arXiv:2603.06076v1 [math.FA] 6 Mar 2026

某类多维变换下由不变测度产生的算子

OLEKSANDR V. MASLYUCHENKO、JANUSZ MORAWIEC 与 THOMAS Z ¨URCHER

Abstract. 我们研究一个与函数方程相关联的线性算子，该函数方程源于对多维变换下某类不变测度的研究。通过考察其迭代，我们在某函数类中导出了该函数方程的显式解公式，并证明了在一种多维变换下绝对连续不变测度的存在性结果；该变换可视为经典 p-进映射向高维的推广。

1. Introduction

动力系统理论是一个概念，它提供了一个统一的数学框架，用以理解系统如何随时间演化。它几乎适用于每一个科学领域，包括物理学、生物学、经济学和工程学（参见例如 [RH12, Nef13, JR15, Awr18, Kon23, Awr24, Wil24]）。

不变测度是一种在系统动力学作用下保持不变的概率测度。不变测度是描述轨道统计性质的重要工具，例如时间平均，而无需追踪每一条轨迹。它们是不变理论中的基础概念，有助于根据系统的混合行为和随机性对系统进行分类。在许多系统中，尤其是混沌系统，不变测度提供了一种分析几乎所有点相对于该测度的“典型”行为的方法。这带来了遍历定理和物理测度存在性等重要结果。正因如此，不变测度成为动力系统理论中备受关注的核心对象（参见，例如， [LM94, Zhi96, Che02, Dem03, Yar08, Cla20]）。

研究不变测度时，常会使用适当的算子，尤其是在研究绝对连续不变测度时（参见，例如，[LY73, Buz00, GB03, BG05, Ino12]）。这些测度尤为重要，因为它们描述了概率密度如何演化。

从纯数学的角度看，连续不变测度和奇异不变测度也很有趣。然而，与绝对连续的情形不同，目前还没有系统研究这类测度的通用方法。研究不变测度（包括连续和奇异不变测度）的有效方法之一，是将问题改写为单变量函数方程，并在所有概率分布函数构成的函数类中分析其解。尽管这种方法并非新方法（例如参见 [Mat85, Nik91]），据我们所知，它在文献中仍鲜有应用（参见 [MZ22, MS23]）。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：47A50；次要分类号：47A60、39B12、26A16。*Key words and phrases.* 线性算子；函数方程；Lipschitz 型函数；多维变换；平均梯度；不变测度。通讯作者：Janusz Morawiec。电子邮箱：janusz.morawiec@us.edu.pl。

二进变换是这样一种映射：通过求解*Matkowski–Weso-lowski* 问题，人们已获得一大类连续不变测度和奇异不变测度（参见 [MZ18, MZ21, MZ25]）。该问题由 Janusz Matkowski 于1985年提出（参见 [Mat85]）；随后，Jacek Weso-lowski 于2009年在第47届国际函数方程研讨会上独立地以一种等价形式提出了该问题（参见 [MZ18]）。该问题要求求出*Matkowski–Weso-lowski* 函数方程的非线性解

$$f(x) = f\left(\tfrac{x}{2}\right) - f(0) + f\left(\tfrac{x+1}{2}\right) - f\left(\tfrac{1}{2}\right) \tag{1}$$

在所有单调连续函数 $\mathcal{D}$ $f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$的类中。关于一维情形下 Matkowski–Weso-lowski 函数方程扩展形式的进一步结果，可见 [MZ19]。

由于迭代是求解单变量函数方程的基本技术，而迭代通常会出现在其解的公式中（参见[KCG90，第 0.3]节），因此将 *Matkowski–Weso-lowski 算子* $\mathbb{M}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 定义如下，与 Matkowski–Weso-lowski 函数方程联系起来是很自然的：

$$\mathbb{M}f(x) = f\left(\tfrac{x}{2}\right) - f(0) + f\left(\tfrac{x+1}{2}\right) - f\left(\tfrac{1}{2}\right). \tag{2}$$

在 [MZ24] 中，已使用该算子的对应形式来确定 p-进变换下所有不变测度的概率分布函数的一般公式。

本文旨在研究与某类多维变换相关的 Matkowski–Weso-lowski 函数方程的多维版本。本文的核心是分析由这些变换导出的相应多维 Matkowski–Weso-lowski 算子。此外，受不变测度研究的启发，本文最后给出一个结果，证明所研究变换类的绝对连续不变测度存在且唯一。

2. Preliminaries

我们首先明确本文中使用的主要假设和记号。

假设 $r, s \in \mathbb{N}$ 并设 $K = \{1, \dots, s\}$、$N = \{1, \dots, r\}$ 和 $L = K \times N$。

记 $V = \mathbb{R}^K$。对于任意 $x \in V^N$，我们使用以下双重记号：$x = (x_n)_{n\in N} = (x_l)_{l\in L}$，其中 $x_n = (x_{n,k})_{k\in K}$ 且 $x_l = x_{n,k}$，若 $l = (n,k)$，也就是说，我们将 V^N 与 $\mathbb{R}^L$ 等同。

我们固定一个集合 $D \subseteq V^N$，使得 $0 = (0, \dots, 0) \in D$。此外，我们固定一个可数集合 I（有限或无限），其中至少包含两个元素，以及一个集合 D上的自映射指标族 $\gamma = (\gamma^i)_{i\in I}$。

我们用 μ_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度；当维数由上下文确定时，我们简称为 μ。回顾一下，$\mathbb{R}^n$ 的勒贝格可测子集指标族 $(A^i)_{i\in I}$ 称为 μ-几乎不相交，如果对于 $i \neq j$，都有 $\mu(A^i \cap A^j) = 0$。给定 $\mathbb{R}^n$ 的一个 μ-几乎不相交子集指标族 $(A^i)_{i\in I}$，我们用 $\bigsqcup_{i\in I}^{\mu} A^i$ 表示其并集。

给定 $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$，我们记作 $A \overset{\mu}{=} B$（并称 $A = B$ μ-几乎处处），如果 $\mu(A \triangle B) = 0$，其中 $\triangle$ 表示集合的对称差算子。

我们用 $[x, y]$ 表示连接点 x、$y \in V$的线段。对于所有 $a = (a_n)_{n\in N} \in V^N$和 $b = (b_n)_{n\in N} \in V^N$，我们定义 $P(a, b) = \prod_{n\in N}[a_n, b_n]$。

拓扑空间 X 中所有博雷尔集的族记作 $\mathcal{B}(X)$。

此外，我们用 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数，用 $|S|$ 表示集合 S 的基数。

设 $M \subseteq N$。

我们用 $x|_M$ 表示 $x \in V^N$ 在 M 上的限制。因此，如果 $x = (x_n)_{n\in N} \in V^N$，那么 $x|_M = (x_n)_{n\in M} \in V^M$、$x|_{N\setminus M} = (x_n)_{n\in N\setminus M} \in V^{N\setminus M}$，并且 $x|_M \cup x|_{N\setminus M} = x$。

对于定义在 D 上且满足所有 $x \in V^M$ 的函数 f，我们使用以下记号

$$f_x(y) = f(x \cup y) \quad \text{for every } y \in V^{N\setminus M} \text{ such that } x \cup y \in D.$$

因此，函数 f_x 定义在集合 $D_x = \{y \in V^{N\setminus M} \text{ 上：} \ x \cup y \in D\}$。

若 $m \in N$，则对每个 $x \in V$，存在唯一的函数 $x{:}m \in V^{\{m\}}$，使其在 m 处取值为 x；形式上，$x{:}m = \{(m, x)\}$。在这种情况下，我们对所有 $x \in V$ 和 $y \in V^{N\setminus\{m\}}$ 定义

$$(x, y)_m = (x{:}m) \cup y,$$

也就是说，对任意 $z = (z_n)_{n\in N} \in V^N$，若 $z_m = x$ 且对任意 $n \in N \setminus \{m\}$ 都有 $z = (x, y)_m$，则成立 $z_n = y_n$。此外，对所有 $x \in V$、$y \in D_{x:m}$，以及定义在 D 上的函数 f，我们令

$$f_{x:m}(y) = f\big((x, y)_m\big);$$

为简便起见，我们用 $f(x, y)_m$ 代替 $f\big((x, y)_m\big)$。

给定所有 $A \subseteq V$ 和 $B \subseteq V^{N\setminus\{m\}}$，我们令

$$A \times_m B = \big\{(x, y)_m : x \in A, y \in B\big\}.$$

3. Multidimensional increment of functions

对所有 $x = (x_n)_{n\in N} \in V^N$ 和 $y = (y_n)_{n\in N} \in V^N$，我们定义

$$\Pi(x, y) = \prod_{n\in N} \{x_n, y_n\}.$$

注意，Π 是一个区间算子，它按照 [vdV93 第 I 章 §4]的意义，在 V^N 上生成一个凸结构。因此，我们采用 [vdV93]中的术语。特别地，如果对于所有 $x, y \in A$，$\Pi(x, y) \subseteq A$，则称集合 $A \subseteq V^N$ 为-凸。更一般地，若 Z 是一个集合，$\mathcal{P}(Z)$表示其幂集，且 $J\colon Z \times Z \to \mathcal{P}(Z)$是一个算子，那么如果对于所有 $x, y \in A$，$J(x, y) \subseteq A$，则称集合 $A \subseteq Z$ 为-凸。

此外，对于所有 $x = (x_n)_{n\in N} \in V^N$、$y = (y_n)_{n\in N} \in V^N$和 $M \subseteq N$，我们定义

$$\pi_M(x, y) = x|_M \cup y|_{N\setminus M},$$

也就是说，$\pi_M(x, y) = (\pi_{M,n}(x, y))_{n\in N}$，其中若 $n \in M$，则$\pi_{M,n}(x, y) = x_n$；若 $n \in N \setminus M$，则$\pi_{M,n}(x, y) = y_n$。因此，我们有

$$\Pi(x, y) = \{\pi_M(x, y) : M \subseteq N\}.$$

假设 $X \subseteq V^N$ 且令 $x, y \in X$ 满足 $\Pi(x, y) \subseteq X$。函数 f 的多维增量为：$X \to \mathbb{R}$ 在 (x, y) 处的数值

$$\square f(x, y) = \sum_{M\subseteq N} (-1)^{|M|} f\big(\pi_M(x, y)\big). \tag{3}$$

