arXiv:2603.06069v1 [math.DS] 6 Mar 2026

使用开覆盖定义全纯对应的拓扑压

Subith Gopinathan*

2026年3月9日

摘要

本文利用黎曼球面的开覆盖，定义了相对于全纯对应的连续函数的拓扑压。此外，我们证明了这种方法与现有的利用轨道的分离族和张成族概念定义压力的方法一致。

关键词: 全纯对应 全纯对应压力的开覆盖 全纯对应的熵

MSC 学科分类 37D35,37A35, 37F05

*印度科学教育与研究学院蒂鲁瓦南塔普兰分校（IISER-TVM），印度喀拉拉邦 Vithura，Maruthamala 邮局。邮政编码 695 551。电子邮件：subith21@iisertvm.ac.in，subithjimail@gmail.com

1 引言

热力学形式为理解动力系统的复杂性提供了一种强有力的方法。熵、压力、Ruelle 算子等概念在映射的情形下已得到了充分研究。在复动力系统中，全纯对应是有理映射的一种自然推广；因此，近年来，全纯对应的热力学性质逐渐成为一个研究主题。在 [3], 中，研究者借助分离轨道族引入了全纯对应的熵，这一概念推广了 Bowen 在映射情形下给出的概念 [6]。一些近期论文进一步探讨了这一主题的深层问题，包括 [2, 5, 4]。随后，在 [7], 中，作者引入了全纯对应下连续函数的拓扑压概念，并利用轨道的张成族和分离族对其进行定义。他们还为全纯对应建立了变分原理，在适当的空间中将压力与熵联系起来。此外，他们定义了全纯对应的 Ruelle 算子，并讨论了其谱性质与相关压力泛函之间的关系。在 [8], 中，研究重点是对一类测度的测度论熵进行分配，这为从另一种途径理解压力泛函铺平了道路。在同一篇论文中，作者给出了变分原理的一种等价表述，并从测度论角度阐明了 Ruelle 算子的收敛性。本文利用空间的开覆盖，研究黎曼球面上全纯对应下实值连续函数的拓扑压。此外，我们还得到了全纯对应熵的另一种公式，并证明该公式与相应概念的现有定义一致。

2 预备知识

定义 2.1 *Let $\hat{\mathbb{C}}$ denote the Riemann sphere. Then a holomorphic correspondence on $\hat{\mathbb{C}}$ is a formal linear combination of the form*

$$F = \sum_{1 \leqslant t \leqslant N} F_t, \tag{2.1}$$

where F_t's are irreducible complex-analytic sub-varieties (repeated according to multiplicity) of pure dimension 1 in $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ that satisfy the following conditions:

1. *For each F_t, the restrictions $\pi_1|_{F_t}$ and $\pi_2|_{F_t}$ are surjective;*
2. *For each x and $y \in \hat{\mathbb{C}}$ the sets*

$$\pi_2(\pi_1^{-1}(\{x\}) \cap F_t) \quad \text{and} \quad \pi_1(\pi_2^{-1}(\{y\}) \cap F_t)$$

are finite for every $1 \leqslant t \leqslant N$,

where π_i is the projection onto $\hat{\mathbb{C}}$ for $i = 1,2$.

由 [1], 可知，对应的复合是良定义的，因此我们可以讨论迭代所产生的轨道。

设对于 $1 \leqslant t \leqslant N$ 和一般的 $z \in \mathbb{C}$，记 $\delta_t(z) = \#\{w \in \mathbb{C} : (w, z) \in \Gamma_t\}$ 和 $\lambda_t(z) = \#\{w \in \mathbb{C} : (z, w) \in \Gamma_t\}$。现在，对于 $k \in \mathbb{Z}+$，令 $\mathcal{W}_k$ 表示由长度为 k 且元素取自 {1、2、.....、N}的所有序列构成的柱集。接着，对于给定的词 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1、.....、 a_k) \in \mathcal{W}_k$ 和点 $z_0 \in \mathbb{C}$，我们定义长度为 k 的可容许前向路径集合如下

$$\mathscr{P}_k^{\boldsymbol{\alpha}}(z_0) = \left\{ \left(z_0, z_{j_1}^{(1)}, \cdots, z_{j_k}^{(k)}; \alpha_1, \cdots, \alpha_k\right) : \left(z_{j_{r-1}}^{(r-1)}, z_{j_r}^{(r)}\right) \in \Gamma_{\alpha_r} \text{ where } z_{j_0}^{(0)} = z_0, \right.$$
$$\left. 1 \leqslant j_r \leqslant \lambda_{\alpha_r}\left(x_{j_{r-1}}^{(r-1)}\right) \text{ for } 1 \leqslant r \leqslant k \right\}.$$

