arXiv:2603.06062v1 [math.ST] 6 Mar 2026

更新抽样下 Lévy 驱动 CARMA 模型的估计

Frank Bosserhoff[1],Giacomo Francisci[2], 和 Robert Stelzer[1]

[1]数学金融研究所，乌尔姆大学，德国乌尔姆
robert.stelzer@uni-ulm.de[2]数学系，特伦托大学，意大利特伦托
giacomo.francisci@unitn.it

2026年3月9日

摘要

连续时间自回归移动平均（CARMA）模型广泛用于对高频数据和不规则抽样数据建模。我们研究了在过程于更新时刻观测时模型参数的 Whittle 估计。假设驱动噪声为 Lévy 过程，从而允许更大的灵活性，包括重尾边缘分布和样本路径中的跳跃。我们证明，基于积分周期图的 Whittle估计量在非常宽松的条件下是一致且渐近正态的。为得到这些结果，我们建立了积分周期图的渐近正态性。

关键词：混叠、渐近正态性、CARMA模型、相合性、L´evy过程、奥恩斯坦-乌伦贝克过程、周期图、更新序列、谱密度、Whittle估计量。

1 引言

连续时间自回归移动平均（CARMA）过程长期以来一直受到物理学、工程学、概率论和统计学研究者的关注（Fowler；1980；Doob；1944）。随着随机建模的发展，以及高频和不规则间隔数据日益普及，人们对这类模型重新产生了兴趣（Brockwell；2001a,b, 2009, 2014；Brockwell 和 Lindner；2024）。在众多领域中，这类模型被应用于金融和经济学，以建模资产和期权价格、利率及波动率（Brockwell；2009；Brockwell 和 Lindner；2012；Andresen 等人；2014；Benth 等人；2014）；应用于信号处理，从噪声数据中提取潜在信号（例如 McEl- roy（2013））；还应用于医学和自然科学等领域，用于预测和建模

温度、风速、光变曲线和流体湍流（Kelly 等人；2014；T´omasson；2015；Yu 和 Richards；2021；Darus 和 Taib；2022）。特别是，使用 Lévy 过程作为驱动噪声能提供更大的灵活性，并允许样本路径呈现厚尾和非对称分布以及跳跃，这些特征在许多应用中都很常见（例如参见 Barndorff-Nielsen（1997）；Rydberg（1997）；Cont（2001））。此外，在各种情境下，数据是在随机时刻观测的，而这些时刻通常被认为独立于过程的取值（Jones；1981, 1985；Charlot 和 Rachdi；2008；Bardet 和 Bertrand；2010；Li；2014；Philippe 等人；2021；Brandes 等人；2023）。例如，智能手机和智能手表等健康监测系统能够监测大量数据，包括体温、心电图、血氧、心率、呼吸，以及噪声水平、位置、步速和速度。为了节省电量，设备在静止状态下通常每隔几秒或几分钟测量一次。另一个例子是，许多金融和经济数据是在不规则且随机间隔的时刻采样的，而这些时刻通常被建模为独立于潜在过程（Bergstrom；1990；A¨ıt-Sahalia 和 Mykland；2003, 2004；Hayashi 和 Yoshida；2005）。这些考量凸显了采用灵活估计方法的必要性。

现有文献中有不少论文研究单变量和多变量 L´evy 驱动 CARMA 模型的参数估计问题。Brockwell 等人（2007）、Schlemm 和 Stelzer（2012）以及 Brockwell 和 Lindner（2019）证明了在等间隔时点观测时，准极大似然估计量具有相合性和渐近正态性。Fasen 和 Fuchs（2013）提出了一种估计程序，该程序基于时间步长趋近于零时平滑归一化周期图的依概率收敛。Fasen-Hartmann 和 Kimmig（2020）通过广义 M 估计量推导出一种能够抵抗离群值的间接程序。最近，Fasen-Hartmann 和 Mayer（2022）证明了 Whittle 参数估计量具有相合性和渐近正态性。他们的方法利用了离散采样过程是一个离散时间向量 ARMA 过程这一性质，因此不适用于不规则采样方案。此外，上述论文采用的等间隔采样方案容易受到混叠效应所导致的辨识问题影响，并且需要满足适当的可辨识性假设。

本文研究在独立更新序列上进行采样时，单变量 CARMA 过程的参数估计问题。第 2 节给出了过程和采样方案的精确定义。顺便一提，使用独立更新序列有助于避免混叠（Masry；1978年；Lii 和 Masry；1992）。当到达间隔服从指数分布时，我们的抗混叠假设很容易得到验证。估计方法利用了这样一个性质：采样过程的谱密度的某个积分在真实参数值处达到最大值。谱密度通过周期图进行估计，而估计程序依赖于最大化积分周期图（Lii 和 Masry；1992）。我们在第 3 节确立积分周期图的渐近正态性。利用这一结果，我们在第 4 节证明了本文的主要结果，即估计参数向量的渐近正态性。Lii 和 Masry (1992) 要求所有阶数的矩均有限，而我们只要求驱动过程 L´evy 的 $4+\delta$ 阶矩有限。此外，我们证明，在以下两种情形中，渐近分布相同：(i)

CARMA 过程的观测数量 n 趋于无穷，以及 (ii) 在区间 $[0,T]$ 和 $T \to \infty$ 上，于更新时刻观测该过程。本文最后在第 5 节作出总结并提出未来研究方向。附录中给出了若干辅助结果。

2 主要定义与结果

我们首先回顾CARMA过程的定义及其最相关的性质（Brockwell 和 Lindner；2024）。设 $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 为一个双侧Lévy过程，具有零均值和方差$\sigma_L^2 \in (0,\infty)$。对于 $0 \le q < p$，设 a 和 b 为如下形式的多项式

$$a(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots + a_{p-1} z + a_p$$
$$b(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{q-1} z^{q-1} + z^q.$$

CARMA过程 $Y = (Y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 由其状态空间形式 给出

$$Y(t) = \mathbf{b}^\top \mathbf{X}(t), \tag{1}$$

其中$\mathbf{X} = (\mathbf{X}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^p$ 的过程，满足随机微分方程

$$d\mathbf{X}(t) = A\mathbf{X}(t)dt + \mathbf{e}_p dL(t), \tag{2}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{p-2} \\ b_{p-1} \end{pmatrix},$$

且 $a_1, \dots, a_p, b_0, \dots, b_{p-1}$ 为满足 $b_q = 1$ 和 $b_j = 0$（对 $j > q$）的实值系数。对于 $p = 1$，我们有 $A = (-a_1)$。我们不失一般性（w.l.o.g.）地假设多项式 a 和 b 没有任何公共零点，且 a 的零点（或等价地，矩阵 A的特征值）的实部均严格为负。这意味着 a 的系数为正（见Hurwitz (1895)）。由此可知，CARMA过程 Y是因果 的，且(1)和(2)的唯一平稳解由下式给出

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{b}^\top e^{A(t-u)} \mathbf{e}_p \, dL(u) \ \text{ and } \ \mathbf{X}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-u)} \mathbf{e}_p \, dL(u). \tag{3}$$

如果 L 具有 r 阶有限阶矩，那么 Y 的 r 阶矩存在且有限（例如参见 Brockwell 和 Schlemm（2013））。此外，Y 既是弱平稳的，也是强平稳的，并且根据 Marquardt 和 Stelzer（2007）的命题 3.34，它是强混合的，且具有指数衰减系数。对于所有 $h \in \mathbb{R}$，Y 的自协方差函数 γ_Y 可表示为

$$\gamma_Y(h) = \sigma_L^2 \mathbf{b}^\top e^{A|h|} \Sigma \mathbf{b}, \ \text{ where } \ \Sigma = \int_0^\infty e^{As} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p^\top e^{A^\top s} \, ds. \tag{4}$$

Y 的谱密度 ϕ_Y 是 γ_Y 的傅里叶变换，对于所有 $u \in \mathbb{R}$，其表达式为

$$\phi_Y(u) = \frac{\sigma_L^2}{2\pi}\left|\frac{b(iu)}{a(iu)}\right|^2, \tag{5}$$

其中，i 是虚数单位。关于 CARMA 过程的更多详细信息，请参见 Brockwell（2001a、b，2014年）以及 Brockwell 和 Lindner（2024年）。我们关注于估计 CARMA过程的参数。采样序列将在下文的（6）中利用增量过程 $\nu = (\nu_k)_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ 定义。我们对 Lévy 过程L、增量过程 ν以及参数空间 Θ作出如下假设。这确保了上述关于 CARMA过程 Y 的论述对于 Θ 中参数的所有取值均成立。

(H1) $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个双边 Lévy 过程，具有零均值、方差 $\sigma_L^2 > 0$，并且对于某个 $\delta > 0$，其 $4+\delta$ 阶矩有限。

(H2) $\nu = (\nu_k)_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ 是一列非负、相互独立且同分布（i.i.d.）的随机变量，其分布函数为 F。每个 ν_k 都绝对连续，具有有界且连续的密度函数 f，其均值为 $1/\beta$、方差为 η^2，并且四阶矩有限。此外，ν 与 L 相互独立。

(H3) 参数空间 Θ 是 $\mathbb{R}^{p+q}$的一个紧子集。此外，对于所有 $\boldsymbol{\theta} = (a_1, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_{q-1})^\top \in \Theta$，多项式 a和 b没有公共零点，且 a 的所有零点的实部都严格为负。最后，真实参数 $\boldsymbol{\theta}_0$属于 Θ的内部。

我们将更新采样序列 $\tau = (\tau_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 定义为

$$\tau_k := \begin{cases} \sum_{j=k}^{-1}(-\nu_j), & k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0, \\ 0, & k = 0, \\ \sum_{j=1}^{k}\nu_j, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{6}$$

与 τ 相关联的是更新过程 $N = (N(t))_{t\in\mathbb{R}}$，其定义为

$$N(t) := \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{0}(-\mathbf{I}_{\{\tau_k > t\}}), & t < 0, \\ 1, & t = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{I}_{\{\tau_k \le t\}}, & t > 0. \end{cases}$$

更新函数 R 对所有 $t > 0$ 定义为 $R(t) := \mathbf{期望}[N(t)]$。利用（**H2**），可得

$$R(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(t),$$

其中 F^{*k}是 τ_k的分布函数，即 F的 k重卷积。由于 F绝对连续，N 具有更新密度

$$r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{*k}(t),$$

其中 f^{*k}是 f的 k重卷积。 f的连续性以及更新方程（参见例如Alsmeyer (2012)的(5.29)）蕴含 r 是连续的。此外，由于 f 在（**H2**）下有界，更新密度定理（参见Alsmeyer (2012)中的定理 5.26）表明 r 也是有界的，从而保证下面的积分是良定义的。采样过程 $Z = (Z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 由下式给出

$$Z(t) := \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{0} Y(\tau_k)\mathbf{I}_{\{\tau_k > t\}}, & t < 0, \\ Y(0), & t = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} Y(\tau_k)\mathbf{I}_{\{\tau_k \le t\}}, & t > 0. \end{cases}$$

更新过程 N 的约化协方差测度 μ_N （相差因子 β）按照 Lii and Masry (1992) 的定义为

$$\mu_N(B) = \delta_0(B) + \int_B r(|h|)\, dh$$

对所有博雷尔集 B 均成立。与 Lii and Masry (1992) 一样，对于所有 $u \in \mathbb{R}$， Z 的谱密度 ϕ_Z 定义为

$$\begin{aligned} \phi_Z(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihu}\gamma_Y(h)\, d\mu_N(h) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\sigma_L^2 \mathbf{b}^\top \Sigma \mathbf{b} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihu}\gamma_Y(h) r(|h|)\, dh\right). \end{aligned} \tag{7}$$

若 ν_k 服从指数分布，则 $r(\cdot) \equiv \beta$，并利用 (5)，谱密度可简化为

$$\phi_Z(u) = \frac{\beta\sigma_L^2}{2\pi}\left(\frac{\mathbf{b}^\top \Sigma \mathbf{b}}{\beta} + \left|\frac{b(iu)}{a(iu)}\right|^2\right). \tag{8}$$

我们还将 $\phi_Y(u)$ 和 $\phi_Z(u)$ 分别记为 $\phi_Y(u, \boldsymbol{\theta})$ 和 $\phi_Z(u, \boldsymbol{\theta})$，以突出它们对参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的依赖。我们将真实参数记为 $\boldsymbol{\theta}_0$。我们按照 Lii and Masry (1992) 的方法定义 Whittle 型估计量。首先，令

$$g(u, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\phi_Z(u, \boldsymbol{\theta})}{s^2(\boldsymbol{\theta})}, \ \text{where } s^2(\boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_Z(u, \boldsymbol{\theta})}{1 + u^2}\, du. \tag{9}$$

然后，我们定义 $K : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ 为

$$K(\boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(g(u, \boldsymbol{\theta}))}{1 + u^2}\phi_Z(u, \boldsymbol{\theta}_0)\, du.$$

一般而言，我们需要以下抗混叠假设（参见 Lii and Masry (1992)，假设 2.1）。

(H4) 对所有 $\boldsymbol{\theta}_1$， $\boldsymbol{\theta}_2 \in \Theta$，函数 $g(\cdot, \boldsymbol{\theta}_1)$ 和 $g(\cdot, \boldsymbol{\theta}_2)$ 在一个具有正（勒贝格）测度的集合上不同。

我们注意到，当 ν_k 服从指数分布时，**(H4)** 成立（参见 Lii and Masry (1992)，第 61–62 页，并回顾式 (5)）。

命题1 (Lii andMasry (1992)). 假设（***H1***）-（***H4***）。函数 K 是良定义的、连续的，并在 $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$处取得唯一的全局最大值。