注意，在 X 为 Π-凸时，对于所有 $x, y \in X$，都有 $\Pi(x, y) \subseteq X$，因此任意函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 的多维增量在每个 $(x, y) \in X \times X$ 处都有定义。此外，对于 $r = 1$，有 $\square f(x, y) = f(y) - f(x)$，并且

因此，多维增量与一维增量重合。现在我们给出多维增量的一个等价公式，该公式允许采用类似于一维情形的归纳定义。

命题 3.1. 假设 $m \in N$，并令 $f\colon D \to \mathbb{R}$。则

$$\square f(x,y) = \square f_{y_m:m}\big(x|_{N\setminus\{m\}}, y|_{N\setminus\{m\}}\big) - \square f_{x_m:m}\big(x|_{N\setminus\{m\}}, y|_{N\setminus\{m\}}\big)$$

对所有满足 $\Pi(x,y) \subseteq D$ 的 $x = (x_n)_{n\in N} \in D$ 和 $y = (y_n)_{n\in N} \in D$。

证明。令 $N' = N \setminus \{m\}$。利用 (3)，得到

$$\begin{aligned}\square f(x,y) &= \sum_{M\subseteq N} (-1)^{|M|} f\big(\pi_M(x,y)\big)\\ &= \sum_{M\subseteq N'} (-1)^{|M|} f\big(\pi_M(x,y)\big) + \sum_{M\subseteq N'} (-1)^{|M\cup\{m\}|} f\big(\pi_{M\cup\{m\}}(x,y)\big)\\ &= \sum_{M\subseteq N'} (-1)^{|M|} f\big(\pi_M(x,y)\big) - \sum_{M\subseteq N'} (-1)^{|M|} f\big(\pi_{M\cup\{m\}}(x,y)\big).\end{aligned} \tag{4}$$

固定 $M \subseteq N'$。由于 $m \notin N'$，我们有

$$\pi_{M,m}(x,y) = y_m \quad \text{and} \quad \pi_{M\cup\{m\},m}(x,y) = x_m,$$

而令 $x' = x|_{N'}$ 和 $y' = y|_{N'}$，则对每个 $n \in N'$，我们有

$$\pi_{M,n}(x,y) = \pi_{M,n}(x',y') \quad \text{and} \quad \pi_{M\cup\{m\},n}(x,y) = \pi_{M\cup\{m\},n}(x',y').$$

因此，

$$\pi_M(x,y) = (y_m, \pi_M(x',y')|_{N'})_m \quad \text{and} \quad \pi_{M\cup\{m\}}(x,y) = (x_m, \pi_M(x',y')|_{N'})_m.$$

因此，回到 (4) 并再次使用 (3)，我们得到

$$\begin{aligned}\square f(x,y) &= \sum_{M\subseteq N'} (-1)^{|M|} f(y_m, \pi_M(x',y')|_{N'})_m - \sum_{M\subseteq N\setminus\{m\}} (-1)^{|M|} f(x_m, \pi_M(x',y')|_{N'})_m\\ &= \sum_{M\subseteq N'} (-1)^{|M|} f_{y_m:m}\big(\pi_M(x',y')\big) - \sum_{M\subseteq N'} (-1)^{|M|} f_{x_m:m}\big(\pi_M(x',y')\big)\\ &= \square f_{y_m:m}(x',y') - \square f_{x_m:m}(x',y'),\end{aligned}$$

至此证明完成。 □

4. 关于变量组的梯度

在本节中，我们假设集合 D 在 V^N 中是开集。我们还固定 $f\colon D \to \mathbb{R}$ 和 $M = \{m_1, \dots, m_p\} \subseteq N$，并假设 p 是正整数且 $m_1 < \cdots < m_p$。

对于任意 $l = (n,k) \in L$，我们将 f 在 $x \in D$ 处的第 l 阶偏导数记为 $\partial_l f(x)$。若对于所有 $x \in D$ 和 $l \in L$，第 l 阶偏导数 $\partial_l f(x)$ 都存在，则称 f 为分别可微。我们将 f 在 $x \in D$ 处的梯度记为

$$\nabla f(x) = \big(\partial_l f(x)\big)_{l\in L},$$

因此，对于每个 $u = (u_l)_{l\in L} \in V^N$，都有 $\nabla f(x)u = \sum_{l\in L} \partial_l f(x) u_l$。接下来，对于任意 $n \in N$，我们将 f 在 $x \in D$ 处的第 n阶偏梯度定义为

$$\nabla_n f(x) = \big(\partial_{(n,k)} f(x)\big)_{k\in K},$$

并令 $\nabla_n f(x)v = \sum_{k\in K} \partial_{(n,k)} f(x) v_k$对每个 $v = (v_k)_{k\in K} \in V$成立。

设 $\lambda=(\lambda_k)_{k\in K^M}\in\mathbb{R}^{K^M}$ 为一个指标族。对于任意 $u\in V^M$，我们定义

$$\lambda u^M=\sum_{k\in K^M}\lambda_k\odot_k^M(u),\quad \text{where } \odot_k^M(u)=\prod_{m\in M}u_{m,k_m}. \tag{5}$$

显然，λu^M是 V^M上的 $|M|$-线性泛函。

现在，对每个 $u\in V^M$，我们令 $\|u\|^M=\prod_{m\in M}\|u_m\|$。我们证明，柯西–布尼亚科夫斯基–施瓦茨不等式的下述类似形式成立：

$$\left|\lambda u^M\right|\le\|\lambda\|\cdot\|u\|^M. \tag{6}$$

首先注意到

$$\sum_{k\in K^M}\prod_{m\in M}u_{m,k_m}^2=\prod_{m\in M}\sum_{k\in K}u_{m,k}^2.$$

结合经典的柯西–布尼亚科夫斯基–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\left|\lambda u^M\right|^2&\le\sum_{k\in K^M}\lambda_k^2\sum_{k\in K^M}\left(\odot_k^M(u)\right)^2=\|\lambda\|^2\sum_{k\in K^M}\prod_{m\in M}u_{m,k_m}^2=\|\lambda\|^2\prod_{m\in M}\sum_{k\in K}u_{m,k}^2\\&=\|\lambda\|^2\prod_{m\in M}\|u_m\|^2=\|\lambda\|^2\left(\|u\|^M\right)^2.\end{aligned}$$

下面我们给出下一个定义。对于任意 $k=(k_m)_{m\in M}\in K^M$，令 $\widetilde{\partial}_k f=\partial_{(m_1,k_{m_1})}\cdots\partial_{(m_p,k_{m_p})}f$。然后，我们将 f在 $x\in D$处的 M-梯度 定义为

$$\nabla_M f(x)=\left(\widetilde{\partial}_k f(x)\right)_{k\in K^M}.$$

注意，利用（5）中所建立的记号，我们有

$$\nabla_M f(x)u^M=\sum_{k\in K^M}\widetilde{\partial}_k f(x)\odot_k^M(u)$$

对每个 $u\in V^M$。在情形 $s=1$下，将$(m_k,1)$与 m_k等同，我们有$\nabla_M f(x)=\partial_M f(p)=\partial_{m_1}\cdots\partial_{m_p}f(x)$以及 $\nabla_M f(x)u^M=\partial_M f(x)u_{m_1}\cdots u_{m_p}$对每个 $x\in D$。

5. Multidimensional analogue of Lipschitz functions

设 $D\subseteq V^N$为闭子集。我们称 $f\colon D\to\mathbb{R}$是C^N-函数，如果那里存在延拓$\widetilde{f}\colon V^N\to\mathbb{R}$（即 f的延拓），使得对每个 $M\subseteq N$，梯度 $\nabla_M\widetilde{f}$在 V^N的每一点存在，并且在 V^N上连续，即每个偏导数 $\partial_k f$对每个 $k\in K^M$都连续。

注意，$f\in C^r(V^N,\mathbb{R})$意味着 f是一个 C^N 函数；然而，反向的蕴含并不成立。还要注意，对于每个 $M\subseteq N$，梯度 $\nabla_M\widetilde{f}$可能取决于延拓 f。

可以证明，在 C^N 函数的定义中，我们只需将 f 延拓到 D的一个开超集。对于 $r=1$，这可由惠特尼延拓定理推出（见 [EG92，定理 6.5.1]）。

我们称 f 是 N维 ***Lipschitz*** 的，如果存在常数 $C\ge0$ 使得

$$|\square f(x,y)|\le C\|x-y\|^N\quad\text{for all } x,y\in X \text{ such that } \Pi(x,y)\subseteq D.$$

注意，在 $r=1$ 的情况下，N 维利普希茨函数类与通常的利普希茨函数类相同。还要注意，N 维利普希茨函数甚至未必连续。

现在我们证明以下形式的中值定理。

命题 5.1. 如果 $f\colon V^N \to \mathbb{R}$ 是一个 C^N-函数，那么对于所有 $a, b \in V^N$，存在 $c \in P(a,b)$ 使得 $\square f(a,b) = \nabla_N f(c)(b-a)^N$。

证明。我们先考虑 $r=1$ 的情形。定义函数 $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，使得 $g(t) = f(t(b-a)+a)$。于是，根据中值定理（也称为拉格朗日有限增量公式），存在 $\tau \in [0,1]$，使得 $g(1)-g(0) = g'(\tau)$。令 $c = \tau(b-a)+a$，我们看到 $c \in [a,b]$，于是

$$\square f(a,b) = f(b)-f(a) = g(1)-g(0) = g'(\tau) = \nabla f(c)(b-a) = \nabla_N f(c)(b-a)^N.$$