由此，我们将由 F 生成的长度为 k 的全部允许的前向轨道定义为

$$\mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}}) = \bigcup_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{W}_k} \bigcup_{z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}} \mathcal{P}_k^{\boldsymbol{\alpha}}(z_0).$$

设 $\mathbf{X}_k^+(z_0; \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}$ 表示 $\mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}})$ 中的一般元素，其中 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 和 $\boldsymbol{j} = (j_1, \cdots, j_n)$。为 $\mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}})$ 赋予乘积度量后，我们可以讨论定义在紧空间 $\mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}})$ 上的以下连续函数。

$$\Pi_i : \mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}}) \to \widehat{\mathbb{C}} \text{ as } \Pi_i\left(\mathbf{X}_k^+(z_0; \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right) = z_{j_i}^{(i)} \text{ for } 0 \leqslant i \leqslant k$$

$$\text{proj}_i : \mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}}) \to \{1, 2, ...N\} \text{ as } \text{proj}_i\left(\mathbf{X}_k^+(z_0; \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right) = \alpha_i \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

在本文中，我们讨论全纯对应的热力学性质。记黎曼球面上的球面度量为 $d_{\widehat{\mathbb{C}}}$，下面我们介绍 $\mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}})$ 中的分离集和生成集的概念。

定义 2.2 *[7] Let F be a holomorphic correspondence defined on $\mathbb{C}$ as in Equation(2.1) and let $\mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}})$ denote the collection of all permissible forward orbits of length k generated by F. Given $\epsilon > 0$, a subset $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}})$ is called an (k, ϵ)-生成集 of $\mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}})$ if for every $\mathbf{X}_k^+(z_0; \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}} \in \mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}})$ there exists a point $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ such that $\mathbf{X}_k^+(w_0; \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{h}} \in \mathcal{V}$ and $d_{\widehat{\mathbb{C}}}\left(\Pi_i\left(\mathbf{X}_k^+(z_0; \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right), \Pi_i\left(\mathbf{X}_k^+(w_0; \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{h}}\right)\right) < \epsilon$ for all $0 \leqslant i \leqslant k$.*

定义 2。3 *[3] Let F be a holomorphic correspondence defined on $\mathbb{C}$ as in Equation(2.1) and let $\mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}})$ be the set of all permissible forward orbits of length k generated by F.Given $\epsilon > 0$, a subset $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}})$ is called (k, ϵ)-分离的 if for every pair of distinct pointsin $\mathcal{Y}$ say $\mathbf{X}_k^+(z_0; \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}$, $\mathbf{X}_k^+(w_0; \boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{h}}$, we have*

$$\textit{either} \quad d_{\widehat{\mathbb{C}}}\left(\Pi_i\left(\mathbf{X}_k^+(z_0; \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right), \Pi_i\left(\mathbf{X}_k^+(w_0; \boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{h}}\right)\right) > \epsilon \quad \textit{for some } 0 \leqslant i \leqslant k,$$
$$\textit{or} \quad \text{proj}_{i+1}\left(\mathbf{X}_k^+(z_0; \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right) \neq \text{proj}_{i+1}\left(\mathbf{X}_k^+(w_0; \boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{h}}\right) \quad \textit{for some } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

定义 2.2和 2.3 中提到的术语，是映射情形下类似概念的推广。利用这些信息，对于连续函数 $g \in \mathcal{C}\left(\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{R}\right)$以及给定的 $\epsilon > 0$，我们如下再介绍两个量：

$$\mathscr{R}_k^F(g,\epsilon) = \inf\left\{ \sum_{\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_j \in \mathcal{V}} \exp\left(\sum_{i=0}^{k-1} g\big(\Pi_i\big(\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_j\big)\big)\right) : \mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}}) \text{ is } (k,\epsilon)\text{-spanning} \right\}. \tag{2.2}$$

$$\mathscr{S}_k^F(g,\epsilon) = \sup\left\{ \sum_{\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_j \in \mathcal{Y}} \exp\left(\sum_{i=0}^{k-1} g\big(\Pi_i\big(\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_j\big)\big)\right) : \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}_k^F(\widehat{\mathbb{C}}) \text{ is } (k,\epsilon)\text{-separated} \right\}. \tag{2.3}$$