由于谱密度 ϕ_Z 通常未知，我们使用周期图$I_{Z,\ N(T)}$对其进行估计，其中对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$I_{Z,n}(u) = \frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{k=1}^{n} e^{-iu\tau_k} Y(\tau_k)\right|^2. \tag{10}$$

ˆ 由此得到由下式给出的 K 的估计量 K_n

$$\hat{K}_n(\boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(g(u,\boldsymbol{\theta}))}{1+u^2} I_{Z,n}(u)\, du.$$

ˆ ˆ ˆ $\boldsymbol{\theta}_0$ 的估计量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 是 Θ 中使 K_n达到最大的任意一点。类似地，估计量 $\boldsymbol{\theta}_{N(T)}$ 是 $K_{N(T)}$的ˆ ˆ ˆ最大化点。我们建立了$(\boldsymbol{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$与$(\boldsymbol{\theta}_{N(T)})_{\ T\geq 0}$二者的渐近正态性。协方差矩阵由 $\Sigma_0 := W^{-1}QW^{-1}$给出，其中 W的元素是 $K(\cdot)$的二阶偏导数（更多细节见下文(31)），而 Q 的元素由下文(32)给出。

定理 1 . 假设（***H1***）-（***H4***）成立，并设矩阵 W 可逆。则

$$(i)\ \sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_0)\ \ and$$
$$(ii)\ \sqrt{N(T)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N(T)} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_0).$$

ˆ定理 1 的一个直接推论是估计量$(\boldsymbol{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 与ˆ$(\boldsymbol{\theta}_{N(T)})_{T\geq 0}$的相合性。

推论1. 假设（***H1***）-（***H4***）。则ˆ$\boldsymbol{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \boldsymbol{\theta}_0$与ˆ$\boldsymbol{\theta}_{N(T)} \xrightarrow[T\to\infty]{p} \boldsymbol{\theta}_0$。

定理 1 的证明分为若干步骤。我们首先在下文第 3 节中证明积分周期图是渐近正态的。定理 1 的证明包含在第 4 节中。我们关键地利用了如下事实：对于 $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$，CARMA 过程 Y 是具有指数衰减系数的强混合过程。由Brandes 等（2023）的命题 4.1 可知，$(Y(\tau_k)$ $\tau_k - \tau_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$与$(Y(\tau_k))_{k\in\mathbb{Z}}$均为具有指数衰减系数的强混合。特别地，它们是遍历的。

我们分析的另一个重要方面是估计驱动 Lévy 过程的方差 σ_L^2 ′。为此，我们采用 Lii and Masry (1992) 在第 68 页阐述的方法。首先考虑估计量

$$\hat{s}_n^2(\boldsymbol{\theta}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_{Z,n}(u)}{1+u^2}\, du$$

对应于式 (9) 中的 $s^2(\boldsymbol{\theta}_0)$。使用记号 $s^2(\boldsymbol{\theta}_0,\ \sigma_L^2)$ 表示 $s^2(\boldsymbol{\theta}_0)$，以突出其对 σ_L^2 的依赖，我们得到 $s^2(\boldsymbol{\theta}_0,\ \sigma_L^2) = \sigma_L^2 \tilde{s}^2(\boldsymbol{\theta}_0)$，其中

$$\tilde{s}^2(\boldsymbol{\theta}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}_Z(u, \boldsymbol{\theta}_0)}{1+u^2}\, du \text{ and } \tilde{\phi}_Z(u, \boldsymbol{\theta}_0) = \frac{\phi_Z(u, \boldsymbol{\theta}_0)}{\sigma_L^2}$$

不再依赖于 σ_L^2。用 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ 替换 $\boldsymbol{\theta}_0$，我们得到估计量

$$\hat{\sigma}_{L,n}^2 = \frac{\hat{s}_n^2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\tilde{s}^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)}.$$

L 的方差。由于 $\tilde{s}^2(\cdot)$ 为正且连续（更多详情见附录 A.2），由推论1可得 $\tilde{s}^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \tilde{s}^2(\boldsymbol{\theta}_0)$。利用这一点以及下文的 (38)，我们推导出

$$\hat{\sigma}_{L,n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p} \sigma_L^2$$

从而确立了方差估计量的相合性。将 n 替换为 $N(t)$ 和 $t \to \infty$ 时，完全相同的结果仍然成立。

我们以讨论一些特殊情形和模拟研究来结束本节。特别地，通过取 $p = 1$ 和 $q = 0$，可以将奥恩斯坦-乌伦贝克过程视为 CARMA过程的一个特例。利用 (3)，令 $a(z) = z + a_1$ 且 $b(z) = b_0 = 1$，我们得到

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-a_1(t-u)}\, dL(u).$$

在这种情况下，参数为 $\theta = a_1 > 0$，我们用 θ_0 表示真实参数。由 (4) 和 (5) 可知，Y 的自协方差函数为

$$\gamma_Y(h) = \frac{\sigma_L^2 e^{-\theta|h|}}{2\theta}$$

和谱密度

$$\phi_Y(u, \theta) = \frac{\sigma_L^2}{2\pi} \frac{1}{\theta^2 + u^2},$$

其中我们用到了 $\Sigma = (2\theta)^{-1}$。若 ν_k 服从均值为 $(\beta)^{-1}$ 的指数分布，利用式（8），可得采样过程 Z 的谱密度

$$\phi_Z(u, \theta) = \frac{\beta\sigma_L^2}{2\pi}\left(\frac{1}{2\theta\beta} + \frac{1}{\theta^2 + u^2}\right).$$

最后，利用（9）和积分计算，我们得到

$$g(u, \theta) = \left(\frac{1}{2\theta\beta} + \frac{1}{\theta^2 + u^2}\right) \Big/ \left(\frac{\pi}{2\theta\beta} + \frac{\pi}{\theta(\theta+1)}\right).$$

与之前一样

$$K(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(g(u,\theta))}{1+u^2} \phi_Z(u,\theta_0)\, du$$

估计为

$$\hat{K}_n(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(g(u,\theta))}{1+u^2} I_{Z,n}(u)\, du.$$

我们模拟奥恩斯坦-乌伦贝克过程，假设驱动该过程的 L´évy 过程为 (i) 标准布朗运动，或 (ii) 形状参数为 0.2、速率参数为 0.3 的伽马过程，如 Brockwell and Lindner（2024）第 14.2 节所述，并将其中心化，使均值为零。为了模拟该过程，我们使用 Brockwell and Lindner（2024）第 19.5 节中的 R程序，离散化步长为 $h = 10^{-3}$。上述积分采用梯形法则近似，样本量设为 $n \in \{100, 1000\}$。真实参数值取为 $\theta_0 = 1$，并假设到达间隔服从参数为 $\beta \in \{0.5, 1, 2, 5\}$ 的指数分布。最后，通过对离散化过程进行线性插值，得到采样过程。该过程重复 ˆ 100 次；布朗运动驱动模型和伽马过程驱动模型的估计参数 θ_n 的均值和方差分别汇总于表1和表2。模拟结果清楚地表明，随着样本量增加，偏差和标准差均会减小。

	$n = 100$	$n = 1000$
$\beta = 0.5$	1。03 (0。18)	0.89 (0.09)
$\beta = 1$	1.08 (0.24)	0.95（0.05）
$\beta = 2$	1。18 (0。54)	0.99 (0.04)
$\beta = 5$	1。45 (1。11)	1.04 (0.09)

ˆ 表1：布朗运动驱动的奥恩斯坦-乌伦贝克过程在重复100次后，估计参数 θ_n 的均值和方差（括号内）。

	$n = 100$	$n = 1000$
$\beta = 0.5$	1。08 (0。30)	0.97 (0.06)
$\beta = 1$	1.06 (0.21)	0.96 (0.06)
$\beta = 2$	1。21 (0。51)	1.01 (0.05)
$\beta = 5$	1.20 (0.58)	1.04 (0.07)

ˆ 表 2：在 100 次重复试验中，伽马过程驱动的奥恩斯坦-乌伦贝克过程的估计参数 θ_n 的均值和方差（括号内）。

3 积分周期图的渐近正态性

对于函数 $G \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$，令

$$J_n \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} G(u) I_{Z,n}(u)\, du \quad \text{and} \quad J \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \phi_Z(u, \boldsymbol{\theta}_0)\, du.$$

我们在下面的引理 5 中证明，J_n 是均值为 J 的渐近正态。我们从若干预备结果开始。我们记

$$\hat{G}_R(\xi) \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \cos(\xi u)\, du$$

$G(\cdot)$ 的傅里叶变换的实部。我们注意到 $\hat{G}_R$ 属于 $L^2(\mathbb{R})$，一致连续，且其绝对值有界于 $\|G\|_{L^1}/(2\pi)$，其中 $\|G\|_{L^1}$ 是G的 L^1-范数。利用 (10) 可以证明

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \hat{G}_R(\tau_k - \tau_j) Y(\tau_k) Y(\tau_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=-(n-j)}^{n-j} U_j(|k|), \end{aligned}$$

其中 $U_j(k) \coloneqq G_R(\tau_{j+k} - \tau_j) Y(\tau_j) Y(\tau_{j+k})$，对 $j, k \in \mathbb{N}_0$。我们还令

$$H_j(n) \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} U_j(|k|).$$

引理 1. 假设 ***(H1)-(H3)***。对每个 k、$n \in \mathbb{N}_0$，序列 $(U_j(k))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 与$(H_j(n))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 是强平稳且强混合的，其系数呈指数衰减。

证明。 利用 Brandes 和 Curato（2019）的命题 2.1，我们得到 $(Y(\tau_l)\ \tau_l - \tau_{l-1})_{l\in\mathbb{Z}}$ 是强平稳的。由于 $(U_j(k))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 是强平稳序列的可测函数，因此它也是强平稳的。接下来，利用 Marquardt 和 Stelzer（2007）的命题 3.34 以及 Brandes 等（2023）的命题 4.1，我们得知 $(Y(\tau_l)\ \tau_l - \tau_{l-1})_{l\in\mathbb{Z}}$ 是强混合的，其系数 $\alpha_{Y,\ \tau}(h) = O(e^{-ch})$ 指数衰减，其中 $c > 0$ 和 $h \in \mathbb{N}$。由于 $U_j(k)$ 是 $(Y(\tau_l)\ \tau_l - \tau_{l-1})_{l\in\{j,\ldots,j+k\}}$ 的可测函数，而 $U_{j+h}(k)$ 是 $(Y(\tau_l)\ \tau_l - \tau_{l-1})_{l\in\{j+h,\ldots,j+h+k\}}$ 的可测函数，因此我们推得 $(U_j(k))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 是强混合的，其系数为 $(\alpha_U(h))_{h\in\mathbb{N}}$，其中

$$\alpha_U(h) \leq \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \leq h \leq k \\ \alpha_{Y,\tau}(h-k) & \text{if } h > k. \end{cases}$$

我们得出结论，$\alpha_U(h) = O(e^{-ch})$。$(H_j(n))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 的证明类似。 □

接下来，我们为 Y 的自协方差函数建立一个上界。显然，矩阵 A 和 $\gamma_Y(\cdot)$ 都依赖于参数 $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$，也就是说， $A = A(\boldsymbol{\theta}_0)$ 和$\gamma_Y(\cdot) = \gamma_Y(\cdot, \boldsymbol{\theta}_0)$。我们给出一个对所有参数都一致成立的上界。

引理 2. 假设满足（***H1***）-（***H3***）。那么，存在 $C, D > 0$，使得 $|\gamma_Y(h, \boldsymbol{\theta})| \leq Ce^{-D|h|}$对所有 $h \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$均成立。

证明. 我们用 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数以及相应的算子范数，即谱范数。利用附录 A.1 中的（42），可得

$$|\gamma_Y(h, \boldsymbol{\theta})| \leq \tilde{\tilde{\mathrm{C}}}\sigma_L^2 e^{-D|h|}$$

对于一个正常数 $\tilde{\mathrm{C}} > 0$ 以及所有 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$。取 $C = \tilde{\mathrm{C}}\sigma_L^2$即可得到结论。 □

定义截断约化协方差测度 $\bar{\mu}_{N,n}$，对于所有博雷尔集 B，定义为

$$\bar{\mu}_{N,n}(B) = \delta_0(B) + \int_B \sum_{k=1}^{n} f^{*k}(|h|)\, dh$$

以及截断谱密度 $\bar{\phi}_{Z,\,n}(\cdot, \boldsymbol{\theta}_0)$ 对所有 $u \in \mathbb{R}$ 均成立

$$\bar{\phi}_{Z,n}(u, \boldsymbol{\theta}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihu} \gamma_Y(h)\, d\bar{\mu}_{N,n}(h). \tag{11}$$

最后，令

$$\bar{J}_n \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \bar{\phi}_{Z,n}(u, \boldsymbol{\theta}_0)\, du.$$

下面我们证明，$(H_j(n))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 的期望为 J_n，并以指数速度收敛于 J（对于即将给出的中心极限定理，速率 $\sqrt{n}$ 已足够）。

引理 3。 </style}假设 (H1)-*(H3)* 成立。那么，期望$[H_0(n)] = J_n$ 且 极限$_{n\to\infty}\sqrt{n}(J - J_n) = 0$。