现在假设该命题的断言对每一个 $p \in \{1,\dots,r-1\}$ 以及集合 $N_p = \{1,\dots,p\} \subseteq N$ 成立。固定一个 C^N-函数 $f\colon V^N \to \mathbb{R}$，$a = (a_n)_{n\in N} \in V^N$ 以及 $b = (b_n)_{n\in N} \in V^N$。令 $N' = N_{r-1}$，$a' = (a_n)_{n\in N'} \in V^{N'}$，以及 $b' = (b_n)_{n\in N'} \in V^{N'}$。此外，我们容易得出，公式 $g = f_{b_r:r} - f_{a_r:r}$ 定义了一个 $\mathrm{C}^{N'}$-函数。于是，由命题 3.1与归纳假设，我们得到存在 $c' \in P(a',b')$ 使得

$$\begin{aligned}\square f(a,b) &= \square g(a',b') = \nabla_{N'} g(c')(b'-a')^{N'} \\ &= \nabla_{N'} f_{b_r:r}(c')(b'-a')^{N'} - \nabla_{N'} f_{a_r:r}(c')(b'-a')^{N'}.\end{aligned}$$

定义 $h\colon V \to \mathbb{R}$ 为 $h(x) = \nabla_{N'} f_{x:r}(c')(b'-a')^{N'}$，并注意到 h 是可微的，因为 f 是一个 C^N-函数。再次由归纳假设，我们得到存在 $c_r \in [a_r,b_r] \subseteq V$ 使得 $\square f(a,b) = \square h(a_r,b_r) = \nabla h(c_r)(b_r-a_r)$。最后，令 $c = (c_r,c')_r$，我们得到

$$\begin{aligned}\square f(a,b) = \nabla h(c_r)(b_r-a_r) &= \sum_{k\in K} \frac{\partial h}{\partial x_k}(c_r)(b_{r,k}-a_{r,k}) \\ &= \sum_{k\in K} \frac{\partial}{\partial x_k}\big(\nabla_{N'} f_{x:r}(c')(b'-a')^{N'}\big)\big|_{x=c_r}(b_{r,k}-a_{r,k}) \\ &= \sum_{k\in K} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{k'\in K^{N'}} \widetilde{\partial}_{k'} f(x,c')_r \odot_{k'}^{N'} (b'-a')\right)\Bigg|_{x=c_r}(b_{r,k}-a_{r,k}) \\ &= \sum_{k\in K}\sum_{k'\in K^{N'}} \partial_{(r,k)}\widetilde{\partial}_{k'} f(c)(b_{r,k}-a_{r,k}) \odot_{k'}^{N'} (b'-a') \\ &= \sum_{(k,k')_r \in K^N} \widetilde{\partial}_{(k,k')_r} f(c) \odot_{(k,k')_r}^{N} (b-a) = \sum_{\ell\in K^N} \widetilde{\partial}_{\ell} f(c) \odot_{\ell}^{N} (b-a) \\ &= \nabla_N f(c)(b-a)^N,\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

命题 5.2. 假设 $f\colon V^N \to \mathbb{R}$ 是一个 C^N-函数，且 $\nabla_N f$ 在 P-凸集 $X \subseteq V^N$ 上有界。那么，f 在 X 上是 N 维 *Lipschitz* 的。

证明. 由于 $\nabla_N f$ 在 X 上有界，数值 $C = \sup_{x\in X} \|\nabla_N f(x)\|$ 是有限的。固定 $a,b \in X$。命题 5.1 与 X 的 P-凸性共同表明，存在 $z \in P(a,b) \subseteq X$，使得 $\square f(a,b) = \nabla_N f(z)(b-a)^N$。最后，由 (6) 得到

$$\big|\square f(a,b)\big| = \big|\nabla_N f(z)(b-a)^N\big| \le \big\|\nabla_N f(z)\big\| \cdot \|b-a\|^N \le C\|b-a\|^N,$$

证明至此完成。 □

6. The gradient increment and the average gradient of multidimensional Lipschitz functions

假设 $f\colon V^N \to \mathbb{R}$ 是一个 C^N 函数。对于任意紧集 $T \subseteq V^N$，我们将 f 在 T 上的 N-梯度增量 定义为

$$\widetilde{\nabla}_N f(T) = \int_T \nabla_N f(x)\, d\mu(x) = \left(\int_T \widetilde{\partial}_k f(x)\, d\mu(x) \right)_{k \in K^N},$$

对于任意 $u \in V^N$，令

$$\widetilde{\nabla}_N f(T) u = \int_T \nabla_N f(x) u \, d\mu(x) = \sum_{k \in K^N} \odot_k^N (u) \int_T \widetilde{\partial}_k f(x)\, d\mu(x).$$

那么，假设 T 具有正的勒贝格测度，我们将平均N-梯度 f 在 T 上定义为

$$\overline{\nabla}_N f(T) = \tfrac{1}{\mu(T)} \widetilde{\nabla}_N f(T)$$

并且 $\nabla_N f(T)^u = {}_\mu{}^1{}_{(T)} \widetilde{\nabla}_N f(T) u$ 对每个 $u \in \mathbb{R}^K$ 均成立。

我们以一个结果结束本节，该结果展示了一个与微积分基本定理相仿的等式。由于本文不会用到这个结果，我们省略其证明。

事实 6.1. 假设 $f\colon V^N \to \mathbb{R}$ 是一个C^N-函数。设 $a = (a_n)_{n \in N} \in \mathbb{R}^N$ 和$b = (b_n)_{n \in N} \in \mathbb{R}^N$。若对每个 $n \in N$都有 $a_n \le b_n$，则

$$\widetilde{\nabla}_N f(P(a,b)) = \int_{P(a,b)} \partial_N f \, d\mu = \square f(a,b).$$

7. Multidimensional MW-operators

对于任意 $x \in D$，定义

$$\Gamma(x) = \{\gamma^i(x) : i \in I\} \quad \text{and} \quad \Gamma_\pi(x) = \bigcup_{i \in I} \Pi(\gamma^i(0), \gamma^i(x)).$$

定义 7.1（容许的）。若集合 $X \subseteq D$ 满足以下条件，则称其为容许的： $0 \in X$ 且$\Pi(\gamma^i(0)\ \gamma^i(x)) \subseteq X$，只要 $x \in X$ 且 $i \in I$。

对每个 $k \in \mathbb{N}_0$，令 $\Gamma_\pi^0(0) = \{0\}$ 且 $\Gamma_\pi^{k+1}(0) = \Gamma_\pi(\Gamma_\pi^k(0)) = \bigcup_{x \in \Gamma_\pi^k(0)} \Gamma_\pi(x)$。容易看出，按如下方式定义的集合$\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \Gamma_\pi^k(0)$$

是包含意义下的最小容许集。若族 γ 由连续函数组成，则容易看出，最小闭容许集是$\mathbf{S}$的闭包；将此集合记为$\mathbf{T}$，即

$$\mathbf{T} = \overline{\mathbf{S}}.$$

给定一个容许集 $X \subseteq D$，我们令

$$\mathcal{F}(X) = \Big\{ f \in \mathbb{R}^X : \sum_{i \in I} \square f\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big) \text{ converges for every } x \in X \Big\}.$$

容易看出， $\mathcal{F}(X)$ 是 $\mathbb{R}^X$ 的一个向量子空间。

定义 7.2（多维 MW 算子）。 线性算子 $\mathbb{M}\colon \mathcal{F}(X) \to \mathbb{R}^X$ 定义为

$$\mathbb{M}f(x) = \sum_{i\in I} \square f\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big) \quad \text{for every } x \in X$$

称为多维 *MW* 算子（简称*MW*算子）。

定义 7.2 中的 MW算子公式是用多维增量 $\square$ 表示的。接下来，我们给出该算子的一个等价公式；不过，为此我们需要引入一个额外的记号。

对于任意 $i \in I$、 $x \in X$ 和 $M \subseteq N$，我们定义

$$\gamma^i_M(x) = \pi_M\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big), \tag{7}$$

即 $\gamma^i_M(x) = \big(\gamma^i_{M,\,n}(x)\big)_{n\in N}$，其中

$$\gamma^i_{M,n}(x) = \pi_{M,n}\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big) = \begin{cases} \gamma^i_n(0), & \text{if } n \in M, \\ \gamma^i_n(x), & \text{if } n \in N \setminus M. \end{cases}$$

因此，利用 (3)，我们得到 MW算子的以下等价公式

$$\mathbb{M}f(x) = \sum_{i\in I} \sum_{M\subseteq N} (-1)^{|M|} f\big(\gamma^i_M(x)\big). \tag{8}$$

定义 7.3（多维 MW 函数方程）。 函数方程

$$f = \mathbb{M}f$$

称为多维 *MW* 函数方程 （简称*MW*方程）。假设未知函数 f 属于 $\mathcal{F}(X)$。

为了理解所引入的概念和采用的记号，我们给出四个例子。

例7.4。 假设 $r = s = 1$，即 $D = V^N = V = \mathbb{R}$。令 $I = \{0, 1\}$ 和

$$\gamma^i(x) = \tfrac{x+i}{2} \quad \text{for all } i \in I \text{ and } x \in \mathbb{R}.$$

显然，极小容许集**S**和**T** 由下式给出

$$\mathbf{S} = \Big\{ \tfrac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 \Big\} \quad \text{and} \quad \mathbf{T} = [0, 1].$$

通过选取容许集 $X =$**T**，我们得到MW方程(1)以及由(2)给出的相应MW算子 $\mathbb{M}$ 。

接下来的两个例子表明，二维MW算子在同一容许集上可能取不同形式，这取决于集合 N 和 K。

例7.5. 假设 $r = 1$ 与 $s = 2$，即 $D = V^N = V = \mathbb{R}^2$。设$I = \{0, 1\}^2$ 与

$$\gamma^{(i,j)}(x, y) = \big(\tfrac{x+i}{2}, \tfrac{y+j}{2}\big) \quad \text{for all } (i, j) \in I \text{ and } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

在此情形下，极小容许集**S** 和**T** 由下式给出

$$\mathbf{S} = \Big\{ \tfrac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 \Big\}^2 \quad \text{and} \quad \mathbf{T} = [0, 1]^2.$$

