arXiv:2603.06040v1 [math.AG] 6 Mar 2026

经典与不规则霍奇数

YICHEN QIN 和 DINGXIN ZHANG

摘要。设 U 是一个带有正则函数 f 的光滑拟射影复簇。扭曲德拉姆上同调群 $\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(U,\ f)$ 带有递减的不规则霍奇滤过，其分次部分的维数称为不规则霍奇数。在本文中，我们证明了不规则霍奇数可以用经典霍奇数显式刻画，这与 Katzarkov、Kontsevich 和 Pantev 为朗道–金兹堡模型构造的霍奇理论数密切相关。作为直接应用，我们证明非退化函数的不规则霍奇数与所选取的非退化函数无关，并给出幺幂非退化函数的不规则霍奇数的具体公式。

1. 引言

设 U 是一个在复数 $\mathbb{C}$ 上纯维数为 n 的光滑拟射影簇，并设 $f\colon U\to\mathbb{A}^1$ 是一个正则函数。我们可以构造扭曲德拉姆复形

$$\Omega^0_{U/\mathbb{C}}\xrightarrow{\mathrm{d}+\mathrm{d}f}\Omega^1_{U/\mathbb{C}}\xrightarrow{\mathrm{d}+\mathrm{d}f}\cdots\xrightarrow{\mathrm{d}+\mathrm{d}f}\Omega^n_{U/\mathbb{C}},$$

其超上同调称为扭曲德拉姆上同调，记为

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(U,f)\coloneqq\mathbb{H}^*(U;(\Omega^\bullet_{U/\mathbb{C}},\mathrm{d}+\mathrm{d}f)).$$

此外还有一个紧支变体。特别地，当 f 为常值函数时，我们便恢复 U通常的代数德拉姆上同调。

受有限域上的指数和以及对 ℓ-进上同调之权理论的类比所启发，Deligne设想 [Del07] 应当存在一种不规则霍奇理论，适用于这些扭曲德拉姆上同调。由于联络 $(\mathscr{O}_U,\ \mathrm{d}+\mathrm{d}f)$ 在无穷远点处的不规则奇点，扭曲德拉姆上同调$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(U,\ f)$ 无法直接通过经典霍奇理论或Saito的混合霍奇模来研究。

Deligne的设想在Esnault、Kontsevich、Sabbah、Saito与Yu的一系列工作中得以实现，参见 [ESY17、Sab18a] 等。由此，现在可以赋予$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(U,\ f)$ 一个递减的不规则霍奇滤过 $F^\bullet_{\mathrm{irr}}$，其以有理数 $\alpha\in\mathbb{Q}$为指标，从而得到一组数值不变量

$$h^\gamma_{\mathrm{irr}}(U,f,i)=\dim\mathrm{gr}^\gamma_{F_{\mathrm{irr}}}\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(U,f)\quad(\gamma\in\mathbb{Q})$$

称为不规则霍奇数。

1.1. 主要结果。 正如经典霍奇数是代数簇的基本代数不变量，不规则霍奇数也应被视为对偶 $(U,\ f)$ 的自然代数不变量。粗略地说，这些数

可以看作数值不变量，用以刻画紧化中“无穷远纤维” $g^{-1}(\infty)$ 的奇点结构

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

其中 j 是开浸入， X 是光滑射影簇。

本文旨在报告我们对上述想法的定量理解。我们将阐明如何把正则函数 f 的非正则霍奇数与经典霍奇理论中已有充分研究的某些极限霍奇数联系起来。为了更好地理解这一问题，我们首先回顾由 Deligne–Malgrange [DMR07], Dimca–Saito [DS93, 命题 28], 和 Sabbah [Sab96，定理 11]提出的扭曲德拉姆上同调的一种“拓扑”解释。

设 $f\colon U \to \mathbb{A}^1$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、纯 n 维光滑代数簇上的正则函数。那么除有限多个 $t \in \mathbb{C}$ 外，我们有一个 $\mathbb{C}$ 向量空间的同构：

$$\mathrm{H}^i(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}) \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(U, f)$$

对所有 $i \in \mathbb{Z}$，其中 $\mathrm{H}^*(U_{\mathrm{an}} f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})$ 表示复流形 U_{an} 相对于纤维 $f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}$ 的奇异上同调，系数取复数。

上面等式左边出现的相对上同调空间带有混合霍奇结构。当 t 沿着 ∞变化时，$\mathrm{H}^i(U$一个 $f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})$ 上存在准幺幂单值作用 T，并且可分解为广义特征空间

$$\mathrm{H}^i(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}) = \bigoplus_{\lambda} \mathrm{H}^i(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})_\lambda,$$

其中 λ 遍历 T的特征值。在这种情形下，一个自然的霍奇理论构造是相应的极限混合霍奇结构

$$(\mathrm{H}^i(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}), F^\bullet_{\lim}, W^{\lim}_\bullet),$$

它与上述特征子空间分解相容。

我们的主要结果确立了极限霍奇数与不规则霍奇数之间的一个等式。

定理 1.1.1 (4.1.6)。 采用上述记号，对于任意 α 属于 $[0,1)$ 以及 $p \in \mathbb{Z}$，有

$$h^{p+\alpha}_{\mathrm{irr}}(U, f, i) = \dim \mathrm{gr}^p_{F_{\lim}} \mathrm{H}^i(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})_\lambda,$$

其中 $\lambda = \exp(-2\pi \mathrm{i}\alpha)$。

利用定理1.1.1，我们将给出一个显式公式（命题6.1.2 ），用于计算一类具有幺幂单值的正则函数的不规则霍奇数，并以显式的邻近循环计算为依据。

1.2. **朗道–金兹堡模型的霍奇数。** 在镜像对称中，法诺簇的镜像被期望是 朗道–金兹堡模型。粗略地说，它们是由以下对象组成的对偶对（U， f）：非适当簇 U以及其上的正则函数 f，定义在 U 上，且 f 的极点除子是既约的。为了在法诺簇及其镜像的霍奇菱形上建立类似的关系，Katzarkov、Kontsevich 和 Pantev 在 [KKP17 中，§3] 提出了一些数值，作为候选

朗道–金兹堡模型的霍奇数，即 $h^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f)$， $f^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f)$，以及$i^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f)$，并猜想它们相同 [KKP17，猜想 3。6]。

注 1.2.1. Katzarkov、Kontsevich 和 Pantev 还在 [KKP17，猜想 3.7] 中猜想，法诺簇与其朗道–金兹堡模型的霍奇菱形之间存在如下数值关系：

$$f^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f) = h^{p,\dim X-q}(X),$$

这一关系已在许多情形中得到验证，例如德尔佩佐曲面、法诺三维簇、环面完全交和极小旗簇，参见 [LP18，Har21，CP25，HL24，QSS24]。

当 f 在 ∞ 周围具有幺幂单值时，除非 $\alpha \in \mathbb{Z}$，我们有 $h^{\alpha}_{\mathrm{irr}}(U, f, i) = 0$；也就是说，这种情形下不存在分数不规则霍奇数。得益于 Esnault、Sabbah 和 Yu 在 [ESY17], 中的工作，数值 $f^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f)$ 等于不规则霍奇数 $h^{p}{}_{\mathrm{irr}}(U, f, p+q)$。另一方面，数值 $i^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f)$ 在猜想中的表述应有误，这可通过考察射影空间的镜像这一情形看出。至于其余的朗道–金兹堡霍奇数，

$$h^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f) := \dim \mathrm{gr}^{W^{\lim}}_{2p} \mathrm{H}^{p+q}(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}),$$

先前关于 [Sha18、Sab18b、BGRSM23] 的研究表明

$$h^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f) = f^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f)$$

对于方便的非退化洛朗多项式等情形。此外，Shamoto 证明，当 f 弱驯服时，以上等式成立当且仅当 $\mathrm{H}^{p+q}(U_{\mathrm{an}} f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})$ 上的极限霍奇结构是霍奇–泰特型。

我们的定理定理 1.1.1 给出了Shamoto定理在一般情形下的证明，并给出了幺幂情形下应成立的精确等式。

推论 1.2.2 (4.2.5)。 数值 $h^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f)$ 与 $f^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f)$ 相等，当且仅当$\mathrm{H}^{p+q}(U_{\mathrm{an}} f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})$ 上的极限霍奇结构是霍奇–泰特型。

例 1.2.3. 令 $U = \mathbb{P}^2 - Z(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2)$ 和

$$f = \frac{x_0x_1x_2}{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2}.$$

当 $i = 1, 3$ 时，上同调群 $\mathrm{H}^i(U_{\mathrm{an}} f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})$ 是二维的，相应的极限霍奇结构并非霍奇–泰特型。然而，扭曲德拉姆上同调 $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(U, f)$ 除非 $i = 2$，否则均为 0；$\mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(U, f)$ 的相应非正则霍奇数将在例 6.2.2中计算。

此外，利用命题 6.1.2中的公式，可以找到许多“最大退化”情形的例子，在这些情形下，Katzarkov–Kontsevich–Pantev猜想成立。

1.3. **非正则霍奇数的变形不变性**。 本文的另一个结果是非退化函数的非正则霍奇数具有变形不变性。在经典霍奇理论中，光滑射影簇的霍奇数在变形下保持不变。

在不规则情形中，与几何条件“光滑射影”部分类似的条件是，函数 f 按照 Katz [Kat80、§ 4] 和 Mochizuki [Moc15，定义 2 中的定义，是“非退化”的。6], 见定义 5.1.2。这里我们考虑三元组

$(X,\ D,\ f)$，其中 X 是光滑射影簇，D 是 X 上的简单正规交叉除子，而 $f\colon X - D \to \mathbb{A}^1$ 是满足 Katz 所施加的某个条件的正则函数。我们将证明，非退化函数族中的不规则霍奇数保持不变。

定理 1.3.1。设 X 是一个光滑完备代数簇，$D \subset X$ 是一个简单正规交叉除子。记 U 为 X 中 D 的支集的补集。对于 f 和 g 这两个定义在 (X, D) 上的非退化函数，(U, f) 与 (U, g) 的不规则霍奇数相同。

1.4. **文章结构**。本文结构如下。第 2 节汇集了 Saito的混合霍奇模和指数混合霍奇结构的背景知识。特别是，带有相应不规则霍奇滤过的扭曲德拉姆上同调信息，可以整合为一个指数混合霍奇结构。