证明。 通过对 τ 进行条件化，并对 Y 取期望，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[H_0(n)] &= \frac{1}{2\pi}\mathbf{E}\left[\sum_{k=-n}^{n}\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(u)e^{-iu\tau_{|k|}}\, du\right]\gamma_Y(\tau_{|k|})\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(u)\mathbf{E}\left[\sum_{k=-n}^{n} e^{-iu\tau_{|k|}}\gamma_Y(\tau_{|k|})\right] du.
\end{aligned}$$

接下来，我们计算

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sum_{k=-n}^{n} e^{-iu\tau_{|k|}}\gamma_Y(\tau_{|k|})\right] &= \gamma_Y(0) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuh}\gamma_Y(h)\sum_{k=1}^{n} f^{*k}(|h|)\, dh \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuh}\gamma_Y(h)\, d\bar{\mu}_{N,n}(h).
\end{aligned}$$

我们得出结论：

$$\mathbf{E}[H_0(n)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuh}\gamma_Y(h)\,d\bar{\mu}_{N,n}(h)\right]du = \bar{J}_n.$$

接下来，令

$$\mathcal{L}(\xi) \coloneqq \int_0^{\infty} e^{-\xi h} f(h)\,dh \tag{12}$$

为 f 的拉普拉斯变换。利用 $G \in L^1(\mathbb{R})$ 和引理 2，我们可以找到正常数 C 和 D，使得

$$\begin{aligned}
2\pi\sqrt{n}|J - \bar{J}_n| &\le \sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty}|G(u)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-iuh}||\gamma_Y(h)|\sum_{k=n+1}^{\infty} f^{*k}(|h|)\,dh\right)du \\
&\le \|G\|_{L^1}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma_Y(h)|\sum_{k=n+1}^{\infty} f^{*k}(|h|)\,dh \\
&\le 2C\|G\|_{L^1}\sqrt{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-Dh} f^{*k}(h)\,dh \\
&\le 2C\|G\|_{L^1}\sqrt{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}(\mathcal{L}(D))^k.
\end{aligned}$$

由于当 $D > 0$ 时，$\mathcal{L}(D) < 1$，我们得出

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(\mathcal{L}(D))^k = \frac{(\mathcal{L}(D))^{n+1}}{1-\mathcal{L}(D)}$$

当 $n \to \infty$ 时，以指数速度收敛至零。 □

对于所有 $j \in \mathbb{N}_0$ 和 $m \in \mathbb{N}$，我们定义

$$S_j(m) \coloneqq H_j(m) - \bar{J}_m = \bar{U}_j(0) + 2\sum_{k=1}^{m}\bar{U}_j(k), \tag{13}$$

¯其中 $U_j(k) \coloneqq U_j(k) - \mathbf{期望}[U_j(k)]$ 对于所有 $j, k \in \mathbb{N}_0$。我们在附录 B.1 中计算 $(U_j(k))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 的均值和协方差。下一个引理保证在假设 **(H1)** 下方差和协方差存在且有限。

引理 4. 假设 L 具有 $2r$ 阶有限阶矩，其中 $r \ge 1$。那么，对于所有 j、$k \in \mathbb{N}_0$ 和 $m \in \mathbb{N}$，¯矩 **期望**$[|U_j(k)|^r]$、**期望**$[|U_j(k)|^r]$ 和 **期望**$[|S_j(m)|^r]$ 均为有限值。

ˆ证明。 由于 G_R 的绝对值有界于 $\|G\|_{L^1}/(2\pi)$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[|U_j(k)|^r] &= \mathbf{E}[|\hat{G}_R(\tau_{j+k} - \tau_j)|^r |Y(\tau_k)Y(\tau_{j+k})|^r] \\
&\le \left(\frac{\|G\|_{L^1}}{2\pi}\right)^r \mathbf{E}[|Y(\tau_k)Y(\tau_{j+k})|^r].
\end{aligned}$$

通过对 τ 取条件期望并使用柯西–施瓦茨不等式，我们得到右端（RHS）的期望有界于

$$\mathbf{E}[\,(\mathbf{E}[|Y(\tau_k)|^{2r}\,|\,\tau\,])^{1/2}(\mathbf{E}[|Y(\tau_{j+k})|^{2r}\,|\,\tau\,])^{1/2}].$$

由平稳性可知，上述条件矩均等于**期望**$[|Y(0)|^{2r}]$。由此可得

$$\mathbf{E}[|U_j(k)|^r] \le \left(\frac{\|G\|_{L^1}}{2\pi}\right)^r \mathbf{E}[|Y(0)|^{2r}],$$

其中，右端有限，因为 $G \in L^1(\mathbb{R})$ 和 L 具有 $2r$ 阶有限矩（参见 Brockwell 和 Schlemm（2013年））。显然，**期望**$[|U_j(k)|^r] < \infty$ 当且仅当**期望**$[|U_j(k)|^r] < \infty$。由于 $|\cdot|^r$ 是凸函数，我们有

$$\left|\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} a_j\right|^r \le \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}|a_j|^r$$

对所有 $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ 均成立。利用该不等式和（13），可得

$$\mathbf{E}[|S_j(m)|^r] \le (m+1)^{r-1}\left(\mathbf{E}[|\bar{U}_j(0)|^r] + 2^r\sum_{k=1}^{m}\mathbf{E}[|\bar{U}_j(k)|^r]\right).$$

由于 **期望**$[|U_j(k)|^r] < \infty$，上述右端有限。 □

我们的下一个结果给出了 J_n 和 $J_{N(T)}$的渐近正态性。在附录 B 中计算的 $(U_j(k))_{j\in\mathbb{N}_0}$的均值和协方差，可用于推导下文（14）和（16）中定义的方差 $\sigma^2_{J,m}$ 和 σ^2_J 的显式公式。

引理 5. 假设（***H1***）-（***H3***）。则

$$\textit{(i)}\ \sqrt{n}(J_n - J) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,\sigma_J^2)\ \textit{and}$$
$$\textit{(ii)}\ \sqrt{N(T)}(J_{N(T)} - J) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,\sigma_J^2).$$

证明。 我们首先证明 (i)。由引理 3 可知，只需证明 $\mathcal{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,\sigma_J^2)$，其中

$$\mathcal{S}_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} S_j(n-j).$$

对于 $m \in \mathbb{N}$，我们考虑序列 $S(m) = (S_j(m))_{j\in\mathbb{N}_0}$。根据引理 1，该序列是强平稳且强混合的，其系数呈指数衰减 $(\alpha_{S(m)}(h))_{h\in\mathbb{N}}$。我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}\left[\sum_{j=1}^{n} S_j(m)\right] &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}[S_i^2(m)] + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i}\mathbf{E}[S_i(m)S_{i+j}(m)] \\ &= n\mathbf{E}[S_0^2(m)] + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i}\mathbf{E}[S_0(m)S_j(m)]\end{aligned}$$

从而得到

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Var}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} S_j(m)\right] = \sigma_{J,m}^2,$$

其中

$$\sigma_{J,m}^2 \coloneqq \mathbf{E}[S_0^2(m)] + 2\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{E}[S_0(m)S_j(m)]. \tag{14}$$

$S(m)$的强混合性质确保$\sigma_{J,\ m}^2$ 定义良好且有限（更多详情见下文）。令$\tilde{\mathcal{S}}_{n,\ m}$：
$= \ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} S_j(m)$。那么，根据 Brockwell 和 Davis（1991）的命题 6.3.9，只需证明

$$\tilde{\mathcal{S}}_{n,m} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,\sigma_{J,m}^2), \tag{15}$$

$$\sigma_J^2 \coloneqq \lim_{m\to\infty}\sigma_{J,m}^2 \text{ exists and is finite, and} \tag{16}$$

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}(|\mathcal{S}_n - \tilde{\mathcal{S}}_{n,m}| \geq \epsilon) = 0 \text{ for all } \epsilon > 0. \tag{17}$$

我们首先注意到$\sigma_{J,\ m}^2 < \infty$。为此，我们使用 Davydov（1968）给出的一个不等式：对于任意零均值随机变量 X_1 和 X_2，以及满足$1/p + 1/q + 1/r = 1$的正实数 p，q，r

$$|\mathbf{E}[X_1X_2]| \leq 12(\mathbf{E}[|X_1|^p])^{1/p}(\mathbf{E}[|X_2|^q])^{1/q}(\alpha_X)^{1/r},$$

其中 α_X 是由 X_1 和 X_2生成的 σ-代数的强混合系数。将其用于 $p = q = 2 + \delta/2$ 和 $r = (4+\delta)/\delta$，可得

$$\mathbf{E}[S_0(m)S_j(m)] \leq 12(\mathbf{E}[|S_0(m)|^{2+\delta/2}])^{4/(4+\delta)}\alpha_{S(m)}(j)^{\delta/(4+\delta)}. \tag{18}$$

利用引理 4，取 $r = 2 + \delta/2$ 和（**H1**），可得

$$\mathbf{E}[|S_0(m)|^{2+\delta/2}] < \infty. \tag{19}$$

由于 α-mi xing 系数呈指数级快速衰减，我们还得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{S(m)}^{\delta/(4+\delta)}(j) < \infty. \tag{20}$$

(18)、(19) 和 (20) 表明 (14) 的右端有限。利用 (19) 和 (20)，我们应用 Ibragimov 和 Linnik (1971) 的定理 18.5.3，得到 (15)。现在证明 (16)。利用 (13) 可知

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S_0(m)S_j(m)] = \mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(0)] &+ 2\sum_{k=1}^{m}\mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(k)] \\ &+ 2\sum_{l=1}^{m}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(0)] + 4\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]\end{aligned}$$

对所有 $j \in \mathbb{N}_0$ 均成立。将其代入 (14)，得到

$$\sigma_{J,m}^2 = \mathbf{E}[\bar{U}_0^2(0)] + 4\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=1}^{m}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_0(k)] + 2\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg(\mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(0)] + 2\sum_{k=1}^{m}\mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(k)] + 2\sum_{l=1}^{m}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(0)] + 4\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]\Bigg). \tag{21}$$

因此，我们预期 $\sigma_J^2 = \lim_{m\to\infty}\sigma_{J,m}^2 = \sigma_{J,\infty}^2$ 由上述表达式给出，其中 m被替换为 ∞。我们在附录 B.3 中通过证明上述级数（含 $m = \infty$）绝对收敛，使这一点精确化。

现在我们转向 (17)。我们有

$$\mathcal{S}_n - \tilde{\mathcal{S}}_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n-m}(S_j(n-j) - S_j(m)) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=n-m+1}^{n}(S_j(n-j) - S_j(m))$$

并且根据切比雪夫不等式，只需证明两者

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n-m}(S_j(n-j) - S_j(m))\right)^2\right] = 0 \text{ and} \tag{22}$$

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=n-m+1}^{n}(S_j(m) - S_j(n-j))\right)^2\right] = 0. \tag{23}$$

根据平稳性（参见引理 1），(23) 中的期望可化为

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{m}(S_j(m) - S_j(m-j))\right)^2\right].$$

由于该量有限且不依赖于 n，我们得到所需的收敛性。接下来，¯回顾 $U_j(k) := U_j(k) - \mathbf{期望}[U_j(k)]$ 对所有 $j, k \in \mathbb{N}_0$成立。(22) 中的期望等于

$$4\sum_{i=1}^{n-m}\sum_{j=1}^{n-m}\sum_{l=m+1}^{n-i}\sum_{k=m+1}^{n-j}\mathbf{E}[\bar{U}_i(l)\bar{U}_j(k)].$$

利用平稳性，我们看到这等于

$$4\sum_{j=1}^{n-m}\sum_{l=m+1}^{n-j}\sum_{k=m+1}^{n-j}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_0(k)] + 8\sum_{i=1}^{n-m}\sum_{j=1}^{n-m-i}\sum_{l=m+1}^{n-i}\sum_{k=m+1}^{n-j}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)].$$

两边除以 n，并令 $n \to \infty$ 趋于极限，我们得到

$$4\sum_{l=m+1}^{\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_0(k)] + 8\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=m+1}^{\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)].$$

该极限存在，因为级数

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_0(k)] \text{ and } \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]$$

绝对收敛（这一点在附录 B.3 中证明）。因此，对$m \to \infty$取极限可得，上述项趋于零，从而得到（22）。这就完成了（i）的证明。接下来考虑（ii），更新过程的大数定律（例如参见 Serfozo（2009）的推论 11）给出 $N(T)/T \xrightarrow[T\to\infty]{a.s.} \beta$。与前面一样，只需证明 $\mathcal{S}_{N(T)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_J^2)$。为此，我们采用 Brockwell 和 Davis（1991）命题 6.3.9 的一个版本，并证明

$$\tilde{\mathcal{S}}_{N(T),m} \xrightarrow[T\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{J,m}^2) \text{ and} \tag{24}$$

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\mathbf{P}(|\mathcal{S}_{N(T)} - \tilde{\mathcal{S}}_{N(T),m}| \geq \epsilon) = 0 \text{ for all } \epsilon > 0. \tag{25}$$

回想一下，我们已经验证了（16），由此得到 $\mathcal{N}(0, \sigma_{J,m}^2) \xrightarrow[m\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_J^2)$。对于所有$0 < \delta < \beta$，（25）中的概率有如下上界：

$$\mathbf{P}(|\mathcal{S}_{N(T)} - \tilde{\mathcal{S}}_{N(T),m}| \geq \epsilon, N(T) \geq (\beta-\delta)T) + \mathbf{P}(N(T) < (\beta-\delta)T),$$

其中，第一项又由以下内容有界：

$$\sup_{n\geq(\beta-\delta)T}\mathbf{P}(|\mathcal{S}_n - \tilde{\mathcal{S}}_{n,m}| \geq \epsilon).$$

