arXiv:2603.06053v1 [math.DS] 6 Mar 2026

在球面、圆柱和圆盘上呈现极小遍历性的解析辛同胚

Yann Delaporte*

2026年3月9日

摘要

我们构造了球面、圆盘和圆柱上的解析辛同胚，它们具有最小遍历性（仅有 3 个遍历测度）。为此，我们应用并推广了 Berger 提出的原理，该原理基于 Anosov-Katok 的共轭逼近法。

目录

1 引言 **2**

记号 **4**

2 方案与原理 52.1 AbC 原理.52.2 AbC*原理 .7

3 极小遍历性 10
3.1 极小遍历性引理.123.2 AbC*方案 .153.3 极小遍历性的实现 .17

4 AbC* 原理的证明 **19**
4.1 逼近定理 .204.2 复化与 $\mathbb{M}$.254.2.1 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{S}\}$ .254.2.2 复结构与辛结构 .274.3 模变形逼近 .294.4 AbC* 在变形实解析曲面上的实现 .294.5 原理的总结 .32

A 关于康托罗维奇距离的结果 **33**

B 双曲线之间的辛同胚 **35**

C 模变形逼近定理的证明 **37**

D 模变形的 AbC* 实现证明 **39**

*IMJ-PRG、法国国家科学研究中心、索邦大学巴黎西岱大学，部分经费来自 ERC 项目 818737“野微分动力系统的涌现”。

记号索引 参考文献 44

45

1 引言

本文的主要目标是在球面、圆盘和圆柱上构造最小遍历的解析辛同胚：它们具有最少数量的遍历测度。Shnirelman 在 [Shn30], 中给出了这类辛同胚的第一个例子；该例是开圆盘上的一个辛同胚，恰有两个遍历测度，相关讨论见[FK04]。后来， [FH77] 证明了在带有自由圆作用的流形上存在光滑的最小辛同胚（只有一个遍历测度）。在我们的情形中，每个曲面（球面、圆柱和圆盘）上将有三个遍历测度。我们将在第3节开头说明这一数量的由来。

为了得到这样的辛同胚，本工作将以 Berger 对 Anosov-Katok 共轭逼近（AbC 方法）的推广为基础。该方法已在 [AK70]中提出，并给出了在赋予 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 作用的紧流形（如圆柱、球面或圆盘）上光滑、遍历的保体积动力系统的存在性。AbC 方法尤其能够构造伪旋转，即具有有限个周期点的曲面辛同胚（保面积且保定向的映射）（见 [BCLR06]）。注意，圆柱、球面或圆盘上的最小遍历辛同胚是伪旋转，因为一个周期点会产生一个遍历测度。

AbC 方法已被用于构造最小遍历动力学。在 [FK04], 中，他们在圆盘、球面和圆柱上构造了光滑的最小遍历动力学。随后，在[RS22] 中，他们同样使用 Anosov-Katok 方法，在环面辛流形上得到了具有最少个数遍历测度的光滑哈密顿伪旋转。正如 [FK04], 所指出的，要获得极小遍历性，需要控制所有轨道的行为，这比遍历性更困难，因为遍历性只需控制几乎每一条轨道的行为。因此，两篇文章都通过证明弱-$\star$ 收敛，使每一个经验测度进入所需遍历测度的凸包，从而得到极小遍历性。

然而，AbC 方法并不能自然地适用于解析情形。在 [FK04，§7。1], 他们指出，使用 AbC 方法实现解析性存在困难，因为复合共轭时收敛半径会缩小。已有一些在环面上的解析例子，分别借助“块滑动”映射和傅里叶级数，见 [BK19] ；还有一些通过直接的解析构造得到，见 [Fur61，定理 2。1] 此外，Fayad 和 Katok 成功运用 Anosov-Katok 方法，在奇数维球面上构造出解析且唯一遍历的伪旋转，见 [FK14]。最近，Berger 研究了圆柱情形，见 [Ber22] ；他使用整函数来解决收敛半径问题。由此，Berger 通过证明存在遍历的圆柱解析伪旋转，推翻了 Birkhoff 的一个猜想，见 [Bir41]。此外，与此相反，他还证明了存在具有高局部涌现特征的解析伪旋转。

后来，为了解决球面和圆盘的问题，Berger 提出了*AbC* 原理，借助 AbC 方法，可以在圆盘、圆柱和球面等曲面上进行解析构造 [Ber24]。借此，他构造出了球面、圆盘和圆柱上的解析遍历伪旋转。此外，正如她提出的这一问题所示，我们还可以得到球面和圆盘上的解析伪旋转，它们要么是遍历的，要么具有高涌现。基本上，该原理指出，如果某个性质（$\mathcal{P}$）可通过一个 *AbC 方案*在 C^r-拓扑中实现，$0 \leq r \leq \infty$，那么就存在一个满足（$\mathcal{P}$）的解析辛同胚。AbC 方案的定义见定义 2.1 。

原始原理足以处理遍历性和涌现，因为它们是关于几乎所有轨道的性质，正如 [Del25], 所示；但对于涉及所有轨道的极小遍历性，它就遇到了困难。事实上，在 Berger 的方案中，构造的每一步都无法控制无限多个轨道的行为。例如，在圆柱上，AbC 原理在每一步都无法控制圆柱边界附近的动力学，而该邻域中包含无限多个 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 轨道。这个问题源于用于证明该原理的逼近定理。Ber22 的这一逼近定理（ [Ber22，定理 1.8]）允许用解析映射逼近光滑哈密顿时间1映射。然而，为了得到定理中的解析逼近，Berger 使用了 Runge 定理，由此产生了一个无控制区域，它被定义为圆柱边界的一个邻域。

接下来，为解决这一问题，我们将 AbC 方案推广为$AbC^\star$ 方案，详见第2.2节。该 AbC* 方案还附带一个$AbC^\star$ 原理（定理2.15），该原理指出，若某个性质（$\mathcal{P}$）可由某个 AbC* 方案在 C^r-拓扑下实现，其中 $0 \leq r \leq \infty$，那么就存在满足（$\mathcal{P}$）的解析辛同胚。此原理在第4 节中借助一个逼近定理加以证明，其中无控制区域可以是两个不相交本质带的任意并（见第4.1小节）；我们使用逼近定理 [Ber22，定理 1，来证明这一结果。8]因此，通过“缠绕”环带来定义无控制区域，就能在构造中考虑每条轨道并实现极小遍历性，从而得到我们的主要定理。

定理 A。在圆柱、球面和圆盘上都存在极小遍历解析辛同胚。

我们通过在第3 节中证明，可以用一个 AbC* 方案在球面、圆盘和圆柱上实现极小遍历性，从而得到这一结果。该证明仅涉及 C^0-拓扑，然而，该原理蕴含这些曲面上存在解析的最小遍历辛同胚。

在本文中，我们从第2 节开始，介绍一些 AbC 方案，这些方案使我们能够构造满足所需性质的辛同胚，并且是在某个 C^r-拓扑中定义的，对于 $0 \leq r \leq +\infty$。随后，我们在定理 2.4 中引入 AbC 原理，它给出满足由某个 AbC 方案所实现之性质的解析辛同胚。在该原理的证明背后，隐藏着一个逼近定理，其代价是由于在逼近中使用 Runge定理而产生的无控制区域。在 AbC 方案中，这些区域由曲面极端部分的邻域所界定（球面上的极点、圆柱上的边界，以及圆盘上的边界和中心），并使我们无法用 AbC 方案实现最小遍历辛同胚。因此，我们将该方案推广为 AbC* 方案，其中允许这些区域成为曲面上的“缠绕”环带，以便涵盖极小遍历性。随后，我们将引入 AbC* 原理，见定理 2.15，它给出由这些方案构造的解析辛同胚的存在性，因而满足所需性质。此外，我们由命题2.13 得到，AbC* 原理蕴含 AbC 原理。

接着，在第3节中，我们证明 C^0-AbC* 极小遍历性的实现。首先，我们将 [FK04中§3] 的极小遍历性构造设定为一个 C^0-AbC* 方案。接下来，我们在第3.2节证明该方案实现了极小遍历性。Fayad 和 Katok 使用弱$\star$ 收敛的粗略定义来获得极小遍历性，而我们使用诱导出这种收敛的康托罗维奇距离，从而能够量化一个辛同胚距离最小遍历性的程度。因此，我们获得了球面、圆柱和圆盘上的 C^0-AbC* 极小遍历性实现，并且可以利用 AbC* 原理获得定理A。

最后，在第4节中，我们通过调整 Berger的AbC原理的证明来证明 AbC* 原理。首先，我们在定理 4.9中得到一个逼近定理，以解析地逼近圆柱内部的辛同胚——

映射。在第4.2节介绍复化以及复结构和辛结构的概念后，我们利用前述定理，在第4.3 节得到模变形逼近定理4.9。该定理允许我们用另一个辛同胚来逼近一个辛同胚，同时对圆柱复化的复结构和辛结构作微小变形。最后，我们将这一逼近结果用于圆柱上的 AbC* 方案；与球面和圆盘上的情形相比，圆柱上的结构更简单。因此，由于在方案的每一步中，我们都只对复结构和辛结构作微小变形，最终得到的复结构和辛结构在极限映射下保持不变。特别地，由该方案构造的映射是关于这些极限结构的解析辛同胚，因此可以完成原理的证明。

致谢。 我非常感谢 *Pierre Berger*，他通过多篇论文让我接触到 *Anosov Katok* 方法，尤其是他本人关于 *AbC* 原理的论文，该论文促成了本文中对这一原理的推广。我也感谢他对这项工作的指导，以及多次重读本文。感谢 *Rapha¨el Krikorian* 对我的工作给予鼓励。

符号索引见第 44页。

符号

曲面与空间

本文将研究以下曲面：

1. $\mathbb{A} := \mathbb{T} \times \mathbb{I}$ 圆柱，其中 $\mathbb{T}$ 是环面 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 且 $\mathbb{I} = [-1;\ 1]$。2. $\mathbb{D}$:
$= \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ 单位闭圆盘。3. $\mathbb{S}$:
$= \{x \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ 球面。

圆 $\mathbb{T}$ 通过旋转在圆盘和圆柱上典范地作用，也通过绕轴 x_3 旋转作用于球面。对于 $\alpha \in \mathbb{T}$，我们将这种旋转记为 R_α。

我们考虑 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{A};\ \mathbb{S};\ \mathbb{D}\}$ 配备其典范辛形式 Ω。形式 Ω 在该曲面上定义了一个概率测度，记为勒贝格测度。对于 $1 \leq r \leq +\infty$，我们将 $\mathrm{Symp}^r(\mathbb{M})$ 记为由C^r-辛同胚组成的空间，并赋予其 C^r 拓扑。对于 $r = 0$，$\mathrm{Symp}^0(\mathbb{M})$ 表示辛同胚空间，它是 $\mathrm{Symp}^1(\mathbb{M})$ 关于 C^0 拓扑的闭包；在维数 2 时，它与保面积同胚空间一致 [Oh06，定理 I]。令 $\mathrm{Symp}^\omega(\mathbb{M})$ 表示 $\mathbb{M}$的解析辛同胚集合。

当 $0 \leq r \leq +\infty$ 时，我们用 d_{C^r} 表示一个诱导 C^r 拓扑的距离。
我们将在以下辛曲面上开展研究：

1. $\check{\mathbb{A}} := \mathbb{T} \times (-1; 1)$,
2. $\check{\mathbb{D}} := \left\{x \in \mathbb{D}\ :\ 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$,
3. $\check{\mathbb{S}} := \{x \in \mathbb{S}\ :\ x \neq (0, 0, \pm 1)\}$.

我们可以观察到，这些曲面通过以下方式辛同胚：

$$\begin{array}{rccl} \pi: & \check{\mathbb{A}} & \to & \check{\mathbb{M}} \\ & (\theta, y) & \mapsto & \begin{cases} (\theta, y) & \text{if } \mathbb{M} = \mathbb{A} \\ \left(\sqrt{1-y^2}\cos(2\pi\theta), \sqrt{1-y^2}\sin(2\pi\theta), y\right) & \text{if } \mathbb{M} = \mathbb{S} \\ \sqrt{\frac{1+y}{2}}\left(\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)\right) & \text{if } \mathbb{M} = \mathbb{D} \end{cases} \end{array} . \tag{1.1}$$

我们对这三个曲面 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{A}、\ \mathbb{S}$ 和 $\mathbb{D}\}$ 使用相同的记号 π。注意，π 或许可以扩展为从 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{M}$的满射连续映射。

于是，对于 $r \geq 0$，我们考虑 $\mathrm{Symp}^r(\mathbb{M})$ 的以下子空间：

- 由在 $\mathbb{M}$ 中紧支撑的元素构成的子空间：

$$\mathrm{Symp}_c^r(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}}) = \left\{ f \in \mathrm{Symp}^r(\mathbb{M}) \ : \ \overline{\mathrm{supp}(f)} \subset \check{\mathbb{M}} \right\},$$

- 由在 $\partial\check{\mathbb{M}} = \mathbb{M} \setminus \check{\mathbb{M}}$ 上等于恒等映射的元素构成的子空间：

$$\mathrm{Symp}^r(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}}) = \{ f \in \mathrm{Symp}^r(\mathbb{M}) \ : \ f|_{\partial\check{\mathbb{M}}} = \mathrm{id} \}.$$

对于 $\eta \in [0$，我们考虑：1）曲面

$$\mathbb{A}(\eta) = \mathbb{T} \times \mathbb{I}(\eta) \ \text{ and } \ \mathbb{M}(\eta) = \pi(\mathbb{A}(\eta)),$$

其中 $\mathbb{I}(\eta) = (-1 + \eta;\ 1 - \eta)$。特别地，$\check{\mathbb{M}} = \mathbb{M}(0)$，并且对于 $f \in \mathrm{Symp}_c^r(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}})$，存在 $\eta > 0$，使得 f 的支集包含于 $\mathbb{M}(\eta)$ 中。

Kantorovich-Wasserstein距离

我们将研究 $\mathbb{M}$上的概率测度空间，记为 $\mathcal{M}(\mathbb{M})$，并赋予Kantorovich-Wassertein距离：

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{M}),\ d_K(\mu_1, \mu_2) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{M}^2} d(x_1, x_2) d\mu \ : \ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{M}^2) \text{ s.t. } p_{i*}\mu = \mu_i \, \forall i \in \{1; 2\} \right\}$$

其中对于 $i \in \{1;\ 2\}$，$p_i : (x_1, x_2) \in \mathbb{M}^2 \mapsto x_i \in \mathbb{M}$ 是典范投影。该距离在 $\mathcal{M}(\mathbb{M})$上诱导弱 $\star$-拓扑，且该拓扑是紧的。此外，由Kantorovich-Rubinstein对偶定理，我们有对偶表述：

$$d_K(\mu_1, \mu_2) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{M}} f d(\mu_1 - \mu_2) \ : \ f : \mathbb{M} \to \mathbb{R} \text{ 1-Lipschitz} \right\}.$$

给定一个 $\mathbb{M}$的辛同胚 f，我们考虑 $\mathbb{M}$ 中 x 以及 $n \geq 1$的经验测度 ：

$$e_n^f(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{f^k(x)}.$$

2 方案与原理

2.1 AbC 原理

本节介绍 P. Berger 在 [Ber24]中提出的 AbC 原理。

首先，我们定义什么是 AbC 方案，其中 AbC 是“共轭逼近”（Approximation by Conjugacy）的缩写。记 $\mathcal{T}^r$ 为紧开 C^r拓扑在 $\mathrm{Symp}^r(\check{\mathbb{M}})$ 上经限制映射 $\cdot|_{\check{\mathbb{M}}} : \mathrm{Symp}^r(\mathbb{M};\ \partial\check{\mathbb{M}}) \mapsto \mathrm{Symp}^r(\check{\mathbb{M}})$ 拉回所得的拓扑，其中 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{A};\ \mathbb{S};\ \mathbb{D}\}$ 和 $0 \leq r \leq +\infty$。$f \in \mathrm{Symp}^r(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}})$ 的邻域基为：

$$\left\{ g \in \mathrm{Symp}^r(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}}) \ : \ d_{C^s}(f|_{\mathbb{M}(\eta)}, g|_{\mathbb{M}(\eta)}) < \epsilon \right\},$$

取自 $\eta,\ \epsilon > 0$ 以及有限的 $s \leq r$。

定义 2.1（AbC 方案）。*A C^r-AbC 方案是一个映射：*

$$(h,\alpha)\in \mathrm{Symp}^r(\mathbb{M};\partial\check{\mathbb{M}})\times\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\mapsto(U(h,\alpha),\nu(h,\alpha))\in\mathcal{T}^r\times(0,\infty)$$

使得：

a) 每个开集 U（h,α）都包含一个满足以下条件的映射 $\hat{}$ $h\in$ 辛映射^r（$\mathbb{M}$；$\partial\check{}\mathbb{M}$）

$$\hat{h}\circ R_\alpha\circ\hat{h}^{-1}=h\circ R_\alpha\circ h^{-1}.$$

b) 给定任意序列 （h_n）$_n\in$ 辛映射^r（$\mathbb{M}$；$\partial\check{}\mathbb{M}$）$^{\mathbb{N}}$ 和 （α_n）$_n\in$ （$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$）$^{\mathbb{N}}$，使得：

$$h_0=id,\quad \alpha_0=0,$$

且对于 $n\geq 0$:

$$h_{n+1}\circ R_{\alpha_n}\circ h_{n+1}^{-1}=h_n\circ R_{\alpha_n}\circ h_n^{-1},$$

$$h_{n+1}\in U(h_n,\alpha_n)\ \ and\ \ 0<|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\nu(h_{n+1},\alpha_n)$$

则序列 $f_n:=h_n\circ R_{\alpha_n}\circ h_n^{-1}$收敛到辛映射 $f\in$ 辛映射^r（$\mathbb{M}$）。

称映射 f 由 C^r-方案 （U,ν）构造而成。

这类 AbC 方案的目标是构造满足某种性质（$\mathcal{P}$）的映射：

定义 2.2。若性质（$\mathcal{P}$）满足以下条件，则称其为 辛映射^r($\mathbb{M}$) 上的 *AbC* 可实现的 C^r-性质：

1. 性质（$\mathcal{P}$）在 辛映射^r($\mathbb{M}$)-共轭下不变：若 $f\in$辛映射^r($\mathbb{M}$) 满足（$\mathcal{P}$），那么对于任意 $h\in$ 辛映射^r($\mathbb{M}$)，$h\circ f\circ h^{-1}$ 也满足该性质。*2.* 存在一个 C^r-*AbC* 方案，使得由其构造出的任意映射 $f\in$辛映射^r($\mathbb{M}$) 都满足（$\mathcal{P}$）。

例如，Berger 证明了传递性是一种 AbC C^0-可实现性质。研究还表明，遍历性或高涌现是可实现的 [Del25]。

在该方案中使用开集使得可以利用稠密性结果，因此，正如接下来的两个结果所述，可实现性质在更高正则性下也可实现。

命题2.3（[Ber24，命题 2.6]）。对于 $+\infty\geq s\geq r\geq 0$，若 ($\mathcal{P}$) 是一种 *AbC* C^r-可实现性质，则它是一种 *AbC* C^s-可实现性质。

除了这一正则化结果外，Pierre Berger 在 [Ber24，定理 D] 中证明，任何可实现性质都能通过解析方式实现，具体如他以下的主要定理所述。

定理2.4（AbC 原理）。对于每个 $0\leq r\leq\infty$，任何 AbC 可实现的 C^r-性质 ($\mathcal{P}$) 都由某个 $f\in$辛映射$^\omega$($\mathbb{M}$) 满足。

尽管对于几乎处处定义的性质，这一原理似乎很适用，但当涉及定义在每条轨道上的性质（如极小遍历性）时，它似乎会遇到困难。因此，为了回答 [Ber24中的问题 2，10], 我们在下一节将这一原理推广为 AbC* 原理，以涵盖极小遍历性。具体而言，我们将通过命题2.13 证明 AbC* 原理蕴含 AbC 原理。

2.2 AbC*原理

为了推广上述 AbC 原理，我们首先要引入曲面 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{S}, \mathbb{D}, \mathbb{A}\}$ 上双曲线的概念。事实上，当我们研究旋转 $h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ 的共轭时，其轨道是 R_α 的轨道在 h 下的像。因此，为了控制共轭的每条轨道，就必须在 $\mathbb{M}$ 的每条 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-轨道上控制 h。然而，在先前的方案中，所采用的是 $\check{}\mathbb{M}$ 上的拓扑，因此无法在包含无限多条 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 轨道的邻域 $\mathbb{M} \setminus \check{}\mathbb{M}$ 上控制 h。为克服这一困难，我们引入双曲线的概念，以处理绕行带；这些带的构造方式使得对于任意 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 轨道，其与带的交集测度会随着带逐渐收紧而一致趋于零。

定义 2.5（双曲线）。圆柱上的双曲线是两个不相交闭曲线 γ_+ 与γ_- 的并集 γ，嵌入于 $\mathbb{A}$ 中，且存在一个微分同伦$(f_t)_t$，属于$\mathrm{Diff}^\infty_c(\mathbb{A})$，从 $f_0 =$ 恒等映射 到 $f_1 \in \mathrm{Diff}^\infty_c(\mathbb{A})$，它将一对形如 $\mathbb{T} \times \{y_-, y_+\}$ 的圆映射到 γ，其中 $-1 \le y_- < y_+ \le 1$:

$$f_1(\mathbb{T} \times \{y_+\}) = \gamma_+ \quad and \quad f_1(\mathbb{T} \times \{y_-\}) = \gamma_-.$$

我们称该双曲线与直双曲线 $\mathbb{T} \times \{y_-, y_+\}$微分同伦。

我们用 $\Gamma_2(\mathbb{A})$ 表示 $\mathbb{A}$上双曲线的集合。
于是， $\mathbb{M}$ 上的双曲线集合 $\Gamma_2(\mathbb{M})$ 由 $\mathbb{A}$ 上的双曲线经 π 映射所得的像构成:

$$\Gamma_2(\mathbb{M}) = \{\pi(\gamma) \,:\, \gamma \in \Gamma_2(\mathbb{A})\}.$$

注 2.6。在情形 $\mathbb{M} = \mathbb{S}$下，由于 π的非单射性，双曲线可能是一对点: $\pi(\mathbb{T} \times \{-1; 1\}) = \{N, S\}$。

根据双曲线的这一定义，我们引入 $\mathbb{M}$ 中对应于给定双曲线的γ不同有趣部分。（见图1）

记号 2.7。

- 带状区域 $B(\gamma, \kappa) := \{x \in \mathbb{M} : \, d(x, \gamma) < \kappa\}$ 对任意 $\kappa > 0$。
- $A(\gamma)$ 是 $\mathbb{M} \setminus \gamma$ 的一个连通分支，其边界为 γ，且 $A(\gamma, \kappa) = A(\gamma) \setminus B(\gamma, \kappa)$。
- $O(\gamma) := \mathbb{M} \setminus (\gamma \cup A(\gamma))$ 和 $O(\gamma, \kappa) = O(\gamma) \setminus B(\gamma, \kappa)$。

接下来，为了定义我们的方案，对于 $0 \le r \le +\infty$，我们定义一个集合 $\mathcal{T}^r_\Gamma$，它由 $\mathrm{Symp}^r(\mathbb{M}; \partial\check{}\mathbb{M})$ 的开子集构成。集合 $\mathcal{T}^r_\Gamma$ 是 $\mathcal{T}^r_\gamma$ 在 $\gamma \in \Gamma_2(\mathbb{M})$ 中的并，其中每个 $\mathcal{T}^r_\gamma$ 都是 $\mathrm{Symp}^r(\mathbb{M}; \partial\check{}\mathbb{M})$ 的拓扑，其基由 $\mathrm{Symp}^r(\mathbb{M}; \partial\check{}\mathbb{M})$ 中 $f \in$的开邻域构成，具体如下:

$$\left\{g \in \mathrm{Symp}^r(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}}),\, d_{C^s}(g|_{\mathbb{M}\setminus B(\gamma,\kappa)}, f|_{\mathbb{M}\setminus B(\gamma,\kappa)}) < \epsilon\right\}$$

取自 $\epsilon > 0$、有限个 $s \le r$ 和 $\kappa > 0$。

注 2.8. 注意，由 $\mathcal{T}^r_\gamma$ 的并所生成的拓扑是 辛映射$^r(\mathbb{M}; \partial\check{}\mathbb{M})$上的典范 C^r-拓扑，因为对两个不相交的双曲线 γ 和 γ'，取前述开集的交，再令 κ、 κ' 足够小，就能得到 辛映射$^r(\mathbb{M}; \partial\check{}\mathbb{M})$中 f 的通常 ϵ-邻域。因此，与 $\mathcal{T}^r$相反，集合 $\mathcal{T}^r_\Gamma$ 不是一个拓扑。

注 2.9. 取 $\gamma_0 := \pi(\mathbb{T} \times \{-1;\ 1\})$ 得到 $\mathbb{M} \setminus \gamma_0 = \check{}\mathbb{M}$。即 $\mathcal{T}^r_{\gamma_0}$ 是来自后一 *AbC* 方案的拓扑 $\mathcal{T}^r$。因此，我们可以通过即将引入的 *AbC** 方案得到 *AbC* 方案的推广。

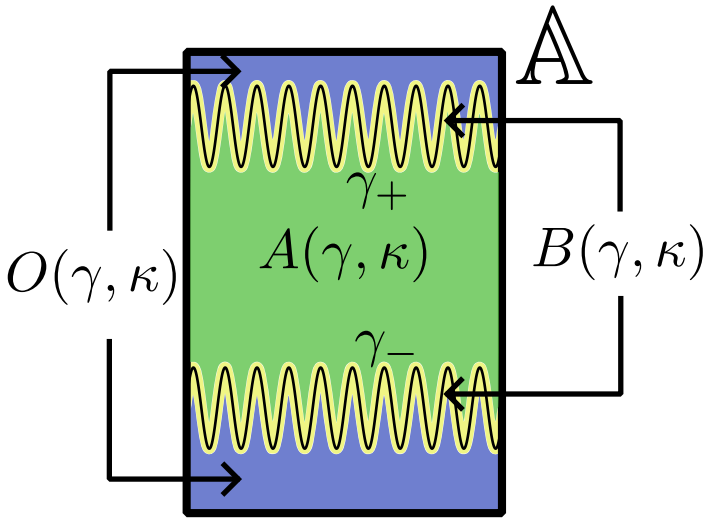


图 1：圆柱上的双曲线

接下来我们引入 AbC⋆ 方案。

定义 2.10（AbC⋆ 方案）。一个 C^r-*AbC⋆ 方案是一个映射*：

$$(h,\alpha)\in \mathrm{Symp}^r(\mathbb{M};\partial\check{\mathbb{M}})\times\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\mapsto (U(h,\alpha),\nu(h,\alpha))\in\mathcal{T}^r_\Gamma\times(0,\infty)$$

使得：

ˆ*a)* 每个开集 $U(h,\alpha)$ 都包含一个映射 h，满足

$$\hat{h}\circ R_\alpha\circ\hat{h}^{-1}=h\circ R_\alpha\circ h^{-1}.$$

ˆ*b)* 存在一个 $\gamma\in\Gamma_2(\mathbb{M})$，在 R_α 下不变，使得 $U(h,\alpha)\in\mathcal{T}^r_\gamma$且 $h|_{O(\gamma)}=h|_{O(\gamma)}$。

c) 给定任意序列 $(h_n)_n\in$ 辛映射$^r(\mathbb{M};\partial\check{}\mathbb{M})^{\mathbb{N}}$ 和 $(\alpha_n)_n\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$，满足：

$$h_0=\mathrm{id}\,,\quad \alpha_0=0,$$

并且对于 $n\geq 0$:

$$h_{n+1}\circ R_{\alpha_n}\circ h_{n+1}^{-1}=h_n\circ R_{\alpha_n}\circ h_n^{-1},$$
$$h_{n+1}\in U(h_n,\alpha_n)\ \ and\ \ 0<|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\nu(h_{n+1},\alpha_n)$$