选择一个容许的集合 X 并使用（8），我们得出，在所考虑的情形下，二维MW算子具有如下形式

$$\mathbb{M}f(x, y) = \sum_{(i,j)\in I} \big[f\big(\tfrac{x+i}{2}, \tfrac{y+j}{2}\big) - f\big(\tfrac{i}{2}, \tfrac{j}{2}\big) \big]$$

对于每个（$x,\ y$) $\in X$。

例7.6。 假设 $r=2$ 和 $s=1$，即 $V=\mathbb{R}$ 和 $D=V^N=\mathbb{R}^2$。令 γ 与例7.5中的相同。那么，极小容许集 **S** 和 **T** 也与例7.5中的相同。选取一个容许集 X，并再次利用（8），我们推得在此情形下，二维MW算子具有如下形式

$$\mathbb{M}f(x,y)=\sum_{(i,j)\in I}\left[f\left(\tfrac{x+i}{2},\tfrac{y+j}{2}\right)-f\left(\tfrac{i}{2},\tfrac{y+j}{2}\right)-f\left(\tfrac{x+i}{2},\tfrac{j}{2}\right)+f\left(\tfrac{i}{2},\tfrac{j}{2}\right)\right]$$

对每个 (*x*, *y*) $\in X$。

第四个例子将前面的所有例子推广了。

例7.7。令 $I=\{0,1\}^L$ 和

$$\gamma^i(x)=\left(\tfrac{x_\ell+i_\ell}{2}\right)_{\ell\in L}\quad\text{for all } i\in I \text{ and } x\in\mathbb{R}^L.$$

现在，极小容许集 **S** 和**T** 由下式给出

$$\mathbf{S}=\left\{\tfrac{k}{2^n}:n\in\mathbb{N},k=0,1,\dots,2^n-1\right\}^L\quad\text{and}\quad\mathbf{T}=[0,1]^L.$$

将 (8) 应用于一个容许集 X，得到如下形式的多维 MW 算子

$$\mathbb{M}f(x)=\sum_{i\in I}\sum_{M\subseteq N}(-1)^{|M|}f\left(\left(\tfrac{i_\ell}{2}\right)_{\ell\in M\times K}\cup\left(\tfrac{x_\ell+i_\ell}{2}\right)_{\ell\in(N\setminus M)\times K}\right)$$

对每个 $x\in X$ 均成立。

我们在第 9 节中给出的主要结果（见定理 9.1）表明，函数 $f\in C^r([0,1]^L,\ \mathbb{R})$ 是与例7.7中的 MW 算子相对应的 MW 方程的解，当且仅当存在 $\lambda\in\mathbb{R}^{K^N}$ 使得

$$f(x)=\sum_{k\in K^N}\lambda_k\prod_{n\in N}x_{n,k_n}\quad\text{for every } x\in[0,1]^L.$$

特别是，对于例7.4至例7.6中列出的情形，我们得到：

(i) $f\in C^1([0,1],\ \mathbb{R})$ 是 MW 方程 (1) 的解（参见例7.4），当且仅当存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(x)=\lambda x\quad\text{for every } x\in[0,1],$$

(ii) $f\in C^1([0,1]^2,\ \mathbb{R})$ 是与例7.5中的 MW 算子相对应的 MW 方程的解，当且仅当存在 $\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(x_1,x_2)=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\quad\text{for every } (x,y)\in[0,1]^2,$$

(iii) $f\in C^2([0,1]^2,\ \mathbb{R})$ 是例7.6中 MW 算子所对应的 MW方程的解，当且仅当存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(x_1,x_2)=\lambda x_1x_2\quad\text{for every } (x,y)\in[0,1]^2.$$

众所周知，在 (i) 中，类 $C^1([0,1],\ \mathbb{R})$ 可以替换为绝对连续函数类（例如，参见 [实数集57，LP77]）。

8. Iterations of the MW-operators

在本节中，我们固定一个容许集 $X \subseteq D \subseteq V^N$。
对所有 $p \in \mathbb{N}$ 以及多重指标 $i = (i_1, \ldots\ldots, i_p) \in I^p$，我们按下式定义 $\gamma^i\colon\ D \to D$

$$\gamma^i = \gamma^{i_1} \circ \gamma^{i_2} \circ \cdots \circ \gamma^{i_p}.$$

照例，对任意 $p \in \mathbb{N}$，我们将MW算子 $\mathbb{M}$ 的第 p次迭代记为 $\mathbb{M}^p$。我们通过递归定义这些迭代的定义域，令 $\mathcal{F}^1(X) = \mathcal{F}(X)$以及

$$\mathcal{F}^p(X) = \big\{f \in \mathcal{F}(X) : \mathbb{M}^k f \in \mathcal{F}(X) \text{ for every } k \in \{1, \ldots, p-1\}\big\}$$

对于每个 $p \geq 2$。我们还设

$$\mathcal{F}^\infty(X) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{F}^p(X).$$

因此， $\mathcal{F}^p(X)$ 是 $\mathbb{M}^p$ 的定义域，而 $\mathcal{F}^\infty(X)$ 是所有迭代的公共定义域。显然， $\mathcal{F}^\infty(X)$ 是 $\mathbb{R}^X$ 的一个向量子空间，并且当 I 是有限集时， $\mathcal{F}^\infty(X) = \mathcal{F}(X) = \mathbb{R}^X$。

命题 8.1. 假设对于任意 $i \in I$，函数 γ^i 具有如下形式

$$\gamma^i(x) = \big(\gamma^i_n(x_n)\big)_{n\in N} \quad \textit{for every } x = (x_n)_{n\in N} \in D,$$

其中 $\gamma^i_n\colon\ D_n \to D_n$ 且 $D_n = \{x_n \in V\colon\ x \in D\}$ 对每个 $n \in N$ 都成立。那么对于所有 $p \in \mathbb{N}$ 和 $f \in \mathcal{F}^p(X)$，有

$$\mathbb{M}^p f(x) = \sum_{i\in I^p} \Box f\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big),$$

或者等价地，将 (7) 中给出的 γ^i_M 的定义扩展到所有 $i \in I^p$、 $x \in X$ 和 $M \subseteq N$，

$$\mathbb{M}^p f(x) = \sum_{i\in I^p} \sum_{M\subseteq N} (-1)^{|M|} f\big(\gamma^i_M(x)\big). \tag{9}$$

证明。 我们对 p 使用归纳法来证明 (9)。当 $p = 1$ 时，(9) 化为 (8)。固定 $p \in \mathbb{N}$，并假设对于每个 $f \in \mathcal{F}^p(X)$，(9) 都成立。

我们固定 $f \in \mathcal{F}^{p+1}(X)$ 与 $x \in X$。则 $\mathbb{M}f \in \mathcal{F}^p(X)$。令

$$\Sigma^{i,j}_M(x) = \sum_{L\subseteq N} (-1)^{|L|} f\big(\gamma^i_M(\gamma^j_L(x))\big)$$

对于所有的 $i \in I$、 $j \in I^p$ 和 $M \subseteq N$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}^{p+1} f(x) = \mathbb{M}^p\big(\mathbb{M}f\big)(x) &= \sum_{j\in I^p} \sum_{L\subseteq N} (-1)^{|L|} \mathbb{M}f\big(\gamma^j_L(x)\big) \\
&= \sum_{j\in I^p} \sum_{L\subseteq N} (-1)^{|L|} \sum_{i\in I} \sum_{M\subseteq N} (-1)^{|M|} f\big(\gamma^i_M(\gamma^j_L(x))\big) \\
&= \sum_{j\in I^p} \sum_{i\in I} \sum_{M\subseteq N} (-1)^{|M|} \Sigma^{i,j}_M(x).
\end{aligned} \tag{10}$$

设 $M \subseteq N$ 和 $L = L' \cup L''$ 满足 $L' \subseteq M$ 和 $L'' \subseteq N \setminus M$。则

$$\begin{aligned}\gamma^i_{M,n}(\gamma^j_L(x)) &= \begin{cases}\gamma^i_n(0), & \text{if } n \in M,\\ \gamma^i_n\big(\gamma^j_{L,n}(x_n)\big), & \text{if } n \in N \setminus M\end{cases}\\ &= \begin{cases}\gamma^i_n(0), & \text{if } n \in M,\\ \gamma^i_n\big(\gamma^j_n(0)\big), & \text{if } n \in L'',\\ \gamma^i_n\big(\gamma^j_n(x_n)\big), & \text{if } n \in (N \setminus M) \setminus L''.\end{cases}\end{aligned} \tag{11}$$

因此，$\gamma^i_M\big(\gamma^j_L(x)\big)$ 不依赖于 L' 和 $\gamma^i_M\big(\gamma^j_L(x)\big) = \gamma^i_M\big(\gamma^j_{L''}(x)\big)$。因此，

$$\begin{aligned}\Sigma^{i,j}_M(x) &= \sum_{L' \subseteq M} (-1)^{|L'|} \sum_{L'' \subseteq N \setminus M} (-1)^{|L''|} f\big(\gamma^i_M(\gamma^j_{L' \cup L''}(x))\big)\\ &= \sum_{L' \subseteq M} (-1)^{|L'|} \sum_{L'' \subseteq N \setminus M} (-1)^{|L''|} f\big(\gamma^i_M(\gamma^j_{L''}(x))\big).\end{aligned} \tag{12}$$

现在注意到

$$\sum_{L' \subseteq M} (-1)^{|L'|} = \begin{cases}0, & \text{if } M \neq \emptyset,\\ 1, & \text{if } M = \emptyset.\end{cases} \tag{13}$$

对于任意 $i \in I$和 $j = (j_k)_{k=1}^p \in I^p$，令 $i \smile j = (i, j_1, \dots, j_p) \in I^{p+1}$。应用（11）式，得到

$$\gamma^i_{\emptyset,n}(\gamma^j_L(x)) = \begin{cases}\gamma^i_n\big(\gamma^j_n(0)\big), & \text{if } n \in L,\\ \gamma^i_n\big(\gamma^j_n(x_n)\big), & \text{if } n \in N \setminus L\end{cases} = \gamma^{i \smile j}_{L,n}(x_n)$$