利用 (17) 和 $N(T)/T \xrightarrow[T\to\infty]{p} \beta$，我们得到 (25)。

现在转而讨论 (24)。我们沿用 R´enyi (1957) 的论证，证明独立同分布随机变量之和的 Anscombe 定理（Anscombe；1952；Gut；2012）。在此情形下，我们使用 Yokoyama（1980）提出的强混合序列矩不等式。令$0 < \epsilon \leq 1/2$和 $A_{T,\epsilon} := \{|N(T) - \beta T| \leq \beta\epsilon T\}$。由于 $N(T)/T \xrightarrow[T\to\infty]{p} \beta$，存在$T_1 > 0$ 使得 $\mathbf{P}(A_{T,\epsilon}^{\complement}) \leq \epsilon$ 对所有 $T \geq T_1$均成立。因此，对所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $T \geq T_1$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{\tilde{\mathcal{S}}_{N(T),m} \leq x\} \cap A_{T,\epsilon}) &\leq \mathbf{P}(\tilde{\mathcal{S}}_{N(T),m} \leq x) \\ &\leq \mathbf{P}(\{\tilde{\mathcal{S}}_{N(T),m} \leq x\} \cap A_{T,\epsilon}) + \epsilon.\end{aligned} \tag{26}$$

令 $n_1 := \lceil \beta T(1-\epsilon) \rceil$ 和 $n_2 := \lfloor \beta T(1+\epsilon) \rfloor$。那么，我们有

$$\mathbf{P}(\{\tilde{\mathcal{S}}_{N(T),m} \leq x\} \cap A_{T,\epsilon}) = \sum_{n=n_1}^{n_2}\mathbf{P}(\tilde{\mathcal{S}}_{n,m} \leq x, N(T) = n), \tag{27}$$

其中

$$\mathbf{P}(\tilde{\mathcal{S}}_{n,m} \leq x, N(T) = n) = \mathbf{P}(\sum_{j=1}^{n_1} S_j(m) \leq \sqrt{n}x - \sum_{j=n_1+1}^{n} S_j(m), N(T) = n).$$

令 $M := \max_{j=n_1,\ldots,n_2} |\sum_{j=n_1+1}^{n} S_j(m)|$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\sum_{j=1}^{n_1} S_j(m) \le \sqrt{n_1}x - M, N(T)=n) &\le \mathbf{P}(\tilde{\mathcal{S}}_{m,m} \le x, N(T)=n) \\ &\le \mathbf{P}(\sum_{j=1}^{n_1} S_j(m) \le \sqrt{n_2}x + M, N(T)=n).\end{aligned} \tag{28}$$

接下来，利用（**H1**）和引理 4，我们得到 **期望**$[|S_j(m)|^{2+\delta/2}] < \infty$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$均成立。由于根据引理 1，$(S_j(m))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 是强混合的，且具有指数衰减系数，因此 Yokoyama （1980）定理 1 的条件（3.1）对所有 $2 < r < 2+\delta/2$显然成立（不失一般性，假设 $r \le 3$）。令 $B_{M,\epsilon} := \{M \le \epsilon^{1/3} n_1^{1/2}\}$。那么，Yokoyama（1980）的推论1给出一个常数 C_r，使得 **期望**$[M^r] \le C_r (n_2 - n_1)^{r/2}$，从而

$$\mathbf{P}(B_{M,\epsilon}^{\complement}) \le C_r \epsilon^{-r/3} \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right)^{r/2} \le 2^r C_r \epsilon^{r/6} \le 8 C_r \epsilon^{1/3}.$$

将上述不等式代入（26）、（27）和（28），可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\tilde{\mathcal{S}}_{N(T),m} \le x) \ge \mathbf{P}(\{\tilde{\mathcal{S}}_{n_1,m} \le x - \epsilon^{1/3}\} \cap A_{T,\epsilon} \cap B_{M,\epsilon}) \text{ and} \\ &\mathbf{P}(\tilde{\mathcal{S}}_{N(T),m} \le x) \le \mathbf{P}(\{\tilde{\mathcal{S}}_{n_2,m} \le (n_2/n_1)^{1/2} x + \epsilon^{1/3}\} \cap A_{T,\epsilon} \cap B_{M,\epsilon}) + 8C_r\epsilon^{1/3} + \epsilon.\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{P}((A_{T,\epsilon} \cap B_{M,\epsilon})^{\complement}) \le \epsilon + 8C_r\epsilon^{1/3}$，我们推得

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\tilde{\mathcal{S}}_{n_1,m} \le x - \epsilon^{1/3}) - 8C_r\epsilon^{1/3} - \epsilon &\le \mathbf{P}(\tilde{\mathcal{S}}_{N(T),m} \le x) \\ &\le \mathbf{P}(\tilde{\mathcal{S}}_{n_2,m} \le (n_2/n_1)^{1/2} x + \epsilon^{1/3}\}) + 8C_r\epsilon^{1/3} + \epsilon.\end{aligned}$$

该结果现在由(15)以及$\lim_{T\to\infty} \frac{n_2}{n_1} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$与 $\epsilon > 0$ 可以任意小这一事实得出。

□

4 估计量的渐近正态性

在本节中，我们建立估计量$(\boldsymbol{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$与$(\boldsymbol{\theta}_{N(T)})_{T\ge 0}$的相合性和渐近正态性。特别地，我们证明定理 1和推论1。我们首先注意到这些估计量是相合的。利用引理 5 (i)以及

$$G(u) = \frac{\log(g(u,\boldsymbol{\theta}))}{1+u^2},$$

我们看到

$$\hat{K}_n(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{p} K(\boldsymbol{\theta}). \tag{29}$$

此外，利用 (10) 和 (11) 可以证明

$$\mathbf{E}[I_{Z,n}(u)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_{Z,n-j}(u, \boldsymbol{\theta}_0).$$

由于根据引理 2

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma_Y(h)|\left(r(|h|)-\sum_{k=1}^{n-j}f^{*k}(|h|)\right)dh\leq\frac{2C(\mathcal{L}(D))^{n-j+1}}{1-\mathcal{L}(D)},$$

我们看到

$$\mathbf{E}[I_{Z,n}(u)]=\phi_Z(u,\boldsymbol{\theta}_0)+O(1/n). \tag{30}$$

利用附录 A 中的 **(H1)-(H4)**、(29)、(30) 和 (51)，按照 Lii and Masry (1992) 的定理 2.2 的证明中相同的步骤（另见 Ibragimov (1967)），可得 $\hat{}\boldsymbol{\theta}_n\xrightarrow[n\to\infty]{p}\boldsymbol{\theta}_0$。利用引理 5 (ii) 中的结论可类似地证明 $\hat{}\boldsymbol{\theta}_{N(T)}\xrightarrow[T\to\infty]{p}\boldsymbol{\theta}_0$，其中

$$G(u)=\frac{\log(g(u,\boldsymbol{\theta}))}{1+u^2}\text{ and }G(u)=\frac{1}{1+u^2},$$

有

$$\hat{K}_{N(T)}(\boldsymbol{\theta})\xrightarrow[T\to\infty]{p}K(\boldsymbol{\theta})\text{ and }\mathbf{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I_{Z,N(T)}(u)}{1+u^2}\,du\right]\xrightarrow[T\to\infty]{}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi_Z(u,\boldsymbol{\theta}_0)}{1+u^2}\,du.$$

现在我们转向渐近正态性。我们在附录 A 中证明，函数 $\boldsymbol{\theta}\mapsto\log(g(u,\boldsymbol{\theta})$ 可无限次微分，且其偏导数的绝对值一致有界。这使得我们可以在下面的积分号下进行微分（更多详情见附录 A）。特别地，$K(\cdot)$ 和 $\hat{}K_n(\cdot)$ 的一阶偏导数为

$$\begin{aligned}K^{(i)}(\boldsymbol{\theta})&:=\frac{\partial K(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\log(g(u,\boldsymbol{\theta}))}{\partial\theta_i}\frac{\phi_Z(u,\boldsymbol{\theta}_0)}{1+u^2}\,du\text{ and}\\ \hat{K}_n^{(i)}(\boldsymbol{\theta})&:=\frac{\partial\hat{K}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\log(g(u,\boldsymbol{\theta}))}{\partial\theta_i}\frac{I_{Z,n}(u)}{1+u^2}\,du.\end{aligned}$$

类似地，二阶偏导数为

$$\begin{aligned}K^{(i,j)}(\boldsymbol{\theta})&:=\frac{\partial^2K(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\log(g(u,\boldsymbol{\theta}))}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\frac{\phi_Z(u,\boldsymbol{\theta}_0)}{1+u^2}\,du\text{ and}\\ \hat{K}_n^{(i,j)}(\boldsymbol{\theta})&:=\frac{\partial^2\hat{K}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\log(g(u,\boldsymbol{\theta}))}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\frac{I_{Z,n}(u)}{1+u^2}\,du.\end{aligned}$$

定理 1 中的矩阵 W 的元素为 $w_{ij}=K^{(i,j)}(\boldsymbol{\theta}_0)$，其中 $i,\ j=1,\ldots,\ p+q$。与 Lii and Masry (1992) 中的 (3.23) 一样，可以证明

$$w_{ij}=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\log(g(u,\boldsymbol{\theta}_0))}{\partial\theta_i}\frac{\partial\log(g(u,\boldsymbol{\theta}_0))}{\partial\theta_j}\frac{\phi_Z(u,\boldsymbol{\theta}_0)}{1+u^2}\,du. \tag{31}$$

矩阵 Q 的元素对于 $i,\ j=1,\ \ldots,\ p+q$ 可表示为

$$q_{ij} = Q_{ij}(\varphi^{(i)}(\cdot,\boldsymbol{\theta}_0), \varphi^{(j)}(\cdot,\boldsymbol{\theta}_0)), \tag{32}$$

其中，$Q_{i,j}(\cdot,\cdot)$由 (74) 给出，且

$$\varphi^{(i)}(u,\boldsymbol{\theta}) \coloneqq \frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{\log(g(u,\boldsymbol{\theta}))}{(1+u^2)}.$$

现在证明定理 1 的 (i)。我们可以参照 Lii and Masry (1992) 的定理 3.1 进行证明。根据中值定理，存在位于连接 $\hat{}\,\boldsymbol{\theta}_n$ 和 $\boldsymbol{\theta}_0$ 的线段上的 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)}$，使得

$$\hat{K}_n^{(i)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \hat{K}_n^{(i)}(\boldsymbol{\theta}_0) + \sum_{j=1}^{p+q} \hat{K}_n^{(i,j)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)})(\hat{\theta}_{n,j} - \theta_{0,j})$$

对所有 $i=1,\ldots,p+q$ 均成立。由于 $\hat{}\,\boldsymbol{\theta}_n$ 是 $\hat{}\,K_n$ 的极大值点，因此有 $\hat{}K_n^{(i)}(\hat{}\boldsymbol{\theta}_n) = 0$。将两边乘以 $\sqrt{n}$，得到

$$\sum_{j=1}^{p+q} \hat{K}_n^{(i,j)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)})\sqrt{n}(\hat{\theta}_{n,j} - \theta_{0,j}) = -\sqrt{n}\hat{K}_n^{(i)}(\boldsymbol{\theta}_0) \tag{33}$$

对所有 $i=1,\ldots,p+q$ 均成立。下面证明

$$\hat{K}_n^{(i,j)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)}) \xrightarrow[n\to\infty]{p} w_{i,j} \tag{34}$$

and

$$\sqrt{n}(\hat{K}_n^{(1)}(\boldsymbol{\theta}_0),\ldots,\hat{K}_n^{(p+q)}(\boldsymbol{\theta}_0))^\top \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(\mathbf{0},Q). \tag{35}$$

利用 (33)、(34) 和 (35)，得到

$$W\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(\mathbf{0},Q).$$

由于 W 是对称的，我们得出

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(\mathbf{0},\Sigma_0),$$

其中 $\Sigma_0 = W^{-1}QW^{-1}$。为证明 (34)，我们证明

$$|\hat{K}_n^{(i,j)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)}) - \hat{K}_n^{(i,j)}(\boldsymbol{\theta}_0)| \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0 \text{ and} \tag{36}$$

$$\hat{K}_n^{(i,j)}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow[n\to\infty]{p} K^{(i,j)}(\boldsymbol{\theta}_0). \tag{37}$$

(36) 的推导与 Lii and Masry (1992) 中的 (3.20a) 相同，所用依据是估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ 的相合性、函数 $\boldsymbol{\theta} \mapsto \log(g(u,\ \boldsymbol{\theta})$ 的三阶偏导数一致有界，以及引理 5 (i) 中的结论： $G(u) = 1/(1+u^2)$

$$\hat{s}_n^2(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow[n\to\infty]{p} s^2(\boldsymbol{\theta}_0). \tag{38}$$

类似地，(37) 是利用引理 5 (i) 得到的，其中

$$G(u) = \left(\frac{\partial^2 \log(g(u, \boldsymbol{\theta}_0))}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) \cdot \frac{1}{1+u^2}.$$

现在我们转向 (35) 的证明。我们证明

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{K}_n^{(1)}(\boldsymbol{\theta}_0) - K^{(1)}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ \vdots \\ \hat{K}_n^{(p+q)}(\boldsymbol{\theta}_0) - K^{(p+q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q).$$