这有助于在全纯对应的背景下如下表述拓扑压的概念：

定理 2.4 *[7] Let F be a holomorphic correspondence defined on $\mathbb{C}$ as represented in Equation (2.1). Then, for any function $g \in \mathcal{C}(\mathbb{C},\mathbb{R})$, the topological pressure of g with respect to F is given by*

$$\Pr(g,F) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log \mathscr{S}_k^F(g,\epsilon)\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log \mathscr{R}_k^F(g,\epsilon)\right).$$

推论 2.5 *[7] Let F be a holomorphic correspondence defined on $\mathbb{C}$ as represented inEquation (2.1) then the topological entropy of the holomorphic correspondence F is givenby $h_{\text{top}}(F) = \Pr(0, F)$.*

在本文中，我们提出了一种定义压力泛函的替代方法。

3 全纯对应的开覆盖

设 $P = \{P_1, P_2, \cdots, P_s\}$ 和 $Q = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_{s'}\}$ 是 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\widehat{\mathsf{C}}\right)$ 的子集族。

我们定义

$$P \bigvee Q = \{P_i \cap Q_{i'} : \ P_i \in \mathcal{P} \text{ and } Q_{i'} \in \mathcal{Q} \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant i' \leqslant s'\}.$$

现在，设 $\mathcal{U}$ 是 C 的一个开覆盖，且 $g \in \mathcal{C}(\mathsf{C},\mathsf{R})$。于是我们定义，

$$\mathcal{M}_k^F(g,\mathcal{U}) = \inf_{\mathcal{C}} \left\{ \sum_{\gamma\in\mathcal{C}} \left(\inf_{\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\in\gamma} \left\{ \exp\left(\sum_{i=0}^{k-1} g\big(\Pi_i\big(\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\big)\big) \right) \right\} \right) \right\} \tag{3.1}$$

and

$$\mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U}) = \inf_{\mathcal{C}} \left\{ \sum_{\gamma\in\mathcal{C}} \left(\sup_{\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\in\gamma} \left\{ \exp\left(\sum_{i=0}^{k-1} g\big(\Pi_i\big(\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\big)\big) \right) \right\} \right) \right\} \tag{3.2}$$

其中 $\mathcal{C}$表示 $\bigvee_{i=0}^{k-1}\{\Pi_i^{-1}(\mathcal{U})\cap \mathrm{proj}_{i+1}^{-1}\{j\}\colon 1\leqslant j\leqslant N\}\bigvee \Pi_k^{-1}(\mathcal{U})$,中的一个有限子覆盖，同时适用于方程（3.1）和（3.2）。

回忆一下，正数 $\delta > 0$称为度量空间 $(X$的开覆盖 $\mathcal{G}$ 的勒贝格数，如果对每个点 $x\in X$，都存在一个集合 $G\in\mathcal{G}$ 使得$B(x,\delta)\subset G$，其中 $B(x,\delta)=\{y\in X\colon d(x,y)<\delta\}$ 是以 x 为中心、半径为δ的开球。

这里，我们陈述一个命题，该命题联系了公式（2.2）、（2.3）、（3.1）和（3.2）中定义的各个量。

命题 3.1 *(a) If $\mathcal{U}$ is an open cover of $\mathbb{C}$ with Lebesgue number δ, then for $g\in\mathcal{C}(\mathbb{C},\mathbb{R})$, we have $\mathcal{M}_k^F(g,\mathcal{U})\leqslant\mathscr{R}_k^F(g,\frac{\delta}{2})\leqslant\mathscr{S}_k^F(g,\frac{\delta}{2})$.*
(b) If $\epsilon>0$ and $\mathcal{Z}$ is an open cover of $\mathbf{C}$ with $diam(\mathcal{Z})\leqslant\epsilon$, then for $g\in\mathcal{C}(\mathbf{C},\mathbf{R})$, we have $\mathscr{R}_k^F(g,\epsilon)\leqslant\mathscr{S}_k^F(g,\epsilon)\leqslant\mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{Z})$.