对每个 $n \in N$均成立，因此 $\gamma^i_\emptyset(\gamma^j_L(x)) = \gamma^{i \smile j}_L(x)$。结合（13）式，我们可以继续（12）式中的计算，得到

$$\Sigma^{i,j}_M(x) = \begin{cases}0, & \text{if } M \neq \emptyset,\\ \sum_{L \subseteq N} (-1)^{|L|} f\big(\gamma^{i \smile j}_L(x)\big) & \text{if } M = \emptyset.\end{cases}$$

最后，回到（10）式，并将 $i \smile j$ 替换为 ℓ，我们得出

$$\begin{aligned}\mathbb{M}^{p+1} f(x) &= \sum_{i \in I, j \in I^p} \Sigma^{i,j}_\emptyset(x) = \sum_{i \in I, j \in I^p} \sum_{L \subseteq N} (-1)^{|L|} f\big(\gamma^{i \smile j}_L(x)\big)\\ &= \sum_{\ell \in I^{p+1}} \sum_{L \subseteq N} (-1)^{|L|} f\big(\gamma^\ell_L(x)\big),\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

9. The case of affine functions

从现在起，我们假设 $D = V^N$ 以及以下假设：

(H$_1$) 对于每个 $i \in I$，存在 $\alpha^i = (\alpha^i_n)_{n \in N} \in (0, 1)^N$ 和 $a^i = (a^i_n)_{n \in N} \in V^N$，使得 $q = \sup_{i \in I,\ n \in N} \alpha^i_n < 1$ 且 γ^i 具有如下形式

$$\gamma^i(x) = \big(\gamma^i_n(x_n)\big)_{n \in N} = \big(\alpha^i_n x_n + a^i_n\big)_{n \in N} \quad \text{for every } x = (x_n)_{n \in N} \in V^N.$$

(H$_2$) 存在一个紧可容许集 $T \subseteq V^N$，满足 $\mu(T) > 0$，使得

$$T \overset{\mu}{=} \bigsqcup_{i \in I}^{\mu} \gamma^i(T) \quad \text{and} \quad T = \overline{\bigcup_{i \in I} \gamma^i(T)}.$$

对于任意 $i \in I$，我们定义

$$\beta^i = \prod_{n \in N} \alpha_n^i$$

并注意到 $\mu(\gamma^i(T)) = \beta^i \mu(T)$。于是，由 (H_2)，我们得到

$$\mu(T) = \mu\left(\bigsqcup_{i \in I}^{\mu} \gamma^i(T)\right) = \sum_{i \in I} \mu(\gamma^i(T)) = \sum_{i \in I} \beta^i \mu(T) = \mu(T) \sum_{i \in I} \beta^i.$$

因此，

$$\sum_{i \in I} \beta^i = 1. \tag{14}$$

给定函数 $g\colon D \to \mathbb{R}^N$ 和 $\delta > 0$，我们定义

$$\omega_T(g, \delta) = \sup\{\|g(x) - g(y)\| : x \in T, y \in D \text{ such that } \|x - y\| < \delta\}.$$

这一概念与连续模密切相关。不难证明，若 g 在紧集 T 的每一点都连续，则 $\omega_T(g, \delta) \to 0$ 当 $\delta \to 0$。

给定一个 C^N-函数 $\widetilde{f}\colon V^N \to \mathbb{R}$，我们定义算子 $\mathbb{L}$ 如下：

$$\mathbb{L}\widetilde{f}(x) = \overline{\nabla}_N \widetilde{f}(T) x^N \quad \text{for every } x \in V^N.$$

现在可以陈述本文的主要结果了。

定理 9.1. 假设 (H_1) 和 (H_2) 成立。设 $X \subseteq V^N$ 为一个容许集，$f\colon X \to \mathbb{R}$ 为一个 C^N-函数，且 $\widetilde{f}\colon V^N \to \mathbb{R}$ 为它的一个 C^N-延拓。那么：

(i) T 是最小闭容许集，即 $T = \mathbf{T}$；(ii) $\mathcal{F}^\infty(X)$ 包含每个在 X 的任一紧子集上均为 N-维 *Lipschitz* 的函数，特别是 $f \in \mathcal{F}^\infty(X)$；$(iii)$ $\lim_{p\to\infty} \mathbb{M}^p f(x) = \mathbb{L}f(x)$ 对每个 $x \in X$ 都成立；此外，若 X 是紧致的，则收敛是一致的；(iv) $\mathbb{M}f = f$ 当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{R}^{K^N}$ 使得

$$f(x) = \lambda x^N = \sum_{k \in K^N} \lambda_k \odot_k^N (x) \quad \textit{for every } x \in X,$$

也就是说，f 是一个 r-线性泛函。

证明。我们先介绍一些记号和显而易见的观察结果。

固定 $p \in \mathbb{N}$，并令 $\delta = \operatorname{diam} T$。与本节开头所述的情形不同，我们考虑多重指标 $i = (i_k)_{k=1}^p \in I^p$。于是，对任意 $n \in N$，$\gamma_n^i = \gamma_n^{i_1} \circ \gamma_n^{i_2} \circ \cdots \circ \gamma_n^{i_p}$ 是一个仿射函数，使得 $\gamma_n^i(x) = \alpha_n^i x + a_n^i$ 对每个 $x \in V$ 都成立，其中 $a_n^i = \gamma_n^i(0)$ 且 $\alpha_n^i = \prod_{k=1}^p \alpha_n^{i_k}$。对于空多重指标 $\varnothing \in I^0$，我们令 $\alpha_n^\varnothing = 1$、$a_n^\varnothing = 0$，并且对每个 $x \in V$，都有 $\gamma_n^\varnothing(x) = x$。

对于任意 $i = (i_k)_{k=1}^p \in I^p$，我们令 $\gamma^i = (\gamma_n^i)_{n \in N}$、$T^i = \gamma^i(T)$、$a^i = (a_n^i)_{n \in N}$ 以及 $\beta^i = \prod_{n \in N} \alpha_n^i$。因此，$\mu(T^i) = \mu(T)\beta^i$，且 $\beta^i = \prod_{k=1}^p \beta^{i_k}$。所以，利用（14），我们得到

$$\sum_{i \in I^p} \beta^i = \prod_{k=1}^p \sum_{i_k \in I} \beta^{i_k} = 1. \tag{15}$$

利用归纳法并使用（H_2），我们得出

$$T \overset{\mu}{=} \bigsqcup_{i\in I^p}^{\mu} T^i \quad \text{and} \quad T = \overline{\bigcup_{i\in I^p} T^i}. \tag{16}$$

现在注意到 (H_1) 蕴含 $0 \le \sup_{i\in I^p,\ n\in N} \alpha_n^i \le q^p$。特别地，$\gamma^i$ 是一个q^p-利普希茨函数。于是 $\operatorname{diam} T^i \le q^p \operatorname{diam} T = q^p\delta$，因此

$$\sup_{i\in I^p} \operatorname{diam} T^i \le q^p\delta. \tag{17}$$

我们先证明 (i)。

注意，对于任意 $p\in\mathbb{N}_0$，有 $a^i = \gamma^i(0) \in \gamma^i(T) = T^i$，且 $a^i \in \Gamma_\pi^p(0) \subseteq \mathbf{S}$ $i\in I^p$（回忆一下，对于 $p=0$，$a_n^{\varnothing}=0$）。因此，由 (16) 和 (17) 可得

$$T = \overline{\left\{a^i : i \in \bigcup_{p=0}^{\infty} I^p\right\}} \subseteq \overline{\mathbf{S}} = \mathbf{T}.$$

现在我们转而证明 (ii)。

设 $g\colon X\to\mathbb{R}$ 在 X 的每个紧子集上都是 N 维利普希茨函数。固定 $x\in X$。取某个 $a=(a_\ell)_{\ell\in L}\in V^N$ 和 $b=(b_\ell)_{\ell\in L}\in V^N$，使得$T\cup(T+x)\subseteq P(a,\ b)$，且对每个 $\ell\in L$，都有 $a_\ell<b_\ell$。令 $X_0 = X\cap P(a,\ b)$。由于 X_0 是紧致的，我们得出 g 在 X_0 上是 N 维利普希茨函数，其常数为 $C\ge 0$。

注意到对所有 $i\in I^p$ 和 $n\in N$，我们有

$$\gamma^i(0) = a^i \in T \quad \text{and} \quad \gamma_n^i(x_n) = a_n^i + \alpha_n^i x_n \in [a_n^i, a_n^i + x_n],$$

因为 $0<\alpha_n^i<1$。特别地，$\gamma^i(0)\ \gamma^i(x) \in T\cup(T+x) \subseteq P(a,b)$。由于 X 是容许的，集合 $\Pi\big(\gamma^i(0)\ \gamma^i(x)\big)$ 包含于 X，因而也包含于 X_0。因此，利用(15)，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I^p} \left|\square g\big(\gamma^i(0),\gamma^i(x)\big)\right| &\le \sum_{i\in I^p} C \prod_{n\in N} \left\|\gamma_n^i(x_n) - \gamma_n^i(0)\right\| \\ &= C\sum_{i\in I^p}\prod_{n\in N} \alpha_n^i \|x_n\| = C\sum_{i\in I^p} \beta^i \|x\|^N = C\|x\|^N < \infty.\end{aligned}$$

现在考虑到命题 8.1，我们看到 $g\in\mathcal{F}^\infty(X)$。此外，由~命题 5.2，我们得出 f 在紧集$P(a,b)$上是 N维 Lipschitz 的。因此，$\widetilde{f}\in\mathcal{F}^\infty(V^N)$，从而 $f\in\mathcal{F}^\infty(X)$。