第 3节中，我们为指数混合霍奇结构建立了 Sabbah–Yu驻相公式的一个修正版。该公式对于定理 1.3.1至关重要，因为它将不规则霍奇数与无穷远点处的极限混合霍奇结构联系起来。

基于上述内容，在第 4 节中，我们证明定理 1.1.1，随后回顾 Katzarkov–Kontsevich–Pantev猜想4.2.4，并讨论 Landau–Ginzburg 霍奇数与不规则霍奇数之间的关系。

第 5 节遵循 Katz 和 Mochizuki 的思路，引入简单正规交叉对上的非退化函数。它们是不规则情形下光滑射影簇的类比。我们在第 5.1 节将其与紧化温和 Landau–Ginzburg模型及其他非退化条件进行比较。随后，我们在第 5.2 节证明非退化函数的扭曲德拉姆上同调的基本纯性和消失结论。最后，我们在第1.3.1 节 5.3 中利用某种版本的幂零轨道定理证明定理。

最后，我们在第6节给出强非退化函数的非正则霍奇数显式公式，并提供一些例子。

2. 预备知识

本节回顾 Saito 的混合霍奇模和指数混合霍奇结构的一些背景知识。

2.1. **混合霍奇模**。我们回顾本文所用到的 Saito 混合霍奇模的基本事实；详见 [Sai90]。对于任意复代数簇 X，都存在一个代数混合霍奇模块的阿贝尔范畴 MHM(X)。粗略地说，MHM(X)中的一个对象由以下数据构成：一个底层有理数域上的反常层、一个正则全纯滤过 $\mathscr{D}_X$-模 $(\mathcal{M}\ F^\bullet)$ 以及一个权滤过；这些部分满足某些约束，以确保该构造与经典霍奇理论相容。特别地，范畴 MHM(X)带有忠实正合函子

$$\mathrm{rat}\colon \mathrm{MHM}(X) \to \mathrm{Perv}(X;\mathbb{Q})$$

将一个混合霍奇模映射为其底层有理数域上的反常层。

当 X 是一个点时，混合霍奇模范畴与极化混合霍奇结构范畴相同。在一般底空间 X 上，光滑

X 上的混合霍奇模是可容许混合霍奇结构变分。此外，由于 X 上的每个混合霍奇模在 X 的某个不可约分支的稠密开子集 U 上都是光滑的，因此，它在 U 上的限制是 U 上的可容许混合霍奇结构变分。

混合霍奇模也具有六函子形式体系。对于任意代数态射 f，都有导出函子

$$f_*,\ f_!,\ f^*,\ f^!,\ \otimes,\ \mathbb{D},$$

这些函子定义在混合霍奇模的有界导出范畴之间。这些运算提升了 perverse 层上的运算，即这些函子与有理实现函子交换

$$\mathrm{rat}\colon \mathrm{D}^b\mathrm{MHM}(X) \to \mathrm{D}^b_c(X;\mathbb{Q}).$$

本文中，我们用 $\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_X$ 表示（移位的）常值霍奇模，其底层错层层为 $\mathbb{Q}_X[\dim\ X]$。因此， $\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_X$ 的上同调就是 X 的经典奇异上同调，并带有其典范混合霍奇结构：

$$\mathrm{H}^i(X,\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_X) = \mathrm{H}^{i+\dim X}(X,\mathbb{Q}).$$

对于正则函数 g，有邻近循环函子和消失循环函子

$$\psi_g,\phi_g\colon \mathrm{MHM}(X) \to \mathrm{MHM}(g^{-1}(0)).$$

它们通过 V 过滤构造于滤过的 $\mathscr{D}$-模一侧，并与有理实现函子 rat 交换。特别地，这些函子保留单值作用及其广义特征空间分解$\psi_g M = \psi_{g,\ 1}M \oplus \psi_{g,\ \neq 1}M$和 $\phi_g M = \phi_{g,\ 1}M \oplus \psi_{g,\ \neq 1}M$。

2.2. **Rees模**。 混合霍奇模 M 的底层滤过 $\mathscr{D}$-模（$\mathcal{M}\ F^\bullet$）可编码在其 Rees 模中

$$R_F M := \bigoplus_{p\geq 0} z^p F^p \mathcal{M} \tag{2.2.1}$$

作为滤过的 $\mathscr{D}_X[z]$-模，其中 z是一个形式变量。Rees 模 $R_F M$是一个相干的 $\mathscr{D}_X[z]$-模，而 $\mathcal{M}$ 上的滤过可通过取 $R_F M$的伴随分次部分来恢复。对于 Rees 模，也有相似的相干性、正则性、全纯性和严格可专化性概念。因此，我们可以像对 $\mathscr{D}$-模那样对 Rees 模进行类似的构造，更多详情见 [SS]。

2.3. **指数混合霍奇结构**。 指数混合霍奇结构是仿射直线上的无上同调混合霍奇模，由 Kontsevich 和 Soibelman 在 [KS11]中引入。我们根据 [FSY22，附录]，回顾指数混合霍奇结构的一些基本性质。具体而言，设 $\pi\colon \mathbb{A}^1 \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}$为结构态射。定义全子范畴

$$\mathrm{EMHS} \subset \mathrm{MHM}(\mathbb{A}^1)$$

由满足 $\pi_*\mathcal{M} = 0$ 的那些 $\mathcal{M}$ $\in$**MHM(**$\mathbb{A}^1$**)** 构成。存在一个正合幂等自函子

$$\Pi\colon \mathrm{MHM}(\mathbb{A}^1) \to \mathrm{MHM}(\mathbb{A}^1), \qquad \Pi(\mathcal{M}) := \mathrm{sum}_*\big(j_!\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{G}_m} \boxtimes \mathcal{M}\big), \tag{2.3.1}$$

其中 $j\colon\ \mathbb{G}_m, \to \mathbb{A}^1$是包含映射，而 sum$\colon\ \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$是加法。函子 Π 是到 EMHS 的正合投影函子：其本质像等于 EMHS，并且

$\Pi(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ 对 $\mathcal{N} \in$ 属于 EMHS。特别地， $\mathbb{A}^1$ 上的任意常值霍奇模都会被 Π 消去。

每个指数混合霍奇结构 M 都带有由 MHM($\mathbb{A}^1$) 中的权滤过诱导的权滤过，定义如下：

$$W_k^{\mathrm{EMHS}} M := \Pi(W_k^{\mathrm{MHM}} M),$$

其中， $W_\bullet^{\mathrm{MHM}}$是范畴 MHM($\mathbb{A}^1$) 中的权滤过。一般而言，权滤过 $W_\bullet^{\mathrm{EMHS}}$与 MHM($\mathbb{A}^1$) 中的权滤过不同。除非另有说明，本文中指数混合霍奇结构M 上的权滤过 $W_\bullet$ 始终指 $W_\bullet^{\mathrm{EMHS}}$。

德拉姆纤维函子是一个正合函子

$$\Xi_{\mathrm{dR}} \colon \mathrm{EMHS} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}, \quad \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^1, M \otimes \mathcal{E}^t)$$

其中 $\mathcal{E}^t$ 是指数 $\mathscr{D}_{\mathbb{A}^1}$-模（$\mathcal{O}$，$\mathrm{d} + \mathrm{d}t$）。另一种说法是，它将 M 映到 M的傅里叶变换在 $1 \in \mathbb{A}^1$ 处的纤维。

设 X 是一个维数为 n的代数簇。对于一个正则函数 $g\colon X \to \mathbb{A}^1$和一个整数 i，我们考虑以下指数混合霍奇结构

$$\mathrm{H}^i(X, g) := \Pi(\mathcal{H}^{i-n} g_* \mathbb{Q}_X^{\mathrm{H}}), \quad \mathrm{H}^i_c(X, g) := \Pi(\mathcal{H}^{i-n} g_! \mathbb{Q}_X^{\mathrm{H}}). \tag{2.3.2}$$

指数混合霍奇结构 $\mathrm{H}^i(X, g)$，$\mathrm{H}^i_c(X, g)$ 分别是权至少为 i 和权至多为 i 的混合结构，依据 [FSY22，A.19]。特别地，对于真函数 g，我们有 $\mathrm{H}^i(X, g) = \mathrm{H}^i_c(X, g)$ 是权 i 的纯结构。

2.4. **德拉姆纤维上的不规则霍奇滤过。** 在指数混合霍奇结构中对象的德拉姆纤维函子上，可以赋予一种不规则霍奇滤过$F^\bullet_{\mathrm{irr}}\Xi_{\mathrm{dR}} M$，它是利用德利涅滤过的一般化构造的 [Sab10，§6]；另见 [Sab18a，命题 2.61 和定义 3。2]。

令 $\mathbb{A}^1_v$ 为 $\mathbb{A}^1_t$ 的对偶仿射直线，其坐标为 v。对一个 $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-模 N的傅里叶–拉普拉斯变换 FL，记为 FL(N)，其底层集合与 N相同；将其视为一个 $\mathbb{C}[v]\langle\partial_v\rangle$-模，其中 v 和 ∂_v在 FL(N) 上的作用分别定义为 $-\partial_t$ 和 t。

对于指数混合霍奇结构 M，将其视为 $\mathbb{A}^1_t$ 上的混合霍奇模，我们用 $(M, F^\bullet M)$ 表示其底层的滤过 $\mathscr{D}$-模 M。根据 Kat90，命题 12.3，我们有

$$\mathrm{FL}(M) = \mathrm{FL} \circ \Pi(M) = j_+ j^+ \mathrm{FL}(M),$$

这意味着 $G := \mathrm{FL}(M)$ 是局部化的，即 $G = \mathbb{C}[v, v^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[t]} G$。

与之相关的布里斯科恩格 $G^0 = G^0_{(F)}$ 是一个自由的 $\mathbb{C}[u]$-模（$u = v^{-1}$），并带有 $u^2\partial_u$ 的作用。其中，形式上 G^0 定义为

$$G^0_{(F)} := \sum_{p \in \mathbb{Z}} u^p \ \mathrm{FL}\big(F^{-p} M\big),$$

（例如，详见 [SY15，附录]），而 $\{G^p{}_{(F)} = u^p G^0\}$ 在 G上定义了一个递减滤过。令 $V^* G$ 为关于函数 t的 V-滤过。德拉姆纤维 $\Xi_{\mathrm{dR}} M = G/(u-1)G = G^0/(u-1)G^0$上的不规则霍奇滤过由以下公式定义：

$$F^\gamma_{\mathrm{irr}} \Xi_{\mathrm{dR}} M = \big(V^\gamma \cap G^0\big) \,/\, \big(V^{>\gamma} \cap G^0\big) \cap (u-1) G^0. \tag{2.4.1}$$