证明：

(a) 设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个开覆盖。那么对于每个 $k\in\mathbb{Z}_+$，存在 $\mathcal{U}_k^F$，它是 $\mathcal{P}_k^F(\mathbf{C})$ 的一个开覆盖，由下式给出

$$\mathcal{U}_k^F = \bigvee_{i=0}^{k-1}\{\Pi_i^{-1}(\mathcal{U})\cap \mathrm{proj}_{i+1}^{-1}\{j\} : 1\leqslant j\leqslant N\}\bigvee \Pi_k^{-1}(\mathcal{U}).$$

由于 δ 是与开覆盖 $\mathcal{U}$对应的一个勒贝格数，对于每个 $z\in\mathbf{C}$，都存在 $U\in\mathcal{U}$，使得以 z 为中心、半径为 δ 的开球包含于 U中，即 $B(z,\ \delta)\subset U.$ 。我们声称 δ 也是与开覆盖 $\mathcal{U}_k^F$对应的一个勒贝格数。
设$\mathbf{X}_k^+(z_0;\ \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}=\left(z_0,\ z_{j_1}^{(1)},\ \cdots,\ z_{j_k}^{(k)};\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k\right)\in\mathcal{P}_k^F(\mathbf{C})$，则对于 $0\leqslant i\leqslant k$，有

$$\Pi_i\big(B(\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}},\delta)\big)\subset B(z_{j_i}^{(i)},\delta).$$

因此，存在 $U_i \in \mathcal{U}$使得 $\Pi_i\big(B(\mathbf{X}_k^+(z_0;\ \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}),\ \delta)\big) \subset U_i$，这意味着

es

$$B(\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}},\delta) \subset \Pi_i^{-1}(U_i),\ \text{for } 0 \leqslant i \leqslant k.$$

$_{k-1}$因此，对于 $\delta < 1$，存在 $U^F \in \bigvee \{\Pi_i^{-1}(\mathcal{U}) \cap \text{proj}_{i+1}^{-1}\{j\} : 1 \leqslant j \leqslant N\} \bigvee \Pi_k^{-1}(\mathcal{U})_{i=0}$，使得

$$B(\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}},\delta) \subset U^F.$$

因此，$\mathcal{P}_k^F(\hat{\mathbb{C}})$中的每个半径为 δ的球都包含在$\mathcal{U}_K^F$的某个元素中。因此，δ也是与覆盖 $\mathcal{U}_k^F$ 相关联的一个勒贝格数
假设 $\mathcal{V}$ 是 $(k,\ \frac{\delta}{2})$ -$\mathcal{P}_k^F(\hat{\mathbb{C}})$的一个生成集，那么我们可以写成

$$\mathcal{P}_k^F(\hat{\mathbb{C}}) = \bigcup_{\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}} \in \mathcal{V}} \overline{B\left(\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}, \frac{\delta}{2}\right)}.$$

由于 δ是与覆盖 $\mathcal{U}_k^F$相关联的一个勒贝格数，因此每个 $B\left(\mathbf{X}_k^+(z_0;\ \overline{\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}),\ \frac{\delta}{2}}\right)$都是某个 $\mathcal{U}_k^F$成员的子集。这就得到

$$\mathcal{M}_k^F(g,\mathcal{U}) \leqslant \mathscr{R}_k^F(g,\frac{\delta}{2}).$$

最后，从引理 3。4 的证明 [7], 可以看出，最大基数的 $(k,\ \frac{\delta}{2})$ 分离族同时也是一个 $(k,\ \frac{\delta}{2})$ 张成族，其张成空间为 $\mathcal{P}_k^F(\hat{\mathbb{C}})$，因此我们可以得出结论：

$$\mathcal{M}_k^F(f,\mathcal{U}) \leqslant \mathscr{R}_k^F(f,\frac{\delta}{2}) \leqslant \mathscr{S}_k^F(f,\frac{\delta}{2}).$$