那么序列 $f_n:=h_n\circ R_{\alpha_n}\circ h_n^{-1}$收敛到一个映射 f，其属于 辛映射$^r(\mathbb{M})$。

映射 f 称为由 C^r-方案 (U,ν) 构造而成。

由于该方案旨在构造满足某个性质（$\mathcal{P}$）的映射。我们还定义如下内容。

定义 2.11（AbC⋆ 可实现）。辛映射$\mathrm{Symp}^r(\mathbb{M})$ 上的一个性质（$\mathcal{P}$）是 *AbC⋆* 可实现的 C^r-性质，当且仅当：

1. 性质（$\mathcal{P}$）在 辛映射^r（$\mathbb{M}$）-共轭下是不变的：如果 $f\in$辛映射^r（$\mathbb{M}$）满足（$\mathcal{P}$），那么对于任意 $h\in$ 辛映射^r（$\mathbb{M}$），$h\circ f\circ h^{-1}$ 也满足该性质。*2.* 存在一个 C^r-*AbC⋆* 方案，使得由其构造的每个映射 $f\in$辛映射^r（$\mathbb{M}$）都满足（$\mathcal{P}$）。

为了证明定理 A，我们将在第3 节证明以下内容。

命题 2.12. 最小遍历是一个可由 *AbC** 实现的 C^0-性质。

那么，正如上文所述，我们可以用这个方案推广 AbC 方案。

命题 2.13. 一个 C^r-*AbC* 方案 (U,ν) 是一个 C^r-*AbC** 方案。特别地，如果某个性质 $(\mathcal{P})$ 是一个可由 *AbC* 实现的 C^r-性质，那么它就是一个可由 *AbC** 实现的 C^r-性质。

证明。 设 (U,ν) 是一个 C^r-AbC 方案。注意，拓扑 $\mathcal{T}^r$ 就是拓扑 $\mathcal{T}^r_{\gamma_0}$，其中$\gamma_0=\pi(\partial\mathbb{A})$。于是，定义 2.10 的条件 a) 和 c) 即为定义 2.1的条件 a) 和 b)。此外，定义 2.10 中的条件 b) 得以满足，因为 γ_0 在所有旋转下均不变，且集合 $O(\gamma_0)$ 为空。因此，(U,ν) 定义了一个 AbC* 方案。 □

在该方案中使用开集使我们能够运用稠密性结果，从而如下所述，一个可实现性质对于更强的正则性也是可实现的。

命题 2.14. 对于 $+\infty\geq s>r\geq 0$，若 $(\mathcal{P})$ 是一个 *AbC** C^r-可实现性质，则它是一个 *AbC**C^s-可实现性质。

我们在下文证明该命题，其方式与 Berger 在 [Ber24的命题 2 中所做的相同。6]。

最后，我们可以将前述 AbC 原理推广为 AbC* 原理，从而引入解析性。

定理 2.15（AbC* 原理）。对每一个 $0\leq r\leq\infty$，任一 *AbC** 可实现的 C^r-性质都由映射 $f\in$辛映射$^\omega(\mathbb{M})$ 所满足。

为得到该原理，我们将改进第 4.1 节中的一个逼近定理，以涵盖双曲线。随后，仍需将 Berger 的工作调整以适应该定理，并在第 4节的其余部分给出我们的证明。

作为 AbC* 原理的一个应用，我们有：

定理 *A* 的证明。 这是 AbC 的直接推论* 原理以及命题 2.12中给出的极小遍历性的实现。

□

命题 *2.14* 的证明。 设 (U,ν) 是一个 C^r-AbC* 方案，实现性质 $(\mathcal{P})$。定义一个$\widetilde{\ }C^s$-AbC* 方案 $(U,\widetilde{\nu})$，它同样实现性质 $(\mathcal{P})$。

$\widetilde{\ }$由于 Symp$^s(\mathbb{M})$ 在 Symp$^r(\mathbb{M})$ 中稠密（根据 [Zeh77] 和 [Oh06], ），我们定义映射 U 如下：

$$\widetilde{U}:(h,\alpha)\in\mathrm{Symp}^s(\mathbb{M};\partial\check{\mathbb{M}})\times\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\mapsto U(h,\alpha)\cap\mathrm{Symp}^s(\mathbb{M};\partial\check{\mathbb{M}})\in\mathcal{T}^s_\Gamma.$$

$\widetilde{\ }$首先，我们证明 U 满足定义 2.10中的 a) 和 b)。

设 h 属于 Symp$^s(\mathbb{M};\partial\check{\ }\mathbb{M})$，且 $\alpha=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，其中 $p\wedge q=1$。根据定义 2.10 中 $\hat{\ }$ 的 a) 和 b)，对于 AbC* 方案 (U,ν)，存在一条 $\gamma\in\Gamma_2(\mathbb{M})$ 不变双曲线，在 R_α 和 $h_0\in U(h,\alpha)$ 下不变，使得：

1) $\hat{\ }h_0$ 满足 $\hat{\ }h_0\circ R_\alpha\circ\hat{\ }h_0^{-1}=h\circ R_\alpha\circ h^{-1}$,

$\hat{\ }$2) $U(h,\alpha)\in\mathcal{T}^r_\gamma$且 h_0在 $O(\gamma)$ 上与 h重合。

注意，1) 意味着辛同胚 $h^{-1}\circ\hat{\ }h_0$ 与 R_α 交换；根据 2)，它保持 $A(\gamma):=\mathbb{M}\setminus(O(\gamma)\cup\gamma)$ 不变，因为它在包含 γ 的 $\partial O(\gamma)\cup(\mathbb{M}\setminus\check{\ }\mathbb{M})$ 上与恒等映射重合。

我们可以根据拓扑 $\mathcal{T}^s_\gamma$ 的定义以及 2)，观察属于 $\mathcal{T}^s_\gamma$。因此我们旨在寻找 $\hat{\ }h_1\widetilde{\in}\widetilde{U}(h,\alpha)$，使得：

1') $\hat{h}_1$ satisfies $\hat{h}_1 \circ R_\alpha \circ \hat{h}_1^{-1} = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$,

2') $\hat{h}_1$ coincides with h on $O(\gamma)$.

~这将给出定义 2.10 中关于 U 的 a) 和 b)。下面我们使用一个将在下文证明的事实来 ^定义 h_1。

事实 2.16. 设 $S \subset \mathbb{M}$ 是一个开圆柱，在 R_α 和 $h_0 \in$ 辛映射$^r(S)$ 作用下不变，且与R_α交换，其中 $0 \le r \le +\infty$。那么，对于紧开拓扑 C^r 下辛映射$^r(S, \mathbb{M})$中 h_0 的任意邻域 $\mathcal{U}$，都存在与 R_α交换的 $h_1 \in$ 辛映射$_c^\infty(S) \cap \mathcal{U}$。

稍后由命题 4.15 可知， $A(\gamma)$ 与开圆柱 $\mathbb{T} \times (y_-, y_+)$ 在与 π 复合后辛同胚。因此，我们将对开圆柱 $S := A(\gamma)$ 应用这一事实（它同样在 R_α 作用下不变，正如 γ），取 $h_0 := h^{-1} \circ \hat{h}_0|_S$ 和 $\mathcal{U} := \{(h^{-1} \circ g)|_S, g \in U(h, \alpha)\}$ ($\mathcal{U}$，根据拓扑的定义，后者确实是紧开拓扑 C^r 下 Symp$^r(S, \mathbb{M})$ 中 h_0 的一个邻域$\mathcal{T}_\gamma^r$）。由事实 2.16，存在 $h_1 \in$Symp$_c^\infty(S)$，使得 $\cap \mathcal{U}$ 与 R_α 交换。

~由于 h_1 在 S中是紧支撑的，我们将其通过在 $\mathbb{M} \setminus S$上取恒等映射，规范地延拓为辛同胚 $h_1 \in$ Symp$^\infty$($\mathbb{M}$; $\partial\check{}\mathbb{M}$)。注意， $\tilde{h}_1$ 也与 R_α交换。令 ^ $h_1 := h \circ \tilde{h}_1$。根据 $\mathcal{U}$的 ^ 构造，映射 h_1 属于 $U(h, \alpha)$，因此：

$$\hat{h}_1 \in U(h, \alpha) \cap \mathrm{Symp}^s(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}}) = \widetilde{U}(h, \alpha).$$

^ ~此外， h_1 满足 1') 和 2')。因此，映射 U 满足定义 2.10中的 a) 和 b)。

最后，为了得到 c)，我们可以注意到 Symp^s($\mathbb{M}$; $\partial\check{}\mathbb{M}$) 是一个带有距离 d的 Fr´echet 空间。因此~，只需缩减 $\nu(h, \alpha)$ 并定义一个新的映射 $\widetilde{\nu}$，以确保对于每个满足 $\widetilde{p} \wedge \widetilde{q} = 1$且使 $0 < |\widetilde{\alpha} - \alpha| < \widetilde{\nu}(h, \alpha)$ 成立的 $\widetilde{\alpha} = \frac{p}{\widetilde{q}}$，都有 $\widetilde{q} > 2q$，并且

$$d(h \circ R_\alpha \circ h^{-1}, h \circ R_{\widetilde{\alpha}} \circ h^{-1}) \le \frac{1}{q}.$$

~于是，任一满足方案（U， $\widetilde{\nu}$）的序列（h_n， α_n）$_n$构造出一个映射 $f \in$ 辛映射^s（$\mathbb{M}$），它是关于距离 d 的柯西序列（$h_n \circ R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1}$）$_n$ 的极限。此外，由于该方案~包含在方案（U， ν）（$U \subset U$ 与 $\widetilde{\nu} \le \nu$）之中，因此 f 也可由 C^r-方案（U， ν）构造而成，从而它满足（$\mathcal{P}$）。□

事实 2.16 的证明。设 $S \subset \mathbb{M}$ 是在 R_α下不变的开圆柱， $h_0 \in$辛映射^r（S）与 R_α 交换，并设 $\mathcal{U}$ 是 h_0 在辛映射^r（S， $\mathbb{M}$）的 C^r 紧开拓扑中的一个邻域。首先，注意到由于 h_0 在开圆柱 S/R_α 上诱导一个辛同胚，通过在该曲面上构造辛同胚再将其拉回到 S，我们可以假定 $\alpha = 0$。其次，由[Zeh77] 与 [Oh06]„ 空间辛映射$^\infty$（S）在辛映射^r（S）中稠密。此外，由于 S 与开圆柱 $\check{}\mathbb{A}$ 辛同胚，Ham$_c^\infty$（$\check{}\mathbb{A}$）在辛映射$^\infty$（$\check{}\mathbb{A}$）中的稠密性与前述稠密性结果合在一起，对任意有限的 $\eta > 0$、 $t \le r$ 以及 S 的任意紧子集 K，都保证存在 $h_1 \in$辛映射$_c^\infty$（S），它在 K 上与 h 是 η C^t-接近的。然后我们选取 η、 t 与 K，使得 h_1 属于邻域 $\mathcal{U}$。

□

3 极小遍历性

本节旨在证明命题2.12 ，该命题指出，最小遍历是 AbC*-可实现的 C^0 性质。

我们首先回顾极小遍历性的如下定义。

定义 3。 1. 设 f 是 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{A}; \mathbb{S}; \mathbb{D}\}$上的一个辛同胚。若它极小遍历，如果 f 恰好有 $y3$ 个遍历测度。

事实上，在我们的曲面上，3 是遍历测度的最小数量。圆柱上的下界是自然的，因为边界的每个连通分支上至少有一个遍历测度，内部的一个遍历分量上也至少有一个。对于圆盘，内部的一个遍历分量上至少有一个，边界上也至少有一个；此外，由于我们研究的是保面积微分同胚，布劳威尔平面平移定理意味着[1] 内部至少有一个不动点，从而产生第三个遍历测度。在球面上，由于每个辛同胚都与恒等映射同伦[2] 根据 Lefschetz 不动点定理，至少有一个不动点，由此得到一个遍历测度；此外，去掉该点后的球面与圆盘的内部辛同胚，而根据前文，后者至少有两个遍历测度，因此共有 3 个。

此外， [FK04] 在任意 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{D}, \mathbb{A}, \mathbb{S}\}$ 上构造出恰有 3 个遍历测度的光滑辛同胚，这证明了此定义的合理性。

我们注意到 任何 C^0-AbC* 方案的实现都属于以下子集 $\mathcal{F}$辛映射^0($\mathbb{M}; \partial\check{}\mathbb{M}$):

$$\mathcal{F} := \overline{\left\{h \circ R_\alpha \circ h^{-1} \,:\, h \in \mathrm{Symp}^0(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}}),\, \alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right\}}^{C^0}.$$

注意，每个辛同胚 f 都使测度 $\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}$ 和 $\mu_{\pm 1} = \pi_*(\mathrm{Leb}^{\mathbb{T}\times\{\pm 1\}})$保持不变，其中 $\pm \in \{-, +\}$。特别地，我们有如下包含关系：

$$Conv(\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}, \mu_1, \mu_{-1}) \subset \mathcal{M}(f), \tag{3.1}$$

其中 $\mathcal{M}(f)$ 是 f 的不变概率测度集合，而 $Conv$ 表示凸包。此外，我们可以证明，当且仅当该辛同胚是最小遍历的时，这个包含关系取等号。

命题 3.2。 辛同胚 $f \in \mathcal{F}$ 是最小遍历的，当且仅当

$$Conv(\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}, \mu_1, \mu_{-1}) = \mathcal{M}(f).$$

证明。 首先，如果等式成立，那么根据遍历分解定理， f 的 3 个遍历测度就是 $\mathcal{M}(f)$的极点，即 $\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}$、 μ_1和 μ_{-1}。于是 f 恰有 3 个遍历测度，并且是最小遍历的。反过来，设 ν_{-1}、 ν_0和 ν_1 是 f 的遍历测度。根据 $\mathcal{F}$的定义，在 $\pi(\mathbb{T} \times \{\pm 1\})$的每个连通分支 C 上（该连通分支是一个圆，否则就是一个不动点），限制映射 $f|C$ 是一个刚性旋转。由极小遍历性可知，这个旋转必须是无理数旋转。由此可推得 μ_{-1} 和 μ_1 是遍历的。因此，我们可以假设 $\nu_{\pm 1} = \mu_{\pm 1}$。接下来，根据遍历分解定理，有 $\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}} \in Conv(\mu_{-1}, \nu_0, \mu_1)$。然而，由于 $\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}(\mathrm{sup}(\mu_{\pm 1})) = 0$，因此可得 $\nu_0 = \mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}$。于是，根据遍历分解定理，我们重新得到$Conv(\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}, \mu_1, \mu_{-1}) = \mathcal{M}(f)$。□

注 3.3。 我们证明了最小遍历的 $f \in \mathcal{F}$ 的遍历测度是勒贝格测度$_{\mathbb{M}}, \mu_1, \mu_{-1}$。

接下来，根据遍历分解定理，我们可以用以下量来量化辛同胚 f 距离达到最小遍历还有多远：

$$\Delta_{merg}(f) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{erg}(f)} d_K\left(\mu, Conv(\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}, \mu_1, \mu_{-1})\right), \tag{3.2}$$

[1]由于开圆盘与平面同胚 $\mathbb{R}^2$，开圆盘上的同胚 h 与 g 上的 $\mathbb{R}^2$同胚共轭。如果 h没有不动点，那么 g 也没有不动点；根据布劳威尔平面平移定理，它存在平移域，这些平移域会为 h产生游荡域。然而，圆盘上的保面积微分同胚不存在游荡域，因此 h 存在不动点。[2]由于辛映射($\mathbb{S}$)允许通过 SOSma 给出的强变形收缩 (3)， [Sma59], 该空间是连通的，并且每个辛同胚都通过一条路径与恒等映射相连

其中， $\mathcal{M}_{erg}(f)$ 是 f 的遍历测度集合。

那么，根据后一个命题和遍历分解定理， $f \in \mathcal{F}$ 是最小遍历的，当且仅当 $\Delta_{merg}(f) = 0$。

利用 AbC⋆ 方案，我们将构造一个收敛到某个 f 的序列 $f_n = h_n \circ R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1}$，使得：

$$\Delta_{merg}(f) = \lim_{n\to\infty} \Delta_{merg}(f_n) = 0.$$

事实上， f 是最小遍历的。有趣的是， f_n 共轭于一个有理旋转，因此有无穷多个遍历不变测度，但当 n 很大时， $\Delta_{merg}(f_n)$很小。

接下来，为了定义一种构造最小遍历辛同胚的方案，我们首先利用 [FK04 定理 3 的构造。3] 在第3.1 节中，构造辛同胚 g ，使其将测度（μ_y）$_{y\in\mathbb{I}}$ 推至靠近凸包 $Conv$(勒贝格测度$_{\mathbb{M}}$， μ_1， μ_{-1})，其中 $\mu_y = \pi_*$ 勒贝格测度$_{\mathbb{T}\times\{y\}}$。随后，在第 3.2 节中，我们利用这些辛同胚定义一个 AbC⋆ 方案 g。根据 Δ_{merg}，该方案将确保分母较大的有理旋转的共轭接近于最小遍历。

3.1 极小遍历性的引理

我们考虑 $C := Conv$(勒贝格测度$_{\mathbb{M}}$， μ_1， μ_{-1})。
我们调整 Fayad 和 Katok 使用凸包的构造，使得在构建方案时，可以使用 Δ_{merg} “距离”最小遍历的量化度量。此外，为了在下一节中用它来定义一个 AbC⋆ 方案，我们将在此构造中使用双曲线（见定义2.5和记号 2.7）。

引理 3.4. 设 $q \in \mathbb{N}^*$ 和 $\epsilon > 0$，则存在 $g \in$ 辛映射$_c^\infty(\mathbb{M};\ \partial\breve{}\mathbb{M})$ 以及 $\gamma \in \Gamma_2(\mathbb{M})$，使得：

i) g与 $R_{\frac{1}{q}}$交换，且 γ在 $R_{\frac{1}{q}}$下不变，

ii) 对于每个 $y \in [-1;\ 1]$、 d_K（$g_*\mu_y$、 C） $< \epsilon$,

iii) 以及 $g|_{O(\gamma)} =$ 恒等映射和 上确界$_{y\in\mathbb{I}}$（μ_y（B（γ、 κ））） $\underset{\kappa\to 0}{\longrightarrow} 0$。

证明思路。 为了得到 i），只需为 $q = 1$构造这样的 g 和 γ 。然后，利用勒贝格测度$_{\mathbb{M}}$、 μ_1 和 μ_{-1} 在 R_1 下的不变性，我们通过有限覆盖将其推广到任意 q。$_q$

接下来，为了得到 iii），我们构造一个支集在 A(γ)中的辛同胚 g ，其中 $\gamma \in \Gamma_2$(M)为一条双曲线。由于 g 的支集在 A(γ)中，我们得到 iii）的第一部分： $g|_{O(\gamma)}$ =恒等映射。然后，在圆柱上用缩放余弦曲线的图像定义这条双曲线，从而在任意 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{S}\}$上得到一条双曲线；每条经线 $\pi($ $\mathbb{T} \times \{y\}$)都与该双曲线相交于一个有限集。因此，我们得到性质 iii）的第二部分：与宽度为 κ 的带状区域 $B(\gamma,\ \kappa)$相交的经线 $\pi(\mathbb{T} \times \{y\})$的比例，当 κ 趋于 0 时趋于 0，并且关于 $y \in \mathbb{I}$一致。

最后，为了得到 i），我们考虑沿 $\mathbb{T}$ 轴分布的 N 竖直盒（A_l）$_{1\le l\le N}$ ，它们位于 A（γ）中，并经过精心设计，使得每条经线 π（$\mathbb{T} \times \{y\}$）要么有很大一部分位于 O（γ）中，要么位于这些盒子（A_l）$_l$ 中（见图 2）。接下来，我们希望通过辛同胚将这些盒子映射到体积相同（˜）A_l、并在 A（γ）中均匀分布的盒子中。以下辛几何中的民间定理（例如参见 Ber22, §4.1]）提供了这样的辛同胚 g ，它是莫泽技巧的推论：

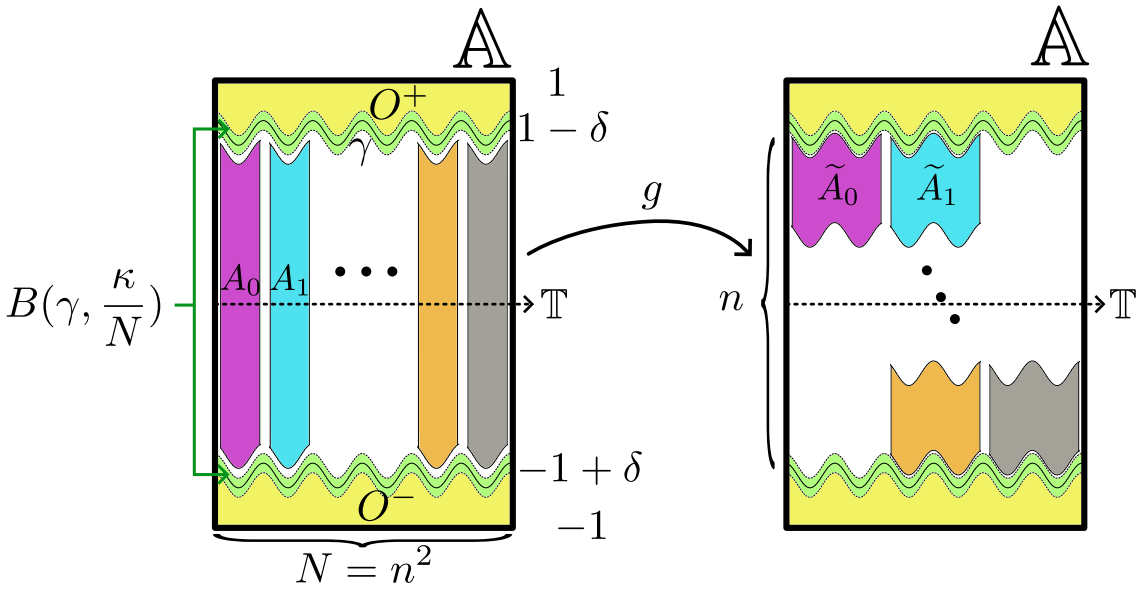


图 2：极小遍历性引理

定理3.5。 设 $(D_l)_{1\le l\le N}$ 和 $(D'_l)_{1\le l\le N}$ 是有限体积辛曲面 (S,ω) 内部的两族互不相交的光滑圆盘，并且对每个 l，都有勒贝格测度(D_l) = 勒贝格测度(D'_l)。那么存在 $f\in$ 辛映射$_c^\infty(S)$，使得对每个 l，都有 $f(D_l) = D'_l$。

然后，我们可 将每条经线 $\pi(\mathbb{T}\times\{y\})$ 的大部分分成两个子集（其中一个可能为空）：

1. $\pi(\mathbb{T}\times\{y\})$ 与 $A(\gamma)$ 的交集，其经 g 映射后的像在 $A(\gamma)$ 中接近一致分布。2. $\pi(\mathbb{T}\times\{y\})$ 与 $O(\gamma)$ 的交集，在该交集上 $g = id$，并且其在 $\pi(\mathbb{T}\times\{y\})$ 中接近均匀铺展。

取双曲线 γ，使其接近 $\pi(\mathbb{T}\times\{-1,1\})$，则 $A(\gamma)$ 上的等分布接近于关于勒贝格测度 $_{\mathbb{M}}$ 的等分布，而第二个集合——只要它非空——则接近于关于 μ_1 或 μ_{-1} 的等分布。因此，映射 g 将每个测度 μ_y 推前为一个接近于勒贝格测度 $_{\mathbb{M}}$、 μ_1 和 μ_{-1} 的凸组合的测度。□

引理 *3.4*的 证明。要得到 i），如证明概要中所述，只需构造这样一个g 和 γ，使得 $q = 1$。

首先，让我们定义双曲线。令 $n\in\mathbb{N}^*$ 满足 $N := n^2 \gg \frac{1}{\epsilon^4}$，令 $1>\delta\gg\delta'>0$ 满足满足 $\delta\ll$ ϵ 并设：

$$v : \theta\in\mathbb{T}\mapsto \delta'\cos(N\theta)\in\ [-\delta',\delta'].$$

我们定义双曲线 $\gamma := \gamma_+\sqcup\gamma_-\in\Gamma_2(\mathbb{M})$[3] 如下：

$$\gamma_+ := \pi\left(\{(\theta, v(\theta)+1-\delta)\ ,\ \theta\in\mathbb{T}\}\right)\quad\text{and}\quad \gamma_- := \pi\left(\{(\theta, v(\theta)-(1-\delta))\ ,\ \theta\in\mathbb{T}\}\right)\tag{3.3}$$

我们还考虑：

$$\gamma_+^v : \theta\in\mathbb{T}\mapsto v(\theta)+1-\delta\quad\text{and}\quad \gamma_-^v : \theta\in\mathbb{T}\mapsto v(\theta)-(1-\delta),$$

[3]注意，考虑哈密顿量 $H:(\theta,\ y)\ \mapsto\chi(y)\frac{\delta'}{N}\sin(N\theta)$ 的时间一流作为微分同伦，便可看出 γ 确实是一条双曲线。其中，χ 是$-1-\delta$ 和 $-1+\delta$ 附近的鼓包函数。

使得 $\gamma_\pm = \pi(\{(\theta, \gamma_\pm^v(\theta)) \quad \theta \in \mathbb{T}\})$。

由于 γ 由圆柱上缩放余弦的图像定义，因此每条经线$\pi(\mathbb{T} \times \{y\})$与 γ 相交于一个有限集。由此我们得到iii）的第二部分：

$$\sup_{y \in \mathbb{I}} (\mu_y(B(\gamma, \kappa))) \underset{\kappa \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4}$$

对于iii）的第一部分，它直接源于如下事实：稍后定义的 g的支集位于 $A(\gamma)$中。

接下来，我们用映射 v 来定义将被 g移动的盒子$(A_l)_{0 \le l < N}$以及其他相关集合。对于满足 $\kappa \ll \delta'$的 $l \in [\![0, N-1]\!]$ 与 $\kappa > 0$，我们考虑：

$$\begin{aligned}
I_l &:= \left[\frac{l+\kappa}{N}, \frac{l+1-\kappa}{N}\right] \subset \mathbb{T} \\
A_l &:= \pi\left(\left\{(\theta, y) \in \mathbb{A} : \theta \in I_l, \gamma_-^v(\theta) + \frac{2\kappa}{N} \le y \le \gamma_+^v(\theta) - \frac{2\kappa}{N}\right\}\right) \subset A(\gamma) \\
O^+ &:= \pi\left(\left\{(\theta, y) \in \mathbb{A} : \theta \in \mathbb{T}, y \ge \gamma_+^v(\theta) + \frac{\kappa}{N}\right\}\right) \subset O(\gamma) \\
O^- &:= \pi\left(\left\{(\theta, y) \in \mathbb{A} : \theta \in \mathbb{T}, y \le \gamma_-^v(\theta) - \frac{\kappa}{N}\right\}\right) \subset O(\gamma).
\end{aligned}$$

见图2。

~现在，我们定义希望借助 g将$(A_l)_l$ 送往的盒子$(A_l)_{0 \le l < N}$。我们考虑一个双射$l \in [\![0, N-1]\!] \mapsto (l_1, l_2) \in [\![0, n-1]\!]^2$，并对 $l \in [\![0, N-1]\!]$定义：

$$\widetilde{A}_l := \pi\left(\left\{(\theta, y) \in \mathbb{A} : \theta \in \widetilde{I}_{l_1}, \gamma_+^v(\theta) - \frac{\kappa}{N} - \frac{l_2+1}{n}H + \frac{\kappa}{n^3} \le y \le \gamma_+^v(\theta) - \frac{\kappa}{N} - \frac{l_2}{n}H - \frac{\kappa}{n^3}\right\}\right) \subset A(\gamma)$$

where $\widetilde{I}_l = [\frac{l_1+\kappa}{n}; \frac{l_1+1-\kappa}{n}]$ and $H = \gamma_+^v(\theta) - \gamma_-^v(\theta) - 2\kappa/N = 2(1 - \delta - \kappa/N)$.