设 $\alpha_s \in \mathbb{R}$，其中 $s = 1,\ldots,p+q$。由 Cram´er–Wold 方法，只需证明 J_n，其中

$$G(u) = \sum_{s=1}^{p+q} \alpha_s \varphi^{(s)}(u, \boldsymbol{\theta}_0)$$

是渐近正态的，具有零均值和方差 $\sum_{s=1}^{p+q}\sum_{t=1}^{p+q} \alpha_s q_{s,t} \alpha_t$。这由引理 5 (i) 以及附录 B.5 中的方差计算得出（特别地，参见 (73)，其中 $G_s = \varphi^{(s)}(\cdot, \boldsymbol{\theta}_0)$）。最后我们注意到，如同 Lii and Masry (1992) 中那样

$$\begin{aligned} K^{(i)}(\boldsymbol{\theta}_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(i)}(u, \boldsymbol{\theta}_0)\, du \\ &= s^2(\boldsymbol{\theta}_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g(u, \boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \theta_i} \frac{1}{1+u^2}\, du = 0 \end{aligned}$$

对所有 $i = 1,\ldots,p+q$ 成立，因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(u, \boldsymbol{\theta}_0)}{1+u^2}\, du = 1.$$

最后，定理 1 (ii) 的证明类似，使用引理 5 的第 (ii) 部分。

5 结论

在有限 $4+\delta$ 阶矩假设下，我们证明了对按更新序列抽样的 L´évy 驱动 CARMA 过程参数的 Whittle 型估计量具有相合性和渐近正态性。我们的结果依赖于 Brandes 等（2023）的命题 4.1，该命题保证采样过程是强混合的，且其混合系数指数衰减。由于他们的结果只要求平稳性和强混合性质，我们预计

我们的结果也适用于更一般的过程类别，包括 L´évy 驱动的移动平均过程（Brandes 和 Curato，2019）。然而，当抽样窗口增大时（见上文引理 5（ii）），我们的证明依赖于 Yokoyama（1980）的定理 1（另见 Yang（2007）的定理 2.1–2.2），该定理揭示了矩假设与混合系数衰减速率之间的权衡。这意味着，如果混合系数仅以多项式速度衰减，就需要更强的矩假设。对这些问题的研究仍在进行中。

参考文献

A¨ıt-Sahalia, Y. 和 Mykland, P. A. (2003). 估计连续时间扩散过程时随机与离散抽样的影响，《计量经济学》。计量经济学会期刊**71**：483–549。

A¨ıt-Sahalia, Y. 和 Mykland, P. A. (2004). 具有随机间隔的离散观测的扩散过程估计量：一般理论，《统计年鉴》 **32**：2186–2222。Alsmeyer, G. (2012). 更新、再现与再生。版本日期为2012年11月7日。
`https://www.uni-muenster.de/Stochastik/alsmeyer/Skripten/rt_book.pdf`。

Andresen, A., Benth, F. E., Koekebakker, S. 和 Zakamulin, V. (2014年). CARMA利率模型，《理论与应用金融国际期刊》**17**：1450008，27。

Anscombe, F. J.（1952）。序贯估计的大样本理论，《剑桥哲学学会会刊》48：600–607。Bardet, J.-M. 和 Bertrand, P. R.（2010）。对在随机时刻观测的连续时间高斯过程的谱密度的非参数估计量，《斯堪的纳维亚统计学期刊》37：458–476。Barndorff-Nielsen, O. E.（1997）。正态逆高斯分布与随机波动率建模，《斯堪的纳维亚统计学期刊》24：1–13。Benth, F. E.、Kl¨uppelberg, C.、M¨uller, G. 和 Vos, L.（2014）。基于稳定 CARMA 现货模型的电力市场期货定价，《能源经济学》44：392–406。Bergstrom, A. R.（1990）。《连续时间计量经济建模》，牛津大学出版社。Brandes, D.-P. 和 Curato, I. V.（2019）。更新序列抽样下 Lévy 驱动移动平均过程的样本自协方差，《统计计划与推断杂志》203：20–38。

Brandes, D.-P.、Curato, I. V. 和 Stelzer, R.（2023）。更新抽样下强混合性与弱依赖性的传递，《应用概率杂志》60：435–451。Brockwell, P. J.（2001a）。连续时间 ARMA 过程，《随机过程：理论与方法》，《统计学手册》第19卷，爱思唯尔，第249–276页。Brockwell, P. J.（2001b）。Lévy 驱动的 CARMA 过程，《统计数学研究所年刊》53：113–124。Brockwell, P. J.（2009）。Lévy 驱动的连续时间 ARMA 过程，《金融时间序列手册》，施普林格，第457–480页。Brockwell, P. J.（2014）。CARMA 过程理论与应用的最新成果，《统计数学研究所年刊》66：647–685。Brockwell, P. J. 和 Davis, R. A.（1991）。《时间序列：理论与方法》，施普林格。Brockwell, P. J.、Davis, R. A. 和 Yang, Y.（2007）。连续时间高斯自回归，《中华统计学志》17：63–80。Brockwell, P. J. 和 Lindner, A.（2019）。CARMA 过程的抽样、嵌入与推断，《时间序列分析杂志》40：163–181。Brockwell, P. J. 和 Lindner, A. M.（2024）。《连续参数时间序列》，第98卷，Walter de Gruyter GmbH。Brockwell, P. J. 和 Schlemm, E.（2013）。根据离散观测对多元 CARMA 过程的驱动 Lévy 过程进行参数估计，《多元分析杂志》115：217–251。Brockwell, P. 和 Lindner, A.（2012）。金融数据的 Lévy 驱动时间序列模型，《统计学手册》30：543–563。Charlot, F. 和 Rachdi, M.（2008）。平稳点过程抽样的平稳过程的统计性质，《统计与概率快报》78：456–462。Cont, R.（2001）。资产收益的经验性质：典型事实与统计问题，《定量金融》1：223。Darus, M. 和 Taib, C. M. I. C.（2022）。利用具有均值回复随机速度的 CARMA 过程对温度建模以进行温度保险定价，《马来西亚数学科学杂志》16：273–288。Davydov, Y. A.（1968）。由平稳随机过程生成的分布收敛，《概率论及其应用》13：691–696。Doob, J. L.（1944）。基本高斯过程，《数理统计年刊》15：229–282。

Fasen-Hartmann, V. 和 Kimmig, S.（2020）。通过间接推断稳健估计平稳连续时间 ARMA 模型，《时间序列分析杂志》**41**：620–651。Fasen-Hartmann, V. 和 Mayer, C.（2022）。有限二阶矩连续时间平稳状态空间模型的 Whittle 估计，统计数学研究所年刊**74**：233–270。Fasen, V. 和 Fuchs, F.（2013）。高频采样连续时间自回归移动平均过程的谱估计，《时间序列分析杂志》**34(5)**：532–551。Fowler, R. H.（1980）。统计力学，剑桥大学出版社，剑桥—纽约。平衡态下物质性质的理论，1936 年第二版的重印本。Gut, A.（2012）。Anscombe 定理六十年后，序贯分析：设计方法与应用**31**：368–396。Harris, G. 和 Martin, C.（1987）。多项式的根随系数连续变化，美国数学会会刊**100**：390–392。Hayashi, T. 和 Yoshida, N.（2005年）。关于非同步观测扩散过程的协方差估计，伯努利**11**：359–379。¨Hurwitz, A.（1895）。关于方程仅具有实部为负的根的条件，数学年刊**46**。Ibragimov, I. A.（1967）。关于平稳时间序列谱密度参数的最大似然估计，《概率论及其应用》**12**：115–119。Ibragimov, I. A. 和 Linnik, Y. V.（1971）。随机变量的独立平稳序列，Wolters-Noordhoff 出版社，格罗宁根。Jones, R. H.（1981）。将连续时间自回归模型拟合到离散数据，应用时间序列分析 *II*，爱思唯尔，第 651–682 页。Jones, R. H.（1985）。不等间隔数据的时间序列分析，统计学手册第 5 卷：时域中的时间序列，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，第 157–177 页。Kelly, B. C.、Becker, A. C.、Sobolewska, M.、Siemiginowska, A. 和 Uttley, P.（2014年）。大规模时域天文数据集时代量化随机变异性的灵活可扩展方法，《天体物理学杂志》**788**：33。Khalil, H. K.（2002）。非线性系统，第 3 版，新泽西州萨德尔河上游：普伦蒂斯·霍尔。Li, Z.（2014年）。不规则采样连续时间过程的方法，博士论文，伦敦大学学院。

Lii, K.-S. 和 Masry, E.（1992）。利用离散时间数据拟合连续时间平稳过程模型，《多元分析杂志》41：56–79。Marquardt, T. 和 Stelzer, R.（2007）。多元 CARMA 过程，随机过程及其应用117：96–120。Masry, E.（1978年）。无混叠采样：一种替代性概念及其应用，*IEEE* 信息论汇刊24：317–324。McElroy, T. S.（2013年）。连续时间过程预测及其在信号提取中的应用，统计数学研究所年刊65：439–456。Philippe, A.、Robet, C. 和 Viano, M.-C.（2021年）。平稳连续时间过程的随机离散化，*Metrika*84：375–400。R´enyi, A.（1957）。随机个独立随机变量之和的渐近分布，《数学学报》：匈牙利科学院8：193–199。Rydberg, T. H.（1997）。正态逆高斯 L´évy 过程：模拟与近似，统计通讯：随机模型13：887–910。Schlemm, E. 和 Stelzer, R.（2012）。强混合状态空间模型和多元 L´évy 驱动 CARMA 过程的准最大似然估计，《电子统计学报》6：2185–2234。Serfozo, R.（2009）。应用随机过程基础，施普林格出版社，柏林。T´omasson, H.（2015年）。高斯 CARMA 建模的若干计算方面，统计与计算25：375–387。Yang, S. C.（2007）。强混合序列部分和的最大矩不等式及其应用，《数学学报》（英文版）23(6)。Yokoyama, R.（1980）。平稳混合序列的矩界，概率论与相关领域杂志 ¨概率论与相关领域52(1)。Yu, W. 和 Richards, G. T.（2021年）。利用高斯过程加速 CARMA 建模，*AAS* 通报53(1)。

A 谱密度的正则性

本节将证明重缩放后的谱密度 (9) 的正则性，特别是等度连续性和可微性。首先，我们证明函数 $t \mapsto \mathbf{b}^\top e^{At}\Sigma\mathbf{b}$ 存在一致上界。

A.1 一致上界

我们需要矩阵指数 A over $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 存在一致上界。为此，设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ 为 A 的特征值，且 $\alpha(A) = \max_{j=1,\ldots,p} Re(\lambda_j)$ 为 A 的谱横坐标，其中 $Re(z)$ 是复数 z 的实部。特征值 λ_j 未必互不相同，并且对应于多项式 $a(\cdot)$ 的零点。由于多项式的零点随系数连续变化（例如，参见 Harris 和 Martin (1987)），$\alpha(A)$ 随 $\boldsymbol{\theta}$ 连续变化。根据 **(H3)**，可知 $\alpha(A)$ 在 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 上一致地小于某个负常数。此外，矩阵 A 关于参数 $\boldsymbol{\theta}$ 无限次可微。这表明，Khalil (2002) 的引理 9.9 中的条件均已满足。其证明给出了常数 $C, D > 0$，使得

$$\|e^{At}\|, \|e^{A^\top t}\| \leq \tilde{C}e^{-Dt} \tag{39}$$

对所有 $t \geq 0$ 和 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$。利用 (4)、(39) 和

$$\|e^{As}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_p^\top e^{A^\top s}\| \leq \|e^{As}\mathbf{e}_p\|^2 \leq \|e^{As}\|^2, \tag{40}$$

我们有

$$\|\Sigma\| \leq \frac{\tilde{C}^2}{2D}. \tag{41}$$

利用 (39)、(41)，以及 $\|\mathbf{b}\|$ 在 Θ 上一致有界这一事实，可得常数 $\tilde{\tilde{C}} > 0$ 使得

$$|\mathbf{b}^\top e^{At}\Sigma\mathbf{b}| \leq \tilde{\tilde{C}}e^{-Dt} \tag{42}$$

对所有 $t \geq 0$ 和 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$。

A.2 等度连续性

本节证明以下等度连续性条件，该条件用于定理 1 的证明：对所有 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$|g(u, \boldsymbol{\theta}^{(1)}) - g(u, \boldsymbol{\theta}^{(2)})| \leq \epsilon \tag{43}$$

对于所有 $u \in \mathbb{R}$ and $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$, $\boldsymbol{\theta}^{(2)} \in \Theta$ 使得 $\|\boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(2)}\| \leq \delta$。根据（7）和（9），我们回顾得 t

$$g(u, \boldsymbol{\theta}) = \frac{h(\boldsymbol{\theta}) + g_1(u, \boldsymbol{\theta})}{\pi h(\boldsymbol{\theta}) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(u, \boldsymbol{\theta})}{1+u^2}\, du}, \tag{44}$$

其中

$$h(\boldsymbol{\theta}) \coloneqq \mathbf{b}^\top \Sigma \mathbf{b} \text{ and } g_1(u, \boldsymbol{\theta}) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihu}\, \mathbf{b}^\top e^{A|h|} \Sigma \mathbf{b}\, r(|h|)\, dh. \tag{45}$$

我们注意到

$$g_1(u, \boldsymbol{\theta}) = 2 \int_0^{\infty} \cos(tu) g_2(t, \boldsymbol{\theta}) r(t)\, dt, \text{ where } g_2(t, \boldsymbol{\theta}) \coloneqq \mathbf{b}^\top e^{At} \Sigma \mathbf{b}. \tag{46}$$

