arXiv:2603.06083v1 [math.AG] 6 Mar 2026

到轨形底空间的映射不必是轨形映射

FINN BARTSCH

Abstract. 我们给出光滑射影簇之间纤维化 $f\colon X \to Y$ 的一个显式例子，其在Campana意义下的“轨形基底” Δ_f 具有如下性质：诱导态射 $X \to (Y, \Delta_f)$不是C-对态射（即不是“轨形态射”）。然而我们也证明，若 f是“整洁”的且(Y, Δ_f)足够良好，则这种情况不会发生。最后，我们讨论该陈述对Campana猜想的意义，这些猜想旨在对那些要么容许稠密整曲线、要么容许整点的潜在稠密集的簇给出代数几何刻画。

1. Introduction

在关于特殊簇 与轨形的Campana理论中，对(X, Δ)——其中 X 是一个簇， Δ是 X 上具有标准系数的有效 $\mathbb{Q}$-除子——以两种相关但不同的角色出现。

一方面，存在支配态射 $f\colon X \to Y$ 的轨形基底这一概念，由 [Cam04, Definition 1.5]，引入，它提供了一种方法，用 f 上的一个 $\mathbb{Q}$-除子来编码 Y 的处处非约化纤维。对于光滑簇 X 和 Y 以及支配态射$f\colon X \to Y$， f 的轨形基底可定义如下。给定一个素除子 $D \subseteq Y$，考虑拉回 f^*D，并将其分解为 $f^*D = \sum_i a_i D_i + R$，其中 a_i 是正整数，D_i 是经由 f 支配 D 的素除子，而 R 是 X 上的有效除子，其分量不经由 f 支配 D。于是，记 $m(f, D)$ 为 a_i 的下确界（约定空集的下确界为 ∞），并定义 $\Delta_f := \sum_D (1 - m^{-1}(f,D))D$（约定$\frac{1}{\infty} = 0$）。由于除非 D 不在 f 的像中，或 f 在 D 上不光滑，否则 $m(f, D) = 1$，因此我们看到，对于除有限多个素除子 $D \subseteq Y$ 之外的所有素除子，都有 $m(f, D) = 1$（至少在特征零的情形下，或当 f 一般可分时）；由此， Δ_f 确实是一个 $\mathbb{Q}$-除子。我们称 Δ_f 为 f 的轨形基底除子，而对偶 (Y, Δ_f) 称为 f 的轨形基底。例如，若 f 是曲线 C 上的椭圆纤维化 $X \to C$，那么 Campana 意义下的轨形基底与“椭圆纤维化的轨形基底”这一经典概念一致，后者编码了 f 的重纤维。

另一方面，Campana理论中（X， Δ）的另一种出现形式来自*C*-对。这些对象及其态射最早在 [Cam11，D´efinition 2.3]中以“orbifoldes g´eom´etriques”之名得到正式介绍。一个C-对仅由一个光滑簇 X 以及其上的一个 $\mathbb{Q}$-除子 Δ 组成，该除子在 X 上具有 $\Delta = \sum_i (1 - \frac{1}{m_i}) D_i$ 的形式，其中 $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$；数 m_i 称为 D_i 在 Δ中的重数。C-对的重要性在于，进入其中的态射有着特殊的定义。光滑簇 T到C-对 $T \to (X, \Delta)$的态射是一个态射 $f\colon T \to X$，其像与 $\lfloor \Delta \rfloor$不相交，并且对于每个素除子 $D \subseteq \operatorname{supp} \Delta$，要么 f 经过 D，要么拉回 f^*D 的所有系数都至少等于 D 在 Δ中的重数。（我们注意到，这与Campana的原始定义略有不同，因为我们允许 f 在各分量上因子分解，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14E22，（14G05，32Q45）。