接下来，我们证明(iii)。

固定 $x\in X$ 和 $p\in\mathbb{N}$。回忆 $\delta = \operatorname{diam} T$，并令 $r_x = \max\{\delta, \|x\|\}$。只需证明

$$|\mathbb{M}^p f(x) - \mathbb{L}\widetilde{f}(x)| \le 2\|x\|^N \omega_T\big(\nabla_N \widetilde{f}, r_x q^p\big). \tag{18}$$

根据平均 N-梯度的定义和 (H_2)，我们得出

$$\begin{aligned}\mathbb{L}\widetilde{f}(x) = \overline{\nabla}_N \widetilde{f}(T)x^N &= \tfrac{1}{\mu(T)}\widetilde{\nabla}_N\widetilde{f}(T)x^N = \tfrac{1}{\mu(T)}\int_T \nabla_N\widetilde{f}(t)x^N\,dt \\ &= \tfrac{1}{\mu(T)}\sum_{i\in I^p}\int_{T^i}\nabla_N\widetilde{f}(t)x^N\,dt = \sum_{i\in I^p}\tfrac{\mu(T^i)}{\mu(T)}\overline{\nabla}_N\widetilde{f}(T^i)x^N \\ &= \sum_{i\in I^p}\beta^i\overline{\nabla}_N\widetilde{f}(T^i)x^N.\end{aligned}$$

固定 $i \in I^p$，并用 $B^i = B[a^i, \delta q^p]$ 表示以 a^i 为中心、半径为 δq^p 的闭球。由于 $a^i \in T^i$ 且 (17) 中已证明 diam $\underline{T^i} \le \delta q^p$，我们看到 B^i 是 T^i 的连通超集。令 $J^i = \nabla_N \widetilde{f}(T^i)x^N$。由于

$$\min_{t\in B^i} \nabla_N \widetilde{f}(t)x^N \le \min_{t\in T^i} \nabla_N \widetilde{f}(t)x^N \le J^i \le \max_{t\in T^i} \nabla_N \widetilde{f}(t)x^N \le \max_{t\in B^i} \nabla_N \widetilde{f}(t)x^N$$

并且函数 $t \mapsto \nabla_N \widetilde{f}(t)x^N$ 是连续的（因为 $\widetilde{f}$ 是一个 C^N-函数），我们得出结论：存在 $t^i \in B^i$ 使得 $J^i = \nabla_N f(t^i)x^N$。因此，

$$\mathbb{L}\widetilde{f}(x) = \sum_{i\in I^p} \beta^i \nabla_N \widetilde{f}(t^i)x^N. \tag{19}$$

根据命题 5.1 和 8.1，对于某个 $s^i \in P\big(\gamma^i(0)\ \gamma^i(x)\big) = \prod_{n\in N}[a^i_n, a^i_n + \alpha^i_n x_n]$，有

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}^p f(x) &= \sum_{i\in I^p} \square\widetilde{f}\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big) = \sum_{i\in I^p} \nabla_N \widetilde{f}(s^i)\big(\gamma^i(x) - \gamma^i(0)\big)^N \\
&= \sum_{i\in I^p} \sum_{k\in K^N} \widetilde{\partial}_k \widetilde{f}(s^i) \odot^N_k (\alpha^i_n x) = \sum_{i\in I^p} \sum_{k\in K^N} \widetilde{\partial}_k \widetilde{f}(s^i) \prod_{n\in N} \alpha^i_n x_{n,k_n} \\
&= \sum_{i\in I^p} \prod_{n\in N} \alpha^i_n \sum_{k\in K^N} \widetilde{\partial}_k \widetilde{f}(s^i) \prod_{n\in N} x_{n,k_n} = \sum_{i\in I^p} \beta^i \nabla_N \widetilde{f}(s^i)x^N.
\end{aligned} \tag{20}$$

回想 $t^i \in B^i$，我们有

$$\|t^i - a^i\| \le \delta q^p \le r_x q^p.$$

由于 $s^i, a^i \in P\big(\gamma^i(0)\ \gamma^i(x)\big)$ 且 γ^i 是 q^p-Lipschitz 的，我们得出

$$\|s^i - a^i\| \le \operatorname{diam} P\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big) \le q^p \operatorname{diam}(P(0,x)) \le \|x\| q^p \le r_x q^p.$$

最后，结合 (20)、(19)、(6) 和 (15)，我们得到

$$\begin{aligned}
|\mathbb{M}^p f(x) - \mathbb{L}\widetilde{f}(x)| &= \left| \sum_{i\in I^p} \left(\beta^i \nabla_N \widetilde{f}(s^i)x^N - \beta^i \nabla_N \widetilde{f}(t^i)x^N \right) \right| \\
&= \left| \sum_{i\in I^p} \beta^i \left(\nabla_N \widetilde{f}(s^i) - \nabla_N \widetilde{f}(t^i) \right) x^N \right| \\
&\le \sum_{i\in I^p} \beta^i \left\| \nabla_N \widetilde{f}(s^i) - \nabla_N \widetilde{f}(t^i) \right\| \|x\|^N \\
&\le \sum_{i\in I^p} \beta^i \left(\left\| \nabla_N \widetilde{f}(s^i) - \nabla_N \widetilde{f}(a^i) \right\| + \left\| \nabla_N \widetilde{f}(a^i) - \nabla_N \widetilde{f}(t^i) \right\| \right) \|x\|^N \\
&\le \sum_{i\in I^p} \beta^i\, 2\omega_T(\nabla_N \widetilde{f}, r_x q^p)\|x\|^N = 2\|x\|^N \omega_T(\nabla_N \widetilde{f}, r_x q^p),
\end{aligned}$$

这证明了 (18)，因此 (iii) 成立。

剩下要证明 (iv)。

设 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 是一个 C^N-函数，使得 $f = \mathbb{M}f$，并设 $\widetilde{f}\colon V^N \to \mathbb{R}$ 是 f 的一个 C^N-延拓。则对所有 $x \in X$ 和 $p \in \mathbb{N}$，$f(x) = \mathbb{M}^p f(x)$。令 $\lambda = \nabla_N \widetilde{f}(T)$。由 (iii)，我们得出

$$f(x) = \lim_{p\to\infty} \mathbb{M}^p f(x) = \mathbb{L}\widetilde{f}(x) = \lambda x^N$$

对于任意 $x \in X$。因此，f 具有所需的形式。

现在假设存在 $\lambda \in \mathbb{R}^{K^N}$，使得对于任意 $x \in V^N$， $f(x) = \lambda x^N$。固定某个 $x \in V^N$。那么

$$f(x) = \sum_{k \in K^N} \lambda_k \prod_{n \in N} x_{n,k_n}.$$

固定 $i \in I$和 $M \subseteq N$。令 $x_M^i = \pi_M\big(\gamma^i(0)\ \gamma^i(x)\big)$，并对每个$n \in N$取 $b_n^i = \alpha_n^i x_n + a_n^i$。因此， $x_M^i = (x_{M,\ n}^i)_{n \in N}$，其中 $x_{M,\ n}^i = a_n^i$，若 $n \in M$；而 $x_{M,\ n}^i = b_n^i$，若$n \in N \setminus M$。于是

$$f\Big(\pi_M\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big)\Big) = \sum_{k \in K^N} \lambda_k \prod_{n \in M} a_{n,k_n}^i \prod_{n \in N \setminus M} b_{n,k_n}^i,$$

从而

$$\begin{aligned}
\Box f\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big) &= \sum_{M \subseteq N} (-1)^{|M|} f\left(\pi_M\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big)\right) \\
&= \sum_{M \subseteq N} (-1)^{|M|} \sum_{k \in K^N} \lambda_k \prod_{n \in M} a_{n,k_n}^i \prod_{n \in N \setminus M} b_{n,k_n}^i \\
&= \sum_{k \in K^N} \lambda_k \sum_{M \subseteq N} (-1)^{|M|} \prod_{n \in M} a_{n,k_n}^i \prod_{n \in N \setminus M} b_{n,k_n}^i \\
&= \sum_{k \in K^N} \lambda_k \prod_{n \in N} (b_{n,k_n}^i - a_{n,k_n}^i) = \sum_{k \in K^N} \lambda_k \prod_{n \in N} \alpha_n^i x_{n,k_n}^i \\
&= \beta^i \sum_{k \in K^N} \lambda_k \prod_{n \in N} x_{n,k_n}^i = \beta^i \lambda x^N.
\end{aligned}$$

最后，由于$\sum \beta^i = 1$，我们得到$_{i \in I}$

$$\mathbb{M}f(x) = \sum_{i \in I} \Box f\big(\gamma^i(0), \gamma^i(x)\big) = \sum_{i \in I} \beta^i \lambda x^N = \lambda x^N = f(x),$$

证明完毕。 □

在 $s = 1$ 的情况下，定理 9.1 的断言（iv）具有如下形式

(iv') $\mathbb{M}f = f$当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{R}$使得 $f(x) = \lambda x^N = \lambda \prod_{n \in N} x_n$ 对于每个 $x \in X$。

10. Multivariate distribution of a Borel measure

在本文剩余部分，我们假设 $s = 1$，即 $V = \mathbb{R}$。

对于所有 x， $y \in V$我们令 $[x, y) = [x, y] \setminus \{y\}$，并且对于所有 $a = (a_n)_{n \in N}$， $b = (b_n)_{n \in N} \in [0, \infty)^N$我们定义 $Q(a,\ b) = \prod_{n \in N} [a_n, b_n)$。给定 a， $b \in [0, \infty)^N$我们记 $a \preceq b$当$a \in P(0,\ b)$，并且 $a \prec b$当 $a \in Q(0,\ b)$。显然，对于所有 a， $b \in [0, \infty)^N$且满足 $a \preceq b$的情形，我们有

$$P(a,b) = \big\{x \in [0,\infty)^N : a \preceq x \preceq b\big\} \quad \text{and} \quad Q(a,b) = \big\{x \in [0,\infty)^N : a \preceq x \prec b\big\}.$$

在本文最后部分，我们假设以下假设。

（H_3）假设 $T \subseteq [0, \infty)^N$是紧致的，并且对于每个 $x \in T$， $Q(0,\ x) \subseteq T$。

