三相黏塑性材料的简易流动法则

Frank Montheillet[1]，a * 和 David Piot[2]，b[1,2]圣艾蒂安矿业学院、里昂大学、法国国家科学研究中心、UMR 5307 LGF，Fauriel 路 158 号，42023 圣艾蒂安，法国[a]
montheil@emse.fr，bdavid.piot@mines-stetienne.fr

关键词： 连续介质力学、多相材料、黏塑性、混合定则、建模 g.

摘要。鉴于相关文献十分有限，本文提出一种初步解析方法，用于估算三相黏塑性材料的类黏度参数。首先，回顾适用于两相混合物的三种经典平均方程（涉及应变率、应力和功率）的适用条件及其结果，并将其扩展至三相情形。本文分析了经典静态界限和泰勒界限，以及启发式的"等应变率"假设。随后，针对线性黏塑性组分，提出将 Mori-Tanaka估算扩展至三相情形。当某一相（夹杂物）的体积分数极低时，特别是其黏度趋于零或无穷大时，本文给出了完全解析的结果，从而扩展了经典稀释模型。

引言

两相黏塑性金属合金或复合材料的应力—应变率关系在过去已得到广泛研究。已有下界限和上界限，以及对混合物类黏度（稠度）参数的简单估算。然而，在某些情况下，材料中共存三相，例如在金属合金中，两相基体含有硬质（例如，氧化物）或软质（例如，铅）颗粒的弥散体。体积分数大致相等的三相混合物也可加以设想。目前关于该主题的文献极少，即便对于弹性组分[1]亦是如此。本文基于对经典Taylor、静态、等功和Mori-Tanaka假设的直接推广，提出了一种初步的解析方法。所考虑的是无应变硬化的纯黏塑性材料，即，其流动法则为$\sigma = \dot{\varepsilon}\ \dot{\varepsilon}_0(/)^m k$，其中$k$为类黏度参数（具有应力的量纲），$m$为应变率敏感性，以及$\dot{\varepsilon}_0 = 1^{-1} s$。下文所考虑的单轴简单 混合定则基本上假定应变率和应力在每个相域上是均匀的，相域由单个晶粒或晶粒簇组成。此外，它们在给定相的所有相域中均相同。对于多相复合材料，计算基于以下三个平均方程：

$$\begin{cases} (a) & \sum_i f_i \dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon} \\ (b) & \sum_i f_i \sigma_i = \sigma \\ (c) & \sum_i f_i \sigma_i \dot{\varepsilon}_i = \sigma \dot{\varepsilon} \end{cases} \tag{1}$$

其中，宏观应变率、流动应力和功率分别是其微观对应量的算术平均值 [2]。公式（1c）通常称为 Hill引理。如果所有相的指数 m 都相同，则这三个方程关于应变率具有齐次性，这意味着混合物遵循具有相同指数的幂律。因此，规定的总体应变率 $\dot{\varepsilon}$ 可以设为 $_1 1\ s^{-}$ ，上述方程组可化简为：

$$\begin{cases}(a) & \sum_i f_i\dot{\varepsilon}_i = 1 \\ (b) & \sum_i f_i k_i \dot{\varepsilon}_i^{\,m} = k \\ (c) & \sum_i f_i k_i \dot{\varepsilon}_i^{\,m+1} = k \end{cases} \tag{2}$$

其中，k 是混合物的类黏度参数。在上述方程中，体积分数 $_if$ 当然通过关系式 $_i$ $1if$ $\sum$ = 相互关联。

对于由n个相组成的混合物，$+1$ n个未知数（$_i\dot{\varepsilon}$ 和k）由以下三个方程关联。在两相材料的情况下，因此有三个方程对应三个未知数；通过将方程 (a) 乘以 (b) 并令其等于 (c)，即可求解该系统，从而得到：

$$(k_1\dot{\varepsilon}_1^{\,m} - k_2\dot{\varepsilon}_2^{\,m})(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2) = 0 \tag{3}$$

该方程突出了两个经典解，分别称为 Taylor 解或均匀应变率模型（$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2 = 1$）以及静态或均匀应力模型（$_{1\,1\,2\,2m\,m}k\,k\,k\dot{\varepsilon}$ = $\dot{\varepsilon}$ =）；已知它们分别为总体k提供上界和下界。

三相混合物的首个简单流动法则

在存在三相的情况下，四个未知数仅有三个方程（$\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3, k$）。因此，系统 (2) 是不定的。不过，很容易验证经典的 Taylor 解仍然有效，即：

$$\begin{aligned} &k_T = f_1k_1 + f_2k_2 + f_3k_3 \\ &\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_3 = 1 \end{aligned} \tag{4}$$