Δ。对于支配态射，这不会造成差异。）例如，若 $C \subseteq \mathbb{P}^2$ 是平面曲线， $L \subseteq \mathbb{P}^2$ 是直线，则包含态射 $C \to \mathbb{P}^2$ 是C-对态射 $C \to (\mathbb{P}^2, \frac{1}{2}L)$，当且仅当 C 与 L 的每个交点都是相切的。 –

给定这两个概念，很容易看出，对于光滑簇 X、C-对 (Y, Δ_Y) 以及支配态射 $f\colon X \to (Y, \Delta_Y)$，有 $\Delta_Y \leq \Delta_f$，其中 Δ_f 表示底层簇态射 $X \to Y$ 的轨形基底。另一方面，自然会想知道逆命题是否成立，也就是说，给定光滑簇之间的支配态射 $f\colon X \to Y$，它是否会诱导出一个映到轨形基底上的 C-对态射 $X \to (Y, \Delta_f)$。展开定义可知，当且仅当轨形基底定义中出现的除子 R 的系数都不小于其中出现的 a_i 的下确界时，这一结论才成立。特别地，如果总有 $R = 0$，即 f 不会将 X 的任何除子压缩到 Y 的余维至少为二的子集中，那么确实可以得到一个 C-对态射 $X \to (Y, \Delta_f)$。这也意味着，如果 $Z \subseteq X$ 是被 f 压缩的有限多个除子的并集，那么我们确实可以得到一个 C-对态射 $X \setminus Z \to (Y, \Delta_f)$。由于平坦态射不会压缩任何除子，因此可知，若 $f\colon X \to Y$ 是平坦的，那么 f 确实给出一个 C-对态射 $X \to (Y, \Delta_f)$。由 $f(x, y) = (x, xy)$ 给出的态射 $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$，其轨形基底除子为 $\{x = 0\}$，表明也需要某种形式的此类假设。然而，由于这个例子在很大程度上依赖于 f 非满射，人们或许希望至少在某些附加假设下（例如，对于光滑簇之间的适当满射态射），可以省去平坦性假设。本文的首要目的是给出具体例子，说明这是不可能的。

定理 A（第 2 节）。存在一个满射态射 $f\colon X \to Y$，从一个光滑射影三维簇 X 映到一个光滑射影曲面 Y，其纤维连通，并且 $X \to (Y, \Delta_f)$ 不是 *C*-对态射。

此前已有研究注意到，定理 A 中所述的态射可能存在；例如参见[JR22，注 3。26]或 [Cam23]。不过，我们在下文给出的构造似乎是这类现象的首批显式例子。

在实际应用中，C-对的一种用途是：到 C-对的态射能够对定义在 $\mathbb{C}$上的簇 X 上的整曲线施加限制。簇 X 上的整曲线是一个全纯态射$\mathbb{C} \to X^{\mathrm{an}}$（其中 X^{an} 表示与该簇 X相对应的复解析空间）。我们对映入 C-对的态射所作的定义可直接推广到复解析情形，因此也能很好地定义 C-对（Y， Δ）上的整曲线。若现在 $X \to (Y, \Delta)$是一个 C-对态射，且 $\mathbb{C} \to X$ 是 X中的一条整曲线，那么复合 $\mathbb{C} \to (Y, \Delta)$将定义（$Y$， Δ）中的一条整曲线。若我们还知道（$Y$， Δ）不含任何非恒定整曲线，那么这就迫使 X 上的每条整曲线都包含在 $X \to Y$的某个纤维中。例如，当（Y， Δ）=（$\mathbb{P}^1$，$\mathbf{1}\,\mathbf{2}([a_1] + \ldots + [a_5])$），且 a_1，……，a_5是 $\mathbb{P}^1$ [CW09，第 12 节，定理 4]中的五个两两不同的点时，便是如此。关于这类推理的具体例子，参见 [CP07] 或 [BCJW26，第 6] 节。理论上，类似的推理可用于限制定义在数域上的簇 X 上的有理点或整点；但在实践中，由于我们对 C-对上的整点缺乏了解，无条件地做到这一点很困难。在 abc猜想成立的条件下， [BCJW26]中实现了这一点。

