathrm{N}_1 + 1)^{-1}$$

使得 $T_k = A^k B^k$。我们递归地定义

$$\text{(A.7)} \qquad \begin{cases} \mathrm{ad}_B^0(A) = A, \\ \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{ad}_B^{j+1}(A) = \left[\mathrm{ad}_B^j(A), B\right]. \end{cases}$$

由公式 $[\phi_\varepsilon(v)\,,\ \mathrm{N}_\varepsilon] = \mathrm{i}\ \varepsilon\,\phi_\varepsilon(\mathrm{i}v)$ 以及

$$[A, B] = B\big[B^{-1}, A\big]B\,,$$

我们推得等式

$$\text{(A.8)} \qquad \mathrm{ad}_B(A) = [A, B] = -\mathrm{i}\,B\,\phi_\varepsilon(u)\,B$$

在 $\mathscr{H}_0$ 上成立，并延拓至 $\mathcal{L}(\Gamma_s(\mathcal{Z}))$。据此，我们可以通过对 $j \in \mathbb{N}^*$ 作归纳得到公式

$$\text{(A.9)} \qquad \mathrm{ad}_B^j(A) = (-\mathrm{i})^j\, B^j\, \phi_\varepsilon(u_j)\, B^j \text{ where } u_1 = u \text{ and } u_{j+1} = \mathrm{i}\,u_j\,.$$

现在我们证明算子 T_k, $k \in \mathbb{N}^*$ 是有界的。对于 $k = 1$，不等式

$$\text{(A.10)} \qquad \|\phi_\varepsilon(u)\,\psi\|^2 \leqslant 2\,\varepsilon\,|u|^2 \left\|(\mathrm{N}_1 + 1)^{1/2}\,\psi\right\|^2$$

得出 $\|T_1\| \leqslant Q(|u|)^{1/2}$，其中 Q 是一个与 ε 无关的多项式，条件是 $0 < \varepsilon \leqslant 1$。此外，莱布尼茨公式

$$\text{(A.11)} \qquad AB^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B^{k-j}\, \mathrm{ad}_B^j(A)$$

以及公式（A.9）使我们能够写出

$$\begin{aligned} T_{k+1} = A^{k+1}B^{k+1} =& A^k(AB^k)B \\ =& A^k B^k AB + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} A^k B^{k-j}\ \mathrm{ad}_B^j(A)\, B \\ =& T_1 T_k + \sum_{j=1}^{k} (-\mathrm{i})^j \binom{k}{j} T_k\, \phi_\varepsilon(u_j)\ B^{j+1}\,. \end{aligned}$$

因此，只要 T_k 有界，我们便可得出 T_{k+1} 有界，且

$$\begin{aligned} \|T_{k+1}\| \leqslant& \|T_k\|\Big(\|T_1\| + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}\ \left\|\phi_\varepsilon(u_j)\,(\mathrm{N}_1 + 1)^{-1}\right\|\Big) \\ \leqslant& \|T_k\|\big(Q(|u|)^{1/2} + 2^k \cdot \sqrt{2}\,|u|\big) \text{ by (A.10)}\,. \end{aligned}$$

由最后一个不等式可推得 (A.3)。事实上，若我们定义

$$a = Q(|u|)^{1/2} \geqslant 0, \quad b = \sqrt{2}\,|u| > 0\,,$$

对于 $k \in \mathbb{N}^*$，我们有

$$\begin{aligned}\log\left(\|T_k\|\right) - \log\left(\|T_1\|\right) &\leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \log\bigl(a + 2^j\, b\bigr) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \left[j\,\log(2) + \log(b) + \log\left(1 + 2^{-j}\,\frac{a}{b}\right)\right] \\ &\leqslant \frac{k^2}{2}\,\log(2) + k\,\log(b) + \frac{a}{b}\,,\end{aligned}$$

其中我们使用了 $\log(1+x) \leqslant x$。最终得到

$$\|T_k\| \leqslant M'(|u|)\, 2^{k^2}\, |u|^k\,,$$

由此 (A.3) 对所有 $k \in \mathbb{N}^*$。此估计可推广至情形 $k = 0$，只需选取 $M'(|u|) \geqslant 1$。

一般情形的证明

设 $u \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 固定。对于所有 $\varphi,\ \psi \in \Gamma_{\rm s}^{\rm fin}(\mathcal{Z})$ 满足 $\|\varphi\| = 1$的情形，函数

$$F_{\varphi,\psi}(w) = \left\langle \varphi \middle| (\mathrm{N}_1 + 1)^w\, \mathrm{W}_\varepsilon\,(u)\, (\mathrm{N}_1 + 1)^{-w}\, \psi \right\rangle$$