~接下来，为了使用定理3.5 将盒子（A_l）$_l$ 映射到盒子（A_l）$_l$，我们需要确认它们具有相同的面积。记 $\mathbf{Leb}_\mathbb{I}$ 为由 $\mathbb{I} = [-1, 1]$ 上的勒贝格测度诱导的概率测度， $\mathbb{R}$也就是说，对于 $[a, b] \subset I$，有 $\mathbf{Leb}_\mathbb{I}[a, b] = \frac{b-a}{2}$。因此有 $\mathbf{Leb}_\mathbb{A} = \mathrm{Leb}_\mathbb{T} \otimes \mathrm{Leb}_\mathbb{I}$，并且面积如下：

$$\mathrm{Leb}_\mathbb{M}\, A_l = \mathrm{Leb}_\mathbb{T}\, I_l \cdot \mathrm{Leb}_\mathbb{I}[-1 + \delta + 2\frac{\kappa}{N}, 1 - \delta - 2\frac{\kappa}{N}] = \frac{1 - 2\kappa}{N}\frac{H - \frac{2\kappa}{N}}{2} \tag{3.5}$$

and

$$\mathrm{Leb}_\mathbb{M}\, \widetilde{A}_l = \mathrm{Leb}_\mathbb{T}\, \widetilde{I}_l \cdot \frac{\frac{H}{n} - 2\frac{\kappa}{n^3}}{2} = \frac{1 - 2\kappa}{n}\frac{\frac{H}{n} - 2\frac{\kappa}{n^3}}{2} = \frac{1 - 2\kappa}{N}\frac{H - 2\frac{\kappa}{N}}{2} = \mathrm{Leb}(A_l).$$

接下来，这些盒子具有相同的面积，且位于 $A(\gamma)$中。因此，存在两两不相交的圆盘（D_l）$_{0 \le l < N}$ ~ ~以及位于 $A(\gamma)$中的两两不相交的圆盘（D_l）$_{0 \le l < N}$，它们的体积相同，并且 $A_l \subset D_l$，且对每个 l都有 $A_l \subset D_l$。此外，我们可以要求 $\widetilde{D}_l$ 的直径为 $\Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$（因为 $\widetilde{A}_l$也满足这一点）;-其中， n 上的平方根源自 π 为 1/2-H¨older 连续（ π的表达式见第 4 页）。这一性质将使我们能够得到圆盘（$\widetilde{D}_l$）$_l$ 在 $A(\gamma)$中的等分布，因为 $n \gg \frac{1}{\epsilon^2}$。
因此，根据定理3.5，存在 g 属于辛映射$c^\infty(\mathbb{M}; \partial\, \mathbb{M})$，它将 D_l 映到 $\widetilde{D}_l$，对每个 l 都成立，并且在 $O(\gamma)$上等于恒等映射（这就得到了iii））。
参见图 2了解构造。

现在证明 g 满足引理 3.4的 ii）部分。设 $A := \sqcup_l A_l$，我们将利用每条经线 $\pi(\mathbb{T}\times\{y\})$ 的大部分都位于 $A\sqcup O^+\sqcup O^-$ 中，在那里我们可以控制 g 的行为，从而得到 $g_*\mu_y$ 接近于 $Conv$(勒贝格测度$_{\mathbb{M}}$，μ_{-1}，μ_1)。

我们注意到 $\mu_y(O^+\sqcup A\sqcup O^-)$ 在 y 中一致地接近 1，因为 $(A_l)_l$ 彼此 $\frac{2\kappa}{N}$ 在垂直方向上相隔一定距离，由等式 (3.4) 以及 $\kappa\ll 1$。特别地，我们有 $1-\sup_y \mu_y(O^+\sqcup A\sqcup O^-)\le \frac{\epsilon}{2\,\mathrm{diam}(\mathcal{M}(\mathbb{M}))}$，因为 $\kappa\ll\epsilon$。接着，根据命题 A.5中关于测度凸组合的一个结果，对每个 y:

$$d_K(g_*\mu_y, g_*\nu_y)\le\frac{\epsilon}{2}, \tag{3.6}$$

其中 $\nu_y := \mu_y|_{O^+\cup A\cup O^-}$。这里，对于满足 $\mu_y(E)\neq 0$ 的 $E\subset\mathbb{M}$，测度 $\mu_y|_E$ 表示将 μ_y 限制在 E 上得到的概率测度：其定义为 $\mu_y|_E(E') = \frac{\mu_y(E\cap E')}{\mu_y(E)}$。对于满足 $\mu_y(E)=0$ 的 $E\subset\mathbb{M}$，$\mu_y|_E$ 是零测度。于是我们得到以下凸组合：

$$g_*\nu_y = \nu_y(A)g_*(\nu_y|_A)+\nu_y(O^+)g_*(\nu_y|_{O^+})+\nu_y(O^-)g_*(\nu_y|_{O^-}) \tag{3.7}$$

证明当 $\nu_y(A)$、$\nu_y(O^+)$ 和 $\nu_y(O^-)$ 分别非零时，$g_*(\nu_y|_A)$、$g_*(\nu_y|_{O^+})$ 和 $g_*(\nu_y|_{O^-})$ 分别与 $\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}$、$\mu_1$ 和 μ_{-1} 的距离小于 $\frac{\epsilon}{2}$。

设 $\pm$ 属于 $\{-,+\}$，且 y 满足 $\nu_y(O^\pm)$ 非零。证明 $g_*(\nu_y|_{O^\pm})$ 与 $\mu_{\pm1}$ 的距离小于 $\frac{\epsilon}{2}$。首先，由于 g 在 $O^\pm\subset O(\gamma)$ 上是恒等映射，可得 $g_*(\nu_y|_{O^\pm}) = \mu_y|_{O^\pm}$。接着，考虑康托罗维奇距离。由于用于定义 γ 的映射 v 是 N-周期的，且 $N\gg\frac{1}{\epsilon^4}$，$\mu_y|_{O^\pm}$ 的质量在 $\pi(\mathbb{T}\times\{y\})$ 上一致地分布，因此 $\mu_y|_{O^\pm}$ 与 μ_y 的距离小于 $\frac{\epsilon}{4}$。此外，$\nu_y(O^\pm)$ 非零当且仅当 $\pm y>1-\delta-\delta'+\frac{\kappa}{N}$，由此可知 $\mu_y|_{O^\pm}$ 与 $\mu_{\pm1}$ 的距离小于 $\frac{\epsilon}{4}$，因为 δ，δ'，$\kappa\ll\epsilon$。于是得到：

$$d_K(\mu_{\pm1}, g_*(\nu_y|_{O^\pm}))\le\frac{\epsilon}{2}\quad\text{when}\quad\nu_y(O^\pm)\neq 0. \tag{3.8}$$

接下来，对于满足 $\nu_y(A)\neq 0$ 的 y，我们利用命题 A.6 得到 $g_*(\nu_y|_A)$ 与勒贝格测度$_{\mathbb{M}}$ 是 $\frac{\epsilon}{2}$-接近的。首先，注意到 $g_*(\nu_y|_A) = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^N (g_*\mu_y)|_{g(A_l)}$，因此我们处理互不相交集合族 $(g(A_l))_l$ 以及测度族 $((g_*\mu_y)|_{g(A_l)})_l$。由方程 (3.5)，我们有勒贝格测度$_M(g(A_l))\ge 1-\epsilon^4\,\mathrm{diam}(\mathbb{M})$；由于 κ、δ、$\delta'\ll\epsilon$，我们还有对每个 k、l，勒贝格测度$_{\mathbb{M}}(g(A_l))$ = 勒贝格测度$_{\mathbb{M}}(g(A_k))$。此外，由于 $(g(A_l))_l$ 包含于直径为 $\Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 且 $\sqrt{n}\gg\frac{1}{\epsilon}$ 的 (D_l) 中，因此对每个 l 有 $\mathrm{diam}(g(A_l))\le\frac{\epsilon}{4}$。因此，将命题 A.6 应用于 $(g_*\mu_y|_{g(A_l)})_l$，我们得到：

$$d_K(\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}, g_*(\nu_y|_A))\le\frac{\epsilon}{2}\quad\text{when}\quad\nu_y(A)\neq 0. \tag{3.9}$$

然后，由方程（3.7）至（3.9），根据命题A.4中关于凸组合的康托罗维奇距离的结果可得：

$$\forall y\in\mathbb{I},\ d_K(g_*\nu_y, C)\le\epsilon/2,$$

这里回顾一下，$C = Conv$（勒贝格测度$_{\mathbb{M}}$，μ_{-1}，μ_1）。
那么，由上式和方程（3.6，我们得出测度 $g_*\mu_y$ 与 ϵ凸包 C 的距离小于 y。

这就得到了引理3.4 的 ii），并完成了证明。

□

3.2 AbC*方案

在本节中，我们使用前面的构造来定义实现最小遍历性的 C^0-AbC* 。

设 $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ 和 $h \in$ 辛映射$^0(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}})$。我们定义

$$f := h \circ R_\alpha \circ h^{-1} \tag{3.10}$$

并考虑

$$\epsilon := \sup_{y\in\mathbb{I}} d_K(h_*\mu_y, C). \tag{3.11}$$

我们首先定义 $U(h,\ \alpha) \in \mathcal{T}^0_\Gamma$。

命题 3.6。存在一条在 R_α 下不变的双曲线 $\gamma \in \Gamma_2(\mathbb{M})$，以及一个开集 $U(h,\alpha) \in \mathcal{T}^0_\gamma$，使得 $U(h,\alpha)$ 包含一个满足 $f = \hat{h} \circ R_\alpha \circ \hat{h}^{-1}$ 和 $\hat{}\ h|_{O(\gamma)} = h|_{O(\gamma)}$ 的辛同胚 $\hat{h}$。此外，有：

$$\forall H \in U(h,\alpha)\ :\ \sup_{y\in\mathbb{I}} d_K(H_*\mu_y, C) \le \epsilon/2. \tag{3.12}$$

证明。给定 $\epsilon' > 0$（稍后指定），存在满足引理 3.4 的 $g \in$ 辛映射$^\infty(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}})$ 和 $\gamma \in \Gamma_2(\mathbb{M})$，其参数为 ϵ' 和 q。特别地，根据引理 3.4，γ 在 R_α 下不变。我们定义 $\hat{}\ h = h \circ g \in$ 辛映射$^0(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}})$。由引理 3.4 的 i）可得 $f = \hat{h} \circ R_\alpha \circ \hat{h}^{-1}$。接下来，由引理的 iii），我们还可得 $h|_{O(\gamma)} = h|_{O(\gamma)}$，从而得到命题 3.6 的第一部分。

现在，我们构造开集 $U(h,\alpha)$，将其作为 $\mathcal{T}^0_\gamma$ 中 $\hat{h}$ 的一个邻域。我们要求该邻域满足：对于任意 $H \in U(h,\alpha)$，$H_*\mu_y$ 与 y 中的 C 一致地 $\epsilon/2$-接近。首先，我们来为 h 获得这一性质。考虑映射 $P\colon \mu \mapsto h_*\mu$，根据推论 A.3，它在紧集 $\mathcal{M}(\mathbb{M})$ 上一致连续；取充分小的 ϵ'，使得映射 P 的连续模 ω 满足 $\omega(\epsilon') \le \epsilon/4$。于是，根据引理 3.4 的 ii）以及 P 保持 C，我们有

$$\sup_{y\in\mathbb{I}} d_K(\hat{h}_*\mu_y, C) = \sup_{y\in\mathbb{I}} d_K(P(g_*\mu_y), P(C)) \le \epsilon/4. \tag{3.13}$$

现在，我们利用下面证明的事实来定义 $U(h,\ \alpha)$。

事实 3.7。以下映射是连续的：

$$\begin{array}{rccc} DC: & (\mathrm{Symp}^0(\mathbb{M};\partial\check{\mathbb{M}}), \mathcal{T}^0_\gamma) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*_+, |\cdot|) \\ & H & \longmapsto & \sup_{y\in\mathbb{I}} d_K(H_*\mu_y, C). \end{array}$$

根据上述事实，若定义 $U(h,\ \alpha) := DC^{-1}((0;\ \epsilon/2))$，则 $U(h,\ \alpha)$ 属于 $\mathcal{T}^0_\gamma$，包含 $\hat{h}$，满足方程（3.13），且满足方程（3.12）。

□

事实 3.7 的证明。下面证明 DC 是连续的，这由序列刻画可知。设 H 属于 $\mathrm{Symp}^0(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}})$ 且 $(H_n)_n$ 是 $\mathrm{Symp}^0(\mathbb{M};\ \partial\check{\mathbb{M}})$ 中收敛到 H 的一个序列，所依据的拓扑为 $\mathcal{T}^0_\gamma$。根据该拓扑的定义（见第 7 页），存在一个收敛到 0 的正数序列 $(\kappa_n)_n$，使得：

$$d_{C^0}(H|_{\mathbb{M}\setminus B(\gamma,\kappa_n)}, H_n|_{\mathbb{M}\setminus B(\gamma,\kappa_n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

特别地，由命题 A.1 可得：

$$\sup_{y\in\mathbb{I}} d_K\left(H_{n*}\left(\mu_y|_{\mathbb{M}\setminus B(\gamma,\kappa_n)}\right), H_*\left(\mu_y|_{\mathbb{M}\setminus B(\gamma,\kappa_n)}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.14}$$

因此注意到，对于每个 $y \in \mathbb{I}$，由命题 A.4，我们有如下不等式：

$$\begin{array}{rcl} d_K(H_{n*}\mu_y, H_*\mu_y) & \le & c_{\kappa_n}(y) d_K\left(H_{n*}\left(\mu_y|_{B(\gamma,\kappa_n)}\right), H_*\left(\mu_y|_{B(\gamma,\kappa_n)}\right)\right) \\ & & +(1-c_{\kappa_n}(y)) d_K\left(H_{n*}\left(\mu_y|_{\mathbb{M}\setminus B(\gamma,\kappa_n)}\right), H_*\left(\mu_y|_{\mathbb{M}\setminus B(\gamma,\kappa_n)}\right)\right) \end{array}, \tag{3.15}$$

其中 $c_{\kappa_n} := y \in \mathbb{I} \mapsto \mu_y(B(\gamma,\ \kappa_n))$.
此外，根据引理 3.4的 iii），函数 $(c_{\kappa_n})_n$ 一致收敛到 0。因此，由于$\mathcal{M}(\mathbb{M})$具有有界直径，由方程 (3.14)和(3.15)可得:

$$\sup_{y\in\mathbb{I}} d_k(H_{n*}\mu_y, H_*\mu_y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

根据距离到紧集 C的连续性，可知 DC 连续。 □

接下来，通过将 $\nu(h,\alpha) > 0$ 定义得足够小，我们得到如下结果。

命题 3.8。 存在 $\nu(\alpha,h) > 0$，使得对于每个$\hat{}\alpha \in (\alpha - \nu(h,\alpha)\ \alpha + \nu(h,\alpha))$，$\hat{}\alpha \neq \alpha$，均有:

i) $\Delta_{merg}(\hat{f}) = \sup_{x\in\mathbb{M}} d_K(e^{\hat{f}}(x), C) \leq 2\epsilon$, *where* $\hat{f} = h \circ R_{\hat{\alpha}} \circ h^{-1}$,

ii) $\sup_{x\in\mathbb{M}} d_K(e_k^f(x)\ e_k^f(x)) \leq \epsilon/2$ 对于每个小于 α的分母 q 的 k,

iii) $d_{C^0}(\hat{f}, f) \leq \epsilon/2$,

iv）若 $\hat{}\alpha$ 是有理数，则其分母大于 q。

证明。 首先，iv）显然成立，因为我们取 $\nu(h,\ \alpha)$ 足够小。当 α 接近 $\hat{}\alpha$ 时，$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ 也接近 $\hat{}f = h \circ R_{\hat{\alpha}} \circ h^{-1}$，因此 ii）和 iii）同样成立。
对于 i)f, 共轭于一个旋转，因此其每个经验测度都有定义且是遍历的。更准确地说，对于 $x = h(\pi(\theta,\ y))$ 于 $\in \mathbb{M}$，我们有:

$$e^{\hat{f}}(x) = h_* \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\pi(\theta+k\hat{\alpha},y)}.$$

$\hat{}$若 $\hat{}\alpha$ 是无理数，则有 $e^f(x) = h_*\mu_y$，因此由方程（3.11）可得 i）。否则，若 $\hat{}\alpha$ 是$\hat{}$有理数，且 $\nu(h,\ \alpha)$ 足够小，则 $\hat{}\alpha$ 的分母足够大，从而 $e^f(x)$ ϵ-接近于 $h_*\mu_y$；即由方程（3.11）可得 i）。

□

3.3 极小遍历性的实现

上一节定义了如下映射:

$$\begin{array}{rccc} (U,\nu): & \mathrm{Symp}_c^0(\mathbb{M};\partial\check{\mathbb{M}}) \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \to & \mathcal{T}_\Gamma^0 \times (0,\infty) \\ & (h,\alpha) & \mapsto & (U(h,\alpha),\nu(h,\alpha)). \end{array}$$

现在我们证明，映射 (U,ν) 定义了一个 C^0-AbC* 方案，实现了极小遍历性。特别地，我们证明命题 2.12。

命题 2.12 的证明。首先注意，命题 3.6 和 3.8 给出了一个定义良好的 C^0- AbC* 方案。事实上，命题 3.6 满足定义 2.10 的条件 a) 和 b): 对于 $(h,\alpha) \in$ 辛映射$_c^0(\mathbb{M};\ \partial\check{}\mathbb{M}) \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，存在 $\hat{}\ h \in U(h,\alpha)$ 和一条双曲线 $\gamma \in \Gamma^2(\mathbb{M})$，它在 R_α 下不变，使得 $h \circ R_\alpha \circ h^{-1} = \hat{}h \circ R_\alpha \circ \hat{}h^{-1}$, $h|_{O(\gamma)} = \hat{}h|_{O(\gamma)}$ 且 $U(h,\alpha) \in \mathcal{T}_\gamma^0$。

对于 c)，考虑由方案 (U,ν) 构造的序列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$。也就是说，我们有 $h_0 = id$、$\alpha_0 = 0$，并且对于 $n \in \mathbb{N}$，映射 h_{n+1} 属于 $U(h_n,\alpha_n)$ 和 $0 < |\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \nu(h_{n+1},\alpha_n)$。此外，我们还有:

$$f_n := h_n \circ R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1} = h_{n+1} \circ R_{\alpha_n} \circ h_{n+1}^{-1}.$$

记 $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$，其中 $p_n \wedge q_n = 1$。
考虑由 $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 定义的序列

$$\epsilon_n = \sup_{y\in\mathbb{I}} d_K(h_{n*}\mu_y, C), \tag{3.16}$$

根据命题 3.6 和 3.8 我们推得，对于每个 $n \geq 0$ 有：

I） $\epsilon_{n+1} \leq \frac{\epsilon_n}{2}$，因此 $\epsilon_{n+1} \leq \frac{\epsilon_0}{2^{n+1}}$；
II） $d_{C^0}(f_{n+1}, f_n) \leq \frac{\epsilon_n}{2}$。

于是，定义 2.10 的条件 c）得到满足，因为 $(f_n)_n$ 是关于 d_{C^0} 的柯西序列，这是由 I）和 II）得到的。我们记 f 在辛映射$^0(\mathbb{M})$ 中的极限为。

剩下要证明的是，(U,ν) 实现了极小遍历性，即 f满足 $\Delta_{merg}(f) = 0$，因此是最小遍历的。设 μ 是 f的一个遍历不变测度。根据伯克霍夫遍历定理，存在 $x \in \mathbb{M}$使得 $e^f(x) = \mu$。我们通过考察 $e^{f_n}(x)$ 来证明 $e^f(x) \in C$。首先，根据将命题 3.8 中的 i）、ii）和 iv）应用于 $0 < |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \nu(h_{n+1}, \alpha_n)$，对于 $n \geq 0$，我们有：

III） $d_K(e^{f_{n+1}}(x), C) \leq \Delta_{merg}(f_{n+1}) \leq 2\epsilon_{n+1}$,

IV） $d_K(e_k^{f_{n+1}}(x), e_k^{f_n}(x)) \leq \frac{\epsilon_{n+1}}{2}$ for every $k \leq q_n$,

V） and $q_{n+1} > q_n$.

那么，对于每个 个 $m \geq n \geq 1$，V）也意味着 $q_n \leq q_j, \forall j \in [\![n,\ m]\!]$，因此由 I）和 IV):
e

$$d_K(e_{q_n}^{f_m}(x), e_{q_n}^{f_n}(x)) \leq \frac{\epsilon_0}{2^{n+1}}.$$

Ne接着，在此不等式中令 $m \to \infty$，并利用 $f_m \to f$，可得对每个 $n \in \mathbb{N}$ *:

$$d_K(e_{q_n}^{f}(x), e_{q_n}^{f_n}(x)) \leq \frac{\epsilon_0}{2^{n+1}}.$$

然而，由 I）和 III）可得：

$$d_K(e_{q_n}^{f_n}(x), C) = d_K(e^{f_n}(x), C) \leq \frac{\epsilon_0}{2^{n-1}}.$$

那么，由前面的两个不等式可推得：

$$d_K(e_{q_n}^{f}(x), C) \leq \frac{\epsilon_0}{2^{n-2}}.$$

最后，令 $n \to \infty$ 并利用 $e_n^f(x) \to e^f(x)$，可得遍历测度 $\mu = e^f(x)$ 属于 C。因此 $\Delta_{merg}(f) = 0$。特别地，由遍历分解定理可得以下包含关系：

$$\mathcal{M}(f) \subset C = Conv(\mathrm{Leb}_{\mathbb{M}}, \mu_{-1}, \mu_1) \subset \mathcal{M}(f).$$

由此我们得出 f 根据命题，具有最小遍历性 3.2。

此外，m 最小遍历性在 Symp^0(M)-共轭下是不变的，由此完成证明 f.
□

4 AbC* 原理的证明

本节旨在证明 AbC* 原理。为此，我们改编了 [Ber24][§6] 中 Berger 原理的证明。我们首先在第 4.1 节建立一个逼近定理。在第 4.2 节中，我们介绍曲面的复化，以及用于证明该原理的相关复化结果。接着，我们在第 4.3 节推广模变形逼近定理，使其与我们使用双曲线的方案相契合。最后，我们在第 4.4 节实现该方案的解析实现。

更准确地说，让我们回顾一些概念。

定义 4.1. 辛曲面$(\mathbb{M},\Omega)$ 的光滑结构是一个极大 C^∞-图册 $\mathcal{A}^\infty = (\phi_\alpha)_\alpha$，使得每个图 ϕ_α：$U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^2$ 将辛形式 $dx \wedge dy$ 拉回至$\Omega|_U$。

辛曲面$(\mathbb{M},\Omega)$ 的实解析结构是一个极大图册 $\mathcal{A}^\omega = (\phi_\beta)^\beta$，使得坐标变换是实解析的，并且每个图 ϕ_β：$U \subset \mathbb{M} \to V \subset \mathbb{R}^2$ 将辛形式 $dx \wedge dy$ 拉回至$\Omega|_U$。

若 $\mathcal{A}^\omega \subset \mathcal{A}^\infty$，我们称结构 $\mathcal{A}^\omega$ 与 $\mathcal{A}^\infty$ 相容。

根据命题 2.14，在球面上建立该原理——其结构因不存在边界而更为简单——归结为证明下述定理。

定理 4.2。对于任意可由 *AbC** 实现的 C^∞-性质 $(\mathcal{P})$，在 辛映射$^\infty(\mathbb{S})$上存在一种实解析辛结构 $\mathcal{A}^{\omega'}$，定义在 $(\mathbb{S},\Omega)$ 上，与标准的 C^∞-结构相容，且 $(\mathcal{P})$ 可由解析辛同胚 f实现。

我们将在第 4.5 节证明该定理。

然而，该定理给出了任意 C^∞-相容结构下的结果，但我们的目标是恢复关于球面由嵌入 $\mathcal{A}^\omega$ 诱导的标准实解析结构$\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$的结果。为此，我们使用 [KL00]中的以下定理。

定理 4.3。任意辛流形都具有唯一的（在同构意义下）实解析辛结构。

因此，若 f 是关于定理 $\mathcal{A}^{\omega'}$ 所给结构的解析辛同胚4.2，则存在映射 $\Phi : (\mathbb{S}, \mathcal{A}^\omega) \to (\mathbb{S},\mathcal{A}^{\omega'})$，它相对于标准结构既是解析的也是光滑的，并且保持 Ω。特别地，Φ 属于辛映射$^\infty(\mathbb{S})$。因此，$\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ 是一个C^ω-辛同胚，满足 $(\mathcal{P})$，因为 $(\mathcal{P})$ 在辛映射$^\infty(\mathbb{S})$-共轭下是不变的。

现在，对于 $\mathbb{M} = \mathbb{A}$ 或 $\mathbb{D}$，我们需要调整结果以适用于带边流形。为此，我们必须在该流形上使用 K-解析结构，其中 K 是一个李群。特别是，在我们的情形中使用 $K = \mathbb{Z}_2$。

˜事实上，我们可以沿着边界将 $\mathbb{M}$ 的两个副本粘合起来，形成一个无边界曲面 $\mathbb{M}$，使 $\mathbb{M}$ 成为 $\mathbb{M}$ 在反射作用下的商。

˜例如，$(\mathbb{A}, \Omega)$ 可视为环面 $\mathbb{A} := (\mathbb{T} \times \mathbb{R}/4\mathbb{Z}, \Omega)$ 在对合

$$\tau : (\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}/4\mathbb{Z} \mapsto (\theta, -y + 2 \mod 4).$$

同样，我们将在第4.2 节介绍将（$\mathbb{D}$，Ω）识别为辛˜球面（$\mathbb{D}$，Ω）在一个对合下的商，该对合也记作 τ。

然后，这个对合在 $\mathbb{M}$ 上诱导出李群 $\mathbb{Z}_2$ 的光滑作用，并满足 $\tau^*\Omega = -\Omega$。因此，我们引入以下定义。