(b) 设 $\mathcal{Y}$是 $(k,\ \epsilon)$ 分离子集，且包含于 $\mathcal{P}_k^F(\hat{\mathbb{C}})$。由于，$diam(\mathcal{Z}) < \epsilon$，根据相应 $\mathcal{Z}_k^F$的构造，我们可以看出 $diam(\mathcal{Z}_k^F) < \epsilon$。于是，$\mathcal{Z}_k^F$中没有任何一个包含 $\mathcal{Y}$的两个元素。因此，

$$\mathscr{S}_k^F(g,\epsilon) \leqslant \mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{Z}).$$

证毕。

•

命题 3.2 *Let $g \in C(\mathbb{C},\ \mathbb{R})$ and let $\mathcal{U}$ be an open cover of $\mathbb{C}$. Then*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U})$$

exists and equals to

$$\inf_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} \log \mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U}).$$

这里我们陈述一个有助于证明上述命题的引理。

引理 3。3 *[9] Let $(a_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of real numbers such that $a_{n+p} \leqslant a_n + a_p$ for alln, $p \geqslant 1$. Then the limit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ exists and $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}$.*

现在，我们给出命题 3.2 的证明。

证明： 要证明这个命题，只需证明

$$\mathcal{N}_{n+k}^{F}(g,\mathcal{U}) \leqslant \mathcal{N}_{n}^{F}(g,\mathcal{U}) \cdot \mathcal{N}_{k}^{F}(g,\mathcal{U}),$$

证明可由引理3.3得出。设 $\mathcal{O}$ 且设 $\mathcal{Y}$ 分别是空间的有限子覆盖

$$\left\{ \bigvee_{i=0}^{n-1} \{\Pi_i^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathrm{proj}_i^{-1}\{j\} : \ 1 \leqslant j \leqslant N\} \bigvee \Pi_n^{-1}(\mathcal{U}) \right\}$$

$$\text{and} \quad \left\{ \bigvee_{i=0}^{k-1} \{\Pi_i^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathrm{proj}_i^{-1}\{j\} : \ 1 \leqslant j \leqslant N\} \bigvee \Pi_k^{-1}(\mathcal{U}) \right\}.$$

现在，我们为 $O_i \in \mathcal{O}$ 和 $Y_h \in \mathcal{Y}$定义

$$O_i \star Y_h = \{(z_0, z_{j_1}^{(1)}, ...z_{j_n}^{(n)}, z_{j_{n+1}}^{(n+1)}, ..., z_{j_{k+n}}^{(k+n)} : \alpha_0, \alpha_1, ...\alpha_n, \alpha_{n+1}, ...\alpha_{k+n}) :$$
$$(z_0, z_{j_1}^{(1)}, ...z_{j_n}^{(n)} : \alpha_1, ...\alpha_n) \in O_i \ \text{ and } (z_{j_n}^{(n)}, z_{j_{n+1}}^{(n+1)}, ..., z_{j_{k+n}}^{(k+n)}; \alpha_{n+1}, ...\alpha_{k+n}) \in Y_h\},$$

需要注意的是，只有当 O_i 和 Y_h的相应轨道满足上述条件时，轨道族 $O_i \star Y_h$ 才是有效的。据此，我们记作

$$\mathcal{O} \bigstar \mathcal{Y} = \{O_i \star Y_h : O_i \in \mathcal{O} \text{ and } Y_h \in \mathcal{Y}\}.$$

那么，我们可以观察到 $\mathcal{O} \bigstar \mathcal{Y}$ 是一个有限子覆盖

$$\bigvee_{i=0}^{k+n-1} \{\Pi_i^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathrm{proj}_i^{-1}\{j\} : \ 1 \leqslant j \leqslant N\} \bigvee \Pi_{k+n}^{-1}(\mathcal{U}).$$