可表示为有限个如下形式的项的线性组合

$$(n+1)^w\,(m+1)^{-w} \left\langle \varphi^{(n)} \middle| \mathrm{W}_\varepsilon\,(u)\,\psi^{(m)} \right\rangle, \quad m, n \in \mathbb{N}\,.$$

因此，$F_{\varphi,\ \psi}$ 在 $\mathbb{C}$上是整函数。应用三线哈达玛插值定理 [35, 定理 12.3，第 187] 页，并对 φ取上确界，得到

$$\left\| (\mathrm{N}_1 + 1)^{k+w}\, \mathrm{W}_\varepsilon\,(u)\, (\mathrm{N}_1 + 1)^{-(k+w)} \right\| \leqslant \|T_k\|^{1-\mathrm{Re}(w)} \|T_{k+1}\|^{\mathrm{Re}(w)}$$

对所有满足 $0 \leqslant \mathrm{Re}(w) \leqslant 1$ 的 $w \in \mathbb{C}$ 均成立。由此，对所有满足 $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$ 的 $z \in \mathbb{C}$，有

$$\left\| (\mathrm{N}_1 + 1)^{z}\, \mathrm{W}_\varepsilon\,(u)\, (\mathrm{N}_1 + 1)^{-z} \right\| \leqslant \|T_k\|^{1-x} \|T_{\ell+1}\|^{x}\,,$$

其中 $k = \lfloor \mathrm{Re}(z) \rfloor$，且 $k + x = \mathrm{Re}(z)$。应用 (A.3)，最终得到

$$\begin{aligned}\left\| (\mathrm{N}_1 + 1)^{z}\, \mathrm{W}_\varepsilon\,(u)\, (\mathrm{N}_1 + 1)^{-z} \right\| &\leqslant M'(|u|)\, |u|^{k(1-x)+(k+1)x}\, 2^{k^2(1-x)+(k+1)^2 x} \\ &= M'(|u|)\, |u|^{\mathrm{Re}(z)}\, 2^{\mathrm{Re}(z)^2 + (x - x^2)} \\ &\leqslant M(|u|)\, |u|^{\mathrm{Re}(z)}\, 2^{\mathrm{Re}(z)^2} \ \text{ where } M(|u|) = 2^{\frac{1}{4}}\, M'(|u|)\,.\end{aligned}$$

这就完成了定理 A.1的证明。

致谢： 第一作者感谢ANR-DFG项目ANR-22-CE92-0013的经费支持。本文所发展的部分想法是在第二、第三作者于2025年1月访问雷恩第一大学IRMAR期间讨论形成的，我们衷心感谢他们的盛情款待。

参考文献

[1] Shigeki Aida。“空间截断P(ϕ)$_2$ 哈密顿算符的隧穿”。泛函分析杂志 263.9 (2012)，第2689–2753页。[2] Zied Ammari与Sébastien Breteaux。“一维具有点对相互作用的多玻色子系统的混沌传播”。渐近分析 76.3 (2012)，第123–170页。[3] Zied Ammari与Marco Falconi。“重整化Nelson模型的玻尔对应原理”。SIAM数学分析期刊 49.6 (2017)，第5031–5095页。[4] Zied Ammari、Marco Falconi与Fumio Hiroshima。“从量子电动力学推导电荷与场的经典电动力学”。傅里叶研究所年刊 (2025)。网址：https://aif.centre-mersenne.org/articles/10.5802/aif.3720/。[5] Zied Ammari、Marco Falconi与Marco Olivieri。“汤川理论中量子渐近场的半经典分析”。微分方程杂志 357 (2023)，第236–274页。[6] Zied Ammari与Francis Nier。“玻色子的平均场极限与无穷维相空间分析”。亨利·庞加莱年刊 9 (2008)，第1503–1574页。[7] Zied Ammari与Maher Zerzeri。“带截断的自相互作用量子场哈密顿量的经典极限”。北海道数学期刊 43.3 (2014)，第385–425页。[8] Asao Arai。“玻色子福克空间中的迹公式、Golden-Thompson不等式与经典极限”。泛函分析杂志 136.2 (1996)，第510–547页。[9] Imre Bihari。“贝尔曼引理的推广及其在微分方程唯一性问题中的应用”。匈牙利数学学报 7.1 (1956)，第81–94页。[10] Lea Bossmann、Sören Petrat、Peter Pickl与Avy Soffer。“超越博戈柳博夫动力学”。纯粹与应用分析 3.4 (2021)，第677–726页。[11] Sébastien Breteaux。“Hepp方法中Wick可观测量量子演化的高阶项”。Cubo 14.2 (2012)，第91–109页。网址：https://www.scielo.cl/pdf/cubo/v14n2/art06.pdf。[12] Monique Combescure与Didier Robert。《相干态及其在数学物理中的应用》。第2版。理论与数学物理。Springer，2021。[13] Michele Correggi、Marco Falconi与Marco Olivieri。“准经典动力学”。欧洲数学会杂志 (JEMS) 25.2 (2023)，第731–783页。网址：https://doi.org/10.4171/jems/1197。