对于来自几何的指数混合霍奇结构，$\mathrm{H}^i_?(X,g)$ 的德拉姆纤维与 $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},?}(X,g)$ 同构，适用于哪些情形？ $\in\{\varnothing,c\}$在这种情况下，Esnault、Sabbah 和 Yu 在 [ESY17，§1] 中证明，德拉姆纤维上的不规则霍奇滤过与扭曲德拉姆上同调 $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},?}(X,g)$ 上的 Kontsevich滤过和 Yu滤过 [Yu14]重合。

3. 驻相公式

对于仿射直线上在 ∞ 处具有非幺幂单值的混合霍奇模，Sabbah 与 Yu 证明了一个驻相公式 [SY19，（7）]，，该公式将其在无穷远点处的极限霍奇数与其傅里叶变换的纤维的不规则霍奇数联系起来。在本节中，我们将给出指数混合霍奇模的驻相公式的一个修正版本，而不作非幺幂性假设。

命题 3.0.1. 给定指数混合霍奇结构 M，对任意$\alpha\in[0,1)$ 以及 $p\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\dim \mathrm{gr}_{F_{\mathrm{irr}}}^{\alpha+p}\Xi_{\mathrm{dR}}(M)=\dim \mathrm{gr}_F^p\psi_{t^{-1},\lambda}M,$$

其中 $\lambda=\exp(-2\pi i\alpha)$。

该公式对于定理 1.1.1 与定理 1.3.1 的证明至关重要。

3.1. 驻相公式的证明。 设 M 是一个指数混合霍奇结构，即定义在 $\mathbb{A}^1_t$ 上的、具有消失上同调的混合霍奇模。为简化记号，我们将 M底层的滤过 $\mathscr{D}$模记为（M，$F^\bullet M$），它是一个滤过正则全纯 $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-模。设$\boldsymbol{M}$ 是 $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}$模$j_+M$，其中 $j:\mathbb{A}^1_t\to\mathbb{P}^1$ 是包含映射。于是 $M=\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathcal{M})=\Gamma(\mathbb{A}^1,\mathcal{M}|_{\mathbb{A}^1})$。

我们用 $V^\bullet\mathcal{M}$ 表示$\mathcal{M}$ 关于 t^{-1}的 V-滤过。对于 $\alpha\in\mathbb{R}$和 $\lambda=\exp(-2\pi\mathrm{i}\alpha)$，令 $\psi_{t^{-1},\lambda}\mathcal{M}=\mathrm{gr}_V^\alpha\mathcal{M}$。霍奇滤过 $F^\bullet M$自然延拓到 $V^\alpha\mathcal{M}$上。如此一来，$(\mathcal{M},F^\bullet\mathcal{M})$ 在$t^{-1}=0$处严格可特殊化。空间 $\psi_{t^{-1},\lambda}\mathcal{M}$ 带有由$F^\bullet\psi_{t^{-1},\lambda}\mathcal{M}=F^\bullet\mathrm{gr}_V^\alpha\mathcal{M}$给出的诱导滤过。

另一方面，令 G 为 M 的（局部化）傅里叶–拉普拉斯变换，并令 V^*G 为关于函数 v 的 G 的 V–滤过。类似地，我们记 $\psi_{v,\lambda}G=\mathrm{gr}_V^\alpha G$，而滤过 $G^\bullet_{(F)}$ 在其上诱导出滤过 $G^\bullet_{(F)}\psi_{v,\lambda}G$。

引理 3.1.1。 沿用上述记号，我们有

$$\dim \mathrm{gr}^p_{G_{(F)}}\psi_{v,\lambda}G=\dim \mathrm{gr}_F^p\psi_{t',\lambda}\mathcal{M}$$

对于任意 p 以及任意满足 $\alpha\in[0,1)$ 的 $\lambda=\exp(-2\pi i\alpha)$。

证明。 对于纯霍奇模 M'，令 $\mathcal{M}'=j_*M'$其中 $j:\mathbb{A}^1,\to\mathbb{P}^1$。对于相应的 Rees模 $R_F\mathcal{M}'$，我们将 Sab06 的“逆平稳相位公式”[Sab06，命题 4.1(iv)] 与 [Sab10，引理 5.20(*)$_\infty$] 结合起来，得到

$$\begin{cases}R_{G_{(F)}}\psi_{v,\lambda}\mathrm{FL}(M')=R_F\psi_{t^{-1},\lambda}\mathcal{M}' & \lambda\neq1;\\ R_{G_{(F)}}\phi_{v,\lambda}\mathrm{FL}(M')=R_F\psi_{t^{-1},\lambda}\mathcal{M}' & \lambda=1.\end{cases}$$

我们取上述恒等式的伴随分次部分，并推导出

$$\begin{cases}\dim \mathrm{gr}^p_{G_{(F)}}\psi_{v,\lambda}\mathrm{FL}(M')=\dim \mathrm{gr}_F^p\psi_{t^{-1},\lambda}\mathcal{M}' & \lambda\neq1;\\ \dim \mathrm{gr}^p_{G_{(F)}}\phi_{v,\lambda}\mathrm{FL}(M')=\dim \mathrm{gr}_F^p\psi_{t^{-1},\lambda}\mathcal{M}' & \lambda=1.\end{cases}\tag{3.1.2}$$

对于我们的指数混合霍奇结构 M，它是$\mathbb{A}^1$ 上的一个混合霍奇模，其权滤过为 $W_\bullet^{\mathrm{MHM}}$。对于每个 k，我们都有一个正合列

$$0 \to W_{k-1}^{\mathrm{MHM}} M \to W_k^{\mathrm{MHM}} M \to \mathrm{gr}_k^{W^{\mathrm{MHM}}} M \to 0.$$

对 k 进行归纳，并将（3.1.2）应用于 $\mathbf{gr}_k^W M$，可得

$$\begin{cases} \dim \mathrm{gr}^p_{G_{(F)}} \psi_{v,\lambda} G = \dim \mathrm{gr}^p_F \psi_{t^{-1},\lambda} \mathcal{M} & \lambda \neq 1; \\ \dim \mathrm{gr}^p_{G_{(F)}} \phi_{v,\lambda} G = \dim \mathrm{gr}^p_F \psi_{t^{-1},\lambda} \mathcal{M} & \lambda = 1. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

先验地，当 $\lambda \neq 1$ 时，上述公式给出的结果恰好是我们所需的。当$\lambda = 1$时，由于 v 在 G 上可逆，因此有 $\psi_{v,\ 1} G = \phi_{v,\ 1} G$ 以及 $R_{G_{(F)}} \psi_{v,\ 1} G = R_{G_{(F)}} \phi_{v,\ 1} G$。因此，我们有

$$\dim \mathrm{gr}^p_{G_{(F)}} \psi_{v,1} G = \dim \mathrm{gr}^p_{G_{(F)}} \phi_{v,1} G = \dim \mathrm{gr}^p_F \psi_{t^{-1},1} \mathcal{M}$$

对任意 p。 □

现在我们证明命题3.0.1。

证明。我们沿用 [SY19，§5]中的论证。根据不规则霍奇数公式（2.4.1）以及 [Sab10, (1.3)]（将其中的 z 替换为 $u = v^{-1}$，并取$z_0 = 1$ 和 $\mathbf{0}$），我们得出

$$\dim \mathrm{gr}^\gamma_{F_{\mathrm{irr}}} \Xi_{\mathrm{dR}}(M) = \dim \left(\left(V^\gamma \cap G^0\right) / \left[\left(V^{>\gamma} \cap G^0\right) + \left(V^\gamma \cap G^1\right) \right] \right).$$

令 $\alpha = \{\gamma\} := \gamma - [\gamma] \in [0,1)$，使得 $v^{-[\gamma]} \left(V^\gamma \cap G^0\right) = V^\alpha \cap G^{[\gamma]}$。那么，对于 $p \in \mathbb{Z}$ 和 $\alpha \in [0,1)$，我们得到

$$\dim \mathrm{gr}^{\alpha+p}_{F_{\mathrm{irr}}} \Xi_{\mathrm{dR}}(M) = \dim \left(\left(V^\alpha \cap G^p\right) / \left[\left(V^{>\alpha} \cap G^p\right) + \left(V^\alpha \cap G^{1+p}\right) \right] \right) = \dim \mathrm{gr}^p_{G_{(F)}} \psi_{v,\lambda} G. \tag{3.1.4}$$

结合引理3.1.1，我们得到：

$$\dim \mathrm{gr}^{\alpha+p}_{F_{\mathrm{irr}}} \Xi_{\mathrm{dR}}(M) = \dim \mathrm{gr}^p_F \psi_{t^{-1},\lambda} M \tag{3.1.5}$$

对于 $p \in \mathbb{Z}$ 和 $\alpha \in [0,1)$。 □

将命题 3.0.1 应用于在 (2.3.2) 中定义的指数混合霍奇结构 $\mathrm{H}^i(U, f)$，我们推得以下推论。

推论 3.1.6。设 f 是光滑拟射影簇 U 上的正则函数 f。对于任意整数 i和 p，以及任意 $\alpha \in [0,1)$，我们有

$$\dim \mathrm{gr}^{\alpha+p}_{F_{\mathrm{irr}}} \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(U, f) = \dim \mathrm{gr}^p_F \psi_{t^{-1},\lambda} \Pi\, \mathrm{R}^i f_* \mathbb{Q}^{\mathrm{H}},$$

其中 $\lambda = \exp(-2\pi i \alpha)$。

4. 经典、不规则与 Landau–Ginzburg 霍奇数

4.1. 经典与不规则霍奇数。

我们首先利用推论1.1.1 和3.1.6给出定理的证明。

命题 4.1.1。存在一个好三角

$$f_* \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U \to \Pi\, f_* \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U \to \mathrm{R}\Gamma(U, \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{A}^1} \xrightarrow{+1}$$

在 $\mathrm{D}^b(\mathrm{MHM}(\mathbb{A}^1))$中，其中 Π 是定义于 (2.3.1)的函子。

证明。 考虑以下图表

$$\begin{array}{ccccc} U\times\mathbb{G}_m & \xhookrightarrow{j} & U\times\mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & U \\ \downarrow{\scriptstyle f\times\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f\times\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{A}^1\times\mathbb{G}_m & \xhookrightarrow{j} & \mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & \mathbb{A}^1 \end{array}$$