定义4.4。 辛曲面$(\mathbb{M},\Omega)$ 上的实解析 $\mathbb{Z}_2$结构，是一个极大的实解析辛图册 $\mathcal{A}^\omega = (\phi_\beta)^\beta$，使得每个图 $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 都能提升到一个开集 $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{M}$，从而形成 $\mathbb{Z}_2$ 等变图 ϕ_α。也就是说，若 $\tau_0(x_1,x_2) := (x_1,-x_2)$，则有

$$\tilde{\phi}_\alpha \circ \tau = \tau_0 \circ \tilde{\phi}_\alpha.$$

定理4.2 针对的推广由以下定理给出。

定理4.5。 对于$Symp^\infty(\mathbb{M})$上的任意$AbC^\star$ 可实现 C^∞性质$(\mathcal{P})$，存在一个定义在$(\mathbb{M},\Omega)$ 上的实解析辛 $\mathbb{Z}_2$结构 $\mathcal{A}^{\omega'}$，它与典范 C^∞结构相容，且$(\mathcal{P})$ 可由一个 $\mathcal{A}^{\omega'}$解析辛同胚 f实现。

我们还在第4.5节中证明该定理。

如同球面的情形，我们旨在恢复由包含所诱导的典范实解析辛 $\mathbb{Z}_2$-结构

$$\mathbb{A} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/4\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}\times\mathbb{C}/4\mathbb{Z} \text{ and } \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2.$$

因此，我们希望得到圆柱和圆盘上定理4.3的等价形式。它由下述对 [KL00中§4]的一个结果的改编给出。

定理 4.6（[Ber24] **定理 3.3**）。设 K 是一个紧李群，以解析方式作用在紧曲面 M上。设 Ω 是 M上的辛形式，且 $\Gamma: K \to \{-1;\ 1\}$ 是一个李群同态，使得对所有 $g \in K$，我们有 $g^*\Omega = \Gamma(g)\Omega$。则 (M,Ω) 在解析辛同胚意义下具有唯一的实解析 K-结构。

然后，与球面的情形一样，该定理得出其与典范解析结构相容。

注 *4.7*。不过，我们必须谨慎对待该定理的含义。事实上，切换解析结构的 K-等变辛同胚 Ψ 从 M 到 M，不一定能下降为商 M上的辛同胚 $= M/K$：（对于 $M = \mathbb{A} = \mathbb{R}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{T}$ 我们有 $K = \{id\ \tau\}$和 $\tau^*\Omega = -\Omega$，辛同胚 $(y,\theta) \mapsto (y+2,\theta)$ 在 $\mathbb{A}$上下降为反-辛映射 $(y,\theta) \mapsto (-y,\theta)$ 在 $\mathbb{A}$上）。然而，在我们的情形（$M = \mathbb{A}$ 或 $\mathbb{D}$）中，投影 $M \to M$在 ∂M的原像之外是辛的或反辛的，而 K 中的元素不是辛的就是反辛的。因此，如果 Ψ 是切换解析结构的辛同胚，那么它到 $\mathbb{A}$ 或 $\mathbb{D}$ 上的投影 Ψ 不是辛的就是反辛的。因此，关于 Ψ 的共轭保持辛性。

本节余下部分将用于证明定理4.2 和4.5。证明的第一步是调整一个逼近定理，从而在双曲线之外得到解析逼近。

4.1 逼近定理

在本小节中，我们推广 Pierre Berger 在 [Ber22] 中的逼近定理，以便在圆柱上的双曲线之外逼近辛同胚（参见定义2.5 和记号2.7），从而可用于计算模变形的逼近。

事实上，Berger 定理给出了在 $\mathbb{A}$ 的边界邻域之外进行逼近的方法。然而，我们希望移动非受控区域。因此，我们首先直接从

该定理得到在两个水平环带之外的逼近。然后，通过使用辛同胚将一条双曲线拉直，我们可以将非受控区域移动到该双曲线的邻域。这就是本节采用的一般方法。

首先，我们回顾主定理中将用到的一些记号。

记号 4.8. 首先，记 辛映射$_c^\infty(\mathbb{A};\partial\mathbb{A})$ 为由 $\mathbb{A}$ 构成、在 $\mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$ 中紧支撑的光滑辛同胚空间。

令 辛映射$^\omega(\mathbb{A}_\infty)$ 表示 $\mathbb{A}_\infty:=\mathbb{C}/\mathbb{Z}\times\mathbb{C}$ 上保持 Ω_0 和 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 不变的双全纯映射空间，其中 Ω_0 是 $\Omega=\frac{1}{2}d\theta\wedge dy$ 到 $\mathbb{A}_\infty$ 的全纯延拓。

接着，我们定义：

$$K_\rho:=\mathbb{T}_\rho\times Q_\rho,$$

其中 $\mathbb{T}_\rho:=\mathbb{T}+i[-\rho,\rho]$ 且 $Q_\rho:=[-\rho-1;-1]\sqcup[1;\rho]+i[-\rho;\rho]$。

对于 $\rho>1$，我们定义：

$$\mathrm{Symp}_\rho^\omega(\mathbb{A}_\infty):=\left\{F\in\mathrm{Symp}^\omega(\mathbb{A}_\infty),\ \sup_{x\in K_\rho}|F(x)-x|<\rho^{-1}\right\}.$$

对于 $\eta>0$，我们考虑 $K_{\rho,\ \eta}$ 以及 $Q_{\rho,\ \eta}$ η-邻域 K_ρ 和 Q_ρ：

$$K_{\rho,\eta}=\mathbb{T}_{\rho+\eta}\times Q_{\rho+\eta}\quad and\quad Q_{\rho,\eta}:=\Big([-\rho-1-\eta;-1+\eta]\sqcup[1-\eta;\rho+\eta]\Big)+i[-\rho-\eta;\rho+\eta].$$

最后，我们考虑：

$$\mathrm{Symp}_{\rho,\eta}^\omega(\mathbb{A}_\infty):=\left\{F\in\mathrm{Symp}^\omega(\mathbb{A}_\infty),\ \sup_{x\in K_{\rho,\eta}}|F(x)-x|<\rho^{-1}\right\}.$$

下面给出我们的主逼近定理：

定理 4.9（主逼近定理）。设 $\gamma\in\Gamma_2$（$\mathbb{A}$）和 $f\in$ 辛映射$_c^\infty$（$\mathbb{A}$；$\partial\mathbb{A}$）满足 $f|_{O(\gamma)}=\mathrm{id}$。那么，对于任意 $\rho>1$ 以及光滑紧开拓扑下 C^∞（$\mathbb{A}\setminus\gamma,\mathbb{T}\times\mathbb{R}$）中 $f|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 的任意邻域 $\mathcal{U}$，存在一个映射 $F\in$ 辛映射$_\rho^\omega$（$\mathbb{A}_\infty$），使得 $F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}\in\mathcal{U}$。

注 4.10。根据 C^∞（$\mathbb{A}\setminus\gamma,\mathbb{T}\times\mathbb{R}$）上光滑紧开拓扑的定义，要证明 $F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 属于 $\mathcal{U}$，只需证明

$$d_{C^r}(F|_{\mathbb{A}\setminus B(\gamma,\kappa)},f|_{\mathbb{A}\setminus B(\gamma,\kappa)})<\epsilon$$

对于足够大且有限的 $r\geq0$，以及足够小的 κ、$\epsilon>0$。

由此可知，若 γ' 是包含于 $B(\gamma,\kappa)$中的双曲线，则在 $C^\infty(\mathbb{A}\setminus\gamma',\mathbb{T}\times\mathbb{R})$ 的光滑紧开拓扑中，存在 $f|_{\mathbb{A}\setminus\gamma'}$ 的一个邻域 $\mathcal{U}'$，使得对任意 $F:\mathbb{T}\times\mathbb{R}\to\mathbb{T}\times\mathbb{R}$：

$$F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma'}\in\mathcal{U}'\Longrightarrow F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}\in\mathcal{U}.$$

此外，由于 f 在 $\mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$ 中具有紧支撑，且 $\mathrm{supp}(f)\subset A(\gamma)$，集合

$$\overline{B(\gamma,\kappa)\setminus(\partial\mathbb{A}\cup\mathrm{supp}(f))}$$

非空。

在此集合中选取 γ'，使得 $\gamma'\subset\mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$ 和 f 在 $A(\gamma')$ 中具有紧支撑，即可将定理的证明归结为这类双曲线。

注 4.11. 注意到从$\mathbb{C}/\frac{1}{q}\mathbb{Z}$到 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$的提升是全纯的；若在后一个定理中，f与 $R_{1/q}$交换，且 γ是 $R_{1/q}$-不变的，我们可以假设该逼近也与 $R_{1/q}$交换。

鉴于　注 4.10中，我们将注意力限制在以下情形：$\gamma \subset \mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$ 且 $\mathrm{supp}(f) \subset A(\gamma)$　　.

我们首先回顾 Berger逼近定理。该结果的核心思想是将哈密顿映射分解为一列哈密顿映射。随后，利用傅里叶级数展开，以扭转映射的复合来逼近其中每个映射。最后，通过 Runge定理对这些扭转映射进行解析逼近，但代价是在边界附近引入一个无法控制逼近误差的区域。

定理 *4.12*（[*Ber*22] 定理 *1.8*）。设 $0 < \eta < 1$, f 属于 $Symp_c^\infty(\mathbb{A}; \partial\mathbb{A})$，且 $\mathcal{U}$ 是光滑紧开拓扑下 $C^\infty(\mathbb{A}(\eta)\ \mathbb{A})$ 中 $f|_{\mathbb{A}(\eta)}$ 的一个邻域。那么，对任意 $\rho > 1$，存在 $F \in Symp_\rho^\omega(\mathbb{A}_\infty)$，使得限制映射 $F|_{\mathbb{A}(\eta)}$ 属于 $\mathcal{U}$。

备注 *4.13*。*Berger* 最初将此定理表述为适用于辛同胚 $f \in Ham_c^\infty(\mathbb{A}; \partial\mathbb{A})$，其中 $Ham_c^\infty(\mathbb{A}; \partial\mathbb{A})$ 表示 $\mathbb{A}$ 上光滑辛同胚构成的空间，这些映射在 $\check{}\,\mathbb{A} = \mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$ 中紧支撑，并且可通过在 $\mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$ 中紧支撑的同伦与 *id* 相连。然而，对于 $C^\infty(\check{}\,\mathbb{A}, \mathbb{T} \times \mathbb{R})$ 的光滑紧开拓扑而言，该空间在 $Symp_c^\infty(\mathbb{A}; \partial\mathbb{A})$ 中稠密。因此，在定理中可以假设 f 属于 $Symp_c^\infty(\mathbb{A}; \partial\mathbb{A})$。

O注意到，该定理给出了主逼近定理的情形 $\gamma = \partial\mathbb{A}$　　.

然后，除去解析微分同胚下的共轭，我们可以由定理 4.12的以下推论得出结论。

推论 4.14。设 $-1 < y_- < y_+ < 1$ 和 $\gamma = \mathbb{T} \times \{y_-, y_+\}$，且 f 属于 辛映射$_c^\infty(\mathbb{A};\ \partial\mathbb{A})$，其中 f 在 $A(\gamma)$ 中紧支撑。设 $\mathcal{U}$ 是 $C^\infty(\mathbb{A} \setminus \gamma, \mathbb{T} \times \mathbb{R})$ 在光滑紧开拓扑中的 $f|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 的一个邻域，并设 $\eta \in (0, d(\gamma, \partial\mathbb{A}))$。那么，对任意 $\rho > 1$，存在 $F \in$ 辛映射$_{\rho,\ \eta}^\omega(\mathbb{A}_\infty)$，使得 $F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma} \in \mathcal{U}$。

证明。设 $g : \mathbb{A}_\infty \to \mathbb{A}_\infty$ 是一个仿射映射，它将双曲线 γ 映到 $\partial\mathbb{A}$，特别是将 $A(\gamma)$ 映到 $\mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$。因此，映射 $\tilde{f} := g \circ f \circ g^{-1}$ 属于辛映射$_c^\infty(\mathbb{A}; \partial\mathbb{A})$，因为 f 在 $A(\gamma)$ 中紧支撑。然后注意到，g 下的共轭在 $C^\infty(\mathbb{A} \setminus \gamma,\ \mathbb{T} \times \mathbb{R})$ 和 $C^\infty(\check{}\,\mathbb{A} \cup g(O(\gamma))\ \mathbb{T} \times \mathbb{R})$ 的光滑紧开拓扑之间建立了一个双射，因此我们将 $\widetilde{\mathcal{U}}$ 视为通过 g 对 $\mathcal{U}$ 作共轭所得到的 $f|_{\check{\mathbb{A}}\cup g(O(\gamma))}$ 的邻域 $\tilde{}$。

接下来，由于 $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ 在 $O(\gamma)$ 上等于 $f|_{g(O(\gamma))}$，这就证明了 K 利用构造估计，足够证明双全纯映射 $\widetilde{F}$ 在 $g(O(\gamma))$ 上与 $\tilde{f}$ 的距离小于 C^∞，只需证明 $\widetilde{F}$ 在 $K_{\tilde{\rho}}$ 上与 id 的距离小于 C^0~。因此，设 $\delta \in (0, 1)$，$\mathcal{V}$ 是 $C^\infty(\mathbb{A}(\delta)\ \mathbb{A})$ 的光滑紧开拓扑中的 $f|_{\mathbb{A}(\delta)}$ 的一个邻域，并设 $\tilde{\rho} > 1$ 足够大，使得下述结论成立：

$$\forall \widetilde{F} \in \mathrm{Symp}_{\tilde{\rho}}^\omega(\mathbb{A}_\infty),\ \widetilde{F}|_{\mathbb{A}(\delta)} \in \mathcal{V} \Longrightarrow \widetilde{F}|_{\check{\mathbb{A}}\cup g(O(\gamma))} \in \widetilde{\mathcal{U}}. \tag{4.1}$$

~　　~现在，由定理 4.12，存在 $F \in$ 辛映射$_{\tilde{\rho}}^\omega(\mathbb{A}_\infty)$，使得限制映射 $F|_{\mathbb{A}(\delta)} \in \mathcal{V}$，特别是限制映射 $\widetilde{F}|_{\check{\mathbb{A}}\cup g(O(\gamma))}$，根据等式 (4.1) 属于 $\widetilde{\mathcal{U}}$；并且映射 $F := g^{-1} \circ \widetilde{F} \circ g$ 在 $\mathbb{A} \setminus \gamma$ 上的限制属于 $\mathcal{U}$，因为 $\widetilde{\mathcal{U}} = g \circ \mathcal{U} \circ g^{-1}$。剩下只需证明 F 属于辛映射$_{\rho,\ \eta}^\omega(\mathbb{A}_\infty)$。首先，$\sim F$ 是辛映射$^\omega(\mathbb{A}_\infty)$ 中的一个双全纯映射，因为 F 是双全纯映射，而 g 是仿射映射。

接下来，由于 η属于 $(0, d(\gamma, \partial\mathbb{A}))$，注意到 γ属于 $\mathbb{A}(\eta)$。因此，由于 g将 γ映射到$\partial\mathbb{A}$，且 $\tilde{\rho}$足够大，它会将 $K_{\rho,\eta}$映射到 $K_{\tilde{\rho}}$，其中 $\widetilde{F}$与恒等映射相距不超过 $1/\tilde{\rho}$。于是，$F = g^{-1} \circ \widetilde{F} \circ g$在$K_{\rho,\eta}$ 上与恒等映射相距不超过 $1/\rho$，并且属于辛映射$_{\rho,\eta}^\omega(\mathbb{A}_\infty)$。□

证明定理4.9 的下一步，是拉直一条双曲线，使前述推论能够适用。下面的命题给出了这一构造：它构造了一个辛同胚，将一条水平双曲线映射到指定的双曲线 γ。该辛同胚是通过对圆柱上适当选取的微分同伦应用莫泽技巧得到的。

命题 4 .15. 设 γ 属于 $\Gamma_2(\mathbb{A})$，则存在一条双曲线 $\gamma' := \mathbb{T} \times \{y_-, y_+\}$ 以及一个辛同胚 - 辛映射 $\phi \in$ 辛映射$_c^\infty(\mathbb{A})$ 使得

$$\phi(\gamma') = \gamma.$$

该命题在附录 B中得证。现在我们证明主逼近定理，并首先给出证明概要。

定理 *4.9* 的证明概要。 设 $\gamma \in \Gamma_2(\mathbb{A})$ 和 $f \in$ 辛映射$_c^\infty(\mathbb{A}; \partial\mathbb{A})$ 满足 $\gamma \subset \mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$且 $\mathrm{supp}(f) \subset A(\gamma)$。设 $\mathcal{U}$ 是 $f|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 在 $C^\infty(\mathbb{A} \setminus \gamma, \mathbb{T} \times \mathbb{R})$ 的光滑紧开拓扑中的一个邻域。

第一步是考虑一个辛同胚 ϕ，它将一条双曲线 $\gamma' := \mathbb{T} \times \{y_-, y_+\}$ 映至 γ，如命题 4.15 所述（见图 3）。接着，我们利用推论 4.14，在双曲线 γ^η 外用双全纯映射 Ψ 逼近 ϕ，并考虑共轭 $g := \Psi^{-1} \circ f \circ \Psi$ （见图 4a）。随后，我们再次利用推论 4.14，在双曲线 γ' 外用双全纯映射 G 逼近 g，并定义所需的双全纯映射 $F := \Psi \circ G \circ \Psi^{-1} \in$ 辛映射$^\omega(\mathbb{A}_\infty)$ （见图 4b ）。还需证明 $F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 属于 $\mathcal{U}$。这由对 g 和 ϕ 的逼近推出。此外，还需证明 F 属于辛映射$_\rho^\omega(\mathbb{A}_\infty)$。这可借助以下结果实现： [Ber22，引理 3.15] ，该结果关于双全纯映射的复合：

引理 4.16. 对任意 $\rho > 1$ 与 $\eta > 0$，令 $\rho'_k := 2^k \max\{2/\eta, \rho\}$ （对 $k \geq 1$） 。则对任意序列$(F_k)_{k\geq 1}$ 的映射 $F_k \in$ 辛映射$^\omega(\mathbb{A}_\infty)$ ，若满足 $\sup^{x\in K_{\rho,\eta/2}} d(F_k(x)\ x) < 1/\rho'_k$，则下列结论成立：

$$F_1 \circ \cdots \circ F_n \in \mathrm{Symp}_\rho^\omega(\mathbb{A}_\infty) \textit{ for every } n \geq 1.$$

为使用该结果，我们首先选取适当的 $\eta > 0$ （在定义 ϕ之后）。然后，在应用推论 4.14时，我们考虑 $\Psi \in$ 辛映射$_{\rho_1,\eta}^\omega(\mathbb{A}_\infty)$ 与 $G \in$ 辛映射$_{\rho_2,\eta}^\omega(\mathbb{A}_\infty)$，其中 ρ_1 与 ρ_2 充分大，以便应用该引理。

这就证明了情形 $\gamma \subset \mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$ 以及 $\mathrm{supp}(f) \subset A(\gamma)$。其余情形是注4.10的结果。 □

定理 *4.9*的证明。 **情形** $\gamma \subset \mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$ **且** $\mathrm{supp}(f) \subset A(\gamma)$**：**

令 $\gamma \in \Gamma_2(\mathbb{A})$ 且 $f \in$ 辛映射$_c^\infty(\mathbb{A})$ 满足 $\mathrm{supp}(f) \subset A(\gamma)$。由于 f 在 $\mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$中紧支撑，我们也将其到 $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 的典范延拓记为 f。

令 $\mathcal{U}$为 $C^\infty(\mathbb{A} \setminus \gamma,\ \mathbb{T} \times \mathbb{R})$ 在光滑紧开拓扑下的一个邻域，并令 $\rho > 1$。现在构造所需的双全纯映射 F。

首先，我们通过一个将 γ 拉直的映射 ϕ 对 f 作共轭。根据命题 4.15，我们选取 $\phi \in$辛映射$_c^\infty(\mathbb{A}; \partial\mathbb{A})$ 和 $\gamma' := \mathbb{T} \times \{y_-, y_+\} \in \Gamma_2(\mathbb{A})$，使得 $\phi(\gamma') = \gamma$。令 $\eta > 0$ 满足： ϕ 在 $\mathbb{A}(3\eta)$ 中紧支撑，且 $3\eta < d(\gamma, \partial\mathbb{A})$，特别是 γ 和 γ' 都包含在 $\mathbb{A}(3\eta)$ 中。参见图 3。

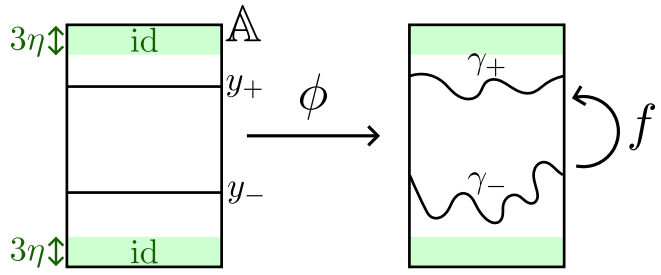
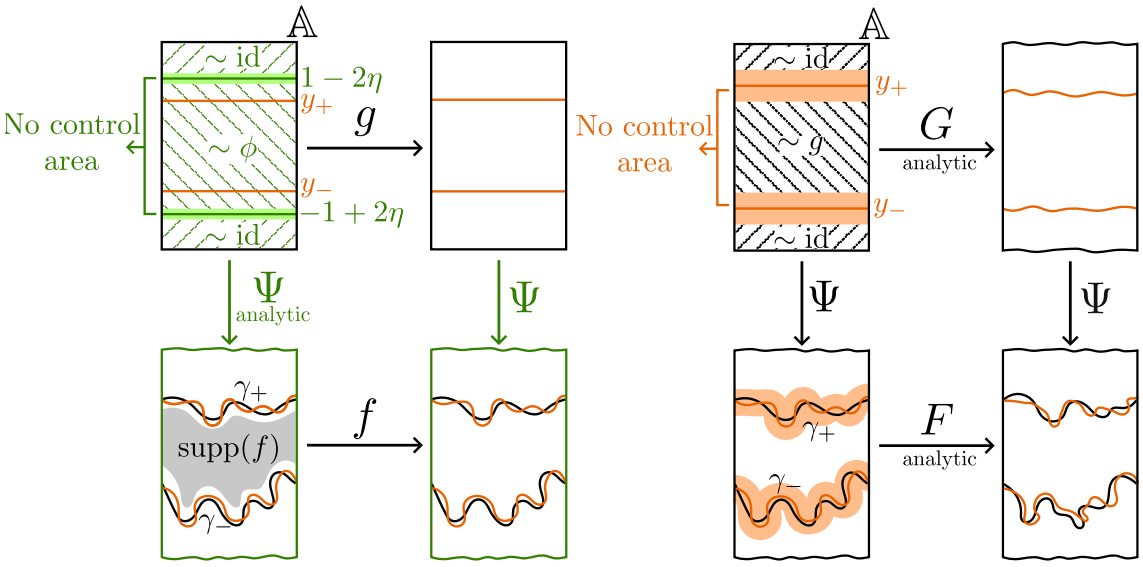


图 3：将双曲线拉直的辛同胚 ϕ 。

接下来，我们用解析映射逼近 ϕ。定义 $\gamma^\eta := \mathbb{T} \times \{-1 + 2\eta, 1 - 2\eta\}$，并注意到 ϕ 在 $A(\gamma^\eta)$ 和 $\eta < d(\gamma^\eta,\ \partial\mathbb{A})$ 中具有紧支撑。于是，对于任意一个小的 $\mathcal{V}$ 邻域



(a) 通过 Ψ对 ϕ 进行解析逼近。 (b) 通过 G对 g 进行解析逼近。

$\phi|_{\mathbb{A}\setminus\gamma^\eta}$ 在 $C^\infty(\mathbb{A}\setminus\gamma^\eta,\ \mathbb{T}\times\mathbb{R})$ 的光滑紧开拓扑中，以及任意一个 $\rho_1 > 1$ 足够大的，由推论 4.14 可知，存在一个双全纯映射 $\Psi \in$ 辛映射$^\omega_{\rho_1,\ \eta}(\mathbb{A}_\infty)$，使得 $\Psi|_{\mathbb{A}\setminus\gamma^\eta}$ 属于 $\mathcal{V}$。定义其共轭

$$g := \Psi^{-1}\circ f\circ\Psi.$$

现在，我们希望对 g应用推论 4.14。为此，我们需要 g 在 $A(\gamma')$ 中紧支撑，而我们知道 f 在 $A(\gamma)$ 中紧支撑。因此，由于 $\gamma'\subset\mathbb{A}\setminus\gamma^\eta$和 $\phi(A(\gamma'))=A(\gamma)$，我们将 $\mathcal{V}$ 取为 $\phi|_{\mathbb{A}\setminus\gamma^\eta}$ 的足够小的邻域，使得 $\mathrm{supp}(f)\subset\Psi(A(\gamma'))$。因此，$g$ 在 $A(\gamma')$ 中紧支撑。见图 4a。

接下来，我们定义邻域 $\mathcal{W}$（属于 $g|_{\mathbb{A}\setminus\gamma'}$），以应用推论 4.14。

在缩小邻域 $\mathcal{V}$后，我们可以假设 γ' 足够接近 $\Psi^{-1}(\gamma)$，从而存在 $g|_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}\setminus\gamma'}$的一个邻域 $\mathcal{U}'$，使得在 $C^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}\setminus\gamma',\ \mathbb{T}\times\mathbb{R})$ 的光滑紧开拓扑下，以下结论成立：

$$\forall G:\mathbb{T}\times\mathbb{R}\to\mathbb{T}\times\mathbb{R},\, G|_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}\setminus\gamma'}\in\mathcal{U}' \Longrightarrow \Psi\circ G\circ\Psi^{-1}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}\in\mathcal{U}. \tag{4.2}$$

此外，正如 $g|_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}\setminus\mathbb{A}}=\mathrm{id}$ 所示，在 $C^\infty(\mathbb{A}\setminus\gamma',\ \mathbb{T}\times\mathbb{R})$ 的光滑紧开拓扑中，存在 $g|_{\mathbb{A}\setminus\gamma'}$ 的一个邻域 $\mathcal{W}$，使得对于任意充分大的 $\rho_2>1$，由 K_{ρ_2} 中的柯西估计可得：

$$\forall G\in\mathrm{Symp}^\omega_{\rho_2}(\mathbb{A}_\infty),\, G|_{\mathbb{A}\setminus\gamma'}\in\mathcal{W}\Longrightarrow G|_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}\setminus\gamma'}\in\mathcal{U}'. \tag{4.3}$$

现在，由于 g 在 $A(\gamma')$ 中具有紧支撑，且 $\eta<d(\gamma',\ \partial\mathbb{A})$，推论 4.14 表明，对于任意充分大的 $\rho_2>1$，存在一个双全纯映射 $G\in$辛映射$^\omega_{\rho_2,\ \eta}(\mathbb{A}_\infty)$，使得 $G|_{\mathbb{A}\setminus\gamma^\eta}$ 属于 $\mathcal{W}$。我们来考察这个双全纯映射

$$F := \Psi\circ G\circ\Psi^{-1}\in\mathrm{Symp}^\omega(\mathbb{A}_\infty). \tag{4.4}$$

参见图 4b。

由于 $G|_{\mathbb{A}\setminus\gamma'}$ 属于 $\mathcal{W}$ 且 $G\in$ 辛映射$^\omega_{\rho_2}(\mathbb{A}_\infty)$, $G|_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}\setminus\gamma'}$ 属于 $\mathcal{U}'$ 根据方程（4.3）。因此，由方程（4.2）和（4.4），$F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 属于 $\mathcal{U}$。现在只需利用引理 4.16证明 F 属于辛映射$^\omega_\rho(\mathbb{A}_\infty)$。