该关系与应变率敏感性 m 无关。同样，静力假设满足方程（2），并得出：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k_S^{\,1/m}} = \frac{f_1}{k_1^{\,1/m}} + \frac{f_2}{k_2^{\,1/m}} + \frac{f_3}{k_3^{\,1/m}} \\ &\dot{\varepsilon}_i = \frac{\dfrac{1}{k_i^{\,1/m}}}{\displaystyle\sum_{j=1,3} \frac{f_j}{k_j^{\,1/m}}} = \left(\frac{k_S}{k_i}\right)^{1/m} \end{aligned} \tag{5}$$

Bouaziz 和 Buessler 长期以来一直为弹性材料提出一种纯启发式的替代方法 [3]，Montheillet 和 Damamme 则将其改用于黏塑性 [4]。该方法基于混合物各相变形功率相等的假设。对于三相情况，这意味着：

$$k_1\dot{\varepsilon}_1^{\,m+1} = k_2\dot{\varepsilon}_2^{\,m+1} = k_3\dot{\varepsilon}_3^{\,m+1} \tag{6}$$

将其与初始系统（2）联立后，会得到五个方程，而未知数只有四个。在两相情况下，等效假设也会导致方程数比未知数多一个。因此，通常舍弃方程（2c）（尽管它表达了

内功率与外功率相等）。在当前情况下采用相同做法，可得到一个含四个方程、四个未知数的方程组：

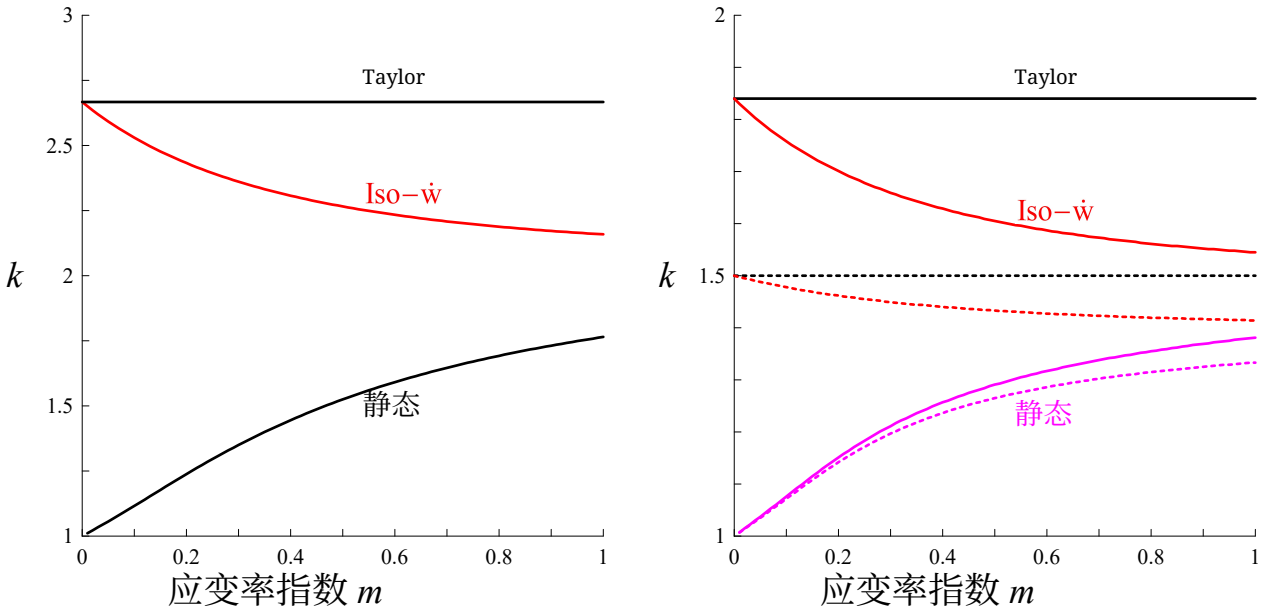
$$\begin{cases} (a) \quad f_1\dot{\varepsilon}_1 + f_2\dot{\varepsilon}_2 + f_3\dot{\varepsilon}_3 = 1 \\ (b) \quad f_1 k_1 \dot{\varepsilon}_1^{\,m} + f_2 k_2 \dot{\varepsilon}_2^{\,m} + f_3 k_3 \dot{\varepsilon}_3^{\,m} = k \\ (c)\text{ and }(d) \quad k_1\dot{\varepsilon}_1^{\,m+1} = k_2\dot{\varepsilon}_2^{\,m+1} = k_3\dot{\varepsilon}_3^{\,m+1} \end{cases} \tag{7}$$