其中 pr_1 是到第一因子的投影。根据 Π的定义，我们有

$$\begin{aligned} \Pi f_*\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}} &= \mathrm{sum}_*(f_*\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}}\boxtimes j_!\mathbb{Q}_{\mathbb{G}_m}^{\mathrm{H}}) \\ &= \mathrm{sum}_*(\mathrm{pr}_1^*f_*\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}}\otimes j_!\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1\times\mathbb{G}_m}^{\mathrm{H}}) \\ &= \mathrm{sum}_*((f\times\mathrm{id})_*\mathbb{Q}_{U\times\mathbb{G}_m}^{\mathrm{H}}\otimes j_!\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1\times\mathbb{G}_m}^{\mathrm{H}}) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

其中最后一个同构中应用了光滑基变换公式。

对于三元组 $(\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1\times\mathbb{G}_m, \mathbb{A}^1\times 0)$，我们有好三角

$$j_!\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1\times\mathbb{G}_m}^{\mathrm{H}}\to\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}}\to i_*i^*\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}}\xrightarrow{+1}. \tag{4.1.3}$$

注意，

$$\begin{aligned} &\mathrm{sum}_*((f\times\mathrm{id})_*\mathbb{Q}_{U\times\mathbb{G}_m}^{\mathrm{H}}\otimes\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}}) \\ =&\mathrm{sum}_*(f\times\mathrm{id})_*\mathbb{Q}_{U\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}} \\ =&\mathrm{pr}_{2*}\iota_*\mathbb{Q}_{U\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}}\simeq\mathrm{pr}_{2*}\mathbb{Q}_{U\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

其中 $\iota\colon U\times\mathbb{A}^1\to U\times\mathbb{A}^1$是由 $(x,y)\mapsto(x,y+f(x))$ 定义的同构，而 pr_2 是到第二因子的投影，如下方交换图所示：

$$\begin{array}{ccccc} U\times\mathbb{A}^1_y & \xrightarrow{f\times\mathrm{id}} & \mathbb{A}^1_x\times\mathbb{A}^1_y & \xrightarrow{\mathrm{sum}} & \mathbb{A}^1 \\ \wr\downarrow{\scriptstyle\iota} & & \wr\downarrow{\scriptstyle(x,y+x)} & & \| \\ U\times\mathbb{A}^1 & \xrightarrow{f\times\mathrm{id}} & \mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & \mathbb{A}^1. \end{array}$$

$$U\times\mathbb{A}^1\xrightarrow{\mathrm{pr}_2}\mathbb{A}^1$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned} &\mathrm{sum}_*((f\times\mathrm{id})_*\mathbb{Q}_{U\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}}\otimes i_*i^*\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}}) \\ =&(\mathrm{sum}_*i_*)(i^*(f\times\mathrm{id})_*\mathbb{Q}_{U\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}}\otimes i^*\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}}) \\ =&\mathrm{id}_*i^*((f\times\mathrm{id})_*\mathbb{Q}_{U\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}}\otimes\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1}^{\mathrm{H}}) \\ =&i^*((f\times\mathrm{id})_*\mathrm{pr}_1^*\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}}[1]) \\ =&(i^*\mathrm{pr}_1^*)f_*\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}}[1]=f_*\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}}[1], \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

其中，在第一个同构中我们使用了投影公式，在第四个同构中使用了光滑基变换公式，并用 i 表示下文的包含态射

$$\begin{array}{ccccc} U=U\times 0 & \xrightarrow{i} & U\times\mathbb{A}^1 & & \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f\times\mathrm{id}} & & \\ \mathbb{A}^1=\mathbb{A}^1\times 0 & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1 & & \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{sum}} & & \\ 0 & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}^1. & & \end{array}$$

结合（4.1.2）、（4.1.4）、（4.1.5），并对好三角（$*$（（$f\times\mathrm{id}$）$*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{U\times\mathbb{A}^1}\otimes -$）应用求和4.1.3），我们得到

$$\Pi f_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U \to \mathrm{pr}_{2*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{U\times\mathbb{A}^1} \to f_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U[1] \xrightarrow{+1}.$$

为完成证明，只需注意到

$$\mathrm{pr}_{2*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{U\times\mathbb{A}^1} \simeq \mathrm{R}\Gamma(U,\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{A}^1}$$

并平移该三角。 □

定理 4.1.6. 对于任意 $\alpha\in[0,1)$ 和 $p\in\mathbb{Z}$，我们有

$$h^{p+\alpha}_{\mathrm{irr}}(U,f,i)=\dim \mathrm{gr}^p_{F_{\lim}}\mathrm{H}^i(U^{\mathrm{an}},f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})_\lambda,$$

其中 $\lambda=\exp(-2\pi i\alpha)$。

证明。 取邻近循环函子 $\psi_{1/t}$ 到命题 4.1.1中的好三角，我们得到一个好三角

$$\psi_{1/t}f_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U \to \psi_{1/t}\Pi f_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U \to \mathrm{R}\Gamma(U,\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U)\xrightarrow{+1}. \tag{4.1.7}$$

注意到 $\psi_{1/t,\lambda}\mathcal{H}^{i-n}f_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U$ 的支集位于 ∞，并且与 $\mathrm{H}^{i-1}(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})_\lambda$在一般 $t\in\mathbb{C}$ 下所带的极限霍奇结构相同。因此，根据相对上同调的定义，由式（4.1.7）可得

$$\mathrm{gr}^p_F\psi_{1/t,\lambda}\Pi\,\mathrm{R}^{i-n}f_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U=\mathrm{gr}^p_{F_{\lim}}\mathrm{H}^i(U^{\mathrm{an}},f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})_\lambda. \tag{4.1.8}$$

另一方面，由推论 3.1.6，我们有

$$\dim \mathrm{gr}^{p+\alpha}_{F_{\mathrm{irr}}}\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(U,f)=\dim \mathrm{gr}^p_F\psi_{t^{-1},\lambda}\Pi\,\mathrm{R}^{i-n}f_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}$$

其中 $\lambda=\exp(-2\pi i\alpha)$，证明完毕。 □

4.2. **Katzarkov–Kontsevich–Pantev 猜想。** 在 [KKP17], Katzarkov、Kontsevich 和 Pantev 为朗道–金兹堡模型引入了若干数值不变量 $f^{p,q}{}_{\mathrm{LG}}$ 和 $h^{p,q}{}_{\mathrm{LG}}$。我们回顾如下定义。

我们先回顾数 $f^{p,q}{}_{\mathrm{LG}}$ 的定义。从光滑拟射影簇 U 上的正则函数f 出发，我们总能找到一个良好紧化(X,g)，它由光滑射影簇 X 构成，其中 $D=X-U$ 为简单正规交叉，并且有一个态射 $g\colon X\to\mathbb{P}^1$，它延拓了 f。

设 $P=\sum_{i=1}^r e_iD_i$ 为 f 的极点除子，并对有理数 $\alpha\in[0,1)$，我们用 $\lfloor\alpha P\rfloor$ 表示除子 $\sum_{i=1}^r\lfloor\alpha e_i\rfloor D_i$。*Kontsevich* 复形$\Omega^\bullet_X(\log\ D,f)(\lfloor\alpha P\rfloor)$定义为

$$\Omega^\bullet_X(\log D,f)(\lfloor\alpha P\rfloor)=\{\omega\in\Omega^\bullet_X(\log D)(\lfloor\mu P\rfloor)\mid df\wedge\omega\in\Omega^\bullet_X(\log D)(\lfloor(\alpha+1)P\rfloor)\}.$$

定义 4.2.1. 对每个 $p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $\alpha\in[0,1)$，我们定义

$$f^{p,q-\alpha}_{\mathrm{LG}}(U,f):=\dim\mathbb{H}^p(X,\Omega^q_X(\log D,f)(\lfloor\alpha P\rfloor)).$$

注记 4.2.2. 在 [ESY17的推论 1.4.5], 中，Landau–Ginzburg 霍奇数$f^{p,q-\alpha}{}_{\mathrm{LG}}(U,f)$ 被认定为非正则霍奇数 $h^{q-\alpha}{}_{\mathrm{irr}}(U,f,p+q)$，后者与所选的良好紧化 (X,g) of (U,f) 无关。

现在我们回顾数 $h^{p,q}{}_{\mathrm{LG}}$ 的定义。令 $t \in \mathbb{A}^1$ 为f 无穷远点附近的一个正则值。考虑相对奇异上同调上的单值变换

$$T\colon \mathrm{H}^i(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}),$$

这对应于将光滑纤维 $f^{-1}(t)$ 绕无穷远点旋转一周。单值算子 N 在 $\mathrm{H}^i(U_{\mathrm{an}} f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})$ 上诱导出单值权滤过 $W(N, \bullet)$。

定义 4.2.3。 Landau–Ginzburg 霍奇数 $h^{p,q}{}_{\mathrm{LG}}(U, f)$ 定义为

$$h^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{gr}_{2p}^{W(N,p+q)} \mathrm{H}^{p+q}(U, U_t; \mathbb{C}).$$

Katzarkov、Kontsevich 和 Pantev 预期这两类 Landau–Ginzburg 霍奇数相同。

猜想 4.2.4 ([KKP17，猜想 3。6])。 设 (U, f) 是一个 *Landau–Ginzburg* 模型，其中 U 是一个光滑拟射影簇，且 f 是一个正则函数 $f\colon U \to \mathbb{A}^1$，具有约化极点除子。则对所有 $p, q \in \mathbb{N}$，均有

$$f^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f) = h^{p,q}_{\mathrm{LG}}(U, f).$$

命题 4.2.5。 上述猜想成立，当且仅当 $\mathrm{H}^\bullet(U_{\mathrm{an}} f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})$ 上的极限霍奇结构为霍奇–泰特型。

证明。 注意，当 f 具有约化极点除子时，特征子空间

$$\mathrm{H}^{p+q}(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})_\lambda = 0$$

除非 $\lambda = 1$。由注 4.2.2，数 $f^{p,q}{}_{\mathrm{LG}}(U, f)$ 与非正则霍奇数 $h^q{}_{\mathrm{irr}}(U, f, p+q)$ 相对应。另一方面，由定理 4.1.6，数 $h^q{}_{\mathrm{irr}}(U, f, p+q)$ 与极限霍奇数相对应

$$\dim \mathrm{gr}^q_{F_{\lim}} \mathrm{H}^{p+q}(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}) = \dim \mathrm{gr}^q_{F_{\lim}} \mathrm{H}^{p+q}(U^{\mathrm{an}}, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})_1,$$