设 $\rho_k' := 2^k \max\{2/\eta, \rho\}$ for $k \in \{1,2,3\}$。首先，我们选择足够大的 ρ_1，使得$\Psi \in$ 辛映射$^{\omega}_{\rho_1,\eta}(\mathbb{A}_\infty)$ 推出 $\sup^{x\in K_{\rho,\eta/2}} d(\Psi(x)\ x) < 1/\rho_1'$ 且 $\sup^{x\in K_{\rho,\eta/2}} d(\Psi^{-1}(x)\ x) < 1/\rho_3'$，这是由求逆的连续性得到的。接着，我们选择足够大的 ρ_2，使得 $G \in$ 辛映射$^{\omega}_{\rho_2,\eta}(\mathbb{A}_\infty)$ 推出 $\sup^{x\in K_{\rho,\eta/2}} d(G(x)\ x) < 1/\rho_2'$。因此，根据引理 4.16，复合 $F = \Psi \circ G \circ \Psi^{-1}$属于辛映射$^{\omega}_{\rho}(\mathbb{A}_\infty)$。这就完成了情形 $\gamma \subset \mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$下的证明。

情形 $\gamma \cap \partial\mathbb{A} \neq \emptyset$ 或 $\mathrm{supp}(f) \subset A(\gamma)$:

根据注 4.10，存在 $\kappa > 0$ 以及一条双曲线 γ'位于 $B(\gamma,\kappa) \setminus (\partial\mathbb{A} \cup \mathrm{supp}(f))$，使得$\gamma' \subset \mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$，特别是 $\mathrm{supp}(f) \subset A(\gamma')$。此外，存在一个邻域 $\mathcal{U}'$，它是 $f|_{\mathbb{A}\setminus\gamma'}$ 在 $C^\infty(\mathbb{A}\setminus\gamma', \mathbb{T}\times\mathbb{R})$ 上的光滑紧开拓扑中的邻域，使得以下结论成立:

$$\forall F : \mathbb{T}\times\mathbb{R} \to \mathbb{T}\times\mathbb{R},\ F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma'} \in \mathcal{U}' \Longrightarrow F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma} \in \mathcal{U}.$$

因此，我们将定理应用于 γ' 和这个邻域 $\mathcal{U}'$，从而得到所需的双全纯映射 $F \in$ 辛映射$^{\omega}_{\rho}(\mathbb{A}_\infty)$，使得 $F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma} \in \mathcal{U}$。

□

4.2 $\mathbb{M}$的复化与结构

在将这个逼近定理应用于复结构变形之前，我们先介绍曲面的复化，并阐明此处所用复结构的概念。

4.2.1 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{S}\}$的复化

复化 **圆柱的复化** $\mathbb{A}$。我们考虑 $\rho >$ 的以下复化 1:

$$\mathbb{A}_\infty := \mathbb{C}/\mathbb{Z}\times\mathbb{C}, \qquad \mathbb{A}_\rho := \left\{(\theta,y) \in \mathbb{A}_\infty, |e^{i\theta}|^2 + |e^{-i\theta}|^2 + |y|^2 \le 3\rho\right\},$$

$$\check{\mathbb{A}}_\rho := \{(\theta,y) \in \mathbb{A}_\rho, |\Re(y)| < 1\}.$$

˜接下来，我们回顾一下， $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{A} := \mathbb{T}\times\mathbb{R}/4\mathbb{Z}$ 关于对合的商

$$\tau : (\theta, y) \mapsto (\theta, 2-y).$$

˜该对合全纯地延拓到 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\times\mathbb{C}/4\mathbb{Z}$，我们定义复化 $\mathbb{A}_\rho :=_\sim p(\mathbb{A}_\rho) \cup \tau\circ p(\mathbb{A}_\rho)$，其中 p 是投影 $\mathbb{A}_\infty \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}\times\mathbb{C}/4\mathbb{Z}$。注意， $\mathbb{A}_\rho$ 在 τ 下不变。

接下来，我们在 $\mathbb{A}$ 和 $\tilde{\mathbb{A}}$ 上赋予辛形式 $\Omega := \frac{1}{2} d\theta \wedge dy$。它全纯地延拓为 $\mathbb{A}_\infty$ 和 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\times\mathbb{C}/4\mathbb{Z}$ 上的全纯形式 Ω_0。我们注意到 $\tau^*\Omega_0 = -\Omega_0$,，因此若固定群同态 Γ: $\tau^i \mapsto (-1)^i$，则对每个 i，都有 $(\tau^i)^*\Omega_0 = \Gamma(\tau^i)\Omega_0$。这赋予 ˜$(\mathbb{A}_\rho,\ \Omega_0)$ 一个 $\mathbb{Z}_2$-结构。

球面的复化 $\mathbb{S}$。 我们考虑 $\rho > 1$ 的以下复化:

$$\mathbb{S}_\infty := \left\{z \in \mathbb{C}^3, \sum_{i=1}^3 z_i^2 = 1\right\}, \qquad \mathbb{S}_\rho := \left\{z \in \mathbb{S}_\infty, \sum_{i=1}^3 |z_i| \le \rho\right\},$$

$$\check{\mathbb{S}}_\rho := \{z \in \mathbb{S}_\rho, |\Re(z_3)| < 1\}.$$

通过将平方根解析延拓至 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$，我们将圆柱到球面的轴向投影扩展为以下双全纯映射：

$$\begin{aligned}\pi:\quad \check{\mathbb{A}}_\infty &\to \check{\mathbb{S}}_\infty\\ (\theta,y) &\mapsto \left(\sqrt{1-y^2}\cos(2\pi\theta),\sqrt{1-y^2}\sin(2\pi\theta),y\right)\end{aligned},$$

具有逆 $z\mapsto\left(\frac{1}{2i\pi}\log\left(\frac{z_1+iz_2}{\sqrt{1-z_3^2}}\right),\ z_3\right)$。

然而，由于 $\pi|_{\check{\mathbb{A}}}$ 是辛同胚，且$\check{}\mathbb{A}$ 的辛形式全纯地延拓为 $\mathbb{A}_\infty$上的辛形式Ω_0，因此 π 将 $\mathbb{S}$ 的辛形式全纯地延拓到 $\mathbb{S}_\infty$。由对称性，它也全纯地延拓到 $\mathbb{S}_\infty$ 在 SO_3的任一元素作用下的像。由于$SO_3(\check{}\mathbb{S}_\infty)=\mathbb{S}_\infty$，且 $\mathbb{S}_\infty$ 单连通（与 $T\mathbb{S}$微分同胚），$\mathbb{S}$的辛形式Ω作为记为Ω_0的全纯2-形式全纯地延拓到 $\mathbb{S}_\infty$。

圆盘的复化 $\mathbb{D}$。我们考虑 $\rho>1$的如下圆盘复化。

$$\mathbb{B}_\rho:=\left\{z\in\mathbb{C}^2:\sum_{i=1}^2|z_i|^2\le\rho\right\}\quad\text{and}\quad\check{\mathbb{D}}_\rho:=\left\{z\in\mathbb{B}_\rho\ :\ 0<\Re(z_1^2+z_2^2)<1\right\}.$$

在这些区域上，$\mathbb{D}$的典范辛形式 $\Omega:=\frac{1}{\pi}dx_1\wedge dx_2$可全纯延拓为 $\Omega_0:=\frac{1}{\pi}dz_1\wedge dz_2$。

我们也将极坐标全纯延拓如下：

$$\begin{aligned}\pi:\quad \{(\theta,y)\in\mathbb{A}_\infty:\Re(y)>-1\} &\to \left\{z\in\mathbb{C}^2:\Re(z_1^2+z_2^2)>0\right\}\\ (\theta,y) &\mapsto \sqrt{\tfrac{y+1}{2}}\,(\cos(2\pi\theta),\sin(2\pi\theta))\end{aligned}.$$

其逆映射为 $z\mapsto\left(\frac{1}{2i\pi}\log\left(\frac{z_1+iz_2}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}\right),2(z_1^2+z_2^2)-1\right)$。特别地，$\pi$将$\check{}\mathbb{A}_\infty\check{}$映到 $\mathbb{D}_\infty$上。

现在我们来描述 $\mathbb{D}$上的 $\mathbb{Z}_2$-结构。令 U 为 $\partial\mathbb{D}$ 的邻域，定义如下：

$$U:=\left\{x\in\mathbb{R}^2\ :\ 0<x_1^2+x_2^2<2\right\}.$$

我们注意到，π下 U的原像为 $\mathbb{T}\times(-1,3)$，它在对合τ下保持不变。因此，用 π共轭 τ，可得到 U上的如下对合：

$$\psi:=x\in U\mapsto\sqrt{2-\|x\|^2}\frac{x}{\|x\|}.$$

此外，由于 π 是辛的，而 τ是反辛的，它还满足 $\psi^*\Omega=-\Omega$。另请注意，ψ 使 $\partial\mathbb{D}$保持不变。

那么，$\mathbb{D}\cup U$ 上的实解析辛结构在以下商空间上自然诱导出一个实解析辛结构（参见 [Ber23，推论 2。4]）：

$$\tilde{\mathbb{D}}:=(\mathbb{D}\cup U)\times\mathbb{Z}_2/\sim,$$

其中 $\sim$是一个等价关系，其定义为：对于 x中的 U，有 $(x,i)\sim(\psi(x)\ i+1)$。我们$\check{}$注意到，$\mathbb{D}$是一个辛球面，其关于对合 $\tau:(x,i)\mapsto(x,i+1)$ 的商是圆盘 $\mathbb{D}$（圆柱和圆盘使用相同的记号 τ）。至于圆柱，我们注意到

˜， $\tau^*\Omega = -\Omega$，这为 $(\mathbb{D}, \Omega)$ 提供了一种 $\mathbb{Z}_2$-结构。

˜同样，我们提出 $\mathbb{D}$的一个复化。我们再次将$\sqrt{\cdot}$ 解析延拓到 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$，以便如下解析延拓 ψ：

$$\Psi : z \in \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, 0 < \Re(z_1^2 + z_2^2) < 2\right\} \mapsto z\frac{\sqrt{2 - z_1^2 - z_2^2}}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}.$$

该映射仍是一个对合。我们定义

$$\mathbb{D}_\rho = \left\{z \in \mathbb{B}_\rho \,:\, \Re(z_1^2 + z_2^2) < 2\right\} \quad \text{and} \quad \mathbb{U}_\rho := \left\{z \in \mathbb{B}_\rho \,:\, 0 < \Re(z_1^2 + z_2^2) < 2\right\}.$$

˜我们得到 $\mathbb{D}$的如下复扩张:

$$\tilde{\mathbb{D}}_\rho := \mathbb{D}_\rho \times \mathbb{Z}_2/\sim \quad \text{with } (z, i) \sim (\Psi(z), i+1) \text{ when } z \in \mathbb{U}_\rho.$$

˜对合 τ 也延拓到 $\mathbb{D}_\rho$，并满足 $\tau^*\Omega_0 = -\Omega_0$。因此，我们在˜（$\mathbb{D}_\rho, \Omega_0$）上有一个 $\mathbb{Z}_2$-结构。

4.2.2 复结构与辛结构

在本节中，我们给出复流形上复化与结构的定义和例子。然后，我们陈述如下结果，它们来自 [Ber24第 5] 节，用于证明 AbC* 原理。

设 $\mathbb{V}$ 是一个复流形，我们用 $T\mathbb{V}$ 表示它的复切丛，用 $T^{\mathbb{R}}\mathbb{V}$ 表示其底层的实切丛。在 $T\mathbb{V}$ 上乘以 i 会诱导出一个自同构 J_0，从 $T\mathbb{V}$ 映射到自身，并满足 $J_0^2 = -1$；这定义了 $\mathbb{V}$ 的一种复结构。

注 4.17。 $\mathbb{C}^k$、 $\mathbb{A}_\infty$、 $\tilde{\mathbb{A}}_\infty$、 $\mathbb{D}_\infty$、 $\tilde{\mathbb{D}}_\infty$ 和 $\mathbb{S}_\infty$ 都具有典范的复流形结构，统称为 J_0。

定义 4.18。 $T^{\mathbb{R}}\mathbb{V}^* \otimes T^{\mathbb{R}}\mathbb{V}$ 的光滑截面 J 若满足 $J^2 = -1$，则称其为 $\mathbb{V}$ 上的近复结构，其中 $J^2 = -1$ 作为从 $T^{\mathbb{R}}\mathbb{V}$ 到自身的线性映射。
若存在 $\mathbb{V}$ 的一个 C^∞ 图册$(\phi_\alpha)_\alpha$，使得 $D\phi_\alpha \circ J = iD\phi_\alpha$，则称该结构是可积的。在这种情况下，坐标变换是全纯的。

注 4.19。 给定 $\mathbb{V}$ 上的一个可积复结构，我们可以推出 $\mathbb{V}$ 上的一个复结构，反之亦然。因此，我们将可积复结构与复结构视为相同。

例 4.20. 对于每个嵌入 $h : \mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{V}$，截面 $h^*J_0 = Dh^{-1} \circ J_0 \circ Dh$ 是 $\mathbb{W}$上的一个复结构。

我们赋予 $\mathbb{V}$ 上的复结构空间以 $T^{\mathbb{R}}\mathbb{V}^* \otimes T^{\mathbb{R}}\mathbb{V}$的光滑截面的拓扑。

然后我们定义实解析结构与复化的概念。

定义 4.21. 流形上的实解析结构是一个极大图册 $\mathcal{A}^\omega = (\phi_\beta)^\beta$，其中坐标变换是实解析的。

实解析流形 $\mathbb{M}$ 的复化是一个复流形$(\mathbb{M}_\bullet, J)$，使得 $\mathbb{M} \subset \mathbb{M}_\bullet$，并且对于 $\mathbb{M}$中的所有 z，存在 $\mathbb{M}_\bullet$ 中 z 的一个邻域 V_α 的 J-全纯图 ψ_α，使得 ψ_α 在 $V_\alpha \cap \mathbb{M}$ 上的限制是 $\mathbb{M}$的一个实解析坐标图。

复流形$(\mathbb{M}_\bullet, J)$ 上的实结构是一个从 $\mathbb{M}_\bullet$ 到其自身的对合 σ，它相对于 J 是反全纯的，即 $\sigma^*J = -J$。

在我们的情形中，我们赋予 $\mathbb{M}_\bullet \in \{\mathbb{A}_\rho, \mathbb{S}_\rho, ...\}$ 典范实结构：

$$\sigma : z = (z_j)_j \mapsto \bar{z} = (\bar{z_j})_j.$$

对于 J 上的复结构 $\mathbb{M}_\rho$，使得 σ 相对于 J是反全纯的，则存在 $\mathbb{M}$ 上的实解析结构，使得（$\mathbb{M}_\rho$, J）是一个复化（参见 [Ber24，命题 5。4] 该结果的陈述）。因此我们可以定义如下概念。

定义 4.22。在 $\mathbb{M}_\rho$ 上的复结构 J，若 $\sigma^* J = -J$，则称其为 $\mathbb{M}$ 上实解析结构的复化。

下面给出一个用于该原理的重要例子。

例 4.23。若 $h : \mathbb{M}_\rho \hookrightarrow \mathbb{M}_\infty$ 是一个与 σ 交换的光滑嵌入，则 $(\mathbb{M}_\rho, h^* J_0)$ 是 $\mathbb{M}$ 的实解析结构的复化。

现在我们引入辛形式。

定义 4.24。设 $\mathbb{M}$ 是一个赋有光滑辛形式 Ω 的实曲面，且 $(\mathbb{M}_\bullet, J)$ 是 $\mathbb{M}$ 的复化。若存在一个 J-全纯延拓 $\Omega_\bullet$，将 Ω 延拓到 $\mathbb{M}_\bullet$，则称 Ω 可 J-全纯地延拓到 $\mathbb{M}_\bullet$。也就是说，$\Omega_\bullet|_{T\mathbb{M}} = \Omega$，并且在任意 J-全纯坐标图中，形式 $\Omega_\bullet$ 可写成 $\Psi(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$，其中 Ψ 是一个全纯函数。

如本节前面所述，当 $\mathbb{M} \in \left\{\mathbb{A},\ \mathbb{D},\ \tilde{\mathbb{A}},\ \tilde{\mathbb{D}},\ \mathbb{S}\right\}$ 我们用 Ω_0 表示辛形式 Ω 在 $\mathbb{M}$上的典范J_0-全纯延拓到 $\mathbb{M}_\infty$。

我们在紧流形上的辛 2-形式空间赋予光滑拓扑 y.
最后，我们可以通过加入辛形式来扩展上一个例子。

例 4.25。若 h: $\mathbb{M}_\rho \hookrightarrow \mathbb{M}_\infty$ 是一个与 σ 交换的光滑嵌入，且其在 $\mathbb{M}$上的限制是辛的，那么 Ω 关于 $h^* J_0$ 可全纯延拓至 $\mathbb{M}_\rho$。

现在，我们来介绍将要用到的主要结果。第一个结果讨论复结构与辛形式的收敛性，出自 [Ber24，定理 5.3 和 5。10]。

定理 4.26。设 $(\mathbb{M},\Omega)$ 是一个辛紧实曲面，且 $(\mathbb{M}_\rho, J_n)_n$ 是 $\mathbb{M}$ 的一个复化序列，使得 $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到一个近复结构 J。那么 J 是可积的，且 $(\mathbb{M}_\rho, J)$ 是 $\mathbb{M}$的一个复化。

假设Ω 存在一个 J_n-全纯延拓Ω_n，定义在 $\mathbb{M}_\rho$ 上，且$(\Omega_n)_n$ 收敛到一个 2-形式Ω'。那么Ω' 是Ω 到 $\mathbb{M}_\rho$ 的一个 J-全纯延拓。

我们以一项关于 J-全纯性、辛性与实解析辛结构之间相容性的结果结束本节。

我们考虑满足以下条件的 $\rho > \rho' > 1$：$(\mathbb{M}_{\rho'}, J)$ 是一个较小的复化。

定义 4.27。若光滑函数 f 从 $\mathbb{M}_{\rho'}$ 到 $\mathbb{M}_\rho$ 满足 $f(\mathbb{M}) \subset \mathbb{M}$，且 f 是 J-全纯的，即 $Df \circ J = J \circ Df$，则称其为实映射的一个 J-全纯延拓。

下面给出 [Ber24 中的结果，即命题 5.13 和推论 5。14]。

定理 4.28。设 $\rho > \rho' > 1$、$(\mathbb{M}_\rho, J)$ 是 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{S}\}$ 的一个复化。假设Ω可 J-全纯延拓到 $\mathbb{M}_\rho$。设 $f \in C^\infty(\mathbb{M}_{\rho'}, \mathbb{M}_\rho)$ 是 $\mathbb{M}$ 上某个实辛同胚的一个 J-全纯延拓。

如果 $\mathbb{M} = \mathbb{S}$，那么 $f|_{\mathbb{M}}$ 是关于 C^∞相容的实解析辛结构的实解析辛同胚。

若 $\mathbb{M} = \mathbb{A}$ 或 $\mathbb{D}$，假设 J 在 $\mathbb{M}_\rho \setminus \mathbb{M}_{\rho'}$ 上与 J_0 重合，且 f 在 $\mathbb{M}_\rho \setminus \mathbb{M}_{\rho'}$上与旋转 R_α重合。那么 $f|_{\mathbb{M}}$ 是一个关于 C^∞相容结构的实解析 $\mathbb{Z}_2$-辛同胚。

4.3 模变形逼近

现在我们有了双曲线外的逼近定理和复结构的概念，可以用这个定理对二者进行变形。

以下是用于得到该原理的模变形逼近定理。

定理 4.29. 设 $\gamma \in \Gamma_2(\mathbb{A})$，设 h_0 属于 辛映射$^\infty(\mathbb{A}; \partial\check{}\mathbb{A})$，满足 $h_0|_{O(\gamma)} = \mathrm{id}$，并设 $\mathcal{U}$ 是 $h_0|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 在 $C^\infty(\mathbb{A}\setminus\gamma, \mathbb{T}\times\mathbb{R})$的光滑紧开拓扑中的一个邻域。存在 $\eta > 0$，使得对于每个具有光滑边界的 σ-不变紧集 $\mathbb{W} \subset \mathbb{A}_\infty$，以及任意的 C^∞ 邻域$\mathcal{W}_J$ 和 $\Omega_0|_{\mathbb{W}}$的 $\mathcal{W}_\Omega$，都存在 $h\colon \mathbb{W} \to \mathbb{A}_\infty$，它是到其像上的光滑微分同胚，并满足：

($\mathcal{P}1$) $h(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$、$\det Dh|_{\mathbb{A}} = 1$，且 $h^{-1}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma} \in \mathcal{U}$。

($\mathcal{P}2$) h 的支集包含于 $\{(\theta, y) \in \mathbb{W} : \ |\Re(y)| < 1 - \eta\}$。

($\mathcal{P}3$) h^*J_0 属于 $\mathcal{W}_J$，且 $h^*\Omega_0$ 属于 $\mathcal{W}_\Omega$。

($\mathcal{P}4$) h 与 σ交换。

我们将在附录中证明该定理C，方法是采用 Berger 的证明并结合我们的逼近定理。

下面的定义由该定理推出。

De定义 4.30。 这样的 h_0 称为模结构变形逼近。

现在，利用一个提升（θ，y） $\mapsto$ （$q\cdot\theta$，y），以下推论是定理 4.29的直接结果。

推论 4.31. 若 h_0 与旋转 $R_{p/q}$ 交换，且双曲线 γ 在 $R_{p/q}$下不变，则模结构变形的逼近 h 可以选取为与 $R_{p/q}$交换。

4.4 变形实解析曲面上的 AbC* 实现

本节的主要目标是证明下述定理，由此将得出 AbC* 原理。

定理 4.32. 设 $\rho > \rho' > 1$。对 $\mathbb{M} \in \{\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{S}\}$ 上的每一个 C^∞-*AbC** 方案 (U, ν)，存在一个复化 $(\mathbb{M}_\rho, J)$，在其上 Ω 可 J-全纯地延拓，并且存在一个 J-全纯微分同胚 $f\colon \mathbb{M}_{\rho'} \hookrightarrow \mathbb{M}_\rho$，它延拓了 $(\mathbb{M}, \Omega)$ 的一个实辛同胚，从而实现 (U, ν)。˘此外，在 $\mathbb{M}_\infty$ 的补集上，映射 f 等于一个旋转以及 $J = J_0$。

首先，我们证明圆柱情形下的这个定理。这是最简单的情形，因为我们可以直接应用在该曲面上陈述的模变形逼近。

变形实解析辛圆柱上的 AbC* 实现

首先，我们回顾一下，光滑嵌入空间 Emb$^\infty(\mathbb{A}_\rho, \mathbb{A}_\infty)$ 可由一个记作 d 的距离度量。$\mathbb{A}_\rho$ 上的复可微 2-形式空间以及 $T^{\mathbb{R}}\mathbb{A}_\rho$ 的线性自同构空间也分别可由距离度量，这些距离同样记作 d。

然后，我们将通过归纳构造辛同胚 f，从而得到该定理。为此，我们在方案的每一步都应用模变形逼近。因此，得到的极限 f 对某个复结构是全纯的，而该复结构是由我们在每一步变形得到的复结构序列的极限。此外，f 关于一个全纯辛形式是辛的；该形式也是通过在每一步对原始形式进行变形而得到的。

因此，我们来证明存在序列 $\alpha_n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$、 h_n ，满足 $h_n^{-1} \in \mathsf{Emb}^\infty(\mathbb{A}_\rho, \mathbb{A}_\infty)$ 且 $f_n \in \mathsf{Emb}^\infty(\mathbb{A}_{\rho'}, \mathbb{A}_\rho)$ – 其中 $\rho' < \rho$ – 使得：

$$\alpha_0 = 0\ ,\ h_0 = \mathrm{id}\,|_{\mathbb{A}_\rho} \quad \text{and} \quad f_0 = \mathrm{id}\,|_{\mathbb{A}_{\rho'}}.$$

我们还要求，对于 $n \geq 1$、 α_n、 h_n 和 f_n ，满足：

(I_n) $h_n(\check{\mathbb{A}}) = \check{\mathbb{A}}$， h_n 在 $\check{\mathbb{A}}$ 上是辛的，且 $(h_n|_{\mathbb{A}}, \alpha_n)$ 遵循 AbC* 方案 (U, ν)：

$$h_n|_{\mathbb{A}} \in U(h_{n-1}|_{\mathbb{A}}, \alpha_{n-1}) \quad , \quad h_n|_{\mathbb{A}} \circ R_{\alpha_{n-1}} \circ {h_n|_{\mathbb{A}}}^{-1} = h_{n-1}|_{\mathbb{A}} \circ R_{\alpha_{n-1}} \circ {h_{n-1}|_{\mathbb{A}}}^{-1},$$
$$\text{and} \quad 0 < |\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \nu(h_n|_{\mathbb{A}}, \alpha_{n-1}).$$

(II_n) $R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1}(\mathbb{A}_{\rho'}) \subset \mathsf{int}\left(h_n^{-1}(\mathbb{A}_\rho)\right)$，因此复合 $f_n := h_n \circ R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1}|_{\mathbb{A}_{\rho'}}$ 是良定义的。此外， $d(f_n, f_{n-1}) < 2^{-n}$。

(III_n) $J_n = {h_n^{-1}}^* J_0$ 与 $\Omega_n = {h_n^{-1}}^* \Omega_0$ 满足：

$$d(J_n, J_{n-1}) < 2^{-n} \quad \text{and} \quad d(\Omega_n, \Omega_{n-1}) < 2^{-n}.$$

(IV_n) h_n 与 σ 交换。

(V_n) h_n^{-1} 的支集包含于 $\check{}\,\mathbb{A}_\rho$。

~通过在给定步骤 n，对一个与 AbC* 方案相关的映射 h h_n 应用模变形逼近，我们得到以下引理，它保证了此类序列的存在。

引理 4.33. 存在序列 $(\alpha_n)_n$、$(h_n)_n$和$(f_n)_n$，使得$(I_n \cdots V_n)$ 对每个 $n \geq 1$ 都成立。

下面我们给出该引理的证明概要，并在附录 D 中给出证明。

证明概要。设 α_n、 h_n 和 f_n 满足 $(I_n \cdots V_n)$。定义 α_{n+1}、 h_{n+1}和 f_{n+1}，使其满足 $(I_{n+1} \cdots V_{n+1})$。首先，根据 AbC* 方案的定义 2.10，存在一个辛同胚 $\widetilde{h} \in \mathsf{Symp}^\infty(\mathbb{A}; \partial\check{}\,\mathbb{A})$，它与 R_{α_n} 交换，并且 $h_n \circ \widetilde{h}$ 属于 $U(h_n|_{\mathbb{A}}, \alpha_n)$。此外，对于一个在 R_{α_n}~ ~下不变的双曲线 $\gamma \in \Gamma_2(\mathbb{A})$， $U(h_n|_{\mathbb{A}}, \alpha_n)$ 属于 $\mathcal{T}_\gamma^\infty$，且 h 满足 $h|_{O(\gamma)} = \mathsf{id}$。然后，我们应用定理 4.29，借助双曲线 γ 以及精心选取的邻域 $\mathcal{U}$、 σ-不变紧集 $\mathbb{W}$ 和邻域 $\mathcal{W}_J$ 、 $\mathcal{W}_\Omega$，用映射 h 对 h 进行结构变形下的逼近。现在定义 $h_{n+1} := h_n \circ h^{-1}$，使其接近 α_n，并且$f_{n+1} = h_{n+1} \circ R_{\alpha_{n+1}} \circ h_{n+1}^{-1}|_{\mathbb{A}_{\rho'}}$。因此，结合性质 (I_n)、(II_n)、(IV_n) 和 (V_n)，以及模变形逼近 h 所满足的性质，我们得到 α_{n+1}、 h_{n+1} 和 f_{n+1} 的性质 $(I_{n+1} \cdots V_{n+1})$。□