[14] Jan Dereziński 和 Christian Gérard。《量子场论中的渐近完备性：有质量的 Pauli-Fierz哈密顿量》。数学物理评论 11（1999），第 383–450 页。doi：doi.org/10.1142/S0129055X99000155。[15] Jan Dereziński 和 Christian Gérard。《空间截断的 P(ϕ)$_2$ 哈密顿量的谱与散射理论》。数学物理通讯 213（2000），第 39–125 页。[16] Mouez Dimassi 和 Johannes Sjöstrand。《半经典极限中的谱渐近》。伦敦数学会。第 268 卷。数学讲义丛书。1999。[17] Matthew Donald。《P(ϕ)$_2$ 量子场论的经典场极限》。数学物理通讯 79.2（1981），第 153–165 页。[18] Shahnaz Farhat。《与标量场相互作用的带电粒子的量子—经典运动》。数学物理杂志 66.4（2025）。[19] Jean Ginibre 和 Giorgio Velo。《非相对论多玻色子系统散射理论的经典场极限：I》。数学物理通讯 66（1979），第 37–76 页。[20] Roy J. Glauber。《辐射场的相干态与非相干态》。物理评论 131.6（1963），第 2766 页。[21] James Glimm 和 Arthur Jaffe。《玻色子量子场论模型》。当代物理数学（1972）。[22] James Glimm 和 Arthur J affe。《量子场论与统计力学：论文集》。第 1 卷。论文集。Springer Science & Business Media，1985。[23] George A. Hagedorn 和 Alain Joye。《指数精确的半经典动力学：传播、局域化、埃伦费斯特时间、散射及更一般的态》。亨利·庞加莱年刊：理论与数学物理杂志 1.5（2000），第 837–883 页。[24] Klaus Hepp。《量子力学关联函数的经典极限》。数学物理通讯 35.4（1974），第 265–277 页。[25] Raphael Høegh-Krohn。《一大类截断相互作用下的玻色场》。数学物理通讯 12（1969），第 216–225 页。url：http : / / projecteuclid.org/euclid.cmp/1103841389。[26] Raphael Høegh-Krohn 和 Barry Simon。《超压缩半群与二维自耦合玻色场》。泛函分析杂志 9.2（1972），第 121–180 页。url：https : / / www . sciencedirect . com / science / article / pii / 0022123672900080。[27] Th. Lamprou、J. Rivera-Dean、P. Stammer、M. Lewenstein 和 P. Tzallas。《使用强光相干态叠加的非线性光学》。物理评论快报 134.1（2025）。

[28] Nikolai Leopold、David Mitrouskas、Simone Rademacher、Benjamin Schlein 和 Robert Seiringer。《强耦合极化子动力学的朗道–佩卡尔方程与量子涨落》。纯粹与应用分析 3.4（2021），第 653–676 页。url：https://doi.org/10.2140/paa.2021.3.653。[29] Michael C. Reed。《抽象非线性波动方程》。第 507 卷。数学讲义。施普林格柏林·海德堡，1976。[30] Michael C. Reed 和 Barry Simon。《现代数学物理方法。傅里叶分析与自伴性》。第 2 卷。Elsevier，1975。[31] Didier Robert。《量子力学中相干态的传播及其应用》。偏微分方程与应用 15（2007），第 181–252 页。[32] Igor Rodnianski 和 Benjamin Schlein。《量子涨落与趋向平均场动力学的收敛速率》。数学物理通讯 291.1（2009），第 31–61 页。[33] 埃尔温·薛定谔。《作为本征值问题的量子化》。物理学年鉴 384（1926），第 361–376 页。[34] Irving Segal。《非线性局域量子过程：I》。数学年刊 92.3（1970），第 462–481 页。[35] Barry Simon。《凸性：分析视角》。第 187 卷。剑桥数学论丛。剑桥大学出版社，2011。[36] Barry Simon。《$P(\phi)_2$ 欧几里得（量子）场论》。普林斯顿物理学丛书。普林斯顿大学出版社，1974。[37] Maciej Zworski。《半经典分析》。美国数学学会。第 138 卷。数学研究生教程。2012。isbn：978-0-8218-8320-4。