这与 $h^{p,q}{}_{\mathrm{LG}}(U, f) = h^{q,p}{}_{\mathrm{LG}}(U, f)$ 一致，当且仅当 $\mathrm{H}^{p+q}(U_{\mathrm{an}} f^{-1}(t)^{\mathrm{an}})$ 上的极限霍奇结构为霍奇–泰特型。□

5. 非退化函数

5.1. 非退化条件。 所谓的简单正规交叉对，是指由一个光滑射影簇 X 和其中的一个简单正规交叉除子 D 组成的对 (X, D)。本节将介绍 Katz 和 Mochizuki 定义的简单正规交叉对上的非退化函数，并证明其相关指数混合霍奇结构的基本纯性和消失结论。

在解析情形中， [Moc15] 有如下非退化性的概念：

定义 5.1.1. 设 X 是一个复流形，其上有一个简单正规交叉超曲面 D。设 f 是 (X, D) 上的亚纯函数。若对于 $|(f)_\infty|$ 的一个小邻域 N，满足以下条件，则称函数 f 沿 D 非退化：

- $(f)_0 \cap N$ 是既约且非奇异的，并且
- $N \cap (|(f)_0| \cup D)$ 是正规交叉的。

在代数情形中，我们将采用 Katz 给出的以下非退化函数定义 [Kat80，§4]。

定义 5.1.2. 光滑拟射影簇 U 上的正则函数 f 称为 非退化，如果

(1) 存在一个光滑射影簇 X 和一个简单正规交叉除子 $D = \sum_{i=1}^{r} e_i D_i$，以及某些正整数 e_i，使得 $U = X - D$；(2) 存在一个整体截面 $s_0 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ 和整体截面 $\sigma_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D_i))$，使得 $D = Z(\sigma_1^{e_1} \dots \sigma_r^{e_r})$，并且 f 与函数一致

$$\frac{s_0}{s_\infty} \colon X - D \to \mathbb{A}^1,$$

其中 $s_\infty = \sigma_1^{e_1} \dots \sigma_r^{e_r}$。

(3) $Z(s_0)$ 光滑且与 D 横截。

此外，如果对应于 D_i 的线丛 $\mathscr{L}_i$ 均为丰富，则称非退化函数为强非退化。

如果我们取定义 5.1.2意义下的非退化函数，那么其解析化在定义 5.1.1意义下也是非退化的。从现在起，我们将简称 f 为简单正规交叉对（X， D）上的非退化函数。

例 5.1.3。在 [KKP17], 中，作者引入了紧化朗道-金兹堡模型（（Z， f） D_Z的概念，它由一个光滑射影簇 Z、一个平坦态射 f： $Z \to \mathbb{P}^1$以及一个既约简单正规交叉除子组成

$$D_Z = D^h \cup D^v,$$

其中， D^h 是水平除子， D^v 是 f的极点除子，并满足额外条件。

如果水平除子 D^h 为空，那么 D_Z 恰好是 f的极点除子，并且 f 的零点轨迹与极点除子 D_Z不相交。因此，紧化朗道-金兹堡模型 $((Z, f)$ D_Z在简单正规交叉对 (Z, D_Z) 上定义了定义 5.1.2 意义下的非退化函数。

与定义5.1.2中的非退化性条件相比，我们不要求除子是既约的。不过，我们施加条件，要求 D_Z 恰好是 f的极点除子，而不允许存在额外的水平分支 D^h；这是受命题 5.2.1中将要建立的纯性结果所启发的。

例 5.1.4. 给定代数环面 $(\mathbb{C}^*)^n$上的洛朗多项式 $f = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} c_\gamma x^\gamma \in \mathbb{C}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$，如果 0 是其牛顿多面体 Δ的内点，则称其为方便的 。如果对于其牛顿多面体Δ 的任意一个面 δ （包括 Δ 本身），方程组相对于牛顿多面体非退化 Δ，则称其为非退化：

$$f_\delta = \frac{\partial f_\delta}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f_\delta}{\partial x_n} = 0$$

在 $(\mathbb{C}^*)^n$ 中没有解，其中 $f_\delta = \sum_{\gamma \in \delta} c_\gamma x^\gamma$ 是 f 在面δ上的限制。

实际上，非退化洛朗多项式在定义 5.1.2 的意义下是非退化的。事实上，选取一个与牛顿多面体 Δ 的法扇的细分相关联的光滑真环簇 $X(f)$ 后，边界除子 $D^v \cup D^h = X - (\mathbb{C}^\times)^N$ 是简单正规交叉的，并且 f 可以延拓为 $U := X - D^v$ 上的正则函数。根据 [Yu14，命题 4.3], ，零点轨迹 $Z(f)$ 与竖直除子 D^v 横截。因此， f 在简单正规交叉对 $(X(f)$ $D^v)$ 上是非退化的。特别地，若 f 方便且非退化，则边界除子是 D^v ，而内部 U 恰为 $(\mathbb{C}^*)^n$。

5.2. **纯性与消失**。给定简单正规交叉对 $(f$ 上的非退化函数 $X,\ D)$，则有两个相关联的指数混合霍奇结构 $\mathrm{H}^i(U,\ f)$ 和 $\mathrm{H}^i_c(U,\ f)$，它们定义于 (2.3.2) 中。下面的命题表明它们同构且权为 i 的纯。

命题 5.2.1。给定简单正规交叉对 (X, D)上的非退化函数 f，则相应的指数混合霍奇结构 $\mathrm{H}^i(U, f)$ 和$\mathrm{H}^i_c(U, f)$ 同构。此外，对于所有 i，它们都是权为 i 的纯结构。

证明。根据 f 的构造，存在 $s_\infty \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ 以及 $s_0 \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(D))$，如定义 5.1.2 所述，使得

$$f := s_0/s_\infty : U \to \mathbb{A}^1.$$

我们将 $B = Z(s_0) \cap D$ 记为基 locus。考虑

$$\mathfrak{X} = \{(t, x) \in \mathbb{P}^1 \times X \mid ts_\infty - s_0 = 0\}$$

并令 $g\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{P}^1$ 为到第一因子的投影。利用雅可比判别准则，可以很容易地验证 $\tilde{U} := g^{-1}(\mathbb{A}^1) = (\mathbb{A}^1 \times B) \cup U$ 是光滑的。因此，我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^1 \times B & \xrightarrow{i} & \tilde{U} = g^{-1}(\mathbb{A}^1) & \xleftarrow{j} & U \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{A}^1 & = & \mathbb{A}^1 & = & \mathbb{A}^1 \end{array} \tag{5.2.2}$$

其中 $\tilde{f} = g|_{\tilde{U}}$。对于每个 $J \subset \{1, \ldots, r\}$，我们令 $D_J = \cap_{j \in J} D_j$和 $B_J = B \cap D_J$。注意，$\mathbb{A}^1 \times B_j$ 确实在 $g^{-1}(\mathbb{A}^1)$ 中构成一个简单正规交叉除子。

首先考虑好三角

$$f_!\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U \to \tilde{f}_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}} \to \mathrm{pr}_{1*}i_*i^*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}} \xrightarrow{+1}.$$

注意，$\mathrm{pr}_{1*}i_*i^*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}} = \mathrm{pr}_{1*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{A}^1 \times B}[1]$ 是 $\mathbb{A}^1$上的常混合霍奇模。因此，函子 Π 消去 $f_!\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U \to \tilde{f}_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U$ 的锥，并对任意 i给出同构 $\mathrm{H}^i_c(U,\ f) \to \mathrm{H}^i(\tilde{U},\ \tilde{f})$。

类似地，考虑对偶特异三角形

$$\mathrm{pr}_{1*}i^!\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}} \to \tilde{f}_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}} \to f_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U \xrightarrow{+1}.$$

令 $B^{(s)} = \coprod_{|J|=s} B^J$，并配备自然态射 $i_s\colon \mathbb{A}^1 \times B^{(s)} \to \mathbb{A}^1 \times B$。利用$(i \circ i_s)^!\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_X = \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{A}^1 \times B^{(s)}}[-2s](-s)$这一事实，我们得到 $i^!\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}}$的如下分解：

$$0 \leftarrow i^!\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}} \leftarrow i_{1*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{A}^1 \times B^{(1)}}[-2](-1) \leftarrow i_{2*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{A}^1 \times B^{(2)}}[-4](-2) \leftarrow \cdots,$$

其中的态射由包含态射的迭代和所诱导。因此，$\mathrm{pr}_{1*}i^!\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}}$ 同构于下列对象的迭代锥

$$[\mathrm{pr}_{1*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{A}^1 \times B^{(1)}}[-2](-1) \leftarrow \mathrm{pr}_{1*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{A}^1 \times B^{(2)}}[-4](-2) \leftarrow \cdots].$$

与上述情况类似，函子 Π 会湮灭 $\mathbb{A}^1$ 上的这些常值混合霍奇模块 $\mathrm{pr}_{1*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{A}^1 \times B^{(d)}}[-2d](-d)$。因此，它也会湮灭 $\tilde{f}_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}} \to f_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U$ 的锥，并对任意 i 给出同构 $\mathrm{H}^i(\tilde{U}, \tilde{f}) \to \mathrm{H}^i(U, f)$。

结合以上讨论，我们推导出一个同构

$$\mathrm{H}^i_c(U, f) \to \mathrm{H}^i(\tilde{U}, \tilde{f}) \to \mathrm{H}^i(U, f)$$

对于任意 i，指数混合霍奇结构之间的同构。因此，由于 $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},\,c}(U,\ f)$ 和 $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(U,\ f)$ 分别是权为 $\leq i$ 和 $\geq i$的混合结构，故可得纯性。□

推论 5.2.3。若 f 是强非退化的，则指数混合霍奇结构 $\mathrm{H}^i(U,f)$ 除非 $i=$维数 U，否则均为零。

证明。由于 U是仿射的，扭曲德拉姆上同调 $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(U,f)$ 除非 $i\leq$维数 U，否则为零；而紧支扭曲德拉姆上同调 $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},c}(U,f)$ 除非 $i\geq$维数 U，否则为零。根据命题 5.2.1，二者同构。因此，除非 $i=$维数 U，否则二者均为零。□