现在我们可以得到4.32关于圆柱的定理。

定理 *4.32* 在 $\mathbb{A}$ 上的证明。考虑由$f_n)_n$ 给出的后一个引理中的序列 (II_n)，由 (f) 可知，它们收敛到一个从 $\mathbb{A}_{\rho'}$ 到 $\mathbb{A}_\rho$的光滑嵌入。此外，由 (I_n)，其在 $\mathbb{A}$ 上的限制是 $\mathbb{A}$ 的一个辛同胚，它实现了 AbC* 方案 (U, ν)。

由 (III_n) 和定理 4.26可知，序列 $(J_n)_n$ 收敛到一个复结构 J。此外，由于 h_n的辛性，形式 Ω_n 是 J_n-全纯延拓，将 Ω 延拓到 $\mathbb{A}_\rho$。于是，由 (III_n) 和定理 4.26可知，序列 $(\Omega_n)_n$ 收敛到 Ω'，它是 Ω 到 J的一个 $\mathbb{A}_\rho$-全纯延拓。另据 J_0旋转的 $\mathbb{A}_{\rho'}$-全纯性，在 $\mathbb{A}_{\rho'}$上有如下结论：

$$f_n^* J_n = (h_n^{-1} \circ f_n)^* J_0 = (R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1})^* J_0 = (h_n^{-1})^* J_0 = J_n.$$

因此，在极限处， $f^* J = J$ 在 $\mathbb{A}_{\rho'}$ 上，因为在 $\mathbb{A}_{\rho'} \setminus \check{}\,\mathbb{A}_{\rho'}$ 上，我们有 $J = J_0$ 和 $f = R_\alpha$（其中 R_α 是 $(R_{\alpha_n})_n$ 在 $\mathbb{A}_{\rho'} \setminus \check{}\,\mathbb{A}_{\rho'}$ 上的极限）。因此， f 是辛同胚 $f|_{\mathbb{A}}$ 到 $\mathbb{A}_{\rho'}$ 的 J-全纯延拓。□

现在我们转向更困难的圆盘和球面情形。

形变实解析辛球面和圆盘上的 AbC⋆ 实现

令 $\mathbb{M}=\mathbb{D}$ 或 $\mathbb{S}$。我们回顾一下，我们考虑的是 $\rho>\rho'>1$。

在这里，我们不能直接应用模变形逼近，然后与π 共轭，将前面的证明转用到 $\mathbb{M}$上。事实上，即使逼近定理保证所得映射 h: $\mathbb{A}_\rho\to\mathbb{A}_\infty$ 在 $\mathbb{A}_\rho$中紧支撑，也无法避免其像与 $\mathbb{A}_\infty$ 的补集相交并离开 $\mathbb{A}_\rho$。因此，我们无法通过 π 将 h 共轭，也无法在 $\mathbb{M}_\rho$上得到逼近。

因此，我们的思路是使用一个嵌入 h ，将 $\mathbb{M}_\rho$ 映入 $\mathbb{A}_\infty$ ，且它在ˇ $\mathbb{M}_\rho$的某个紧子集之外与 π^{-1} 重合。此外，如果这样的 h 满足 $h(\check{\mathbb{M}})=\check{\mathbb{A}}$ ，并且在ˇ$\mathbb{M}$上是辛的，那么它就给出 $\mathbb{M}$的一个紧支撑辛同胚 h 。由此得到用于该方案的序列$(h_n)_n$ 。然后， $\mathbb{M}_{\rho'}\to\mathbb{M}_\rho$: R_{α_n} 在ˇ $\mathbb{M}_{\rho'}$ 的某个紧子集之外定义为 f_n ，其余部分则定义为 $h_n^{-1}\circ R_{\alpha_n}\circ h_n$。

ˇ 这似乎可行，因为给定这样的 $h_n:\mathbb{M}_\rho\to\mathbb{A}_\infty$，根据方案和逼-˜ ˜近定理，我们可以得到映射 h: $\mathbb{A}_R\to\mathbb{A}_\infty$ ，只要将 $h_{n+1}:=h\circ h_n$ 取得足够大，它便是良定义的。此外，它在ˇ $\mathbb{M}_\rho$ 的某个紧子集之外与 π^{-1} 重合，并在 $\mathbb{M}$ 上给出一个符合该方案的合适 h_n ^。

除此之外，整体思路与之前相同：我们在每一步对 $\mathbb{M}_\rho$ 上的复结构和辛结构稍作变形。因此，所构造的极限 f 对极限结构而言是全纯且辛的。

现在我们将 $\mathrm{Dilo}_c^\infty(\check{\mathbb{M}}_\rho,\mathbb{A}_\infty)$ 定义为从ˇ $\mathbb{M}_\rho$ 到 $\mathbb{A}_\infty$ 的局部微分同胚所构成的空间，这些微分同胚在ˇ $\mathbb{M}_\rho$ 的某个紧子集的补集上与 π^{-1} 重合。这样的微分同胚 g 在 $\mathbb{M}_\rho$ 上诱导出以下复结构和 2-形式:

$$g^\#J_0:=\begin{cases} g^*J_0 & \text{on} \quad \check{\mathbb{M}}_\rho \\ J_0 & \text{on} \quad \mathbb{M}_\rho\setminus\check{\mathbb{M}}_\rho \end{cases},$$

and

$$g^\#\Omega_0:=\begin{cases} g^*\Omega_0 & \text{on} \quad \check{\mathbb{M}}_\rho \\ \Omega_0 & \text{on} \quad \mathbb{M}_\rho\setminus\check{\mathbb{M}}_\rho \end{cases}.$$

由例子4.25 我们推导出以下结论:

事实 4.34。 辛形式 $g^\#\Omega_0$ 是 $g^\#J_0$-全纯的

现在假设 $g(\check{\mathbb{M}})=\check{\mathbb{A}}$ 且 $g|_{\check{\mathbb{M}}}$ 是辛的。于是我们定义辛同胚 $\widehat{g}\in$辛映射$^\infty(\mathbb{M})$ 如下:

$$\widehat{g}:=\begin{cases} g^{-1}\circ\pi^{-1} & \text{on} \quad \check{\mathbb{M}} \\ \mathrm{id} & \text{on} \quad \mathbb{M}\setminus\check{\mathbb{M}} \end{cases}.$$

由于映射 h_n 属于 $\mathrm{Dilo}_c^\infty(\check{\mathbb{M}}_\rho,\ \mathbb{A}_\infty)$，它们在 $\mathbb{M}_\rho$ 的某个紧子集的补集上与 π^{-1} 一致。因此，相关映射 f_n 将在紧集的补集上与旋转一致。因此，我们将 $\mathrm{Diro}_c^\infty(\mathbb{M}_{\rho'},\ \mathbb{M}_\rho)$ 视为从 $\check{\mathbb{M}}_{\rho'}$ 到 $\mathbb{M}_\rho$ 的嵌入空间，这些嵌入在 $\mathbb{M}_{\rho'}$ 的某个紧子集的补集上与旋转一致。

我们来证明存在序列 $\alpha_n\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $h_n\in\mathrm{Dilo}_c^\infty(\check{\mathbb{M}}_\rho,\ \mathbb{A}_\infty)$ 和 $f_n\in\mathrm{Diro}_c^\infty(\mathbb{M}_{\rho'},\ \mathbb{M}_\rho)$，使得:

$$\alpha_0=0\ ,\ h_0=\pi^{-1}|_{\check{\mathbb{M}}_\rho}\quad\text{and}\quad f_0=\mathrm{id}\,|_{\check{\mathbb{M}}_{\rho'}}.$$

我们还要求，对于 $n\geq 1$、 α_n、 h_n 和 f_n 满足

(I_n) $h_n(\check{\mathbb{M}}) = \check{\mathbb{A}}$，$h_n$ 在 $\check{\mathbb{M}}$ 上是辛的，并且 $(\widehat{h_n},\ \alpha_n)_n$ 遵循 AbC* 方案 $(U,\ \nu)$。
(II_n) $f_n(\check{\mathbb{M}}_{\rho'}) \subset \text{int}\left(\check{\mathbb{M}}_{\rho}\right)$, $h_n \circ f_n = R_{\alpha_n} \circ h_n|_{\check{\mathbb{M}}_{\rho'}}$，以及 $d(f_n,\ f_{n-1}) < 2^{-n}$ (在此情形下，d 表示 $\text{Emb}^\infty(\mathbb{M}_{\rho'},\ \mathbb{M}_\rho)$ 上的一个度量距离。

(III_n) $J_n = h_n^{\#} J_0$ 和 $\Omega_n = h_n^{\#}\Omega_0$ 满足：

$$d(J_n, J_{n-1}) < 2^{-n} \quad \text{and} \quad d(\Omega_n, \Omega_{n-1}) < 2^{-n}.$$

(IV_n) h_n 与 σ交换。

下面给出提供这些序列的引理。

引理4.35. 存在序列 $(\alpha_n)_n$、$(h_n)_n$ 和 $(f_n)_n$，使得对每个 $n \geq 1$，$(I_n \cdots V_n)$ 均成立。

证明概要。设 α_n、h_n 和 f_n 满足 $(I_n \cdots IV_n)$。定义 α_{n+1}、h_{n+1}和 f_{n+1}，使它们满足 $(I_{n+1} \cdots IV_{n+1})$。首先，根据 AbC* 方案的定义 2.10，存在辛同胚 $h_{\mathbb{M}} \in \text{Symp}^\infty(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}})$，它与 R_{α_n} 交换，且 $\widehat{h_n} \circ h_{\mathbb{M}}$ 属于$\widehat{}$ $\widehat{}$ $U(h_n, \alpha_n)$。此外，对于在R_{α_n}下不变的双曲线 $\gamma_{\mathbb{M}} = \pi(\gamma_{\mathbb{A}}) \in \Gamma_2(\mathbb{M})$，$U(h_n, \alpha_n)$ 属于 $\mathcal{T}_\gamma^\infty$，并且 $h_{\mathbb{M}}$ 满足 $h_{\mathbb{M}}|_{O(\gamma)} = \text{id}$。接着，我们在 ∂ 上对 $h_{\mathbb{M}}$ 进行爆破，在 $\check{\mathbb{M}}$ 上得到一个满足 $\pi \circ h_{\mathbb{A}} = h_{\mathbb{M}} \circ \pi$ 的辛同胚$h_{\mathbb{A}} \in \text{Symp}^\infty(\mathbb{A}; \partial\check{\mathbb{A}})$。现在，应用定理 4.29，利用双曲线 $\gamma_{\mathbb{A}}$、经过恰当选择的邻域$\mathcal{U}$、σ-不变紧集 $\mathbb{W}$ 以及邻域 $\mathcal{W}_J$ 和 $\mathcal{W}_\Omega$，我们可以通过结构变形将 $h_{\mathbb{A}}$ 逼近到映射 h。因此，我们令 h_{n+1} 在 $\check{\mathbb{M}}_\rho$ 的一个紧子集上等于 $h \circ h_n$，在其他地方则取 π^{-1}；由此定义了 $\text{Dilo}_c^\infty(\check{\mathbb{M}}_\rho, \mathbb{A}_\infty)$ 中的一个映射。我们还取 α_{n+1} 使其接近 α_n，并令 f_{n+1} 满足 $h_{n+1} \circ f_{n+1} = R_{\alpha_{n+1}} \circ h_{n+1}|_{\check{\mathbb{M}}_{\rho'}}$，且

f_{n+1} 在$\check{\mathbb{M}}_{\rho'}$之外与 $R_{\alpha_{n+1}}$ 重合。因此，结合性质（I_n）、（II_n）和（IV_n），以及模变形逼近 h所满足的性质，我们得到 α_{n+1}、h_{n+1} 和 f_{n+1}具有性质（$I_{n+1} \cdots IV_{n+1}$）。□

本引理的完整证明见附录D。

借助该引理，我们便可完成定理4.32 的证明。

定理*4.32* 在 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{S}$ 上的证明（完）。考虑由后一引理给出的序列（f_n）$_n$。由（II_n，它收敛于一个光滑嵌入 f，从 $\mathbb{M}_{\rho'}$ 到 $\mathbb{M}_\rho$。此外，由（I_n，其在 $\mathbb{M}$ 上的限制是 $\mathbb{M}$ 的一个辛同胚，实现了 AbC* 方案。

由（III_n）和定理4.26，序列（J_n）$_n$ 收敛到一个复结构 J。此外，$\check{}$ 由于 h_n 在 $\mathbb{M}$上的辛性，形式 Ω_n 是 Ω 到 $\mathbb{M}_\rho$的全纯延拓。于是，由（III_n）和定理4.26，序列（Ω_n）$_n$ 收敛于 Ω'，它是 Ω 到 $\mathbb{M}_\rho$的一个全纯延拓。

此外，由旋转的 J_0-全纯性，在以下范围内成立 $\check{\mathbb{M}}_{\rho'}$：

$$f_n^* J_n = (h_n \circ f_n)^* J_0 = (R_{\alpha_n} \circ h_n)^* J_0 = h_n^* J_0 = J_n.$$

因此，在极限处，$f^*J = J$ 在 $\mathbb{M}_{\rho'}$上成立，因为在 $\mathbb{M}_{\rho'} \setminus \check{\mathbb{M}}_{\rho'}$ 上我们有 $J = J_0$ 和 $f = R_\alpha$（其中R_α 是$(R_{\alpha_n})_n$ 在 $\mathbb{M}_{\rho'} \setminus \check{\mathbb{M}}_{\rho'}$上的极限）。因此，$f$ 是辛同胚 $f|_{\mathbb{M}}$到 $\mathbb{M}_{\rho'}$ 上的 J-全纯延拓。□

4.5 原理的结论

最后，我们可以证明定理4.2和4.5，从而完成本节开头所述原理的证明。

定理的证明 *4.2*。由定理 4.32，存在 $\rho > \rho' > 1$ 以及一个复化（$\mathbb{S}_\rho$，J），在其上 Ω 可 J-全纯延拓。此外，存在一个 J-全纯微分同胚 f：

$\mathbb{S}_{\rho'} \hookrightarrow \mathbb{S}_\rho$ 它延拓了由 AbC$\mathbb{S}$，方案构造的（* 方案（U， ν）。于是，由球面上的定理 4.28， $f|_{\mathbb{S}}$ 是实解析的，并且相对于一个 C^∞-相容的解析辛结构（$\mathcal{A}^{\omega'}$）是辛的，由此证明完毕。□

现在定理 4.5 带有 $\mathbb{Z}_2$-作用。

定理 *4.5*的证明。 令 $\mathbb{M} = \mathbb{A}$ 或 $\mathbb{D}$。

根据定理 4.32，我们有 $\rho > \rho' > 1$ 以及一个复化 $(\mathbb{M}_\rho, J)$，在其上 Ω 可 J全纯延拓。此外，存在一个 J-全纯微分同胚 $f\colon \mathbb{M}_{\rho'} \hookrightarrow \mathbb{M}_\rho$，它延拓了由 AbC* 方案 (U, ν) 构造的 $(\mathbb{M}, \Omega)$ 的实辛同胚。定理 4.32 还意味着， J 在 $\mathbb{M}_\rho \setminus \mathbb{M}_{\rho'}$ 上与 J_0 重合，而 f 在 $\mathbb{M}_\rho \setminus \mathbb{M}_{\rho'}$ 上与一个旋转重合。于是，根据圆柱或圆盘上的定理 4.28， $f|_{\mathbb{M}}$ 是一个关于C^∞-相容结构 $(\mathcal{A}^{\omega'})$ 的实解析 $\mathbb{Z}_2$-辛同胚，证明得证。□

A 关于康托罗维奇距离的结果

在本附录中，我们给出若干用于第3节的康托罗维奇距离结果。首先，我们有如下来自 [Ber22的命题 1。3] 关于由 C^0映射给出的测度的推前。

命题 A.1. 设 X 与 Y 为可测紧度量空间。对于 f_1、 $f_2 \in C^0(X, Y)$ 以及$\mu \in \mathcal{M}(X)$，康托罗维奇距离满足：

$$d_K(f_{1*}\mu, f_{2*}\mu) \leq d_{C^0}(f_1, f_2).$$

接下来，我们给出关于双利普希茨映射的康托罗维奇距离的一个结果。

命题A.2. 设(X, d_X) 与(Y, d_Y) 为可测度量空间，并设 $\phi\colon X \to Y$为可逆的 Q-双利普希茨映射，即 ϕ 与 ϕ^{-1} 均为 Q-利普希茨映射。则对于 X 上的两个测度 μ_1 与 μ_2，我们有：

$$\frac{1}{Q} d_K(\mu_1, \mu_2) \leq d_K(\phi_*\mu_1, \phi_*\mu_2) \leq Q d_K(\mu_1, \mu_2).$$

证明。 为得到右侧不等式，我们考虑 $f\colon Y \to \mathbb{R}$ 为一个1-利普希茨映射，则 $\frac{1}{Q} f \circ \phi$ 也是1-利普希茨的，并且由康托罗维奇定理可得：

$$\int_Y f d(\phi_*\mu_1 - \phi_*\mu_2) = \int_X f \circ \phi d(\mu_1 - \mu_2) = Q \int_X \frac{1}{Q} f \circ \phi d(\mu_1 - \mu_2) \leq Q d_K(\mu_1, \mu_2).$$

根据康托罗维奇定理，这就得到了右侧不等式。然后，将 $i \in \{1, 2\}$中的 ϕ 替换为 ϕ^{-1}、将 μ_i 替换为 $\phi_*\mu_i$，即可由右侧不等式得到左侧不等式。□

由这两个命题，我们可以推出以下结果。

推论 A.3. 设 h 属于 辛映射$^0(\mathbb{M})$，则映射 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{M}) \mapsto h_*\mu$ 是连续的 $s.$

证明。 我们通过序列刻画来证明该映射的连续性。设 $(\mu_n)_n$ 是 $\mathbb{M}$ 上的一个概率测度序列，并收敛于 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{M})$。设 $\epsilon > 0$，由 Symp$^1(\mathbb{M})$ 在 Symp$^0(\mathbb{M})$ 中稠密，存在一个映射 $g \in$ Symp$^1(\mathbb{M})$，它与 h相差不超过 ϵ-C^0。设 $Q > 0$ 满足 g是 Q-双 Lipschitz 的。对于满足 $d_K(\mu_n, \mu) \leq \frac{\epsilon}{Q}$的 $n \in \mathbb{N}^*$，根据三角不等式和前述两个命题，我们有：

$$d_K(h_*\mu_n, h_*\mu) \leq d_K(h_*\mu_n, g_*\mu_n) + d_K(g_*\mu_n, g_*\mu) + d_K(h_*\mu, g_*\mu) \leq \epsilon + Q d_K(\mu_n, \mu) + \epsilon \leq 3\epsilon.$$

这说明映射 $\mu \mapsto h_*\mu$ 是连续的。 □

接下来注意，康托罗维奇距离在凸组合上具有良好的性质。

命题 A.4. 设 X 为一个紧致度量空间。设 ν_1、ν_2、μ_1和 μ_2 为 $\mathcal{M}(X)$ 和 $\alpha \in [0,1]$中的概率测度。我们有：

$$d_K(\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2, \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) \leq \alpha d_K(\nu_1, \mu_1) + (1-\alpha)d_K(\nu_2, \mu_2).$$

证明。 设 $f : X \to \mathbb{R}$ 是一个 1-Lipschitz 映射，则有：

$$\int_X f d(\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2 - \alpha\mu_1 - (1-\alpha)\mu_2) = \alpha \int_X f d(\nu_1 - \mu_1) + (1-\alpha) \int_X f d(\nu_2 - \mu_2).$$

因此，由 Kantorovich 对偶定理可得结果。

□

同样，利用 Kantorovich 对偶定理，我们得到关于凸组合的以下命题。

命题 A.5。 设 X 是一个紧致度量空间。设 μ_1 和 μ_2 是 $\mathcal{M}$（X）和 $\alpha \in [0,1]$中的概率测度。则有：

$$d_K(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2, \mu_1) = (1-\alpha)d_K(\mu_1, \mu_2).$$

现在，为了得到一个测度与曲面的勒贝格测度接近的结论，我们有以下命题：

命题 A.6。 设 S是一个紧曲面，设 $\epsilon > 0$，并设（$D_1, \cdots, D_n$）是S 的两两不相交子集，使得：

1. 勒贝格测度$_S(\sqcup_i D_i) \geq 1 - \epsilon$ 直径(S),
2. 勒贝格测度$_S(D_i)$ = 勒贝格测度$_S(D_j)$
对每个 i, j，*3.* 且 直径$(D_i) \leq \epsilon$ 对每个 i。

那么，对于每个族 $(\mu_i)_{1 \leq i \leq N}$，只要满足 $\mu_i \in \mathcal{M}(D_i)$，就有：

$$d_K(\mathrm{Leb}_S, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mu_i) \leq 2\epsilon.$$

证明。 首先，由于我们有分解 勒贝格测度$_S$ = 勒贝格测度$_S(D)$勒贝格测度$_S|_D$ + (1 − 勒贝格测度$_S(D)$)勒贝格测度$_S|_{S\setminus D}$其中 $D = \sqcup_i D_i$，由命题 A.5 和 1) 可得

$$d_K(\mathrm{Leb}_S, \mathrm{Leb}_S|_D) \leq \frac{\epsilon}{\mathrm{diam}(S)} d_K(\mathrm{Leb}_S|_{S\setminus D}, \mathrm{Leb}_S|_D) \leq \epsilon. \tag{A.1}$$

$_N$那么，由 2) 得到 勒贝格测度$_S|_D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}$勒贝格测度$_S|_{D_i}$，即由命题 A.4 可得：

$$d_K(\mathrm{Leb}_S|_D, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mu_i) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_K(\mathrm{Leb}_S|_{D_i}, \mu_i).$$

此外，由于直径$(\mathcal{M}(D_i))$ = 直径(D_i)，结合后一个等式和 3) 可得：

$$d_K(\mathrm{Leb}_S|_D, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mu_i) \leq \epsilon.$$

利用三角不等式和公式（A.1），即可得到这些结果。

□

B 双曲线之间的辛同胚

在本附录中，我们证明命题 4.15：对于给定的双曲线 $\gamma \subset \mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$，该命题给出了一个将水平双曲线映射到 γ 的辛同胚。根据定义 2.5，存在一个从水平双曲线到 γ 的圆柱微分同伦。因此，应用莫泽技巧并对水平双曲线稍作修改，即可从给定的微分同伦得到该辛同胚。下面回顾这一命题。

命题（4.15）。设 γ 属于 $\Gamma_2(\mathbb{A})$，则存在一条双曲线 $\gamma' := \mathbb{T} \times \{y_-, y_+\}$ 以及一个辛映射 $\phi \in \mathrm{Symp}_c^\infty(\mathbb{A}, \partial\mathbb{A})$，使得

$$\phi(\gamma') = \gamma.$$

证明。首先，我们证明命题在情形 $\gamma \subset \mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$ 下成立。我们选择合适的双曲线 γ'，其存在性由下面证明的子引理保证。

引理 B.1。存在一条双曲线 $\gamma' := \mathbb{T} \times \{y_-, y_+\}$，它可通过一个微分同伦 $(f_t)_{t\in[0,1]}$ 与 γ 微分同伦，该微分同伦在 $\mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$ 中紧支撑，并且 f_1 保持 $\mathbb{A} \setminus \gamma'$ 各连通分支的面积。

因此，我们考虑这样一个在 $\mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$ 中紧支撑的微分同伦 $(f_t)_{t\in[0,1]}$，它连接双曲线 $\gamma' := \mathbb{T} \times \{y_-, y_+\}$ 与 γ。对于 $\mathbb{A} \setminus \gamma'$ 的任意连通分支 N，该微分同伦满足：

$$\mathrm{Leb}(f_1(N)) = \mathrm{Leb}(N) \quad \text{and} \quad f_1(\gamma'_\pm) = f_1(\mathbb{T} \times \{y_\pm\}) = \gamma_\pm. \tag{B.1}$$

现在，让我们使用莫泽技巧，将 $(f_t)_t$ 与一个光滑同伦复合，从而得到所需的辛映射。首先，对于 $\mathbb{A} \setminus \gamma'$ 的任意连通分支 N，我们可以假设 f_t 在 $\mathbb{A}$ 中 $f_t(N)$ 的边界附近保持典范辛形式 Ω 不变。事实上，我们可以在 $\mathbb{A}$ 中 $f_t(N)$ 的边界管状开邻域附近，平滑地改变 f_t 的微分的法向分量的大小。这可以通过在该邻域上平滑变形 f_t 来实现。

令 N 为 $\mathbb{A} \setminus \gamma'$ 的一个连通分支，并令 V 为 N 中 ∂N 的一个管状邻域，使得 $f_t|_V$ 为辛映射。

为了应用莫泽技巧，我们定义辛形式的族 $(\Omega_t)_t$。首先，通过缩小邻域 V，我们可以假设

$$\mathrm{Leb}(V) < \mathrm{Leb}(N). \tag{B.2}$$

接下来，令 U 为 ∂N 中的相对紧邻域，且 V 并令 $\chi : N \to [0,1]$ 为满足以下条件的光滑函数：$\chi|_{N\setminus V} \equiv 1$ 并且 $\chi|_U \equiv 0$。特别地，对于每个 t，都有 $\int_N \chi f_t^*\Omega \geq$ 勒贝格测度$(f_t(N \setminus V)) > 0$，因为 f_t 是微分同胚，并且根据方程（B.2），勒贝格测度$(N \setminus V) > 0$。因此，对于$t \in [0,1]$，我们定义：

$$\Omega_t := A_t \cdot (f_t^*\Omega)|_N \quad \text{with} \quad A_t := 1 + \frac{\mathrm{Leb}(N) - \mathrm{Leb}(f_t(N))}{\int_N \chi f_t^*\Omega}\chi.$$

注意，$\int_N \Omega_t =$勒贝格测度(N)。此外，由于勒贝格测度$(N) =$勒贝格测度$(f_1(N))$，根据（B.1），可得 $A_1 \equiv 1$因此：

$$(f_1^*\Omega)|_N = \Omega_1. \tag{B.3}$$

此外，注意到 Ω_t 根据以下事实是辛形式。

事实 B.2。对于每个 $t \in [0,1]$，A_t 是正定的，且 Ω_t 是辛形式。

事实的证明。为证明 A_t 是正定的，只需证明勒贝格测度(N)−勒贝格测度$(f_t(N))$ $\int_N \chi f_t^*\Omega\chi > -1$。于是，由于 χ 在 $[0,1]$ 中取值，且 $\int_N \chi f_t^*\Omega$是正定的，问题归结为证明：

$$\mathrm{Leb}(N) - \mathrm{Leb}(f_t(N)) > -\int_N \chi f_t^*\Omega$$

现在，由于 f_t 在 V 上是辛的，我们有勒贝格测度$(f_t(V))$ $=$ 勒贝格测度(V) $<$ 勒贝格测度(N)，由方程(B.2)。因此，我们有：

$$\int_N \chi f_t^*\Omega \geq \int_{N\setminus V} f_t^*\Omega = \mathrm{Leb}(f_t(N)) - \mathrm{Leb}(f_t(V)) > \mathrm{Leb}(f_t(N)) - \mathrm{Leb}(N).$$