可通过解析求解，得到：

$$k_{Iso-\dot{w}} = \frac{\sum_{j=1,3} f_j k_j^{\,1/(m+1)}}{\left[\sum_{j=1,3} \frac{f_j}{k_j^{\,1/(m+1)}}\right]^m} \tag{8}$$

and:

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\frac{1}{k_i^{\,1/(m+1)}}}{\sum_{j=1,3} \frac{f_j}{k_j^{\,1/(m+1)}}} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{9}$$



(a) (b)

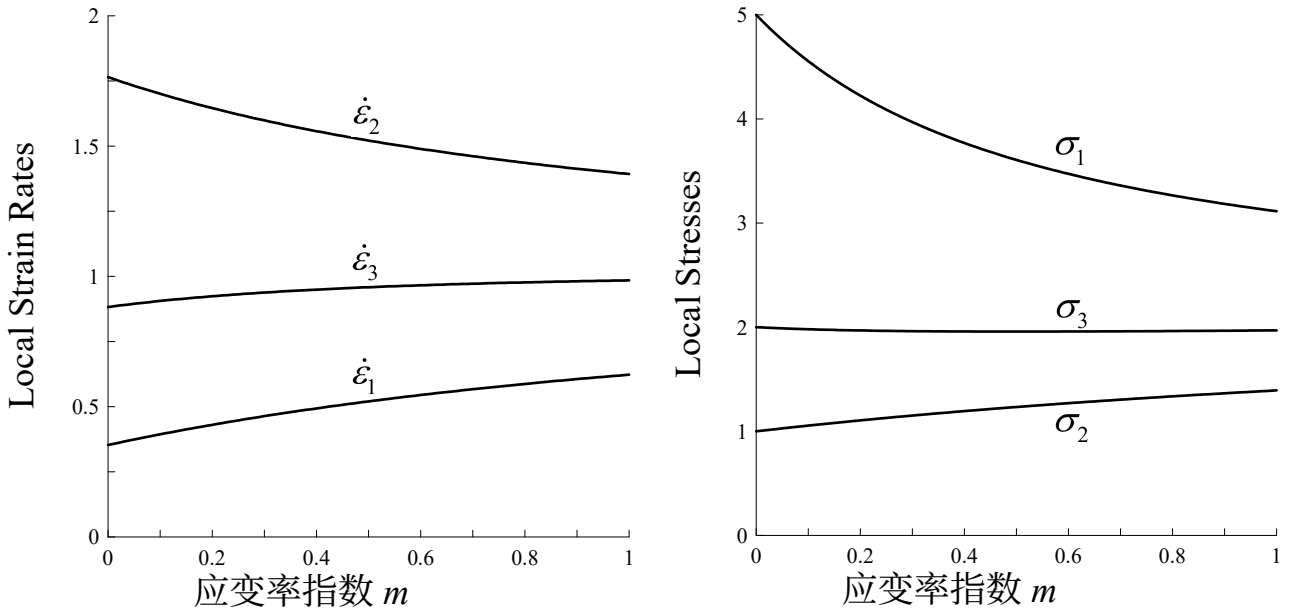
图1。 Taylor、静态和 Iso-ẇ假设所预测的总体类黏度参数随应变率指数m的变化：(a) 由三相组成的等体积混合物，其中 $k_1 = 5k$ ， $k_2 = 1k$ ， $k_3 = 2k$ ；(b) 由三相组成的混合物，其中1 110，0. = = 04 k f(夹杂物)，

2 21，0.48 k f= = ，以及3 32，0.48 k f= = 。并与不含夹杂物的相1和相2等体积混合物（虚线）进行比较

上述结果如图1a和b所示。图1a对应三相等体积（ $_1$ = $_2$ = $_3$ = 1/ 3 f f f）混合物的情况。图中显示，Taylor界限与静力界限相差甚远

，尤其是在m值较低时。Iso-w˙ 预测值介于两个界限之间，该结果已在理论上于[4]中推导得出。图1b中，体积分数较低的相1由嵌入基体中的夹杂物组成，该基体由相2和相3的混合物构成。图中虚线表示不含夹杂物的相同基体情况，突显了夹杂物的硬化效应。当1k $\to+\infty$ （不可变形夹杂物）时，Taylor和Iso- w˙ 预测的k值趋于无穷大，而1/ 1/ 2 3 2 3 3 2 /( )$m\ m\ m\ Sk\ k\ k\ f\ k\ fk\to$ + 则保持有限。