例 5.2.4。设 $X=\mathbb{P}^2$ 和 $D=L_0\cup L_1\cup L_2$，其中三条直线 L_0,L_1 和 L_2 分别由 x_0,x_1和 x_2 定义。特别地，内部 $U:=X-|D|$是代数环面 $\mathbb{G}^2_m$。(X,D) 上的（强）非退化函数 f 具有如下形式

$$\frac{F}{x_0x_1x_2}\colon U\to\mathbb{A}^1$$

其中，F是 x_0中的三次齐次多项式，x_1和 x_2满足 $Z(F$与 D横截。相应的非正则霍奇数将在例6.2.1中计算。

例 5.2.5。令 $X=\mathbb{P}^2$和 $D=Z(x_0^3+x_1^3+x_2^3+3x_0x_1x_2)$。我们考虑正则函数

$$f=\frac{x_0x_1x_2}{x_0^3+x_1^3+x_2^3+3x_0x_1x_2}\colon U\to\mathbb{A}^1$$

在内部 $U:=X-D$，如例 1.2.3所示。它是退化的，因为零点轨迹 $Z(x_0x_1x_2)$ 并不光滑。然而，对于一般的 $f+c$，函数 $c\in\mathbb{C}$ 是（强）非退化的。事实上，根据贝尔蒂尼定理，对于一般的 $Z(x_0x_1x_2+c(x_0^3+x_1^3+x_2^3+3x_0x_1x_2))$，零点轨迹光滑且与 D 横截。c。

然而，根据定理 $(U,\ f)$ 的非正则霍奇数与 $(U,\ f+c)$ 的非正则霍奇数相同。我们将在例 6.2.2中计算非正则霍奇数。

5.3. **非退化函数的非正则霍奇数**。本节中，我们证明定理 1.3.1。我们沿用第 5 节中的记号。

设 $D=P=\sum_{i=1}^r e_iD_i$ 是 X 中的简单正规交叉除子，且$s_\infty\in\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(D))$ 是定义 5.1.2 中的一个固定截面。我们将 $S\subset\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(D)$ 表示由满足以下条件的截面 s组成的子集：$B_s=Z(s$ 横截相交。对于 P，我们记 $s\in S$为

$$f_s:=s/s_\infty\colon U\to\mathbb{A}^1$$

与 s 相关联的 (X,D) 的非退化函数，并以 $B_s=Z(s)\cap P$ 表示基 locus。我们定义

$$\mathfrak{X}_s=\{(t,x)\in\mathbb{P}^1\times X\mid ts_\infty-s=0\}$$

且 $g_s\colon\mathfrak{X}_s\to\mathbb{P}^1$ 是到第一因子的投影。

注意，U 通过 f_s的图嵌入嵌入到 $\mathfrak{X}_s$ 中。我们定义$\tilde{U}_s=g_s^{-1}(\mathbb{A}^1)$，其中包含 U。我们将 g_s 在 $\tilde{U}_s$ 上的限制记为 $\tilde{f}_s$，

其中 f_s 是适当的。于是我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{X}_s & \longleftarrow & \tilde{U}_s = \tilde{g}_s^{-1}(\mathbb{A}^1) & \longleftarrow & U \\ \downarrow{\scriptstyle g_s} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_s} & & \downarrow{\scriptstyle f_s} \\ \mathbb{P}^1 & \longleftarrow & \mathbb{A}^1 & = & \mathbb{A}^1. \end{array} \tag{5.3.1}$$

引理 5.3.2。对于任意 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 和 $i \in \mathbb{N}$，$\psi_{1/t,\ \exp(-2\pi i\alpha)}\mathrm{R}^i g_{s*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathcal{X}_s}$ 的霍奇数与 $s \in S$ 无关。

证明。利用 GAGA，只需证明解析情形下的相同性质。由于 $\mathrm{R}^n g_{s*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上的混合霍奇模，因此在 g_s 的临界值之外，它限制为霍奇结构变分。因此，存在一个实数 $r(s)$，使得 $\mathrm{R}^n g_{s*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}$ 在 $\Delta_{>r(s)} = \{r \mid |r| > r(s)\}$ 上限制为霍奇结构变分。

对于 S 中的任意两点 s_1 和 s_2，取一个紧圆盘 $\bar{\Delta}$ 使得 s_1 和 s_2 都位于 $\bar{\Delta}^\circ$ 的内部。由 Δ 的紧致性可知，存在一个一致界 $\bar{r}$，适用于 $\{r(s) \mid s \in \Delta\}$。特别地，对于所有 $s \in \Delta$，g_s 的临界值都包含在 $\Delta_{\le r}$ 中。因此，通过映射

$$\mathcal{Z} = \{(t, x, s) \in \Delta_{>r} \times X \times \bar{\Delta} \mid s(x) = ts_\infty(x)\} \xrightarrow{\pi} \Delta_{>r} \times \bar{\Delta}$$

将 $(t,\ x,\ s)$ 映到 $(t,\ s)$，混合霍奇模 $\mathrm{R}^i\pi_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathcal{Z}}$ 限制到 $\bar{\Delta}^\circ \times \Delta^\times_{>r}$ 上后成为一个霍奇结构变分，记作 $(\mathcal{H}^i,\ \nabla,\ F^p)$。特别地，$\mathrm{R}^i\pi_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathcal{Z}}$ 在 $s \times \Delta_{>r}$ 上的限制是 $\mathrm{R}^i g_{s*}\mathbb{Q}\mid_{\Delta_{>r}}$。

对每个 $0 < \alpha \le 1$，记 H^i_α 为 $\mathrm{R}^i\pi_*\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathcal{Z}}$ 的单值算子关于 $\exp(-2\pi i\alpha)$ 的广义特征空间经开嵌入 $j\colon \Delta_{>r} \hookrightarrow \Delta_{>r} \cup \{\infty\}$ 的典范延拓，并记 ∇_α 为具有对数极点的联络。然后，利用 [Den23 定理 A], 中的幂零轨道定理版本，我们推得 $F^p\mathrm{H}^i_\alpha := j_*F^p \cap \mathrm{H}^i_\alpha$ 是 H^i_α 在 $\bar{\Delta}^\circ \times (\Delta_{>r} \cup \{\infty\})$ 上的子向量丛。

由于

$$F^p\mathcal{H}^i_\alpha / \tfrac{1}{t}F^p\mathcal{H}^i_\alpha = F^p\psi_{1/t,,\exp(-2\pi i\alpha)}\mathrm{R}^i\pi_*\mathbb{Q}, \tag{5.3.3}$$

其中 F^i 是霍奇滤过，我们推得

$$\begin{aligned} F^p(\mathcal{H}^i_\alpha / \tfrac{1}{t}\mathcal{H}^i_\alpha)|_{\{s\}\times\{\infty\}} &= F^p\mathcal{H}^i_\alpha|_{\{s\}\times\{\infty\}} / \tfrac{1}{t}F^p\mathcal{H}^i_\alpha|_{\{s\}\times\{\infty\}} \\ &= F^p\psi_{1/t,\exp(-2\pi i\alpha)}\mathrm{R}^i g_{s*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathfrak{X}_s} \end{aligned}$$

对任意 $s \in S$ 均成立。特别地，$\psi_{1/t}\mathrm{R}^i g_{s*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}$ 的霍奇数与 s 无关。□

命题 5.3.4。对于任意有理数 α，$\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$，以及任意 $p \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{gr}^p_F\psi_{1/t,\ \lambda}\Pi\mathrm{R}^r f_{s*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}}$ 的维数均与 f_s 无关。

证明。我们定义

$$\mathfrak{X}_S = \{(t, x, s) \in \mathbb{P}^1 \times X \times S \mid ts_\infty(x) - s(x) = 0\}$$

并得到一个图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{X}_S & \longleftarrow & \tilde{U}_S = \tilde{g}_S^{-1}(\mathbb{A}^1_S) \\ \downarrow{\scriptstyle g_S} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_S} \\ \mathbb{P}^1_S & \longleftarrow & \mathbb{A}^1_S \end{array} \tag{5.3.5}$$

使得限制到每个 $s \in S$ 都会还原出之前的图表（5.3.1）。运用命题 4.1.1证明中的相同论证，我们得到一个好三角

$$\tilde{f}_{S*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}_S} \to \Pi\, \tilde{f}_{S*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}_S} \to \mathrm{R}\Gamma(\tilde{U}, \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{A}^1_S} \xrightarrow{+1}$$

在 D 中$^b(\mathrm{MHM}(\mathbb{A}^1_S))$，其中 Π 是 (2.3.1) 中所定义函子的相对版本。
应用邻近循环函子 $\psi_{1/t}$，我们得到一个长正合列

$$\cdots \to \psi_{1/t}\mathrm{R}^i\tilde{f}_{S*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}_S} \xrightarrow{a_i} \psi_{1/t}\Pi\,\mathrm{R}^i\tilde{f}_{S*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}_S} \xrightarrow{b_i} \mathrm{H}^i(\tilde{U}, \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}}) \otimes \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_S \xrightarrow{c_i} \psi_{1/t}\mathrm{R}^{i+1}\tilde{f}_{S*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}_S} \to \cdots.$$

由 (5.3.3)，混合霍奇模 $\psi_{1/t}\mathrm{R}^i\tilde{f}_{S*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}_S}$ 在 S上是光滑的。特别是，态射 c_i 是混合霍奇结构变分的态射，因此 $\mathsf{im}(c_i)$ 仍是混合霍奇结构变分。因此我们有一个正合列

$$0 \to \mathrm{Im}(c_{i-1}) \to \psi_{1/t}\mathrm{R}^i\tilde{f}_{S*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}_S} \xrightarrow{a_i} \psi_{1/t}\Pi\,\mathrm{R}^i\tilde{f}_{S*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}_S} \xrightarrow{b_i} \mathrm{H}^i(\tilde{U}, \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}}) \otimes \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_S \xrightarrow{c_i} \mathrm{Im}(c_i) \to 0.$$

取 $s \in S$ 处的纤维，我们得到一个正合列

$$0 \to \mathrm{Im}(c_{i-1})\mid_s \to \psi_{1/t}\mathrm{R}^i\tilde{f}_{s*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}} \xrightarrow{a_i} \psi_{1/t}\Pi\,\mathrm{R}^i\tilde{f}_{s*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}} \xrightarrow{b_i} \mathrm{H}^i(\tilde{U}, \mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}}) \otimes \mathbb{Q}^{\mathrm{H}} \xrightarrow{c_i} \mathrm{Im}(c_i)\mid_s \to 0.$$