这证明了 A_t的正性。因此，Ω_t 确实是一个辛形式。 □

接下来，由于对每个 t，$\int_N \Omega_t = \mathrm{Leb}(N)$，$(\Omega_t)_t$ 是上同调的辛形式，且在 U 上的限制为常值（因为 $f_t|_U$ 是辛映射，且 $A_t|_U \equiv 1$）。因此，根据运用莫泽技巧的相对达布定理的变体 [MS17, Ex. 3.2.6]，存在一个由 N 上的光滑微分同胚构成的同伦 $(\Psi_t)_t$，使得对每个 t，$\Psi_t^*\Omega_t = \Omega_0 = \Omega|_N$，且 $\Psi_t|_U \equiv \mathrm{id}$。此外，(B.3) 推出

$$(f_1 \circ \Psi_1)^*\Omega = \Psi_1^*\Omega_1 = \Omega|_N.$$

此外，由于 Ψ_1 在 U上是恒等映射，我们可以将从 $\mathbb{A}\setminus\gamma'$ 的不同连通分支中得到的映射 Ψ_1 光滑地拼接起来，构成一个在 $\check{\mathbb{A}}\setminus\gamma'$ 中紧支撑的 $\mathbb{A}$ 上的微分同胚 $\widehat{\Psi}$。因此，我们可以考虑在 $\mathbb{A}$中紧支撑的光滑辛同胚 $\phi := f_1 \circ \Psi$。

此外，由于 γ' 在 $\check{\mathbb{A}}$ 中具有紧支撑，因此它在 γ'的一个邻域上等于恒等映射。因此，辛同胚 ϕ 满足：

$$\phi(\gamma') = f_1(\gamma') = \gamma.$$

这就处理了情形 $\gamma \subset \mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$。

现在，我们考虑满足 $\gamma \cap \partial\mathbb{A} \neq \emptyset$的 γ。若 $\gamma = \partial\mathbb{A}$，取 $\phi = \mathrm{id}$ 即可显然得到该命题。否则，要么 $\gamma_+ = \mathbb{T}\times\{1\}$且 $\gamma_- \subset \mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$，要么 $\gamma_- = \mathbb{T}\times\{-1\}$且 $\gamma_+ \subset \mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$；后一种情形可通过用对合 $(\theta, y) \mapsto (\theta, -y)$ 对 ϕ进行共轭，并对 γ应用相同变换，归约为前一种情形。根据双曲线的定义，存在 $\tilde{\gamma} := \mathbb{T}\times\{\tilde{y}_-, 1\}$，它可通过微分同伦 $(h_t)_t$ 与 γ 相连，且该微分同伦在 $\mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$中具有紧支撑。由于该微分同伦具有紧支撑且 $\tilde{y}_- < 1$，存在 $\eta > 0$ 使得 $\mathrm{supp}(h_t) \subset \mathbb{A}(2\eta)$ 且 $\tilde{y}_- < 1-\eta$。考虑$\bar{\gamma} := \gamma_- \sqcup \mathbb{T}\times\{1-\eta\} \subset \mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$，它通过 $(h_t)_t$与 $\mathbb{T}\times\{\tilde{y}_-, 1-\eta\}$ 微分同伦，因此定义了一条双曲线。于是，将命题 4.15 应用于 $\bar{\gamma} \subset \mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$，可得到一个辛同胚 $\phi \in \mathrm{Symp}_c^\infty(\mathbb{A}, \partial\mathbb{A})$，它将一条双曲线 $\mathbb{T}\times\{\bar{y}_-, \bar{y}_+\}$ 映射到 $\bar{\gamma}$；特别地，它将 $\mathbb{T}\times\{\bar{y}_-, 1\}$ 映射到 γ，因为它在 $\mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$中具有紧支撑。这就证明了情形 $\gamma \not\subset \mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$下的命题。□

引理 B.1 的证明。根据双曲线 γ 的定义，存在一条双曲线 $\tilde{\gamma} := \mathbb{T}\times\{\tilde{y}_-, \tilde{y}_+\}$，它通过一个紧支撑于 $\mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$ 的微分同伦 $(h_t)_t$ 与 γ 微分同伦。我们来构造一个从双曲线 γ' 到 $\tilde{\gamma}$ 的微分同伦 $(g_t)_t$，然后将 $(h_t)_t$ 与 $(g_t)_t$ 拼接起来，得到一个微分同伦 $(f_t)_t$。适当选择 γ' 后，微分同伦 $(f_t)_t$ 满足以下性质：f_1 保持 $\mathbb{A}\setminus\gamma'$ 的各连通分支的面积。

设 O_+ 和 O_- 是 $O(\gamma)$ 的连通分支，且 $\gamma_\pm$ 位于 $O_\pm$ 的边界上。于是，我们选择双曲线 $\gamma' := \mathbb{T}\times\{y_-, y_+\}$，使得

$$\mathrm{Leb}(O_+) = \tfrac{(1-y_+)}{2} \quad \text{and} \quad \mathrm{Leb}(O_-) = \tfrac{(y_-+1)}{2}, \tag{B.4}$$

注意，由于 $\mathrm{Leb}(O(\gamma)) < 1$，且 $A(\gamma)$ 从不为空，因此有 $y_+ > y_-$。

假设我们构造了一个微分同伦（g_t）$_t$，介于 γ' 和 $\tilde{\gamma}$ 之间，并将（f_t）$_t$与（h_t）$_t$的拼接记为 f_1。因此，它将 $O(\gamma')$ 的连通分支映射到 O_+ 和 O_-，故根据方程（B.4）保留这些连通分支的面积。此外，f_1 也保留了 $A(\gamma')$ 的面积；该连通分支被映射到 $A(\gamma)$，因为

$$\mathrm{Leb}(\mathbb{A}) = \mathrm{Leb}(A(\gamma')) + \mathrm{Leb}(O(\gamma')) = \mathrm{Leb}(A(\gamma)) + \mathrm{Leb}(O(\gamma)).$$

因此，这样的$(f_t)_t$就是所需的、介于 γ' 和 γ之间的微分同伦。

要得出结论，还需构造这个微分同伦$(g_t)_t$。我们利用以下标准事实来构造$(g_t)_t$。

事实 B.3。设 y_+^1、y_-^1、y_+^2和 y_-^2 是$(-1,\ 1)$中的点，且满足 $y_+^i > y_-^i$。则存在一个微分同胚 G，其支集紧包含于 $[-1,1]\,(-1,\ 1)$中，并满足 $G(y_+^1) = y_+^2$ 和 $G(y_-^1) = y_-^2$。

现在，由于 $\gamma \subset \mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$ 和$(h_t)_t$是从 $\tilde{\gamma}$ 到 γ的微分同伦，可知点 $\tilde{y}_+$ 和$\tilde{y}_-$ 属于$(-1,1)$。此外，$\gamma \subset \mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$ 也意味着勒贝格测度 Leb(O_+)和 Leb(O_-)均非零，因此根据方程（B.4），y_+ 和 y_- 也属于$(-1,1)$。因此，我们可以将上述事实应用于点 y_+、y_-、$\tilde{y}_+$和 $\tilde{y}_-$。由此得到一个微分同胚 G，其支集紧包含于$(-1,1)$中，并满足 $G(y_+) = \tilde{y}_+$ 和 $G(y_-) = \tilde{y}_-$。现在，由于 G 是一个微分同胚，我们考虑路径

$$G_t : y \in \mathbb{I} \mapsto tG(y) + (1-t)y = -1 + \int_{-1}^{y} tG'(u) + (1-t)du,$$

对 $t \in [0,1]$定义。它是 $[-1,1]$的微分同胚空间中 id 与 G 之间的一条同伦。由于 G 在$(-1,1)$中紧支撑，同伦$(G_t)_t$ 也同样如此。最后，我们定义 γ' 与 $\tilde{\gamma}$ 之间在 $\mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$ 中紧支撑的微分同伦为

$$g_t : (\theta, y) \in \mathbb{A} \mapsto (\theta, G_t(y)) \in \mathbb{A},$$

对 $t \in [0,1]$。

将$(h_t)_t$ 与$(g_t)_t$ 拼接，便得到所需的微分同伦$(f_t)_t$。 □

C 模形变逼近定理的证明

在本附　录中我们证明定理 4.29，见第4.3节，遵循 Berger 的证明思路　　f.

在证明定理之前，我们回顾第 4.1小节中的主逼近定理，并推导出一个推论。

定理 *4.9.* 设 $\gamma \in \Gamma_2(\mathbb{A})$ 和 $f \in$ 辛映射$_c^\infty(\mathbb{A};\partial\mathbb{A})$ 满足 $f|_{O(\gamma)} = id$。那么，对于任意$\rho > 1$ 以及 $C^\infty(\mathbb{A}\setminus\gamma,$ $\mathbb{T}\times\mathbb{R})$ 的光滑紧开拓扑中 $f|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 的任意邻域 $\mathcal{U}$，都存在一个映射 $F \in$ 辛映射$_\rho^\omega(\mathbb{A}_\infty)$，使得 $F|_{\mathbb{A}\setminus\gamma} \in \mathcal{U}$。

推论 C.1. 设 h_0 属于 辛映射$_c^\infty(\mathbb{A};\partial\mathbb{A})$，$\gamma$ 属于 $\Gamma_2(\mathbb{A})$，满足 $h_0|_{O(\gamma)} = id$，且设 $\mathcal{U}$ 是 $C^\infty(\mathbb{A}\setminus\gamma,$ $\mathbb{T}\times\mathbb{R})$ 的光滑紧开拓扑中 $h_0|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 的一个邻域。

存在 $\epsilon > 0$ 以及一个双全纯映射族$(h_r)_{r\geq 1}$，属于辛映射$^\omega(\mathbb{A}_\infty)$，使得对于每个 r，$h_r^{-1}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 属于 $\mathcal{U}$，与 σ交换，并满足

$$\|(h_r - \mathrm{id})|_{K_{r,\epsilon}}\|_{C^r} \leq r^{-1}.$$

证明。首先，根据注 4.10，我们可以假设 $\gamma \subset \mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$ 且 supp$(h_0) \subset A(\gamma)$。

那么，由于 $\gamma\cap\partial\mathbb{A} = \emptyset$，存在 $\epsilon > 0$使得 γ属于 $\mathbb{A}_{2\epsilon} = \mathbb{T}\times(-1+2\epsilon,\ 1-2\epsilon)$，特别是$h_0$ 在 $\mathbb{A}_{2\epsilon}$中紧支撑。现在考虑仿射映射：

$$g : (\theta, y) \in \mathbb{A}_\infty \mapsto (\theta, \frac{y}{1-2\epsilon}) \in \mathbb{A}_\infty.$$

此映射将 $\mathbb{A}_{2\epsilon}$ 映到 $\mathbb{A}_0$。因此，辛同胚 $f := g\circ h_0\circ g^{-1}$ 属于 Symp$_c^\infty(\mathbb{A};\partial\mathbb{A})$，并且在 $O(g(\gamma))$ 上等于恒等映射。此外，g 将邻域 $\mathcal{U}$ 共轭到

光滑紧开拓扑下 $C^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}\setminus g(\gamma)\ \mathbb{T}\times\mathbb{R})$中 $f|_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}\setminus g(\gamma)}$的一个邻域 $\mathcal{V}$。然而，由于 $f|_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}\setminus A(g(\gamma))}=\mathrm{id}$，光滑紧开拓扑下$C^\infty(\mathbb{A}\setminus g(\gamma)\ \mathbb{T}\times\mathbb{R})$的存在一个邻域 $\mathcal{U}'$，使得根据 K_{ρ_r}中的柯西估计，以下结论成立：

$$\forall F\in \mathrm{Symp}^\omega_{\rho_r}(\mathbb{A}_\infty),\ F|_{\mathbb{A}\setminus g(\gamma)}\in\mathcal{U}'\Longrightarrow F|_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}\setminus g(\gamma)}\in\mathcal{V}. \tag{C.1}$$

因此，我们应用定理 4.9 于 $f=g\circ h_0\circ g^{-1}$、双曲线 $g(\gamma)$、邻域 $\mathcal{U}'$ 以及一个较大的 $\rho_r>1$，从而得到一个双全纯映射 $F_r\in$ 辛映射$^\omega_{\rho_r}(\mathbb{A}_\infty)$，使得 $F_r|_{\mathbb{A}\setminus g(\gamma)}$属于 $\mathcal{U}'$。特别地，由等式 (C.1) 且由于 $\mathcal{V}$是 $\mathcal{U}$经 g共轭得到的映射，因此限制 $g^{-1}\circ F_r\circ g|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$属于 $\mathcal{U}$。

接下来，考虑双全纯映射 $h_r:=g^{-1}\circ F_r^{-1}\circ g\in$ 辛映射$^\omega(\mathbb{A}_\infty)$。由此可知，$h_r^{-1}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}=g^{-1}\circ F_r\circ g|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 属于$\mathcal{U}$，如所需。根据辛映射$^\omega(\mathbb{A}_\infty)$的定义，映射 h_r 在 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$上的限制是一个实辛同胚，因此它与 σ交换。

最后，注意到在 $\rho_r'=(1-2\epsilon)\rho_r-4\epsilon$的情形下，我们有 $g(K_{\rho_r',2\epsilon})\subset K_{\rho_r}$。因此，对 $\rho=\rho_r/(1-2\epsilon)$，$h_r^{-1}=g^{-1}\circ F_r\circ g$在 $K_{\rho_r',2\epsilon}$上 ρ^{-1}-接近恒等映射。于是，当 ρ_r充分大时，紧集上求逆的连续性连同柯西不等式便得出如下结果：

$$\|(h_r-\mathrm{id})|_{K_{r,\epsilon}}\|_{C^r}\le r^{-1}.$$

□

现在我们来证明模变形逼近定理。

定理的证明 4.29。首先，由上述推论，存在 $\epsilon>0$ 以及一族 $(h_r)_{r\ge1}$，它们是 $\mathbb{A}_\infty$ 的双全纯映射，保持 Ω_0, ，并与 σ交换，使得 $h_r^{-1}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}\in\mathcal{U}$，且满足：

$$\|(h_r-\mathrm{id})|_{K_{r,\epsilon}}\|_{C^r}\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}0. \tag{C.2}$$

令 $\eta\in(0,\epsilon)$。我们取支集含于 $(-1+\eta,1-\eta)$ 的 $\beta\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$，使得在 $(-1+\epsilon,1-\epsilon)$ 上有 $\beta\equiv1$。对 $\mathbb{W}$ 的一个具有光滑边界的紧邻域 $\mathbb{W}'$，我们定义：

$$\widehat{h_r}:(\theta,y)\in\mathbb{W}'\mapsto\beta(\Re(y))h_r(\theta,y)+(1-\beta(\Re(y)))\,(\theta,y).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$于是，由于 h_r 要么接近 id，要么等于 h_r，并且 h_r 是一个双全纯映射，h_r 成为$\widehat{\ }$到其像上的光滑微分同胚，当 r 充分大时（见 [Ber24，事实 6.11]）。此外，h_r满足以下性质：

事实 C.2. 当 r 充分大时，成立：

($\mathcal{P}'1$) $\widehat{h_r}$ 使 $\mathbb{A}$ 不变，且 $\widehat{h_r}^{-1}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 属于 $\mathcal{U}$，

$\widehat{\ }$*($\mathcal{P}'2$)* h_r 的支集包含于 $\mathbb{W}'\setminus K_{r,\ \eta}$，

($\mathcal{P}'3$) $\widehat{h_r}^*J_0-J_0$ 与 $\widehat{h_r}^*\Omega_0-\Omega_0$ 在 r 充分大时是 C^∞-小的，其支集位于 $K_{r,\ \epsilon}\setminus K_{r,\ \eta}$，

$\widehat{\ }$*($\mathcal{P}'4$)* h_r 与 σ交换。

$\widehat{\ }$上述事实的证明。首先，由于 β 的支集包含在 $(-1+\eta,1-\eta)$ 中，且 h_r 是到$\widehat{\ }$其像上的微分同胚，因此可知 h_r 保持 $\mathbb{A}$ 不变。此外，由于 $\beta\equiv1$ 在 $(-1+\epsilon,1-\epsilon)$ 上，因此当 r 足够大时，根据方程 (C.2)，h_r 与 h_r 的距离小于C^∞，故 $\widehat{h_r}^{-1}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 属于 $\mathcal{U}$，性质 ($\mathcal{P}'1$) 随之成立。其次，性质 ($\mathcal{P}'2$) 可直接由 β的支集包含在 $(-1+\eta,1-\eta)$ 中推出。性质$\widehat{\ }$($\mathcal{P}'3$) 源于以下事实：在 $K_{r,\epsilon}$之外，h_r 等于辛双全纯映射 h_r；在 $K_{r,\eta}$中，它等于恒等映射；而在 $K_{r,\epsilon}\setminus K_{r,\eta}$中，它与包含映射的距离小于 C^∞。性质 ($\mathcal{P}'4$) 则由 h_r 与 σ交换这一事实推出。□

因此 $\frown h_r$ 满足定理 4.29 的性质，其中 r 足够大，但不满足具备
在……上辛 $\mathbb{A}$.

因此，证明的最后一步是通过将 $\mathbb{A}$ 与 $\widehat{h_r}$ 一个微分同胚的逆复合 ϕ_r。此微分同胚由以下结果给出：[Ber24，引理 6。13]。

引理 C.3。当 r 足够大时，存在一个微分同胚 ϕ_r： $\mathbb{W}' \to \mathbb{A}_\infty$，它与典范嵌入 C^∞-接近，保持 $\mathbb{A}$ 不变，与 σ交换，支集包含于$\mathbb{W}' \setminus K_{r,\,\eta} \subset \check{}\mathbb{A}_\infty \cap \mathbb{W}'$，并满足：

$$\phi_r{}^*\Omega_0|_{T\mathbb{A}} = \widehat{h_r}^*\Omega_0|_{T\mathbb{A}}.$$

因此，我们考虑这样的 ϕ_r。由于 r 足够大，且 $\mathbb{W}'$ 是 $\mathbb{W}$的邻域， ϕ_r 与嵌入足够接近，因此其值域包含 $\mathbb{W}$。于是，我们可以定义如下映射：

$$h := \widehat{h_r} \circ \phi_r^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{A}_\infty.$$

我们来证明 h 在 r 足够大时是所需的光滑微分同胚。由于 ϕ_r 保持 $\mathbb{A}$ 不变，且在 r 足够大时接近包含映射，因此 h 也满足事实（$\mathcal{P}'1$）中的性质C.2。接下来只需证明 h 在 $\mathbb{A}$ 上是辛映射，从而使 h满足性质（$\mathcal{P}1$。注意，由引理C.3可得

$$h^*\Omega_0|_{T\mathbb{A}} = (\phi_r^{-1})^*(\widehat{h_r}^*\Omega_0|_{T\mathbb{A}}) = \Omega_0|_{T\mathbb{A}}.$$

由此得到性质（$\mathcal{P}1$）。性质（$\mathcal{P}2$）由性质（$\mathcal{P}'2$）以及 ϕ_r 的支集包含于$\mathbb{W}' \setminus K_{r\text{这一事实推出},\,\eta}$而$\eta$等于 $\{(\theta,\ y) \in \mathbb{W}'$：当 r 足够大时， $|\Re\,(y)\,| < 1 - \eta\}$。性质（$\mathcal{P}3$）由性质（$\mathcal{P}'3$）以及当 r 足够大时 ϕ_r 与包含映射 C^∞-接近这一事实推出。最后，性质（$\mathcal{P}4$）由性质（$\mathcal{P}'4$）以及 ϕ_r 也与 σ交换这一事实推出。

因此，当 r 足够大时，微分同胚 h 满足定理 4.29。证明至此结束。□

D AbC* 模变形实现的证明

圆柱上的引理 4.33 的证明 在第一部分中，我们证明用于获得圆柱上 AbC* 实现的引理。证明中将使用 AbC* 方案下的模变形逼近定理。

我们回顾一下，证明该引理即证明存在序列 $\alpha_n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, h_n ，满足$h_n^{-1} \in \mathsf{Emb}^\infty(\mathbb{A}_\rho,\ \mathbb{A}_\infty)$ 和 $f_n \in \mathsf{Emb}^\infty(\mathbb{A}_{\rho'},\ \mathbb{A}_\rho)$ – 其中 $\rho' < \rho$–，使得：

$$\alpha_0 = 0\ ,\ h_0 = \mathrm{id}\,|_{\mathbb{A}_\rho} \quad \text{and} \quad f_0 = \mathrm{id}\,|_{\mathbb{A}_{\rho'}}.$$

还要求，对于 $n \geq 1$, α_n, h_n 和 f_n，满足：

(I_n) $h_n(\check{}\mathbb{A}) = \check{}\mathbb{A}$， h_n 在 $\check{}\mathbb{A}$ 上是辛的，并且 $(h_n|_{\mathbb{A}},\ \alpha_n)$ 遵循 AbC* 方案 $(U,\ \nu)$：

$$h_n|_{\mathbb{A}} \in U(h_{n-1}|_{\mathbb{A}}, \alpha_{n-1}) \quad , \quad h_n|_{\mathbb{A}} \circ R_{\alpha_{n-1}} \circ {h_n|_{\mathbb{A}}}^{-1} = h_{n-1}|_{\mathbb{A}} \circ R_{\alpha_{n-1}} \circ {h_{n-1}|_{\mathbb{A}}}^{-1},$$

$$\text{and} \quad 0 < |\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \nu(h_n|_{\mathbb{A}}, \alpha_{n-1}).$$

(II_n) $R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1}(\mathbb{A}_{\rho'}) \subset \mathsf{int}\,(h_n^{-1}(\mathbb{A}_\rho))$，因此复合 $f_n := h_n \circ R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1}|_{\mathbb{A}_{\rho'}}$是良定义的。此外， $d(f_n,\ f_{n-1}) < 2^{-n}$。

(III_n) $J_n = {h_n^{-1}}^* J_0$ 和 $\Omega_n = {h_n^{-1}}^*\Omega_0$ 满足：

$$d(J_n, J_{n-1}) < 2^{-n} \quad \text{and} \quad d(\Omega_n, \Omega_{n-1}) < 2^{-n}.$$

(IV_n) h_n 与 σ交换。

(V_n) h_n^{-1}的支集包含于 $\check{}\,\mathbb{A}_\rho$。

引理的证明 *4.33*。

设 $n \geq 0$ 满足：h_n、α_n 和 f_n 均有定义，且满足 $(I_n \cdots V_n)$[4]。我们来构造 h_{n+1}、α_{n+1}和 f_{n+1}，使它们满足 $(I_{n+1} \cdots V_{n+1})$。为此，我们将对变形取模，逼近 $\tilde{}$：一个定义在邻域 $\mathcal{U}$、$\mathcal{W}_J$ 和 $\mathcal{W}_\Omega$ 上的辛同胚 h，以及一个 σ-不变紧集 $\mathbb{W}$。

首先，我们定义这个辛同胚和邻域 $\mathcal{U}$。由于 (U, ν) 是一个 AbC* 方案，根据定义 2.10 的 a)，存在一个辛同胚 $\widetilde{h} \in \mathsf{Symp}^\infty(\mathbb{A}; \partial\check{}\mathbb{A})$，它与 $R_{\alpha_n}\tilde{}$ 对易，且 $h_n \circ h$ 属于 $U(h_n|_{\mathbb{A}}, \alpha_n)$。此外，根据定义 2.10 的 b)，$U(h_n|_{\mathbb{A}}, \alpha_n)$ 属于 $\mathcal{T}^\infty_\gamma$，其中 $\gamma \in \Gamma_2(\mathbb{A})$ 是一条在 R_{α_n} 下不变的双曲线，并且 h 满足 $h|_{O(\gamma)} = \mathsf{id}$。因此，若我们考虑

$$\mathcal{U} := h_n^{-1} \circ U(h_n|_{\mathbb{A}}, \alpha_n), \tag{D.1}$$

它定义 $\tilde{}$是 $C^\infty(\mathbb{A} \setminus \gamma,\ \mathbb{T} \times \mathbb{R})$ 在光滑紧开拓扑中的 $h|_{\mathbb{A}\setminus\gamma}$ 邻域 .