利用 (4) 和 (39) 可以证明，函数 $(t,\ \boldsymbol{\theta}) \mapsto g_2(t,\ \boldsymbol{\theta})$ 是连续的（见下文引理 6）。此外，由 (42) 可得

$$|g_2(t, \boldsymbol{\theta})| \leq \tilde{\tilde{\mathrm{C}}} e^{-Dt} \tag{47}$$

对所有 $t \geq 0$ 和 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 均成立。通过换元，我们有

$$g_1(u, \boldsymbol{\theta}) = -2 \int_{-\pi/u}^{\infty} \cos(tu) g_2(t + \pi/u, \boldsymbol{\theta}) r(t + \pi/u)\, dt.$$

将此式与 (46) 取平均，可得

$$\begin{aligned} |g_1(u, \boldsymbol{\theta})| \leq & \int_{-\pi/u}^{0} g_2(t + \pi/u, \boldsymbol{\theta}) r(t + \pi/u)\, dt \\ & + \int_0^{\infty} |g_2(t, \boldsymbol{\theta}) r(t) - g_2(t + \pi/u, \boldsymbol{\theta}) r(t + \pi/u)|\, dt. \end{aligned}$$

利用 $r(\cdot)$ 根据 **(H2)** 有界且连续，以及 $g_2(\cdot)$ 根据 (47) 连续且有界，可知上述右端在 $u \to \infty$ 时关于 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 一致收敛于零。特别地，对所有 $\epsilon > 0$，存在 $N > 0$ 使得

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta,\, |u| > N} |g_1(u, \boldsymbol{\theta})| \leq \frac{\epsilon}{4}. \tag{48}$$

接下来，利用 (47) 可得

$$\begin{aligned} |g_1(u^{(1)}, \boldsymbol{\theta}^{(1)}) - g_1(u^{(2)}, \boldsymbol{\theta}^{(2)})| \leq & 2 \int_0^{M} |\cos(tu^{(1)}) g_2(t, \boldsymbol{\theta}^{(1)}) - \cos(tu^{(2)}) g_2(t, \boldsymbol{\theta}^{(2)})| r(t)\, dt \\ & + 4 \tilde{\tilde{\mathrm{C}}} \int_M^{\infty} e^{-Dt} r(t)\, dt. \end{aligned}$$

由于 $r(\cdot)$由（**H2**）有界，因此通过取足够大的 M，可以使右端的第二项任意小。利用余弦和 $g_2(\cdot)$的连续性，可以证明函数$(u,\ \boldsymbol{\theta}) \mapsto g_1(u,\ \boldsymbol{\theta})$是连续的。特别地，$g_1(\cdot)$在 $[-N, N] \times \Theta$上一致连续。利用紧性，可以证明存在 $\delta > 0$ 使得

$$|g_1(u, \boldsymbol{\theta}^{(1)}) - g_1(u, \boldsymbol{\theta}^{(2)})| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

对所有满足 $\|\boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(2)}\| \leq \delta$的 $u \in [-N, N]$ 和 $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$，$\boldsymbol{\theta}^{(2)} \in \Theta$ 均成立。结合（48），可知

$$|g_1(u, \boldsymbol{\theta}^{(1)}) - g_1(u, \boldsymbol{\theta}^{(2)})| \leq \epsilon \tag{49}$$

对所有满足 $\|\boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(2)}\| \leq \delta$ 的 $u \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$，$\boldsymbol{\theta}^{(2)} \in \Theta$。此外，$g_1(\cdot)$ 的连续性意味着映射

$$\boldsymbol{\theta} \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(u, \boldsymbol{\theta})}{1 + u^2}\, du \tag{50}$$

是连续的。容易看出，$h(\cdot)$ 是连续的（参见下文引理 6），且由于 Σ 是正定的，它与 0 保持正距离。利用这一点，将 (50) 和 (49) 代入 (44)，即可得到 (43)。此外，由于 $g(\cdot)$ 一致地与 0 和无穷大保持正距离，且对数函数连续，因此在以 $\log(g(\cdot))$ 替换 $g(\cdot)$ 后，(43) 仍成立；也就是说，对所有$\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$|\log(g(u, \boldsymbol{\theta}^{(1)})) - \log(g(u, \boldsymbol{\theta}^{(2)}))| \leq \epsilon \tag{51}$$

对所有满足 $\|\boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(2)}\| \leq \delta$ 的 $u \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$，$\boldsymbol{\theta}^{(2)} \in \Theta$。

A.3 偏导数

我们首先证明函数 $\boldsymbol{\theta} \mapsto g(u, \boldsymbol{\theta})$ 是无穷次可微的。由于 (44) 中的分母对所有 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 都为正，只需证明 (45) 和 (50) 中的函数关于 $\boldsymbol{\theta}$ 无穷次可微。

引理 6. 假设 ***(H1)-(H3)***。那么，函数 $(t, \boldsymbol{\theta}) \mapsto g_2(t, \boldsymbol{\theta})$ 无穷次可微，且其偏导数关于 $t \geq 0$ 指数快速衰减，并且该结论对 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 一致成立。

证明。 根据乘积求导的乘积法则，只需证明函数 $(t, \boldsymbol{\theta}) \mapsto e^{At}$ 和 $\boldsymbol{\theta} \mapsto \Sigma$ 无穷次可微，$(t, \boldsymbol{\theta}) \mapsto e^{At}$ 的偏导数关于 t 指数快速衰减且对 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 一致成立，并且 $\boldsymbol{\theta} \mapsto \Sigma$ 的偏导数一致有界。容易看出，$(t, \boldsymbol{\theta}) \mapsto e^{At}$ 无穷次可微。此外，利用 (39) 可以证明所需的指数衰减（注意，根据 **(H3)**，A 的范数及其偏导数关于 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 一致有界，并且对于每个固定的 $k \in \mathbb{N}_0$，$t^k e^{-Dt}$ 都呈指数衰减）。对于函数 $\boldsymbol{\theta} \mapsto \Sigma$，利用 (4)、$(t, \boldsymbol{\theta}) \mapsto e^{At}$ 的可微性及其偏导数的指数快速衰减，以及 (40) 和 (41)，即可得到所需条件。

□

特别地，取 $t = 0$，我们看到 $h(\cdot)$ 无限次可微，且其偏导数在 Θ中一致有界。利用引理 6、中值定理和控制收敛定理，我们得到函数 $\boldsymbol{\theta} \mapsto g_1(u, \boldsymbol{\theta})$ 也无限次可微。此外，该函数及其偏导数在 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 和 $u \in \mathbb{R}$中均一致有界。特别地，函数 $g_1(u, \boldsymbol{\theta})/(1 + u^2)$ 及其偏导数均以常数乘以 $1/(1+u^2)$ 为上界。利用

再次应用中值定理和控制收敛定理，我们得到式 (50) 中的函数无限次可微。这表明函数 $\boldsymbol{\theta} \mapsto g(u, \boldsymbol{\theta})$ 具有所需的可微性。此外，我们已在 A.2 节证明，$g(u, \boldsymbol{\theta})$ 与零和无穷大之间保持一致的正距离。由此可知，函数 $\boldsymbol{\theta} \mapsto \log(g(u, \boldsymbol{\theta}))$ 无限次可微，且其各阶导数的绝对值一致有界。这表明，借助中值定理和控制收敛定理，可以在积分号下对函数 $K(\cdot)$和 $K_n(\cdot)$求导。特别地，我们有

$$
\begin{aligned}
K^{(i)}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial K(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \log(g(u, \boldsymbol{\theta}))}{\partial \theta_i} \frac{\phi_Z(u, \boldsymbol{\theta}_0)}{1+u^2}\, du \text{ and} \\
K^{(i,j)}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial^2 K(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \log(g(u, \boldsymbol{\theta}))}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \frac{\phi_Z(u, \boldsymbol{\theta}_0)}{1+u^2}\, du,
\end{aligned}
$$

其中 θ_i 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的 i^{th} 分量，且 $i, \ j = 1, \ldots\ldots, \ p+q$。类似地，我们得到

$$
\begin{aligned}
\hat{K}_n^{(i)}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial \hat{K}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \log(g(u, \boldsymbol{\theta}))}{\partial \theta_i} \frac{I_{Z,n}(u)}{1+u^2}\, du \text{ and} \\
\hat{K}_n^{(i,j)}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial^2 \hat{K}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \log(g(u, \boldsymbol{\theta}))}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \frac{I_{Z,n}(u)}{1+u^2}\, du.
\end{aligned}
$$

类似地，可以求得更高阶偏导数。

B 矩与方差计算

本节计算$(U_j(k))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 的均值和协方差，以及 $\sqrt{n}J_n$的极限方差。

B.1 显式公式

我们首先计算 $(U_j(k))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 的均值和协方差。根据平稳性，只需确定对所有 $j, \ k, \ l \in \mathbb{N}_0$，**期望**$[U_0(k)]$ 和**期望**$[U_0(l)U_j(k)]$ 。以 τ 为条件，并利用 Y 和 τ 的独立性，我们得到

$$
\mathbf{E}[U_0(k)] = \mathbf{E}[\hat{G}_R(\tau_k)\gamma_Y(\tau_k)] = \begin{cases} \hat{G}_R(0)\gamma_Y(0) & \text{if } k = 0 \\ \int_0^\infty \hat{G}_R(s)\gamma_Y(s) f^{*k}(s)\, ds & \text{if } k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{52}
$$

我们现在转向该乘积的期望。我们由 (3) 以及 Brandes 和 Curato（2019）的引理 4.1 回忆到，对所有 $s, t, u \geq 0$

$$
\begin{aligned}
M(s,t,u) &\coloneqq \mathbf{E}[Y(0)Y(s)Y(s+t)Y(s+t+u)] \\
&= N(s,t,u) + \gamma_Y(s)\gamma_Y(u) + \gamma_Y(s+t)\gamma_Y(t+u) + \gamma_Y(s+t+u)\gamma_Y(t),
\end{aligned} \tag{53}
$$

其中我们用到 Y具有零均值，且 $N(s,t,u)$ 是 $Y(0)$、 $Y(s)$、 $Y(s+t)$ 与 $Y(s+t+u)$ 的 4^{th} 阶联合累积量，其由下式给出

$$N(s,t,u) = (\mathbf{E}[L^4(1)] - 3\sigma_L^4) \int_0^\infty \mathbf{b}^\top e^{Av} \mathbf{e}_p \mathbf{b}^\top e^{A(v+s)} \mathbf{e}_p \mathbf{b}^\top e^{A(v+s+t)} \mathbf{e}_p \mathbf{b}^\top e^{A(v+s+t+u)} \mathbf{e}_p \, dv.$$

现在，通过以 τ 为条件并利用 Y 和 τ 的独立性，我们有

$$\mathbf{E}[U_0(l)U_j(k)] = \mathbf{E}[\hat{G}_R(\tau_l)\hat{G}_R(\tau_{j+k} - \tau_j)\mathbf{E}[Y(0)Y(\tau_l)Y(\tau_j)Y(\tau_{j+k}) \,|\, \tau]],$$

其中 **期望**$[Y(0)Y(\tau_l)Y(\tau_j)Y(\tau_{j+k}) \,|\, \tau]$ 等于

$$\begin{cases} M(0,0,0) & \text{if } \mathcal{C}_1 := [j=k=l=0] \\ M(0,0,\tau_l) & \text{if } \mathcal{C}_2 := [j=k=0<l] \\ M(0,0,\tau_k) & \text{if } \mathcal{C}_3 := [j=l=0<k] \\ M(0,\tau_j,0) & \text{if } \mathcal{C}_4 := [k=l=0<j] \\ M(0,\tau_l,0) & \text{if } \mathcal{C}_5 := [j=0<k=l] \\ M(0,\tau_k,\tau_l-\tau_k) & \text{if } \mathcal{C}_6 := [j=0<k<l] \\ M(0,\tau_l,\tau_k-\tau_l) & \text{if } \mathcal{C}_7 := [j=0<l<k] \\ M(\tau_l,0,0) & \text{if } \mathcal{C}_8 := [k=0<j=l] \\ M(\tau_j,0,\tau_l-\tau_j) & \text{if } \mathcal{C}_9 := [k=0<j<l] \\ M(\tau_l,\tau_j-\tau_l,0) & \text{if } \mathcal{C}_{10} := [k=0<l<j] \\ M(0,\tau_j,\tau_{j+k}-\tau_j) & \text{if } \mathcal{C}_{11} := [j,k>0,\ l=0] \\ M(\tau_l,\tau_j-\tau_l,\tau_{j+k}-\tau_j) & \text{if } \mathcal{C}_{12} := [j,k>0,\ 0<l<j] \\ M(\tau_l,0,\tau_{l+k}-\tau_l) & \text{if } \mathcal{C}_{13} := [j,k>0,\ l=j] \\ M(\tau_j,\tau_l-\tau_j,\tau_{j+k}-\tau_l) & \text{if } \mathcal{C}_{14} := [j,k>0,\ j<l<j+k] \\ M(\tau_j,\tau_{j+k}-\tau_j,0) & \text{if } \mathcal{C}_{15} := [j,k>0,\ l=j+k] \\ M(\tau_j,\tau_{j+k}-\tau_j,\tau_l-\tau_{j+k}) & \text{if } \mathcal{C}_{16} := [j,k>0,\ l>j+k] \end{cases}$$