由于 $\mathsf{Im}(c_{i-1})$ 和 $\mathsf{Im}(c_i)$ 是 S 上的混合霍奇结构变分，其纤维的霍奇数与 $s \in S$无关。由引理 5.3.2， $\psi_{1/t}\mathrm{R}^i\tilde{f}_{s*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}}$ 的霍奇数也与 $s \in S$无关。因此，由长正合列可知， $\psi_{1/t}\Pi\mathrm{R}^i\tilde{f}_{s*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_{\tilde{U}}$ 的霍奇数与 $s \in S$无关。 □

证明定理1.3.1。对任意两个非退化函数 f_1 与 f_2 关于（X， D），存在两个截面 s_1 与 $s_2 \in \mathrm{H}^0$（X，$\mathcal{O}_X$（D））， 使得$f_j = f_{s_j}$ 对 $j = 1$，2。由推论3.1.6，有

$$\dim \mathrm{gr}^{\alpha+p}_{F_{\mathrm{irr}}}\mathrm{H}^{i-n}_{\mathrm{dR}}(U, f_j) = \dim \mathrm{gr}^p_F\psi_{1/t,\lambda}\Pi\,\mathrm{R}^{i-n}f_{j*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U \tag{5.3.6}$$

对 $j = 1$， 2， $\alpha \in [0, 1)$ ， 以及 $\lambda = \exp(2\pi i\lambda)$。由命题5.3.4，我们有

$$\dim \mathrm{gr}^p_F\psi_{1/t,\lambda}\Pi\,\mathrm{R}^{i-n}f_{1*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U = \dim \mathrm{gr}^p_F\psi_{1/t,\lambda}\Pi\,\mathrm{R}^{i-n}f_{2*}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}_U.$$

因此，我们得出

$$\dim \mathrm{gr}^{\alpha}_{F_{\mathrm{irr}}}\mathrm{H}^{i}_{\mathrm{dR}}(U, f_1) = \dim \mathrm{gr}^{\alpha}_{F_{\mathrm{irr}}}\mathrm{H}^{i}_{\mathrm{dR}}(U, f_2),$$

对任意 $\alpha \in \mathbb{Q}$。 □

6. 强非退化函数的显式公式

在本节中，我们给出强非退化函数 f （见定义5.1.2 ）在极点除子既约时的不规则霍奇数的显式公式。

6.1. **谱多项式**。

定义 6.1.1. 对于由 $\mathbb{Q}$ 过滤的向量空间复形 $(\mathrm{V}^\bullet, F^\bullet)$，我们将其谱多项式定义为

$$\mathrm{Sp}_{(\mathrm{V}^\bullet, F^\bullet)}(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} \dim \mathrm{gr}^\alpha_F \mathrm{V}^k \cdot t^\alpha \in \mathbb{Z}[t^{1/\infty}].$$

当 $\mathrm{V}^\bullet$是簇 Y 的 $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR},c}(Y)$、$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR},c}(U, f)$，或定义在 U 上的正则函数 f 的 $\mathrm{R}\Gamma_c($ $f^{-1}(0)$ $\psi_f(\mathbb{Q}_U))$ 时，我们分别用 $\mathrm{Sp}^c_Y(t)$、$\mathrm{Sp}^c_f(t)$ 和 $\mathrm{Sp}^c_{\psi_f}(t)$ 表示相应的谱多项式。

命题 6.1.2。 假设 (X, D, f) 是一对带有非退化函数的对象，其中 D 既约且 f 强非退化。那么我们有

$$\mathrm{Sp}_f^c(t) = \mathrm{Sp}_X^c(t) + \sum_{k=1}^{r}(-1)^k \left\{ (1+t+\cdots+t^k) \sum_{|I|=k} \mathrm{Sp}_{D_I}^c(t) \right\}$$
$$- \sum_{k=1}^{r}(-1)^k \left\{ (t+t^2\cdots+t^k) \sum_{|I|=k} \mathrm{Sp}_{D_I\cap Z}^c(t) \right\}.$$

注 6.1.3. 当 f 是一个强非退化函数时，根据推论5.2.3，唯一可能不消失的上同调是中间上同调。因此，$\mathrm{H}^{\dim X}{}_{\mathrm{dR}\ c}(X - |D|, f)$ 的非正则霍奇数由 t^α 在 $(-1)^{\dim X}\mathrm{Sp}_f^c(t)$ 中的系数给出。

命题 *6.1.2* 的证明。 采用命题 5.2.1 证明中的类似记号。令 $D = \sum_{i=1}^r e_i D_i$ 是 X 中的一个简单正规交叉除子，且 f 是 U上的一个非退化函数：$= X - D$由 s_0和 s_∞属于 $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(D))$，如定义 5.1.2所述。我们将 $B = Z(s_0) \cap D$ 的基 locus 记为。令

$$\mathfrak{X} = \{(t, x) \in \mathbb{P}^1 \times X \mid ts_\infty - s_0 = 0\}$$

且 g: $\mathfrak{X} \to \mathbb{P}^1$ 是到第一因子的投影。

注意到， U 通过 f的图嵌入嵌入到 $\mathfrak{X}$ 中。我们定义$\bar{U}$：$= \mathfrak{X} - \mathbb{P}^1 \times B$，其中包含 U。我们将 g限制到 $\bar{U}$所得的对象记为 $\bar{f}$，于是有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{X} & \hookleftarrow & \bar{U} = \mathfrak{X} - (\mathbb{P}^1 \times B) & \hookleftarrow & U \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{P}^1 & = & \mathbb{P}^1 & \hookleftarrow & \mathbb{A}^1. \end{array} \tag{6.1.4}$$

设 j： $D \setminus B \to D$为开浸入。注意， $\bar{f}^{-1}(\mathbb{A}^1) = U$。因此$\phi_{1/f}(\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}}) = \phi_{1/\bar{f}}(\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}})$。

引理 6.1.5。 $\phi_{1/g}\mathbb{Q}^{\mathrm{H}}|_{\infty\times B} = 0$。

证明。 由于将混合霍奇模映射到其底层 perverse 层的函子 rat 是忠实且正合的，因此只需证明 $\phi_{1/g}\mathbb{Q}|_{\infty\times B} = 0$。这可由 [MSS13，命题 4。1] 通过取 $\mathcal{Y} = \mathfrak{X}$， $X = P$， X' 是线性系中的光滑超曲面 $|P|$，且 $X'' = X \cap X' = B$ 是基 locus。 □

根据引理 6.1.5，自然映射

$$j_!\phi_{1/f}(\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}}) = j_!j^*\phi_{1/g}(\mathbb{Q}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{H}}) \to \phi_{1/g}(\mathbb{Q}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{H}})$$

是一个同构。因此，下面的图

$$\begin{array}{ccc} j_!\mathbb{Q}_{D\setminus B}^{\mathrm{H}} & \longrightarrow & j_!\psi_{1/f}(\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}_D^{\mathrm{H}} & \longrightarrow & \psi_{1/g}(\mathbb{Q}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{H}}) \end{array}$$

是一个同伦笛卡尔图。由于左边竖直箭头的锥是 $i_*\mathbb{Q}_B^{\mathrm{H}}$，其中 $i\colon B\to D$ 是包含态射，我们得到如下混合霍奇模的正合三角：

$$j_!\psi_{1/f,1}(\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}})\to\psi_{1/g,1}(\mathbb{Q}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{H}})\to i_*\mathbb{Q}_B^{\mathrm{H}}.$$

由于谱多项式是可加不变量，我们有

$$\mathrm{Sp}^c_{\psi_{1/f,1}}(t)=\mathrm{Sp}^c_{\psi_{1/g,1}}(t)-\mathrm{Sp}^c_B(t).$$

对于每个非空子集 $I\subset\{1,\dots,r\}$，令 $D_I:=\bigcap_{i\in I}D_i$，并按约定，令$D_\varnothing:=X$。置 $Z:=Z(s_0)$，对于 $I\neq\varnothing$，记 $Z_I:=D_I\cap Z$。对于 $I\neq\varnothing$，态射 $f\colon\mathfrak{X}\to\mathbb{P}^1$ 在 étale 局部上具有如下形式

$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto\prod_{i\in I}x_i^{e_i}$$

在任意点 $x\in D_I^\circ\setminus D_I^\circ\cap B$附近。因此由 [GRR72，第一册′，定′理`3.3], 我们有

$$\mathcal{H}^i\psi_{f^{-1},1}(\mathbb{Q}_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{H}})|_{D_I^\circ\setminus B}\simeq\mathbb{Q}^{\mathrm{H},\oplus\binom{|I|}{i}}_{D_I^\circ\setminus B}(-i).$$

因此，对于任意非空 $I\subset\{1,\dots,r\}$，$\psi_{1/f,1}(\mathbb{Q}_U^{\mathrm{H}})|_{D_I^\circ\setminus B}$的谱多项式等于

$$(1-t)^{|I|-1}\cdot(\mathrm{Sp}^c_{D_I^\circ}(t)-\mathrm{Sp}^c_{D_I^\circ\cap Z}(t)).$$

由可加性，我们得到

$$\mathrm{Sp}^c_{\psi_{1/f,1}}(t)=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,r\}\\ I\neq\varnothing}}(1-t)^{|I|-1}\cdot(\mathrm{Sp}^c_{D_I^\circ}(t)-\mathrm{Sp}^c_{D_I^\circ\cap Z}(t)).$$

由容斥原理，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}^c_{D_I^\circ}(t)&=\sum_{J\supset I}(-1)^{|J|-|I|}\mathrm{Sp}^c_{D_J}(t)\\ \mathrm{Sp}^c_{D_I^\circ\cap Z}(t)&=\sum_{J\supset I}(-1)^{|J|-|I|}\mathrm{Sp}^c_{D_J\cap Z}(t).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}^c_{\psi_{1/f,1}}(t)&=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,r\}\\ I\neq\varnothing}}\sum_{J\supset I}(-1)^{|J|-|I|}(1-t)^{|I|-1}\left(\mathrm{Sp}^c_{D_J}(t)-\mathrm{Sp}^c_{D_J\cap Z}(t)\right)\\ &=\sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,r\}\\ J\neq\varnothing}}(-1)^{|J|-1}\frac{1}{t-1}\left(\mathrm{Sp}^c_{D_J}(t)-\mathrm{Sp}^c_{D_J\cap Z}(t)\right)\sum_{\substack{I\subset J\\ I\neq\varnothing}}(t-1)^{|I|}\\ &=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}(1+t+\cdots+t^{k-1})\sum_{|J|=k}\left(\mathrm{Sp}^c_{D_J}(t)-\mathrm{Sp}^c_{D_J\cap Z}(t)\right).\end{aligned}$$