等应变率由公式（9）给出，据此可根据三相1、2、3的幂律$mi\ i\ ik\sigma\ =\ \dot{\varepsilon}\quad i\ =$推导出局部流动应力。图2a和图2b展示了与图1a相同的等体积混合物的结果示例。



(a) (b)

图2。等应变率对图1a所示等体积混合物三相中局部应变率（a）和流动应力（b）的预测（ $_1=5k$ ， $_2=1k$ ， $_3=2k$ ）

Mori-Tanaka模型向三相的扩展

对于类似图1b所示的情况，其中一相显然由分散在另外两相混合物中的夹杂物组成，采用扩展的Mori-Tanaka方法比采用上述模型更为合适。除了两个平均方程（2a）和（2b）外，还引入一个局部化方程，用于给出夹杂物的应变率$I\dot{\varepsilon}$ 与基体的应变率$M\dot{\varepsilon}$ 之间的函数关系。对于球形线性黏塑性夹杂物，该方程可简化为[5]:

$$\dot{\varepsilon}_I=\frac{5}{2\Sigma+3}\dot{\varepsilon}_M \tag{10}$$

其中，$/I\ Mk\ k\Sigma\ =$ 是两种黏度的比值。对于非线性和/或非球形夹杂物，也有类似于式（10）的数值关系和解析近似，此处不予考虑。结合式（2a）、（2b）和（10）可得:

$$k=\frac{(3f_I+2)k_I+3(1-f_I)k_M}{2(1-f_I)k_I+(2f_I+3)k_M}k_M \tag{11a}$$

$$\dot{\varepsilon}_I = \frac{5k_M}{2(1-f_I)k_I + (2f_I+3)k_M} \tag{11b}$$

$$\dot{\varepsilon}_M = \frac{2k_I + 3k_M}{2(1-f_I)k_I + (2f_I+3)k_M} \tag{11c}$$

其中，$_If$为夹杂物体积分数。

对于三相材料，将1称为夹杂相，其体积分数为1f，黏度为1$ık$ $k=$ ，基体是相2和相3的混合物，体积分数为 $_2+\ _3=1-\ _1f\ f\ f$（图3）。

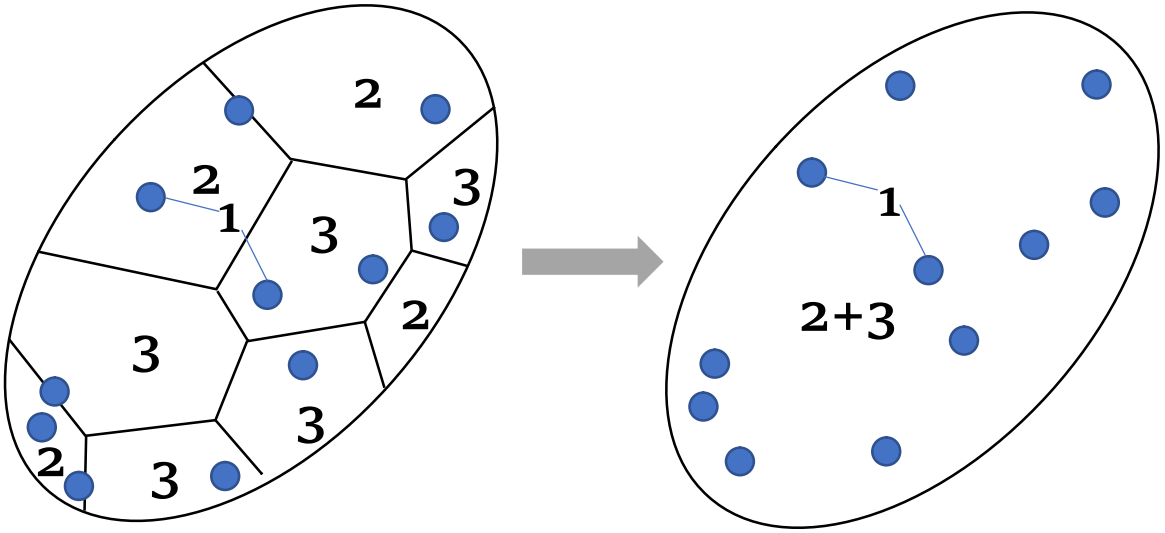


图3。三相材料中，相1由处于相2和相3混合物中的夹杂物组成。它被替换为一种两相材料，其中夹杂物嵌入均匀基质2+3）

估计其黏度23$_Mkk=$ 的一种简单方法是采用Taylor假设，由此得到23 2 2 3 3 1 ( ) /($=$ $+$ $1-$) $k\ f\ k\ f\ k\ f$ 。该方法的初步结果示于图4，图中显示了夹杂物体积分数1f对整体黏度k的影响，包括“硬”夹杂物和“软”夹杂物两种情况。对于不可变形夹杂物（1k $\to\infty$），例如氧化物，上述方程给出极限行为：