其中，记号 $\mathcal{C}_1$ 表示指标 $j,k,l \in \mathbb{N}_0$ 满足条件 $j=k=l=0$，其他情况也类似。因此，我们得到 **期望**$[U_0(l)U_j(k)]$ 等于

$$
\begin{cases}
\hat{G}_R^2(0) M(0,0,0) & \text{if } \mathcal{C}_1 \\
\hat{G}_R(0) \int \hat{G}_R(s) M(0,0,s)\, dF^{*l}(s) & \text{if } \mathcal{C}_2 \\
\hat{G}_R(0) \int \hat{G}_R(s) M(0,0,s)\, dF^{*k}(s) & \text{if } \mathcal{C}_3 \\
\hat{G}_R^2(0) \int M(0,s,0)\, dF^{*j}(s) & \text{if } \mathcal{C}_4 \\
\int \hat{G}_R^2(s) M(0,s,0)\, dF^{*l}(s) & \text{if } \mathcal{C}_5 \\
\int \hat{G}_R(s) \hat{G}_R(s+t) M(0,s,t)\, dF^{*k}(s) dF^{*(l-k)}(t) & \text{if } \mathcal{C}_6 \\
\int \hat{G}_R(s) \hat{G}_R(s+t) M(0,s,t)\, dF^{*l}(s) dF^{*(k-l)}(t) & \text{if } \mathcal{C}_7 \\
\hat{G}_R(0) \int \hat{G}_R(s) M(s,0,0)\, dF^{*l}(s) & \text{if } \mathcal{C}_8 \\
\hat{G}_R(0) \int \hat{G}_R(s+t) M(s,0,t)\, dF^{*j}(s) dF^{*(l-j)}(t) & \text{if } \mathcal{C}_9 \\
\hat{G}_R(0) \int \hat{G}_R(s) M(s,t,0)\, dF^{*l}(s) dF^{*(j-l)}(t) & \text{if } \mathcal{C}_{10} \\
\hat{G}_R(0) \int \hat{G}_R(t) M(0,s,t)\, dF^{*j}(s) dF^{*k}(t) & \text{if } \mathcal{C}_{11} \\
\int \hat{G}_R(s) \hat{G}_R(u) M(s,t,u)\, dF^{*l}(s) dF^{*(j-l)}(t) dF^{*k}(u) & \text{if } \mathcal{C}_{12} \\
\int \hat{G}_R(s) \hat{G}_R(t) M(s,0,t)\, dF^{*l}(s) dF^{*k}(t) & \text{if } \mathcal{C}_{13} \\
\int \hat{G}_R(s+t) \hat{G}_R(t+u) M(s,t,u)\, dF^{*j}(s) dF^{*(l-j)}(t) dF^{*(j+k-l)}(u) & \text{if } \mathcal{C}_{14} \\
\int \hat{G}_R(s+t) \hat{G}_R(t) M(s,t,0)\, dF^{*j}(s) dF^{*k}(t) & \text{if } \mathcal{C}_{15} \\
\int \hat{G}_R(s+t+u) \hat{G}_R(t) M(s,t,u)\, dF^{*j}(s) dF^{*k}(t) dF^{*(l-k-j)}(u) & \text{if } \mathcal{C}_{16}.
\end{cases} \tag{54}
$$

B.2 上界

我们使用附录 B.1 中的公式，得到 $(U_j(k))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 的均值和协方差上界。首先，利用 (12)、(52)、 G_R 的绝对值有界于 $\|G\|_{L^1}/(2\pi)$ 这一事实，以及引理 2，我们得到对所有 $k \in \mathbb{N}_0$

$$
|\mathbf{E}[U_0(k)]| \le \left(\frac{C\|G\|_{L^1}}{2\pi}\right)(\mathcal{L}(D))^k. \tag{55}
$$

接下来，我们利用（54）得到（$U_j(k)$)$_{j\in\mathbb{N}_0}$协方差的绝对上界。令 $M(s,\ t,\ u) := M(s,\ t,\ u) - \gamma_Y(s)\gamma_Y(u)$。注意到

$$
\mathbf{E}[U_0(l)U_j(k)] = \bar{T}_{j,k,l} + T_{j,k,l}, \tag{56}
$$

其中，项 $\bar{T}_{j,\ k,\ l}$（分别为 $T_{j,\ k,\ l}$）由（54）给出，其中将 $M(s,\ t,\ u)$ 替换为 $M(s,\ t,\ u)$（分别为 $\gamma_Y(s)\gamma_Y(u)$）。下面我们分别推导 $\bar{T}_{j,\ k,\ l}$ 和 $T_{j,\ k,\ l}$ 的绝对上界。利用算子范数的性质和（39），有

$$
|\mathbf{b}^\top e^{At}\mathbf{e}_p| \le \|e^{A^\top t}\mathbf{b}\| \le \tilde{C}e^{-Dt}\|\mathbf{b}\|
$$

对所有 $t \ge 0$。由此可得

$$
\frac{N(s,t,u)}{\mathbf{E}[L^4(1)] - 3\sigma_L^4} \le (\tilde{C}\|\mathbf{b}\|)^4 e^{-D(3s+2t+u)} \int_0^\infty e^{-4Dv}\, dv = \frac{(\tilde{C}\|\mathbf{b}\|)^4}{4D} e^{-D(3s+2t+u)}.
$$

利用上述不等式以及 (53) 中的引理 2，我们得到

$$|\bar{M}(s,t,u)| \le \frac{(\tilde{C}\|\mathbf{b}\|)^4(\mathbf{E}[L^4(1)] - 3\sigma_L^4)}{4D} e^{-D(3s+2t+u)} + 2C^2 e^{-D(s+2t+u)}.$$

因此，存在一个正常数 C，使得

$$|\bar{M}(s,t,u)| \le \bar{C} e^{-D(s+2t+u)} \tag{57}$$

对所有 $s,\ t,\ u \ge 0$。利用 (57) 和 $\mathcal{L}(2D) \le \mathcal{L}(D)$，可以证明

$$|\bar{T}_{j,k,l}| \le \left(\frac{\bar{C}\|G\|_{L^1}}{2\pi}\right)^2 \bar{\mathcal{T}}_{j,k,l}(D), \tag{58}$$

其中

$$\bar{\mathcal{T}}_{j,k,l}(D) := \begin{cases} (\mathcal{L}(D))^l & \text{if } \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{C}_5 \vee \mathcal{C}_8 \vee \mathcal{C}_9 \vee \mathcal{C}_{16} \\ (\mathcal{L}(D))^k & \text{if } \mathcal{C}_3 \vee \mathcal{C}_6 \vee \mathcal{C}_7 \\ (\mathcal{L}(D))^j & \text{if } \mathcal{C}_4 \vee \mathcal{C}_{10} \\ (\mathcal{L}(D))^{j+k} & \text{if } \mathcal{C}_{11} \vee \mathcal{C}_{12} \vee \mathcal{C}_{13} \vee \mathcal{C}_{14} \vee \mathcal{C}_{15}. \end{cases}$$

接下来，我们回顾 (56)，可知

$$\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)] = \bar{T}_{j,k,l} + T_{j,k,l} - \mathbf{E}[U_0(l)]\mathbf{E}[U_j(k)]. \tag{59}$$

利用 (52)，我们注意到

$$\mathbf{E}[U_0(l)]\mathbf{E}[U_j(k)] = T_{j,k,l}$$

只要条件 $\mathbf{C} := \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{C}_3 \vee \mathcal{C}_4 \vee \mathcal{C}_8 \vee \mathcal{C}_{10} \vee \mathcal{C}_{11} \vee \mathcal{C}_{12} \vee \mathcal{C}_{13}$ 成立。因此，在这种情况下，

$$\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)] = \bar{T}_{j,k,l}$$

并且上界 (58) 成立。

一般而言，我们可以通过分别推导 $T_{j,k,l}$ 和 **期望**$[U_0(l)]$**期望**$[U_j(k)]$ 的上界，得到 **期望**$[U_0(l)U_j(k)]$ 的一个上界。具体来说，引理 2 表明

$$|\gamma_Y(s)\gamma_Y(u)| \le C^2 e^{-D(s+u)} \tag{60}$$

对所有 $s, u \ge 0$ 均成立。因此

$$|T_{j,k,l}| \le \left(\frac{C\|G\|_{L^1}}{2\pi}\right)^2 \mathcal{T}_{j,k,l}(D),$$

其中

$$\mathcal{T}_{j,k,l}(D) := \begin{cases} (\mathcal{L}(D))^l & \text{if } [k=0] = \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{C}_4 \vee \mathcal{C}_8 \vee \mathcal{C}_9 \vee \mathcal{C}_{10} \\ (\mathcal{L}(D))^{|k-l|} & \text{if } [k>0,\ j=0] = \mathcal{C}_3 \vee \mathcal{C}_5 \vee \mathcal{C}_6 \vee \mathcal{C}_7 \\ (\mathcal{L}(D))^{k+l} & \text{if } [j,k>0,\ 0 \le l \le j] = \mathcal{C}_{11} \vee \mathcal{C}_{12} \vee \mathcal{C}_{13} \\ (\mathcal{L}(D))^{2j+k-l} & \text{if } [j,k>0,\ j < l \le j+k] = \mathcal{C}_{14} \vee \mathcal{C}_{15} \\ (\mathcal{L}(D))^{l-k} & \text{if } [j,k>0,\ l > j+k] = \mathcal{C}_{16}. \end{cases}$$

此外，(55) 表明

$$|\mathbf{E}[U_0(l)]\mathbf{E}[U_j(k)]| \le C_1(\mathcal{L}(D))^{k+l}, \tag{61}$$

其中 $C_1 := (C\|G\|_{L^1}/(2\pi))^2$。由于 $\mathcal{T}_{j,k,l}(D)$ 大于 $\bar{\mathcal{T}}_{j,k,l}(D)$ 和 $(\mathcal{L}(D))^{k+l}$，因此由 (59) 及上述上界可知

$$|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]| \le C_2\mathcal{T}_{j,k,l}(D) \tag{62}$$

对某个常数 C_2。

通过结合条件 **C** 成立时的 (58) 与条件 **C** 不成立时的 (62)，我们得出，对某个常数 C_3

$$|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]| \le C_3\mathcal{U}_{j,k,l}(D), \tag{63}$$

其中

$$\mathcal{U}_{j,k,l}(D) := \begin{cases} (\mathcal{L}(D))^l & \text{if } \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{C}_8 \vee \mathcal{C}_9 \\ (\mathcal{L}(D))^k & \text{if } \mathcal{C}_3 \\ (\mathcal{L}(D))^j & \text{if } \mathcal{C}_4 \vee \mathcal{C}_{10} \\ (\mathcal{L}(D))^{|k-l|} & \text{if } \mathcal{C}_5 \vee \mathcal{C}_6 \vee \mathcal{C}_7 \\ (\mathcal{L}(D))^{j+k} & \text{if } \mathcal{C}_{11} \vee \mathcal{C}_{12} \vee \mathcal{C}_{13} \\ (\mathcal{L}(D))^{2j+k-l} & \text{if } \mathcal{C}_{14} \vee \mathcal{C}_{15} \\ (\mathcal{L}(D))^{l-k} & \text{if } \mathcal{C}_{16}. \end{cases}$$

然而，当 $\mathcal{C}_5 \vee \mathcal{C}_6 \vee \mathcal{C}_7 \vee \mathcal{C}_{14} \vee \mathcal{C}_{15} \vee \mathcal{C}_{16}$ 成立时，我们需要更好的估计。对于条件 $\mathcal{C}_5 \vee \mathcal{C}_6 \vee \mathcal{C}_7$，利用 (59)，我们看到 (58) 与 (61) 给出了就我们的目的而言足够快的衰减速率。我们现在研究该项

$$T_{j,k,l} = \begin{cases} \gamma_Y^2(0)\int_0^\infty \hat{G}_R^2(s)f^{*l}(s)\,ds & \text{if } \mathcal{C}_5 \\ \gamma_Y(0)\int_0^\infty\int_0^\infty \hat{G}_R(s)\hat{G}_R(s+t)\gamma_Y(t)f^{*k}(s)f^{*(l-k)}(t)\,ds\,dt & \text{if } \mathcal{C}_6 \\ \gamma_Y(0)\int_0^\infty\int_0^\infty \hat{G}_R(s)\hat{G}_R(s+t)\gamma_Y(t)f^{*l}(s)f^{*(k-l)}(t)\,ds\,dt & \text{if } \mathcal{C}_7. \end{cases}$$

我们推导出

$$\sum_{l=1}^{\infty} T_{j,k,l} = \gamma_Y^2(0)\int_0^\infty \hat{G}_R^2(s)r(s)\,ds \qquad \text{if } \mathcal{C}_5 \tag{64}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty} T_{j,k,l} = \gamma_Y(0)\int_0^\infty\int_0^\infty \hat{G}_R(s)\hat{G}_R(s+t)\gamma_Y(t)r(s)r(t)\,ds\,dt \qquad \text{if } \mathcal{C}_6 \tag{65}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{\infty} T_{j,k,l} = \gamma_Y(0)\int_0^\infty\int_0^\infty \hat{G}_R(s)\hat{G}_R(s+t)\gamma_Y(t)r(s)r(t)\,ds\,dt \qquad \text{if } \mathcal{C}_7. \tag{66}$$

我们回顾，更新密度 $r(\cdot)$ 是有界的，因为 $f(\cdot)$ 依 **(H2)** 有界（参见 Alsmeyer (2012) 的定理 5.26）。由于 $\hat{} G_R(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$，且 $\gamma_Y(\cdot)$ 指数递减