最后，根据定理 4.1.6 和引理 5.2.1，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}_{f,1}(t) &= \mathrm{Sp}^c_U(t) - t\mathrm{Sp}^c_{\psi_{1/f,1}}(t)\\ &= \mathrm{Sp}^c_X(t) - \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,r\}\\ J\neq\varnothing}} (-1)^{|J|-1}\mathrm{Sp}^c_{D_J}(t) - t\mathrm{Sp}^c_{\psi_{1/f,1}}(t)\\ &= \mathrm{Sp}^c_X(t) - \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}(1+t+\cdots+t^k)\sum_{|J|=k}\mathrm{Sp}^c_{D_J}(t)\\ &\quad + \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}t(1+\cdots+t^{k-1})\mathrm{Sp}^c_{D_J\cap Z}(t).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

6.2. **例子**。

例 6.2.1. 回到例5.2.4的设定，我们有 $X = \mathbb{P}^2$ 和$D = L_0 \cup L_1 \cup L_2$，其中三条直线 L_0， L_1 和 L_2 分别由 x_0， x_1和x_2 定义。特别地，内部 $U := X - |D|$ 是代数环面 $\mathbb{G}^2_m$。我们取形式如下的（强）非退化函数 f 于（X， D）上

$$\frac{F}{x_0x_1x_2} : U \to \mathbb{A}^1$$

其中 F是 x_0， x_1和 x_2中的三次齐次多项式，且 $Z(F)$与 D横截。

- $X = \mathbb{P}^2$ 的谱多项式为
$$\mathrm{Sp}^c_X(t) = 1 + t + t^2.$$
- 对于每个 $i = 0$，1，2，除子 $D_i = L_i \simeq \mathbb{P}^1$ 的谱多项式为
$$\mathrm{Sp}^c_{D_i}(t) = 1 + t.$$
- 对于每个 $0 \le i < j \le 2$，交 $D_i \cap D_j$ 是一个点，其谱多项式为
$$\mathrm{Sp}^c_{D_i\cap D_j}(t) = 1.$$
- 最后，对于每个 $i = 0$，1，2，交 $Z \cap D_i$ 由三个点组成，因此
$$\mathrm{Sp}^c_{D_i\cap Z}(t) = 3.$$

应用命题 6.1.2，我们得到

$$\mathrm{Sp}^c_f(t) = 1 + 7t + t^2.$$

因此，$\mathrm{H}^2_{\mathrm{dR},c}(U, f) \simeq \mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(U, f)$ 的不规则霍奇数由$h^0_{\mathrm{irr}}(U, f, 2) = 1$、 $h^1_{\mathrm{irr}}(U, f, 2) = 7$和 $h^2_{\mathrm{irr}}(U, f, 2) = 1$给出。

例 6.2.2。 回到例5.2.5的情形，我们有 $X = \mathbb{P}^2$ 和$D = Z($
$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2)$. 我们取形式如下的（强）非退化函数$f$ 定义在 (X, D) 上

$$\frac{x_0x_1x_2}{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2} : U \to \mathbb{A}^1.$$

- $X = \mathbb{P}^2$ 的谱多项式为
$$\mathrm{Sp}^c_X(t) = 1 + t + t^2.$$

- 除子 D 是一条椭圆曲线，其谱多项式为

$$\mathrm{Sp}_D^c(t) = 1 - (1+t) + t = 0.$$

- 最后，交 $Z \cap D$ 由 9 个点组成，因此

$$\mathrm{Sp}_{D\cap Z}^c(t) = 9.$$

应用命题 6.1.2 于 $f + c$ 对于一般的 $c \in \mathbb{C}$，我们有

$$\mathrm{Sp}_f^c(t) = 1 + 10t + t^2.$$

因此，$\mathrm{H}^2_{\mathrm{dR},\, c}(U,\ f) \simeq \mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(U,\ f)$ 的不规则霍奇数为$h^0_{\mathrm{irr}}(U,\ f,\ 2) = 1$、$h^1_{\mathrm{irr}}(U,\ f,\ 2) = 10$，以及 $h^2_{\mathrm{irr}}(U,\ f,\ 2) = 1$。

致谢

作者感谢 Javier Fres´an、Takuro Mochizuki、ClaudeSabbah 和 Christian Sevenheck，感谢他们提供的有益讨论和评论。

参考文献

[BGRSM23] Edoardo Ballico、Elizabeth Gasparim、Francisco Rubilar 和 Luiz A. B. San Martin. 极小伴随轨道上的 Katzarkov-Kontsevich-Pantev 猜想. Eur. J. Math., 9(3):论文第 57 号, 17, 2023. [CP25] I. A. Cheltsov 和 V. V. Przyjalkowski. 法诺三维簇上的 Katzarkov-Kontsevich-Pantev 猜想. Tr. Mat. Inst. Steklova, 328:5–164, 2025.[Del07] Pierre Deligne. 不规则霍奇理论. 载于《不规则奇点：通信与文献》，Documents mathématiques 第 5 卷，第 109–128 页. 法国数学会，巴黎，2007. [Den23] Ya Deng. 关于复霍奇结构变分的幂零轨道定理. Forum Math. Sigma, 11:e106, 2023. [DMR07] Pierre Deligne、Bernard Malgrange 和 Jean-Pierre Ramis. 不规则奇点：通信与文献. Documents mathématiques 第 5 卷. 法国数学会，巴黎，2007.[DS93] Alexandru Dimca 和 Morihiko Saito. 关于多项式映射一般纤维的上同调. Compositio Math., 85(3):299–309, 1993. [ESY17] Hélène Esnault、Claude Sabbah 和 Jeng-Daw Yu. 不规则霍奇滤过的 E_1-退化. J. Reine Angew. Math., 2017(729), 2017. [FSY22] Javier Fresán、Claude Sabbah 和 Jeng-Daw Yu. Kloosterman 联络的霍奇理论. Duke Math. J., 171(8), 2022. [GRR72] Alexander Grothendieck、M. Raynaud 和 D. S. Rim. 1967–1969 年杜布瓦-玛丽几何研讨会. 代数几何中的单值群（SGA 7 I）. A. Grothendieck 主编，M. Raynaud 和 D. S. Rim 协作. 第 I、II、VI、VII、VIII、IX 讲，数学讲义第 288 卷. Springer，Cham，1972.[Har21] Andrew Harder. 朗道–金兹堡模型的霍奇数. 《数学进展》，378:论文第 107436 号, 40, 2021.[HL24] Andrew Harder 和 Sukjoo Lee. 叠化 Clarke 镜像对的非正则霍奇数. arXiv:2408.09016 [math.AG], 2024. [Kat80] Nicholas M Katz. 指数和. Astérisque 第 79 卷. 法国数学会，1980.[Kat90] Nicholas M. Katz. 指数和与微分方程，数学年鉴研究第 124 卷. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1990.[KKP17] Ludmil Katzarkov、Maxim Kontsevich 和 Tony Pantev. 朗道–金兹堡模型的 Bogomolov–Tian–Todorov 定理. J. Differential Geom., 105(1), 2017. [KS11] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman. 上同调 Hall 代数、指数霍奇结构与动机 Donaldson–Thomas 不变量. Commun. Number Theory Phys., 5(2):231–252, 2011.

[LP18] Valery Lunts 和 Victor Przyjalkowski. 德尔佩佐曲面的镜像的 Landau–Ginzburg 霍奇数. 《数学进展》，329:189–216, 2018.[Moc15] Takuro Mochizuki. GKZ 超几何系统的旋子性质，2015. [MSS13] Laurentiu Maxim、Morihiko Saito 和 Jörg Schürmann. 完全交的 Hirzebruch–Milnor 类. Adv. Math., 241:220–245, 2013.[QSS24] Yichen Qin、Christian Sevenheck 和 Peter Spacek. Frenkel–Gross 连接的不规则霍奇数. arXiv:2412.05849 [math.AG], 即将发表于《代数几何》，2024. [Sab96] Claude Sabbah. 关于初等不规则 D 模的比较定理. Nagoya Math. J., 141:107–124, 1996. [Sab06] Claude Sabbah. 无穷远单值性与傅里叶变换 II. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 42(3):803–835, 2006. [Sab10] Claude Sabbah. 极化复霍奇结构变分的傅里叶–拉普拉斯变换，II. 载于《代数几何、可积系统与镜像对称性的新进展》，第 2010 卷，第 289–347 页，RIMS，京都大学，日本，2010. 纯数学高级研究. [Sab18a] Claude Sabbah. 不规则霍奇理论. 法国数学会回忆录，： –。与 Jeng-Daw Yu 合作撰写的章节.[Sab18b] Claude Sabbah. Brieskorn 格的一些性质与应用. 《奇点杂志》，18:238–247, 2018.[Sai90] Morihiko Saito. 混合霍奇模. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 26 333, 1990 2 221( ): – .[Sha18] Yota Shamoto. 朗道–金兹堡模型的霍奇–泰特条件. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 54(3):469–515, 2018. [SS] Claude Sabbah 和 Christian Schnell. MHM 项目. https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/claude.sabbah/MHMProject/mhm.html. [SY15] Claude Sabbah 和 Jeng-Daw Yu. 关于指数扭曲的混合霍奇模的不规则霍奇滤过. Forum math. Sigma, 3:e9, 2015. [SY19] Claude Sabbah 和 Jeng-Daw Yu. 汇合超几何微分方程的不规则霍奇数. Epijournal G. Algébrique，第 3 卷：5032, 2019. [Yu14] Jeng-Daw Yu. 扭曲德拉姆上同调上的不规则霍奇滤过. Manuscripta Math., 144(1-2):99–133, 2014.

数学科学学院，复旦大学，邯郸路220号，200433，上海，中国电子邮件地址：yichenqin@fudan.edu.cn

数学与跨学科科学中心，复旦大学，以及上海数学与跨学科科学研究所，200433，上海，中国电子邮件地址： zhang@simis.cn