Set

$$\mathcal{S}(T) = \big\{Q(a,b) : a,b \in T \text{ with } a \preceq b\big\}.$$

容易验证， $\mathcal{S}(T)$ 是一个集合半环，并且 $\mathcal{S}(T)$ 生成 $\mathcal{B}(T)$。

设 ν 是定义在 T上的博雷尔测度。 ν 的多元分布称为函数 $d_\nu\colon\ T \to \mathbb{R}$ ，其定义为

$$d_\nu(x) = \nu(Q(0,x)).$$

如果定义在 T 上的博雷尔测度 ν 的多元分布d_ν 是 C^N函数，则称其为 C^N-测度。显然，定义在 T 上的勒贝格测度μ的多元分布具有如下形式

$$d_\mu(x) = x^N = \prod_{n\in N} x_n \quad \text{for every } x \in T; \tag{21}$$

注意， $T \subseteq [0,\infty)^N$在这里至关重要。因此， d_μ是定义在 T上的 C^N-测度。

命题10.1。 假设 (H_3)， ν是 T上的博雷尔测度，并令 a、 $b \in T$满足 $a \preceq b$。则 $\nu(Q(a$、 $b)) = \square d_\nu(a$、 $b)$。

证明。 在 $r = 1$的情形下，条件 $a \preceq b$ 意味着，对于某个 $t \in [0,1]$，有 $a = tb$ 。于是 $Q(a$、 $b) = [a,b) = [0,b) \setminus [0,a) = Q(0$、 $b) \setminus Q(0$、 $a)$，因此

$$\nu(Q(a,b)) = \nu(Q(0,b)) - \nu(Q(0,a)) = d_\nu(b) - d_\nu(a) = \square d_\nu(a,b).$$

现在假设对于每个 $p \in \{1,\dots,r-1\}$，命题关于集合 $N_p = \{1,\dots,p\} \subseteq N$的结论都成立。固定 a、 $b \in T$使得 $a \preceq b$。令 $N' = N_{r-1}$、 $a' = a|_{N'}$、 $b' = b|_{N'}$，并令 $T' = \{x' \in V^{N'}\colon (b_r, x')_r \in T\}$。则 $0 \le a_r \le b_r$且$a' \preceq b'$。此外，如果 $x' \in T'$且 $y' \in P(0, x')$，那么$(b_r, x')_r \in T$，并且(H_3)蕴含$(b_r, y')_r \in Q(0, (b_r, x')_r) \subseteq T$。因此， $y' \in T'$，从而 T'关于(H_3)满足与 T相同的性质（并以 N'代替 N）。

由于 $b' \in T'$，我们有 $Q(0, a') \subseteq Q(0, b') \subseteq T'$，因此

$$\begin{aligned} Q(a,b) &= [a_r,b_r) \times_r Q(a',b') = \big([0,b_r) \setminus [0,a_r)\big) \times_r Q(a',b') \\ &= \big([0,b_r) \times_r Q(a',b')\big) \setminus \big([0,a_r) \times_r Q(a',b')\big). \end{aligned}$$

定义 T' 上的两个博雷尔测度 ν_1和 ν_2，使得 $\nu_1(E) = \nu([0,a_r) \times_r E)$ 且$\nu_2(E) = \nu([0,b_r) \times_r E)$，我们得到

$$\nu(Q(a,b)) = \nu_2(Q(a',b')) - \nu_1(Q(a',b')). \tag{22}$$

Then

$$d_{\nu_1}(x') = \nu_1(Q(0,x')) = \nu([0,a_r) \times_r Q(0,x')) = \nu\big(Q(0,(a_r,x')_r)\big) = d_\nu((a_r,x')_r).$$

对任意 $x' \in T'$，因此 $d_{\nu_1} = (d_\nu)_{a_r:\, r}$。同理可得 $d_{\nu_2} = (d_\nu)_{b_r:\, r}$。

最后，利用 (22)、归纳假设和命题 3.1，我们得出

$$\begin{aligned} \nu(Q(a,b)) &= \nu_2(Q(a',b')) - \nu_1(Q(a',b')) = \square d_{\nu_2}(a',b') - \square d_{\nu_1}(a',b') \\ &= \square (d_\nu)_{b_r:r}(a',b') - \square (d_\nu)_{a_r:r}(a',b') = \square d_\nu(a,b), \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

命题 10.2。 假设 (H_3) 成立，并且 ν_1、 ν_2 是定义在 T 上的博雷尔测度，满足$d_{\nu_1}(x) = d_{\nu_2}(x)$ 对每个 $x \in T$均成立。则 $\nu_1 = \nu_2$。

证明。 固定 a， $b \in T$ 且满足 $a \preceq b$。由命题10.1，我们有

$$\nu_1(Q(a,b)) = \square d_{\nu_1}(a,b) = \square d_{\nu_2}(a,b) = \nu_2(Q(a,b)),$$

这表明 ν_1 与 ν_2 在 $\mathcal{S}(T)$ 上一致。由于族 $\{E \in \mathcal{B}(T) : \nu_1(E) = \nu_2(E)\}$ 是一个包含 $\mathcal{S}(T)$ 的 σ-域，我们可知它等于 $\mathcal{B}(T)$。因此，$\nu_1 = \nu_2$。 □

命题 10.3。 假设 (H_3) 成立，并设 ν 是定义在 T 上的一个 C^N-测度，且满足$C =$上确界$_{x\in T} |\partial_N d_\nu(x)|$。则对于每个 $P \in \mathcal{S}(T)$，都有 $\nu(P) \le C\mu(P)$。特别地， ν 关于 μ 绝对连续。

证明。 取不同的点 $a, b \in T$，满足 $a \preceq b$，并令 $P = Q(a,b)$。由 (H_3)，可得 $P \subseteq T$，因此 $P = P(a,b) \subseteq T = \overline{T}$。应用命题 5.1 和 10.1，我们推得存在 $c \in P \subseteq T$ 使得

$$\nu(P) = \square d_\nu(a,b) = \nabla_N d_\nu(c)(b-a)^N = \partial_N d_\nu(c)(b-a)^N,$$

并且由于 $\mu(P) = (b-a)^N$，我们得到

$$\nu(P) = \partial_N d_\nu(c)(b-a)^N = \partial_N d_\nu(c)\mu(P) \le C\mu(P),$$

由此证明完毕。 □

11. Invariant measures under some class of piecewise affine functions

回想一下，我们假设了 $s = 1$，即 $V = \mathbb{R}$，以及 $D = V^N$。我们还假设了假设 (H_1) 至 (H_3)。

回想一下，若博雷尔测度 ν 定义在 T 上，且满足以下条件，则称其在博雷尔函数 g: $T \to T$（或简写为 g-不变）下为不变测度

$$\nu(E) = \nu(g^{-1}(E)) \quad \text{for every } E \in \mathcal{B}(T).$$

Put

$$A = \bigcup_{i,j\in I} (\gamma^i)^{-1}(\gamma^i(T) \cap \gamma^j(T)) \quad \text{and} \quad A^i = \gamma^i(A) \quad \text{for every } i \in I.$$

由 (H_2)，我们有

$$T \overset{\mu}{=} A \overset{\mu}{=} \bigsqcup_{i\in I} A^i, \tag{23}$$

并定义博雷尔函数 g_γ: $T \to T$ 为

$$g_\gamma(x) = \begin{cases} (\gamma^i)^{-1}(x), & \text{if } x \in A^i \text{ for some } i \in I, \\ 0, & \text{if } x \in T \setminus \bigsqcup_{i\in I} A^i. \end{cases} \tag{24}$$

定理 11.1. 假设(H_1)、(H_2)和(H_3)成立。设 ν 是定义在 T 上的一个C^N-测度。那么以下条件等价:

(i) ν 是g_γ-不变的; (ii) $\mathbb{M}d_\nu = d_\nu$;

(iii) 存在 $\lambda \ge 0$ 使得 $\nu = \lambda\mu$。

证明。 我们先介绍一些观察结果和记号。首先注意到 (H_1) 对任意 $i \in I$ 函数 γ^i: $V^N \to V^N$ 都是双射，并且

$$\gamma^i(Q(a,b)) = Q(\gamma^i(a), \gamma^i(b)) \quad \text{for every } a, b \in V^N. \tag{25}$$

在 T 上定义博雷尔测度 ν_γ，定义为

$$\nu_\gamma(E) = \nu(g_\gamma^{-1}(E)).$$

设 $f = d_\nu$ 和 $f_\gamma = d_{\nu_\gamma}$。固定 $E \in \mathcal{B}(T)$。对每个 $i \in I$，令 $E^i = \gamma^i(E)$。设 $B = T \setminus \bigsqcup_{i\in I} A^i$。根据 (23)，我们有 $\mu(B) = 0$ 和 $\mu(\gamma^i(T) \setminus A^i) = 0$，对每个 $i \in I$ 均成立。若 $0 \in E$，令 $B_0 = B$；若 $0 \notin E$，令 $B_0 = \emptyset$。则对所有 $i \in I$，都有 $g_\gamma^{-1}(E) \cap B = B_0$，$g_\gamma^{-1}(E) \cap A^i = E^i \cap A^i$，并且

$$g_\gamma^{-1}(E) = (g_\gamma^{-1}(E) \cap B) \sqcup \bigsqcup_{i\in I} (g_\gamma^{-1}(E) \cap A^i) = B_0 \sqcup \bigsqcup_{i\in I} (E^i \cap A^i).$$

根据命题 10.3，ν 是 μ-绝对连续的。因此，$\nu(B_0) = 0$ 且 $\nu(E^i \cap A^i) = \nu(E^i \cap \gamma^i(T)) = \nu(E^i)$ 对任意 $i \in I$ 均成立，故

$$\nu_\gamma(E) = \nu(g_\gamma^{-1}(E)) = \nu(B_0) + \sum_{i\in I} \nu(\gamma^i(E) \cap A^i) = \sum_{i\in I} \nu(E^i).$$