这反过来表明

$$\begin{aligned}
&\sum_{O_i \star Y_j \in \mathcal{O} \bigstar \mathcal{Y}} \left(\sup_{\substack{\mathbf{X}_{n+k}^{+}(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}} \\ \in O_i \star Y_j}} \exp\left(\sum_{r=0}^{n+k-1} g\big(\Pi_r\big(\mathbf{X}_{n+k}^{+}(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\big)\big) \right) \right) \\
&\leqslant \left(\sum_{O_i \in \mathcal{O}} \left(\sup_{\mathbf{X}_{n}^{+}(z_0;\boldsymbol{\alpha}')_{\boldsymbol{j}'} \in O_i} \exp\left(\sum_{r=0}^{n-1} g\big(\Pi_r\big(\mathbf{X}_{n}^{+}(z_0;\boldsymbol{\alpha}')_{\boldsymbol{j}'}\big)\big) \right) \right) \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{Y_j \in \mathcal{Y}} \left(\sup_{\mathbf{X}_{k}^{+}(z_n;\boldsymbol{\alpha}'')_{\boldsymbol{j}''} \in Y_{\boldsymbol{j}}} \exp\left(\sum_{r=0}^{k-1} g\big(\Pi_r\big(\mathbf{X}_{k}^{+}(z_n;\boldsymbol{\alpha}'')_{\boldsymbol{j}''}\big)\big) \right) \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中

$$\mathbf{X}_{n+k}^{+}(z_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}} = \left(z_0, z_{j_1}^{(1)}, ...z_{j_n}^{(n)}, z_{j_{n+1}}^{(n+1)}, ..., z_{j_{k+n}}^{(k+n)}; \alpha_0, \alpha_1, ...\alpha_n, \alpha_{n+1}, ...\alpha_{k+n}\right)$$
$$\mathbf{X}_{n}^{+}(z_0;\boldsymbol{\alpha}')_{\boldsymbol{j}'} = \left(z_0, z_{j_1}^{(1)}, ..., z_{j_n}^{(n)} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n\right), \text{and}$$
$$\mathbf{X}_{k}^{+}(z_n;\boldsymbol{\alpha}'')_{\boldsymbol{j}''} = \left(z_{j_n}^{(n)}, z_{j_{n+1}}^{(n+1)}, ..., z_{j_{k+n}}^{(k+n)}; \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{k+n}\right).$$

这进而得到 $\mathcal{N}_{n+k}^{F}(g,\ \mathcal{U}) \leqslant \mathcal{N}_{n}^{F}(g,\ \mathcal{U}) \cdot \mathcal{N}_{k}^{F}(g,\ \mathcal{U})$因此，证明完毕。 •

现在，我们转到本节的主定理。

定理 3。4 *Let F be a holomorphic correspondence on represented as in Equation $\mathbb{C}$ (2.1) and let $g \in \mathcal{C}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$. Then the topological pressure of g with respect to F satisfies*

$$\Pr(g,F) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{\mathcal{U}} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U}) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{\mathcal{U}} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathcal{M}_k^F(g,\mathcal{U}),$$

where the supremum is taken over all open covers $\mathcal{U}$ of C with 直径$(\mathcal{U}) < \delta$.

证明： 设 $\delta > 0$ 并设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个开覆盖，满足直径$(\mathcal{U}) < \delta$。根据命题3.1(b)，对每个 $k \geqslant 1$,

$$\mathscr{S}_k^F(g,\delta) \leqslant \mathcal{N}^F(g,\mathcal{U}).$$

这意味着,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathscr{S}_k^F(g,\delta) \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U}).$$

对所有满足直径$(\mathcal{U}) < \delta$ 的开覆盖 $\mathcal{U}$ 取上确界，然后令 $\delta \to 0$，得到

$$\Pr(g,F) \leqslant \lim_{\delta\to 0} \sup_{\mathcal{U}} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U}).$$

反过来，设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{C}$ 的任意开覆盖，并设 $\delta > 0$ 是与 $\mathcal{U}$相对应的勒贝格数。根据命题3.1(a)，对于每个 $k \geqslant 1$,

$$\mathcal{M}_k^F(g,\mathcal{U}) \leqslant \mathscr{S}_k^F\left(g, \frac{\delta}{2}\right).$$

现在，如果 $\tau := \sup\{|g(z) - g(w)| : d(z,\ w) \leqslant \mathrm{diam}(\mathcal{U}) < 1\}$，那么

对于两个长度为 k 的轨道，例如 $\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_j$ 和 $\mathbf{X}_k^+(w_0;\ \boldsymbol{\alpha})_h$，它们都落在相应 $\mathcal{U}_K^F$ 的有限子覆盖中的同一个集合内，我们有

$$\left|\sum_{r=0}^{k-1} g\big(\Pi_r(\mathbf{X}_k^+(z_0;\boldsymbol{\alpha})_j)\big) - \sum_{r=0}^{k-1} g\big(\Pi_r(\mathbf{X}_k^+(w_0;\boldsymbol{\alpha})_h)\big)\right| \leqslant k\tau.$$