现在，我们用 $\mathbb{W} := \mathbb{A}_R$ 定义 σ-不变紧集，其中 R 足够大，使得 $\mathbb{W}$ 包含$h_n^{-1}(\mathbb{A}_\rho)$。然后，由于 $\mathbb{W}$ 在 R_{α_n} 下不变，根据（II_n）可得：

$$h_n^{-1}(\mathbb{A}_\rho) \Subset \mathbb{W} \quad \text{and} \quad R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1}(\mathbb{A}_\rho) \Subset \mathbb{W}, \tag{D.2}$$

这在后面会很有用。

然后，我们选取 $J_0|_{\mathbb{W}}$ 的 C^∞ 邻域 $\mathcal{W}_J$ 和 $\Omega|_{\mathbb{W}}$ 的 $\mathcal{W}_\Omega$ 邻域，使得对于 $\mathcal{W}_J$ 中的所有 J'，结构 $h_n^{-1*}J'$ 与 J_n 的距离为 $< 2^{-n-1}$；对于 $\mathcal{W}_\Omega$ 中的所有 Ω'，2-形式 $h_n^{-1*}\Omega'$ 与 Ω_n 的距离为 $< 2^{-n-1}$。

令 $\eta_0 > 0$ 满足其支集 h_n 包含于 $\mathbb{A}_\infty(\eta_0) = \{(\theta,\ y) \in \mathbb{A}_\infty;\ |\Re(y)| < 1 - \eta_0\}$。$\tilde{}$根据定理 4.29，$h$ 可模结构变形逼近。因此，存在 $\eta \in (0,\ \eta_0)$ 以及一个光滑微分同胚 h：$\mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{A}_\infty$ 使得：

$(\mathcal{P}0)$ h 与 R_{α_n}（见推论 4.31）。

$(\mathcal{P}1)$ $h(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$，$\det Dh|_{\mathbb{A}} = 1$ 和 $h^{-1}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma} \in \mathcal{U}$。

$(\mathcal{P}2)$ h 的支集包含于 $\{(\theta,\ y) \in \mathbb{W}:\ |\Re(y)| < 1 - \eta\}$。

$(\mathcal{P}3)$ $h^* J_0$ 属于 $\mathcal{W}_J$，且 $h^*\Omega_0$ 属于 $\mathcal{W}_\Omega$。

$(\mathcal{P}4)$ h 与 σ交换。

现在，我们通过其逆来定义所需的微分同胚 h_{n+1}：

$$h_{n+1}^{-1} := h \circ h_n^{-1} \in \mathrm{Emb}^\infty(\mathbb{A}_\rho, \mathbb{A}_\infty).$$

注意，由于 h_n^{-1} 属于 $\mathsf{Emb}^\infty(\mathbb{A}_\rho, \mathbb{A}_\infty)$，且根据方程 (D.2)，$h$ 定义在包含 $h_n^{-1}(\mathbb{A}_\rho)$ 的 $\mathbb{W}$ 上，因此 h_{n+1}^{-1} 在 $\mathbb{A}_\rho$ 上定义良好。于是，h_{n+1}^{-1} 确实定义了 $\mathsf{Emb}^\infty(\mathbb{A}_\rho, \mathbb{A}_\infty)$ 中的一个元素，并且根据性质 $(\mathcal{P}2)$ 和 (V_n)，它在 $\check{}\,\mathbb{A}_\rho$ 中紧支撑，从而得到性质 (V_{n+1})。此外，根据性质 $(\mathcal{P}3)$ 以及 $\mathcal{W}_J$ 和 $\mathcal{W}_\Omega$ ~~的构造，~~ 性质 (III_{n+1}) 也成立。性质 (IV_{n+1}) 则由性质 (IV_n) 和 $(\mathcal{P}4)$ 得出。 ———

还需要定义 α_{n+1}，以获得性质（I_{n+1}）和（II_{n+1}）。令 α_{n+1} 充分接近 α_n。

[4]如果 $n = 0$，则性质 $(I_n \cdots V_n)$ 未定义。不过，证明中用于得到归纳的性质只有性质 (I_n) 和 (II_n) 的前半部分，以及性质 (IV_n) 和 (V_n)，而这些性质对于 $n = 0$ 显然成立。因此，归纳自然从 $n = 0$ 开始。

首先，由性质（I_n）和（$\mathcal{P}1$），$h_{n+1}|_{\check{\mathbb{A}}}$ 在 $\check{\mathbb{A}}$ 上是辛的，并保持 $\check{\mathbb{A}}$ 不变。然后，由性质（$\mathcal{P}1$）和方程（D.1），h_{n+1} 属于 $U(h_n|_{\mathbb{A}}, \alpha_n)$。此外，通过选取充分接近 α_n 的 α_{n+1}，并利用性质（$\mathcal{P}0$），$(h_{n+1}|_{\mathbb{A}}, \alpha_{n+1})$ 满足 AbC* 方案 (U, ν)，且性质（I_{n+1}）也得到满足。

接下来，我们来证明性质（II_{n+1}）。根据性质（$\mathcal{P}0$），h 与 R_{α_n} 交换，因此我们得到：

$$R_{\alpha_n} \circ h_{n+1}^{-1}(\mathbb{A}_\rho) = h \circ R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1}(\mathbb{A}_\rho).$$

因此，只要取更接近 的 $h_n^{-1}\,\mathbb{A}_{\rho'}$ α_{n+1} α_n $R_{\alpha_{n+1}} \circ h_{n+1}^{-1}\,\mathbb{A}_{\rho'}$ $h \circ R_{\alpha_n} \circ$，紧集 ( ) 就会在 的紧子集上的豪斯多夫度量下接近 ( )。$\mathbb{A}_\infty$

根据性质（II_n），紧集 $h \circ R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1}(\mathbb{A}_{\rho'})$ 包含于 $h\left(\text{int}(h_n^{-1}(\mathbb{A}_\rho))\right) = \text{int}(h_{n+1}^{-1}(\mathbb{A}_\rho))$。接着，由于 $R_{\alpha_{n+1}} \circ h_{n+1}^{-1}(\mathbb{A}_{\rho'})$ 接近 $h \circ R_{\alpha_n} \circ h_n^{-1}(\mathbb{A}_{\rho'})$，我们得到 $R_{\alpha_{n+1}} \circ h_{n+1}^{-1}(\mathbb{A}_{\rho'}) \subset h_{n+1}^{-1}(\mathbb{A}_\rho)$。这证明了性质（$II_{n+1}$）的第一个要求。为了得到其余的估计（即 f_{n+1} 与 f_n 相距 $2^{-(n+1)}$），注意到 h 与 R_{α_n} 的交换保证了定义 f_{n+1} 的共轭关系关于 α_{n+1} 连续。因此，只要取足够接近 α_n 的 α_{n+1}，我们确实有条件 $d(f_n, f_{n+1}) < 2^{-n-1}$。

□

引理的证明 4.35 （关于圆盘和球面）在本部分中，我们将利用第 *4.4 节专门段落中介绍的思路以及模变形逼近定理，证明关于球面和圆盘上 AbC 实现的引理。

回顾一下，$g^\#$ 和 $\widehat{g} \in$ 辛映射$^\infty(\mathbb{M})$ 在第 31 页针对 $g \in \text{Dilo}_c^\infty(\check{\mathbb{M}}_\rho, \mathbb{A}_\infty)$ 已定义。我们的目标是证明存在序列 $\alpha_n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $h_n \in \text{Dilo}_c^\infty(\check{\mathbb{M}}_\rho, \mathbb{A}_\infty)$ 和 $f_n \in \text{Diro}_c^\infty(\mathbb{M}_{\rho'}, \mathbb{M}_\rho)$，使得：

$$\alpha_0 = 0\ ,\ h_0 = \pi^{-1}|_{\check{\mathbb{M}}_\rho} \quad \text{and} \quad f_0 = \text{id}\,|_{\check{\mathbb{M}}_{\rho'}}.$$

此外，还要求对于 $n \geq 1$、α_n、h_n 和 f_n，满足

(I_n) $h_n(\check{\mathbb{M}}) = \check{\mathbb{A}}$，$h_n$ 在 $\check{\mathbb{M}}$ 上是辛的，并且 $(\widehat{h_n}, \alpha_n)_n$ 遵循 AbC* 方案 (U, ν)。
(II_n) $f_n(\check{\mathbb{M}}_{\rho'}) \subset \text{int}\left(\check{\mathbb{M}}_\rho\right)$ 和 $h_n \circ f_n = R_{\alpha_n} \circ h_n$ 在 $\check{\mathbb{M}}_{\rho'}$上。此外，我们有 $d(f_n,\ f_{n-1}) < 2^{-n}$。

(III_n) $J_n = h_n^\# J_0$ 和 $\Omega_n = h_n^\# \Omega_0$ 满足：

$$d(J_n, J_{n-1}) < 2^{-n} \quad \text{and} \quad d(\Omega_n, \Omega_{n-1}) < 2^{-n}.$$

(IV_n) h_n 与 σ交换。

引理的证明 *4.35*。

设 $n \geq 0$ 满足条件，使得 h_n、α_n 和 f_n 均有定义且满足 $(I_n \cdots IV_n)$[5]。我们来构造 h_{n+1}、α_{n+1} 和 f_{n+1}，使它们满足 $(I_{n+1} \cdots IV_{n+1})$。为此，与前一个证明类似，我们将在变形意义下逼近一个辛同胚 $h_{\mathbb{A}}$，其定义在邻域 $\mathcal{U}$、$\mathcal{W}_J$和 $\mathcal{W}_\Omega$上，并取一个 σ-不变紧集 $\mathbb{W}$。

首先，我们定义这个辛同胚 $h_{\mathbb{A}}$ 以及邻域 $\mathcal{U}$。由于 $(U,\ \nu)$ 是一个 AbC*方案，根据定义 2.10 的 a)，存在一个映射 $h_{\mathbb{M}} \in$ 辛映射$^\infty(\mathbb{M}; \partial\check{\mathbb{M}})$，它与 $\widehat{R_{\alpha_n}}$ $\widehat{\ }$交换，且满足 $h_n \circ h_{\mathbb{M}}$属于 $U(h_n,\ \alpha_n)$。此外，根据定义 2.10 的 b)，$U(h_n,\ \alpha_n)$ 属于 $\mathcal{T}^\infty_{\gamma_{\mathbb{M}}}$，其中有一条双曲线 $\gamma_{\mathbb{M}} = \pi($ $\gamma_{\mathbb{A}}) \in \Gamma_2(\mathbb{M})$ 在 R_{α_n} 下不变，且 $h_{\mathbb{M}}$ 满足 $h_{\mathbb{M}}|_{O(\gamma_{\mathbb{M}})} = \text{id}$。在

[5]再次，若 $n = 0$，则性质（$I_n \cdots IV_n$）并未定义。然而，证明中用以得到该归纳的仅有性质是性质（I_n）和（II_n）的第一部分以及性质（IV_n），而这些对 $n = 0$ 显然成立。因此，归纳再次从 $n = 0$ 开始。

此外，由于 $A(\gamma_{\mathbb{M}})$ 是一个在 R_{α_n} 下不变的开圆柱，根据事实 2.16，我们可以假设 $h_{\mathbb{M}}$ 在 $A(\gamma_{\mathbb{M}})$ 中具有紧支集，特别是 $h_{\mathbb{M}}$ 属于 辛映射$_c^\infty(\mathbb{M};\partial\check{\mathbb{M}})$。现在，我们考虑辛同胚 $h_{\mathbb{A}}$，它属于辛映射$_c^\infty(\mathbb{A};\partial\check{\mathbb{A}})$，由 $h_{\mathbb{M}}$ 通过爆破$_{\partial}\check{\mathbb{M}}$的孤立点得到。注意，在 $\check{\mathbb{A}}$ 上有 $h_{\mathbb{M}}\circ\pi=\pi\circ h_{\mathbb{A}}$，因此 $h_{\mathbb{A}}$ 与 R_{α_n} 交换，且 $h_{\mathbb{A}}|_{O(\gamma_{\mathbb{A}})}=\mathrm{id}$。此外，这意味着在 $\check{\mathbb{M}}$ 上有 $\widehat{h_n}\circ h_{\mathbb{M}}=\widehat{h_n}\circ\pi\circ h_{\mathbb{A}}\circ\pi^{-1}$。

现在，根据拓扑 $\mathcal{T}_\gamma^\infty$ 的定义，我们认为 $\mathcal{U}$ 是 $C^\infty(\mathbb{A}\setminus\gamma_{\mathbb{A}},\ \mathbb{T}\times\mathbb{R})$ 的光滑紧开拓扑中的 $h_{\mathbb{A}}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma_{\mathbb{A}}}$ 的一个 C^∞ 邻域，使得以下结论成立：

$$\forall\tilde{h}\in\mathrm{Symp}_c^\infty(\mathbb{A};\partial\check{\mathbb{A}}),\ \tilde{h}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma_{\mathbb{A}}}\in\mathcal{U}\Longrightarrow\widehat{h_n}\circ\pi\circ\tilde{h}\circ\pi^{-1}\in U(\widehat{h_n},\alpha_n). \tag{D.3}$$

现在，我们来定义 σ-不变紧集 $\mathbb{W}$。首先，对于任意 $\eta\in(0,\ 1)$ 和 $\tilde{\rho}>1$，我们考虑集合

$$\check{\mathbb{M}}_{\tilde{\rho}}(\eta):=\check{\mathbb{M}}_{\tilde{\rho}}\cap\pi(\mathbb{A}_\infty(\eta)),$$

其中 $\mathbb{A}_\infty(\eta):=\{(\theta,\ y)\in\mathbb{A}_\infty,\ \ |\Re(y)|<1-\eta\}$。接着，令 $\eta_0>0$ 足够小，使得：

$$\left\{z\in\check{\mathbb{M}}_\rho\ :\ h_n(z)\neq\pi^{-1}(z)\right\}\subset\check{\mathbb{M}}_\rho(\eta_0). \tag{D.4}$$

由于 $\check{\mathbb{M}}_\rho(\eta_0)$ 是 $\check{\mathbb{M}}_\rho$ 的一个相对紧子集，因此存在 $R>1$，使得 $h_n(\check{\mathbb{M}}_\rho(\eta_0))\subset\mathrm{int}(\mathbb{A}_R)$。因此，我们固定以下 σ-不变紧集：

$$\mathbb{W}:=\mathbb{A}_R.$$

现在，我们选取 $J_0|_{\mathbb{W}}$ 的 C^∞-邻域 $\mathcal{W}_J$ 和 $\Omega_0|_{\mathbb{W}}$ 的 C^∞-邻域 $\mathcal{W}_\Omega$，使得对于每个在 $\mathbb{A}_\infty(\eta)$ 之外等于 J_0 的 $J\in\mathcal{W}_J$，$h_n^\#J$ 与 $J_n=h_n^\#J_0$ 的距离为 $<2^{-n-1}$；并且对于每个在 $\mathbb{A}_\infty(\eta)$ 之外等于 Ω_0 的 $\Omega\in\mathcal{W}_\Omega$，$h_n^\#\Omega$ 与 $\Omega_n=h_n^\#\Omega_0$ 的距离为 $<2^{-n-1}$。

根据定理 4.29，$h_{\mathbb{A}}$ 可以在结构变形意义下逼近。因此，存在 $\eta\in(0,\ \eta_0)$ 和一个光滑微分同胚 $h\colon\mathbb{W}\hookrightarrow\mathbb{A}_\infty$，使得：

$(\mathcal{P}0)$ h 与 R_{α_n} 交换（见推论 4.31）。

$(\mathcal{P}1)$ $h(\mathbb{A})=\mathbb{A}$，$\det Dh|_{\mathbb{A}}=1$，且 $h^{-1}|_{\mathbb{A}\setminus\gamma_{\mathbb{A}}}$ 属于 $\mathcal{U}$

$(\mathcal{P}2)$ h 的支集包含于 $\{(\theta,\ y)\in\mathbb{W}:\ \ |\Re(y)|<1-\eta\}$。

$(\mathcal{P}3)$ h^*J_0 属于 $\mathcal{W}_J$，且 $h^*\Omega_0$ 属于 $\mathcal{W}_\Omega$。

$(\mathcal{P}4)$ h 与 σ交换。

现在我们可以定义所需的映射 h_{n+1}：

$$h_{n+1}:z\in\check{\mathbb{M}}_\rho\mapsto\begin{cases}h\circ h_n(z) & \text{if}\quad z\in\check{\mathbb{M}}_\rho(\eta)\\ \pi^{-1}(z) & \text{otherwise}\end{cases}.$$

注意，h_{n+1} 是良定义的，且属于 $\mathrm{Dilo}_c^\infty(\check{\mathbb{M}}_\rho,\mathbb{A}_\infty)$。事实上，根据构造，$\mathbb{W}$ 包含 $h_n(\check{\mathbb{M}}_\rho(\eta))$，且在 $\check{\mathbb{M}}_\rho(\eta_0)$ 之外，h_n 等于 π^{-1}；而 $\check{\mathbb{M}}_\rho(\eta_0)$ 包含于 $\check{\mathbb{M}}_\rho(\eta)$。因此，根据性质（$\mathcal{P}2$），$h_{n+1}$ 有定义且属于 $\mathrm{Dilo}_c^\infty(\check{\mathbb{M}}_\rho,\mathbb{A}_\infty)$。此外，由于 h 使 $\mathbb{A}$ 保持不变，且 $h|_{\check{\mathbb{A}}}$ 在 $\mathbb{A}$中紧支撑，注意到 h_{n+1} 有定义并满足：

$$\widehat{h_{n+1}}=\widehat{h_n}\circ\pi\circ h^{-1}\circ\pi^{-1}. \tag{D.5}$$

Le令 t α_{n+1}接近 α_n，我们来证明性质（$I_{n+1}\cdots IV_{n+1}$）成立

首先，根据 $\mathcal{W}_J$ 和 $\mathcal{W}_\Omega$的定义，性质（III_{n+1}）立即由性质（$\mathcal{P}2$）和（$\mathcal{P}3$）得出。并且根据性质（$\mathcal{P}4$）和（IV_n），性质（IV_{n+1}）成立。

然后，根据性质（I_n）和（$\mathcal{P}1$），$h_{n+1}|_{\check{\mathbb{M}}}$ 在$\check{}\mathbb{M}$ 上是辛的，并且保持 $\mathbb{M}$ 不变。接着，根据$\widehat{\ }$性质（$\mathcal{P}1$）以及方程（D.3）和（D.5），h_{n+1}属于 U（h_n，α_n）。此外，由于 α_{n+1}与 α_n 足够接近，且根据性质（$\mathcal{P}0$），（h_{n+1}，α_{n+1}）满足 AbC* 方案（U，ν），性质（I_{n+1}）也成立。

接下来需要定义 f_{n+1} 并得到性质（II_{n+1}）。首先，由于 h 与 R_{α_n} 交换，且 f_n 满足性质（II_n），注意到在 $\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta)$ 上有 $=\check{}\mathbb{M}_{\rho'}\cap\pi(\mathbb{A}_\infty(\eta))$：

$$R_{\alpha_n}\circ h_{n+1}=h\circ R_{\alpha_n}\circ h_n=h_{n+1}\circ f_n,$$

而在 $\check{}\,\mathbb{M}_{\rho'}\setminus\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta)$ 上，其中 h_{n+1} 等于 π^{-1}，且 f_n 等于 R_{α_n}，我们有：

$$R_{\alpha_n}\circ h_{n+1}=R_{\alpha_n}\circ\pi^{-1}=\pi^{-1}\circ R_{\alpha_n}=h_{n+1}\circ f_n.$$

$\check{}$因此，我们在 $\mathbb{M}_{\rho'}$ 上有：

$$R_{\alpha_n}\circ h_{n+1}=h_{n+1}\circ f_n. \tag{D.6}$$

现在，根据性质（II_n），f_n 将 $\check{}\,\mathbb{M}_{\rho'}$ 映入 $\check{}\,\mathbb{M}_\rho$的内部，因此 $f_n(\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta))$ 在 $\check{}\,\mathbb{M}_\rho$的内部相对紧。因而，映射 h_{n+1} 在 $f_n(\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta))$ 的某个邻域上有定义。因此，对于任意小角度 $\iota\in\mathbb{T}$，存在唯一的微分同胚 g_ι：$f_n(\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta))\to\mathbb{M}_\infty$，它在 $f_n(\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta))$ 上与恒等映射 C^∞-接近，并且满足：

$$h_{n+1}\circ g_\iota=R_\iota\circ h_{n+1}|_{f_n(\check{\mathbb{M}}_{\rho'}(\eta))}.$$

接着，注意到 $f_n(\check{}\mathbb{M}_{\rho'}\setminus\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta))=\check{}\mathbb{M}_{\rho'}\setminus\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta)$。事实上，由方程 (D.4) 且由于 $\eta\in(0,\eta_0)$，我们有 h_n 在 $\check{}\,\mathbb{M}_{\rho'}\setminus\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta)$ 上与 π^{-1} 重合。因此，由 (II_n)，f_n 在 $\check{}\mathbb{M}_{\rho'}\setminus\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta)$ 上等于 R_{α_n}；该集合在旋转作用下保持不变。

接下来，由 g_ι 的唯一性，且由于 h_{n+1} 在 $f_n(\check{}\mathbb{M}_{\rho'}\setminus\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta))=\check{}\mathbb{M}_{\rho'}\setminus\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta)$ 上等于 π^{-1}，我们可以通过令其在 $f_n(\mathbb{M}_{\rho'}\setminus\check{}\mathbb{M}_{\rho'}(\eta))$ 上等于旋转 R_ι，将 g_ι 光滑地延拓。于是我们在 $f_n(\check{}\mathbb{M}_{\rho'})$ 上有：

$$h_{n+1}\circ g_\iota=R_\iota\circ h_{n+1}. \tag{D.7}$$

现在固定 $\iota=\alpha_{n+1}-\alpha_n$，它很小，因为 α_{n+1}接近 α_n，并定义 $f_{n+1}=g_\iota\circ f_n\circ\check{}$ 首先，由于 g_ι 和 f_n 在 $\mathbb{M}_{\rho'}$的紧子集补集上是旋转，因此 f_{n+1} 是 $\mathsf{Diro}_c^\infty(\mathbb{M}_{\rho'},\check{}\mathbb{M}_\rho)$ 的一个元素。其次，由于 ι 很小，g_ι 与恒等映射的距离为 C^∞，于是 $d(f_{n+1},f_n)<2^{-n-1}$。结合性质（II_n），这还意味着 $f_{n+1}(\check{}\mathbb{M}_{\rho'})\subset\mathsf{int}(\check{}\mathbb{M}_\rho)$。最后，由方程（D.6）和（D.7），该结论在 $\check{}\,\mathbb{M}_{\rho'}$ 上成立：

$$h_{n+1}\circ f_{n+1}=h_{n+1}\circ g_\iota\circ f_n=R_\iota\circ h_{n+1}\circ f_n=R_\iota\circ R_{\alpha_n}\circ h_{n+1}=R_{\alpha_{n+1}}\circ h_{n+1}.$$

由此得到 (II_{n+1})，并完成证明。 □

符号索引

$\mathbb{A}$ 圆柱。4

$\mathbb{D}$ 圆盘。4

$\mathbb{S}$ 球面。4

$\mathbb{M}$ 属于 $\{\mathbb{A}, \mathbb{S}, \mathbb{D}\}$。4

$\check{}\mathbb{A}$ 去掉边界的圆柱。4

$\check{}\mathbb{D}$ 去掉边界和中心的圆盘。4

$\check{}\mathbb{S}$ 去掉北极和南极的球面。4

π 从 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{M}$的满射连续映射。4

$\check{}\mathbb{M}$ 属于 $\{\check{}\mathbb{A}, \check{}\mathbb{S}, \check{}\mathbb{D}\}$。5

$\mathbb{A}(\eta)$ $\mathbb{A}$的子开圆柱。5$\mathbb{M}(\eta)$ $\mathbb{A}(\eta)$在 π下的像。5

$\check{}\check{}\mathbb{A}_\rho$, $\mathbb{A}_\infty$, $\mathbb{A}_\rho$ $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ 的复化。25

$\tilde{}\mathbb{A}$ 2- 环面，带有 $\mathbb{Z}_2$-结构。25

$\tilde{}\mathbb{A}_\rho$ $\mathbb{A}$ 的复化。25

$\check{}\check{}\mathbb{S}_\rho$, $\mathbb{S}_\infty$, $\mathbb{S}_\rho$ $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}$的复化。25

$\mathbb{B}_\rho$ $\mathbb{C}^3$中的复球。26

$\check{}\check{}\mathbb{D}_\rho$ $\mathbb{D}$的复化。26

$\tilde{}\mathbb{D}$ 带有 $\mathbb{Z}_2$-结构的辛球面。26

$\tilde{}\mathbb{D}_\rho$, $\mathbb{D}_\rho$ $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}$ 的复化。26

γ 双曲线。7

γ_+, γ_- 双曲线的上部和下部。7

$\Gamma_2(\mathbb{M})$ $\mathbb{M}$中的双曲线集合。7

$B(\gamma, \kappa)$ 双曲线 γ在 $\mathbb{M}$ 中的 κ-邻域。7

$A(\gamma)$ $\mathbb{M} \setminus \gamma$ 在 γ_- 和 γ_+ 之间的连通分支。

$A(\gamma, \kappa)$ $A(\gamma)$中与γ相距 κ的点。7

$O(\gamma)$ $\mathbb{M} \setminus \gamma$ 中位于 γ_+ 上方和γ_-下方的连通分支。7

$O(\gamma, \kappa)$ $O(\gamma)$中与γ相距 κ的点。7

辛映射$^r_c(\mathbb{M}; \partial\check{}\mathbb{M})$ 紧支撑于 $\mathbb{M}$中的 C^r 辛同胚。5

辛映射$^r(\mathbb{M}; \partial\check{}\mathbb{M})$ 在 $\partial\mathbb{M}$上等于恒等映射的 C^r 辛同胚。5

$\mathcal{T}^r$ C^r $\mathbb{M}$紧子集上的收敛拓扑。5

$\mathcal{T}^r_\gamma$ C^r $\mathbb{M} \setminus \gamma$ 紧子集上的收敛拓扑。7

$\mathbb{M}$的双曲线上的 $\mathcal{T}^r_\gamma$ 之并。7

辛映射$^\omega(\mathbb{A}_\infty)$ $\mathbb{A}_\infty$的双全纯辛同胚。20

辛映射$^\omega_\rho$ $(\mathbb{A}_\infty)$ $\mathbb{A}_\infty$ 的双全纯辛同胚，在 $\mathbb{A}$附近接近恒等映射。20

$\mathrm{Emb}^\infty(\mathbb{A}_\rho, \mathbb{A}_\infty)$ 从$\mathbb{A}_\rho$ 到 $\mathbb{A}_\infty$的光滑嵌入空间。29

$\mathrm{Dilo}^\infty_c(\check{}\mathbb{M}_\rho, \mathbb{A}_\infty)$ 从 $\mathbb{M}_\rho$ 到 $\mathbb{A}_\infty$ 的“紧支撑”局部微分同胚空间。31

$\mathcal{M}(\mathbb{M})$ $\mathbb{M}$上的概率测度。5

d_K $\mathcal{M}(\mathbb{M})$上的Kantorovich-Wassertein距离。5

e^f_n 经验测度。5

$\Delta_{merg}(f)$ 辛同胚 f 在$\mathbb{M}$ 上偏离最小遍历的距离。11

$\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ 复流形。27

J 复流形的复结构。27

$(\mathbb{M}_\bullet, J)$ 实流形 $\mathbb{M}$的复化。27

σ 复流形$(\mathbb{M}_\bullet, J)$的实结构。27

7

参考文献

[AK70] Dmitry Anosov 和 Anatole Katok。《光滑遍历理论的新例子：遍历微分同胚》。莫斯科数学会汇刊，23(1):3–36，1970年。

[BCLR06] F. B´eguin、S. Crovisier 和 F. Le Roux。《开环带上的伪旋转》。《巴西数学学会通报》，37(2):275–306，2006年6月。[Ber22] Pierre Berger。《解析伪旋转》，2022年10月。arXiv:2210.03438 [math].[Ber23] Pierre Berger。《解析伪旋转中的混沌行为与椭圆行为的共存：任意曲面上的解析辛微分同胚》。《巴黎综合理工学院数学期刊》，10:525–547，2023年。[Ber24] Pierre Berger。《解析伪旋转 II：球面、圆盘和环带上的一条原理》，2024年4月。arXiv:2402.15303 [math].[Bir41] George D. Birkhoff。《理论动力学中的若干未解问题》。《科学》，94(2452):598–600，1941年12月。[BK19] Shilpak Banerjee 和 Philipp Kunde。《环面上的实解析 AbC 构造》。《遍历理论与动力系统》，39(10):2643–2688，2019年10月。[Del25] Yann Delaporte。《在球面和圆盘上呈现遍历性或涌现的解析伪旋转》，2025年7月。arXiv:2507.13029 [math].[FH77] Albert Fathi 和 Michael R. Herman。《最小微分同胚的存在》。载于《动力系统 I——华沙》，《Astérisque》第49卷，第37–59页。法国数学会，1977年。[FK04] Bassam Fayad 和 Anatole Katok。《椭圆动力学中的构造》。《遍历理论与动力系统》，24(5):1477–1520，2004年10月。[FK14] Bassam Fayad 和 Anatole Katok。《奇数维球面上的解析唯一遍历保体积映射》。《瑞士数学评论》，89(4):963–977，2014年11月。[Fur61] H. Furstenberg。《严格遍历性与环面的变换》。《美国数学杂志》，83(4):573–601，1961年。出版方：约翰斯·霍普金斯大学出版社。[KL00] Frank Kutzschebauch 和 Frank Loose。《辛流形上的实解析结构》。《美国数学会会刊》，128(10):3009–3016，2000年。出版方：美国数学会。[MS17] Dusa McDuff 和 Dietmar Salamon。《辛拓扑学导论》。牛津大学出版社，2017年3月。[Oh06] Yong-Geun Oh。《Moser 问题的 Cˆ0 强制性与保面积同胚的光滑化》，2006年12月。arXiv:math/0601183。[RS22] Fr´ed´eric Le Roux 和 Sobhan Seyfaddini。《辛动力系统中的 Anosov–Katok 方法与伪旋转》。载于 Helmut Hofer、Alberto Abbondandolo、Urs Frauenfelder 和 Felix Schlenk 编，《辛几何》，第863–901页。施普林格国际出版，尚，2022年。[Shn30] Lev Guenrikhovitch Shnirelman。《平面变换的一个例子》（俄文）。顿河州立理工学院学报（新切尔卡斯克），14:64–74，1930年。[Sma59] Stephen Smale。《二维球面的微分同胚》。《美国数学会会刊》，10(4):621–626，1959年。出版方：美国数学会。[Zeh77] Eduard Zehnder。《关于辛微分同胚和保体积微分同胚光滑化的注记》。载于 Jacob Palis 和 Manfredo do Carmo 编，《几何与拓扑》，第828–854页，柏林、海德堡，1977年。施普林格。