因此，

$$\nu_\gamma(E) = \sum_{i\in I} \nu(\gamma^i(E)) \quad \text{for every } E \in \mathcal{B}(T). \tag{26}$$

固定 $x \in T$。令 $Q = Q(0, x)$，并对每个 $i \in I$ 令 $Q^i = Q(\gamma^i(0), \gamma^i(x))$。那么 (25) 意味着 $Q^i = \gamma^i(Q)$。此外，由 (H_3) 可得 $Q \subseteq T$。现在将 (26) 与 $E = Q$ 结合，得到

$$f_\gamma(x) = \nu_\gamma(Q) = \sum_{i\in I} \nu(Q^i). \tag{27}$$

命题 10.1 意味着 $\nu(Q_i) = \square f(\gamma^i(0), \gamma^i(x))$，由此得到

$$\mathbb{M}f(x) = \sum_{i\in I} \square f(\gamma^i(0), \gamma^i(x)) = \sum_{i\in I} \nu(Q^i). \tag{28}$$

最后，结合 (27) 与 (28)，得到

$$f_\gamma = \mathbb{M}f. \tag{29}$$

下面证明 (i)、(ii) 和 (iii) 之间的等价性。

$(i)\Rightarrow(ii)$。设 ν 为 g_γ-不变的。那么 $\nu = \nu_\gamma$，因此 $f = f_\gamma$。于是，由 (29) 可得 $f = \mathbb{M}f_\gamma$。

$(ii)\Rightarrow(i)$。假设 $\mathbb{M}f = f$。那么，根据 (29)，我们有 $f = \mathbb{M}f = f_\gamma$。由此结合命题 10.2 可得 $\nu = \nu_\gamma$，因此 ν 是 g_γ-不变的。

$(ii)\Rightarrow(iii)$。应用定理 9.1，取 $s = 1$ 和 $X = T$（在此情形下，断言 (iv) 化简为第 9 节末尾所述的 (iv')），可得存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得对于任意 $x \in T$，都有 $f(x) = \lambda x^N$。由于 $f \geq 0$，我们得到 $\lambda \geq 0$。结合 (21) 可推出 $f = \lambda d_\mu$。最后，由命题 10.2 可得 $\nu = \lambda\mu$。

$(iii)\Rightarrow(ii)$。假设存在 $\lambda \geq 0$，使得 $\nu = \lambda\mu$。那么 (21) 推出，对于每个 $x \in T$，都有 $f(x) = d_\nu(x) = d_{\lambda\mu}(x) = \lambda x^N$。最后，应用定理 9.1 (iv)，取 $s = 1$ 和 $X = T$，可得 $f = \mathbb{M}f$。□

我们以以下问题作为本文的结尾。

问题 11.2。定理 *11.1* 中的等价关系 $(i)\Leftrightarrow(ii)\Leftrightarrow(iii)$ 对于任意相对于勒贝格测度 μ 绝对连续的博雷尔测度 ν，在 T 上是否成立？

Acknowledgment

本研究得到了西里西亚大学数学研究所（迭代函数方程与实分析项目）的资助。

Disclosure statement

作者声明不存在任何利益冲突。

Notes on contributors

这篇稿件的所有工作均由三位作者共同完成。

References

[Awr18] Jan Awrejcewicz（编）， *Dynamical systems in applications*，Springer数学与统计学进展，第249卷，施普林格，沙姆，2018年， ·L´od´z，波兰，2017年12月11日至14日，选自第14届国际会议（DSTA）“动力系统：理论与应用”的论文。MR 3872261[Awr24] Jan Awrejcewicz（编）， *Perspectives in dynamical systems I. Applications*，Springer数学与统计学进展，第453卷，施普林格，沙姆， [2024] ©2024，DSTA， ·L´od´z，波兰，2021年12月6日至9日。MR 4774814[BG05] Wael Bahsoun 和 Pawe

´ ´ *Position dependent random maps in one and higher* l Gora， ，Studia Math. *dimensions* **166** 2005 3, 271 286 2110096
（），第–期。MR[00] ´ Buz Jerˆome

Buzzi， *Absolutely continuous S.R.B. measures for random Lasota-Yorke maps*，美国数学会汇刊
352 2000 7, 3289 3303 1707698 （），第–期。MR Che N. Chernov，，
[02] *Invariant measures for hyperbolic dynamical systems*
《动力系统手册》，第1A卷，北荷兰，阿姆斯特丹，2002年，第321–407页。MR 1928521[Cla20] William Clark，
Invariant Measures Geometry and Control of Hybrid and Nonholonomic ，，，ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，博士论文（Ph.D.）——密歇根大学。MR 4210135[Dem03] Mark Francis Demers，
Dynamical Systems 2020，
Markov extensions and natural conditionality invariant measures for dynamical systems with holes 2003， ，ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，博士论文（Ph.D.）——纽约大学。MR 2705209[EG92] Lawrence C. Evans 和 Ronald F. Gariepy，
Measure theory and fine properties of func 1992 1158660 ，《高等数学研究》，CRC *tions* 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，。MR[GB03] Pawe

´ ´ *Absolutely continuous invariant measures for* l Gora 和 Abraham *random maps with position dependent probabilities* **278** 2003
Boyarsky，，J. Math. Anal. Appl. （），第1期，225–242，MR1963477[Ino12] Tomoki Inoue，
Invariant measures for position dependent random maps with continuous random parameters **208** 2012 1, 11 29 ，Studia Math.（），第–期。
2891182
MR[15] JR Trachette Jackson 和
Applications of dynamical systems in Ami Radunskaya（编），*biology and medicine* 158，，
《IMA数学及其应用丛书》，第卷，施普林格，纽约，2015年。MR 3727151[KCG90] Marek Kuczma、Bogdan Choczewski 和 Roman Ger， *Iterative functional equations*，《数学百科全书及其应用》，第32卷，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。MR 1067720[Kon23] Lingwei Kong，
Applications and Machine Learning Prediction of Nonlinear Dynamical Systems 2023， ，ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，博士论文（Ph.D.）——亚利桑那州立大学。MR 4652205[LM94] Andrzej Lasota 和 Michael C. Mackey， *Chaos, fractals, and noise*，第2版，应用数学科学丛书，第97卷，施普林格出版社，纽约，1994年，《动力学的随机性方面》。MR 1244104[LP77] A. Lasota 和 G. Pianigiani， *Invariant measures on topological spaces*，Boll. Un. Mat. Ital. B (5) 14 (1977)，第2期，592–603。MR 480951

[LY73] A. Lasota 和 James A. Yorke, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations* **186** 1973 481 488 1974 ，美国数学会汇刊（），–（）。MR 335758[Mat85] Janusz Matkowski, *Remark on BV solutions of a functional equation connected with invariant measures* **29** 1985 2 213 819310 ，方程数学（），第-3期，210–。MR[MS23] Janusz Morawiec 和 Tomasz Szarek, *Invariant measures for uncountable random interval homeomorphisms* **22** 2023 4, 124, 16 ，动力系统定性理论（），论文编号。MR 4605587[MZ18] Janusz Morawiec 和 Thomas Z ¨urcher, ，方程数学 *On a problem of Janusz Matkowski and Jacek Wesołowski* **92** 2018 4, 601 615 3831249（），第–期。MR [MZ19] Janusz Morawiec 和 Thomas Z ¨urcher, ，，方程数学 *On a problem of Janusz Matkowski and Jacek Wesołowski II* **93** 2019 108 3919424（），第1期，91–。MR[MZ21] Janusz Morawiec 和 Thomas Z ¨urcher, ，方程数学 *A new approach with new solutions to the Matkowski and Wesołowski problem* **95** 2021 4, 761 776（），第–期。MR 4285099[MZ22] Janusz Morawiec 和 Thomas Z ¨urcher, *A new take on random interval homeomorphisms*，《Fund. Math.》257（2022），第1期，1–17。MR 4379612[MZ24] ， *Invariant probability measures under p-adic transformations*，2024，手稿，https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.06406。[MZ25] Janusz Morawiec 和 Thomas Z ¨urcher, ，方程数学 *Another look at the Matkowski and Wesołowski problem yielding a new class of solutions* **99** 2025 3, 1047 1065（），第–期。[Nef13] Nikolai Nefedov, *Application of coupled dynamical systems for communities detectionin complex networks*，《非线性动力学与理论电气工程专题选编》，Stud. Comput. Intell.，第483卷，施普林格，海德堡，2013年，第159–179页。MR 3778029[Nik91] K. Nikodem， *On ϵ-invariant measures and a functional equation*，捷克斯洛伐克数学杂志41(116)（1991），第4期，565–569。MR 1134949[R´57] A. R´enyi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*，匈牙利科学院数学学报 **8** 1957 477 493 97374 （），–。MR RH Alexander G. Ramm 和 Nguyen S. Hoang, *Dynamical systems method and applications. , theoretical developments and numerical examples*[12]约翰威立公司，霍博肯，新泽西州，2012年。MR 2920027[vdV93] M. L. J. van de Vel, *Theory of convex structures*，北荷兰数学图书馆，第50卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1993年。MR 1234493[Wil24] Matthew Alan Williams， *Asymptotic Stability of Hybrid Dynamical Systems With Applications to Robotic Locomotion*，ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2024年，博士论文（Ph.D.）——德克萨斯大学达拉斯分校。MR 4890390[Yar08] Tatiana Yarmola, *Invariant measures for degenerate random perturbations of discrete-time dynamical systems* 2008, ，ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，博士论文（Ph.D.）——纽约大学。MR 2712323[Zhi96] P. E. Zhidkov, *Invariant measures for infinite-dimensional dynamical systems with applications to a nonlinear Schrödinger equation*，《数学物理中的代数与几何方法》（卡齐韦利，1993），Math. Phys. Stud.，第19卷，克吕韦尔学术出版社，多德雷赫特，1996年，第471–476页。MR 1385705

Institute of Mathematics, University of Silesia, Bankowa 14, 40-007 Katowice, Poland