代入适当的因子并取极限，可得:

$$\mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U}) \leqslant \exp(k\tau)\mathcal{M}_k^F(g,\mathcal{U}). \tag{3.4}$$

因此,

$$\sup_{\mathcal{U}} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U}) \leqslant \tau + \sup_{\mathcal{U}} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathcal{M}_k^F(g,\mathcal{U}) \leqslant \tau + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathscr{S}_k^F\left(g, \frac{\delta}{2}\right),$$

其中，上确界取遍所有满足 $\mathrm{diam}(\mathcal{U}) < \delta$ 的 C 的开覆盖 $\mathcal{U}$。由于 $\delta \to 0$,
我们得到 $\tau \to 0$，从而

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\mathcal{U}} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U}) \leqslant \Pr(g,F).$$

因此，我们得到

$$\Pr(g,F)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{\mathcal{U}}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U}) \tag{3.5}$$

现在，由方程（3.1）、（3.2）和（3.4）可得

$$\exp(-k\tau)\mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U})\leqslant\mathcal{M}_k^F(g,\mathcal{U})\leqslant\mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U})$$

这就得到，

$$-\tau+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U})\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\mathcal{M}_k^F(g,\mathcal{U})\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U})$$

然后，由夹逼定理和方程（3.5）可得

$$\Pr(g,F)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{\mathcal{U}}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\mathcal{N}_k^F(g,\mathcal{U})=\lim_{\delta\to 0}\sup_{\mathcal{U}}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\mathcal{M}_k^F(g,\mathcal{U}),$$

其中，上确界取遍 C 的所有开覆盖 $\mathcal{U}$，且其直径为$(\mathcal{U})<\delta$。 •

推论 3。5 *Let F be a holomorphic correspondence on $\mathbb{C}$ represented as in Equation (2.1) then the topological entropy of F denoted by $h_{\text{top}}(F)$ is given by*

$$h_{\text{top}}(F)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{\mathcal{U}}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\mathcal{N}_k^F(0,\mathcal{U})=\lim_{\delta\to 0}\sup_{\mathcal{U}}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\max\{\ \#\ \text{of a finite subcover of}\ \mathcal{U}_k^F\}$$

where the supremum is taken over all open covers $\mathcal{U}$ of C with 直径$(\mathcal{U})\leqslant\delta$.

致谢： 我谨向我的论文导师 Shrihari Sridharan 博士致以诚挚的谢意，感谢他就这一课题所进行的宝贵讨论。

参考文献

[1] Bharali, G. 和 Sridharan, S.，“$\mathbf{P}^1$ 上全纯对应的动力学：不变测度与正规集”，*Complex Var. Elliptic Equ.*，**61**，（2016），（1587-1613）。

[2] Bharali, G. 和 Sridharan, S.，“全纯对应的熵：精确计算与有理半群”，*Ann. Fenn. Math.*，**46**，第 2 期，（2021），（1135-1154）。

[3] Dinh, T.C.和 Sibony, N.，《亚纯对应的拓扑熵上界》，《以色列数学杂志》，**163**，（2008），（29-44）。

[4] Li, X.，Li, Z. 和 Zhang, Y.，《对应的热力学形式主义》,arXiv:2311.09397。

[5] Vivas, K. J.和 Sirvent, V. F., 《集值映射的度量熵》, 《离散连续动力系统*B*辑》, **27**, （2022年）, （6589-6604）。[6] Bowen, R., 《群自同态与齐性空间的熵》, 《美国数学会会刊》, **153**, （1971年）, （401-414）[7] Sridharan, S. 和 Subith, G. , 《全纯对应的 Ruelle 算子》《保形几何与动力系统》**29** （2025年）, （143–168）。[8] Gopinathan,S. 和 Sridharan, S. 《全纯对应的变分原理》, arXiv:2603.03786 [9] Walters, P., 《遍历理论导论》, *Springer*纽约, 《数学研究生教材》, **79**, （1982年）。