由引理 2 可知其衰减很快，我们得出上述积分绝对收敛。现假设 $\mathcal{C}_{14} \vee \mathcal{C}_{15} \vee \mathcal{C}_{16}$ 成立。于是，(61) 给出了足够快的衰减速率。我们利用 (54) 研究项 **期望**$[U_0(l)U_j(k)]$ 。由 (57) 和 (60) 可知，对某个常数 C_4

$$|\bar{M}(s,t,u)| \leq C_4 e^{-D(s+u)} \tag{67}$$

对所有 $s,t,u \geq 0$。在 (54) 中使用 (67)，我们得到 $|$**期望**$[U_0(l)U_j(k)]|/C_4$ 的上界为

$$\begin{cases} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{G}_R(s+t)\hat{G}_R(t+u)e^{-D(s+u)} f^{*j}(s) f^{*(l-j)}(t) f^{*(j+k-l)}(u)\, ds\, dt\, du & \text{if } \mathcal{C}_{14} \\ \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{G}_R(s+t)\hat{G}_R(t)e^{-Ds} f^{*j}(s) f^{*k}(t)\, ds\, dt & \text{if } \mathcal{C}_{15} \\ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{G}_R(s+t+u)\hat{G}_R(t)e^{-D(s+u)} f^{*j}(s) f^{*k}(t) f^{*(l-k-j)}(u)\, ds\, dt\, du & \text{if } \mathcal{C}_{16}. \end{cases}$$

利用 $f(\cdot)$、$r(\cdot)$ 有界以及 $\hat{} G_R(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$，可以证明 t

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{j+k-1} |\mathbf{E}[U_0(l)U_j(k)]| < \infty \tag{68}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{E}[U_0(j+k)U_j(k)]| < \infty \text{ and} \tag{69}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=j+k+1}^{\infty} |\mathbf{E}[U_0(l)U_j(k)]| < \infty. \tag{70}$$

B.3 σ_J^2的有限性

我们利用附录 B.1 和 B.2 中的公式和上界，证明引理 5 中的极限方差 σ_J^2 是有限的。我们回顾 $\sigma_J^2 = \sigma_{J,\infty}^2$，其中 $\sigma_{J,\infty}^2$ 由取 $m = \infty$ 时的 (21) 给出，即

$$\begin{aligned} \sigma_J^2 =& \mathbf{E}[\bar{U}_0^2(0)] + 4\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_0(k)] + 2\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(0)] \\ &+4\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(k)] + 4\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(0)] + 8\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]. \end{aligned}$$

我们证明上述级数绝对收敛。我们从第二项开始，并考虑情形 $l = 0$。(63) 意味着

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_0(k)]| < \infty.$$

接下来，由（59）可得

$$|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]| \leq |\bar{T}_{j,k,l}| + |T_{j,k,l}| + |\mathbf{E}[U_0(l)]\mathbf{E}[U_j(k)]|.$$

将其与 $j=0$ 结合，（58）、（61）、（64）和（66）意味着

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_0(k)]| = \sum_{l=1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0^2(l)]| + 2\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_0(k)]| < \infty.$$

接下来考察第三项和第四项，由 (63) 可得

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(0)]| < \infty \text{ and } \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(k)]| < \infty.$$

现在考察第五项，并注意到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(0)]|$$

等于

$$\sum_{l=1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_l(0)]| + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j-1}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(0)]| + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(0)]|.$$

(63) 表明这些求和中的每一个都是有限的。最后，我们考虑

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]|.$$

我们将 按指标 l 将和拆分为 $\sum_{l=1}^{\infty} = \sum_{l=1}^{j} + \sum_{l=j+1}^{\infty}$。再次利用 (63)，我们看到 at

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j-1}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]| + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(j)\bar{U}_j(k)]| < \infty.$$

剩下的项为

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{\infty}|\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]|.$$

由于**期望**$[U_0(l)U_j(k)] =$ **期望**$[U_0(l)U_j(k)] -$**期望**$[U_0(l)]$**期望**$[U_0(k)]$ 并根据（61）

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{\infty}|\mathbf{E}[U_0(l)]\mathbf{E}[U_0(k)]| < \infty,$$

只需证明

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=j+1}^{\infty}|\mathbf{E}[U_0(l)U_j(k)]| < \infty.$$

现在，这由式（68）、（69）和（70）可得。

B.4 $\sqrt{n}J_n$的方差

在本节中，我们计算.....的方差

$$\sqrt{n}J_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=-(n-j)}^{n-j} U_j(|k|),$$

其中回顾一下，对于所有 $j,k\in\mathbb{N}_0$， $U_j(k) := U_j(k) - \mathbf{期望}[U_j(k)]$。利用 (13)，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[nJ_n] &= \mathbf{Var}\left[\sum_{j=1}^{n} S_j(n-j)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{E}[S_i^2(n-i)] + 2\sum_{j=1}^{n-i}\mathbf{E}[S_i(n-i)S_{i+j}(n-(i+j))]\right).\end{aligned}$$

由平稳性可知,

$$\mathbf{E}[S_i(n-i)S_{i+j}(n-(i+j))] = \mathbf{E}[S_0(n-i)S_j(n-(i+j))]$$

再次利用 (13)，我们得到这等于

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(0)] + 2\sum_{k=1}^{n-(i+j)}\mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(k)] \\ &+2\sum_{l=1}^{n-i}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(0)] + 4\sum_{l=1}^{n-i}\sum_{k=1}^{n-(i+j)}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)].\end{aligned} \tag{71}$$

特别地，我们有

$$\mathbf{E}[S_i^2(n-i)] = \mathbf{E}[S_0^2(n-i)] = \mathbf{E}[\bar{U}_0^2(0)] + 4\sum_{l=0}^{n-i}\sum_{k=1}^{n-i}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_0(k)].$$

我们推得**方差**$[nJ_n]$等于

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{E}[\bar{U}_0^2(0)] + 4\sum_{l=0}^{n-i}\sum_{k=1}^{n-i}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_0(k)] + 2\sum_{j=1}^{n-i}\left(\mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(0)]\right.\right. \\ &\left.\left.+2\sum_{k=1}^{n-(i+j)}\mathbf{E}[\bar{U}_0(0)\bar{U}_j(k)] + 2\sum_{l=1}^{n-i}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(0)] + 4\sum_{l=1}^{n-i}\sum_{k=1}^{n-(i+j)}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l)\bar{U}_j(k)]\right)\right).\end{aligned} \tag{72}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{Var}[\sqrt{n}J_n] = \sigma_{J,\infty}^2 = \sigma_J^2,$$

其中 $\sigma_{J,\infty}^2$ 由（21）给出。我们注意到，上述收敛性可由引理 5 推得，但上述计算是显式的。

B.5 协方差矩阵 Q

本节将显式计算协方差矩阵 Q。首先注意到，量 $J_n = J_n(G)$、$\sigma_J^2 = \sigma_J^2(G)$、$S_j(m) = S_j(m,\ G)$、$U_j(k) = U_j(k,\ G)$，以及 $\bar{U}_j(k) = \bar{U}_j(k,\ G)$ 都依赖于函数 $G \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$。在上一节中，我们已经计算了

$$\mathbf{Var}[nJ_n(G)] = \mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} S_j(n-j, G)\right)^2\right]$$

并证明

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Var}[\sqrt{n}J_n(G)] = \sigma_J^2(G).$$

对于 $s = 1, \ldots, p+q$，令 $\alpha_s \in \mathbb{R}$ 和 $G_s \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$。下面计算

$$\mathbf{Var}\left[nJ_n(\sum_{s=1}^{p+q} \alpha_s G_s)\right] = \sum_{s=1}^{p+q}\sum_{t=1}^{p+q} \alpha_s\alpha_t \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} S_i(n-i, G_s)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} S_j(n-j, G_t)\right)\right]$$

并确定 $\lim_{n\to\infty}$**方差**$[\sqrt{n}J_n(\sum_{s=1}^{p+q} \alpha_s G_s)]$。利用平稳性可知

$$\begin{aligned}
nQ_{s,t}(G_s, G_t, n) &\coloneqq \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} S_i(n-i, G_s)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} S_j(n-j, G_t)\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[S_0(n-i, G_s)S_0(n-i, G_t)] \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i} \mathbf{E}[S_0(n-i, G_s)S_j(n-(i+j), G_t)] \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-j} \mathbf{E}[S_i(n-(i+j), G_s)S_0(n-j, G_t)].
\end{aligned}$$

接下来，利用 (71) 可知，**期望**$[S_0(n-i,\ G_s)S_j(n-(i+j)\ G_t)]$ 等于

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[\bar{U}_0(0, G_s)\bar{U}_j(0, G_t)] + 2\sum_{k=1}^{n-(i+j)} \mathbf{E}[\bar{U}_0(0, G_s)\bar{U}_j(k, G_t)] \\
&+2\sum_{l=1}^{n-i} \mathbf{E}[\bar{U}_0(l, G_s)\bar{U}_j(0, G_t)] + 4\sum_{l=1}^{n-i}\sum_{k=1}^{n-(i+j)} \mathbf{E}[\bar{U}_0(l, G_s)\bar{U}_j(k, G_t)].
\end{aligned}$$

我们推得

$$
\begin{aligned}
nQ_{s,t}(G_s,G_t,n) = \sum_{i=1}^{n}\Bigg(& \mathbf{E}[\bar{U}_0(0,G_s)\bar{U}_0(0,G_t)] + 2\sum_{k=1}^{n-i}\mathbf{E}[\bar{U}_0(0,G_s)\bar{U}_0(k,G_t)] \\
& +2\sum_{l=1}^{n-i}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l,G_s)\bar{U}_0(0,G_t)] + 4\sum_{l=1}^{n-i}\sum_{k=1}^{n-i}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l,G_s)\bar{U}_0(k,G_t)] \\
+\sum_{j=1}^{n-i}\Bigg(& \mathbf{E}[\bar{U}_0(0,G_s)\bar{U}_j(0,G_t)] + 2\sum_{k=1}^{n-(i+j)}\mathbf{E}[\bar{U}_0(0,G_s)\bar{U}_j(k,G_t)] \\
& +2\sum_{l=1}^{n-i}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l,G_s)\bar{U}_j(0,G_t)] + 4\sum_{l=1}^{n-i}\sum_{k=1}^{n-(i+j)}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l,G_s)\bar{U}_j(k,G_t)]\Bigg) \\
+\sum_{i=1}^{n-j}\Bigg(& \mathbf{E}[\bar{U}_i(0,G_s)\bar{U}_0(0,G_t)] + 2\sum_{k=1}^{n-(i+j)}\mathbf{E}[\bar{U}_i(k,G_s)\bar{U}_0(0,G_t)] \\
& +2\sum_{l=1}^{n-j}\mathbf{E}[\bar{U}_i(0,G_s)\bar{U}_0(l,G_t)] + 4\sum_{l=1}^{n-j}\sum_{k=1}^{n-(i+j)}\mathbf{E}[\bar{U}_i(k,G_s)\bar{U}_0(l,G_t)]\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}
$$

在 $G_s = G_t = G$ 的特殊情况下，我们看到 $nQ_{s,t}(G,G,n)$ 等于 (72)。上述计算表明

$$
\mathbf{Var}\left[\sqrt{n}J_n(\sum_{s=1}^{p+q}\alpha_s G_s)\right] = \sum_{s=1}^{p+q}\sum_{t=1}^{p+q}\alpha_s\alpha_t Q_{s,t}(G_s,G_t,n)
$$

我们得出结论：

$$
\lim_{n\to\infty}\mathbf{Var}\left[\sqrt{n}J_n(\sum_{s=1}^{p+q}\alpha_s G_s)\right] = \sum_{s=1}^{p+q}\sum_{t=1}^{p+q}\alpha_s\alpha_t Q_{s,t}(G_s,G_t), \tag{73}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
Q_{s,t}(G_s,G_t) \coloneqq & \lim_{n\to\infty} Q_{s,t}(G_s,G_t,n) \\
=&\mathbf{E}[\bar{U}_0(0,G_s)\bar{U}_0(0,G_t)] + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_0(0,G_s)\bar{U}_0(k,G_t)] \\
&+2\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l,G_s)\bar{U}_0(0,G_t)] + 4\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l,G_s)\bar{U}_0(k,G_t)] \\
&+\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg(\mathbf{E}[\bar{U}_0(0,G_s)\bar{U}_j(0,G_t)] + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_0(0,G_s)\bar{U}_j(k,G_t)] \\
&\quad +2\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l,G_s)\bar{U}_j(0,G_t)] + 4\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_0(l,G_s)\bar{U}_j(k,G_t)]\Bigg) \\
&+\sum_{i=1}^{\infty}\Bigg(\mathbf{E}[\bar{U}_i(0,G_s)\bar{U}_0(0,G_t)] + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_i(k,G_s)\bar{U}_0(0,G_t)] \\
&\quad +2\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_i(0,G_s)\bar{U}_0(l,G_t)] + 4\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}[\bar{U}_i(k,G_s)\bar{U}_0(l,G_t)]\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}
\tag{74}
$$

在 $G_s = G_t = G$ 的特殊情况下，我们看到 $Q_{s,t}(G,G) = \sigma_J^2(G)$。最后，我们注意到

$$
\mathbf{E}[\bar{U}_0(0,G_s)\bar{U}_j(k,G_t)] = \mathbf{E}[U_0(0,G_s)U_j(k,G_t)] - \mathbf{E}[U_0(0,G_s)]\mathbf{E}[U_0(k,G_t)]
$$

利用 (52) 并对 (54) 稍作修改（考虑到 G_s 和 G_t 可能与 G 不同），即可显式计算所有 j, $k,l \in \mathbb{N}_0$。