$$k \to \frac{3f_1+2}{2(1-f_1)}\frac{f_2k_2+f_3k_3}{1-f_1} \tag{12}$$

当夹杂物的体积分数较小（ $_1\to 0f$）时，该式变为 1 23 (→ 1+5 2 /) kfk；否则为 1 2 2 3 3 (→ 1+7 2 +/)( ) $kffkfk$。第一种形式即为经典的稀释模型方程，最初由爱因斯坦于1911年提出。同理，对于零黏度（但仍不可压缩）的夹杂物（ $_1=0k$ ），例如例如液态铅，整体黏度为：

$$k = \frac{3(1-f_1)}{2f_1+3}\frac{f_2k_2+f_3k_3}{1-f_1} \tag{13}$$

当夹杂物的体积分数较小（ $_1 \to 0f$ ）时，该式变为 1 23 (= 1 – 5 3 /) k f k；否则为 1 2 2 3 3 (= 1 – 2 3 + /)( ) k f f k f k 。第一种表述同样与稀释模型一致。这两个极限情形也见于图4。

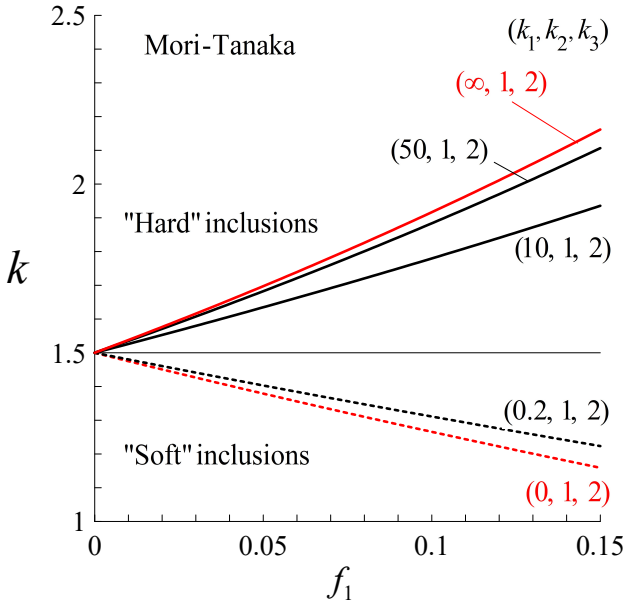


图4.夹杂物体积分数（黏度1k）对三相混合物整体黏度的影响。实线和虚线分别对应于“硬”夹杂物和“软”夹杂物。三种黏度的数值（ 1 2 3, ,k k k）在括号中给出，包括不可变形夹杂物和零黏度夹杂这两种极限情形

结语

期望找到足够的实验数据（至少包括三相的黏度和体积分数）来详细验证上述初步理论预测是不现实的。尽管如此，我们仍希望总体趋势和数量级能在不久的将来得到验证。

此外，还将引入明显的改进或新的替代方案。因此，对于大致等体积三相材料，自洽方法很可能提供更准确的预测。当夹杂物嵌入两相基体中时，后者的一致性可以用泰勒界限以外的其他方法来估计。

参考文献

[1] C.S. Burhan Pasha, P.K. Sahoo, K. Deb, V. Kumar, 《多相复合材料混合法则的数学建模》, 国际当代工程与科学研究期刊, 5（2018）78-80。

[2] A. Zaoui, 《尺度变换：动机与方法论》, 载于：M. Bornert、Th. Bretheau、P. Gilormini（编）, 《材料力学中的均匀化 1：随机弹性材料与周期介质》, 第1章, Hermes Science, 巴黎（2001）。[3] O. Bouaziz, P. Buessler, 《非均质材料行为建模的等功增量假设》, 先进工程材料 6 第1-2期（2004）79-83。[4] F. Montheillet, G. Damamme, 《用于模拟非均匀黏塑性材料行为的简单流动法则》, 先进工程材料 7 第9期（2005）852-858。[5] L. Briottet, P. Gilormini, F. Montheillet, 《黏塑性基体中夹杂变形的近似解析方程》, Acta Mechanica 134（1999）217-234。