在 [Cam04 的第 9], 节中，Campana 猜想，一个光滑射影簇存在一条 Zariski 稠密整曲线，当且仅当它在 [Cam04 的定义 2.1] 意义下是*Campana* 特殊的。由于文献中“特殊”一词的含义有些混杂，我们在本文中改称这些簇为

Campana 特殊。光滑射影簇 X 不是 Campana 特殊的，当且仅当存在一个适当双有理态射 $X' \to X$，使得 X' 光滑；并且存在一个整洁满射态射 $f\colon X' \to Y$，其纤维连通，且对 (Y, Δ_f) 为一般型。这里，如果光滑簇之间的支配态射 $X \to Y$ 存在一个适当双有理态射 $X \to X''$，使得 X'' 光滑，且每个被 $X \to Y$ 压缩的除子也被 $X \to X''$ 压缩，我们就称该态射为整洁的。人们希望，根据 Green–Griffiths–Lang 猜想的某种 C-对版本，一般型对 (Y, Δ_f) 不存在稠密整曲线；进而希望这一认识有助于约束 X' 上的整曲线，因而也约束 X 上的整曲线——如此便可得出结论：存在稠密整曲线的簇是 Campana 特殊的（假设一般型 C-对满足 Green–Griffiths–Lang 猜想）。然而，这一步要求态射 $X' \to (Y, \Delta_f)$ 是 C-对态射，而根据定理 A，这一点并非显而易见。本文的第二个目的，是说明对于轨形基底除子具有简单正规交叉支撑的整洁态射，不存在这一问题。

定理 B（第 3 节）。设 $f\colon X \to Y$ 是光滑簇之间的一个支配态射，且Δ_f 是其轨形基底除子。假设 Y 是准射影的，f 是整洁的，并且 Δ_f 支撑于一个具有简单正规交叉的除子上。则 f 是一个 *C*-对态射 $X \to (Y, \Delta_f)$。

最后，在第 4 节中，我们将上述讨论阐述得更加精确，并详细解释 C-对版本的 Green–Griffiths–Lang 猜想和 Bombieri–Lang猜想如何推出 Campana关于簇上稠密整曲线和整点分布的猜想。我们的讨论可概括如下。

定理 C（第 4 节）。假设对于维数为 $\leq n-1$ 的 *C*-对以及维数为 $\leq n$的簇，弱 *Green–Griffiths–Lang* 猜想成立。设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的一个维数为$\leq n$ 的簇，并且存在一个具有 *Zariski* 稠密像的全纯映射 $\mathbb{C} \to X^{\mathrm{an}}$。则 X 的任意奇点消解都是 *Campana* 特殊的。

定理 D（第 4 节）。假设弱 *Bombieri–Lang* 猜想对维数为 $\leq n-1$ 的 *C*-对以及维数为 $\leq n$ 的簇成立。设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 的某个子域上的维数为 $\leq n$ 的簇，且其整点集是潜在稠密集。那么，X 的任意奇点消解都是 *Campana* 特殊的。

在与 Javanpeykar 合作的后续研究中，我们将证明定理 C 和定理 D 中的反向蕴含也成立。（也就是说，如果每个含有扎里斯基稠密整曲线的簇都是 Campana 特殊的，那么 C-对的弱 Green–Griffiths–Lang 猜想成立。）

约定。我们在特征零的代数闭基域 k 上工作。簇是定义在 k 上的有限型分离整概形。

致谢。感谢 Ariyan Javanpeykar 一直以来的支持和许多有益的讨论。

2. Examples

本节中，我们给出一些簇的态射的例子，这些态射不会诱导到其轨形基底的 C-对态射。定理 A 中提到的例子就是下文的例 2.5。不过，我们先从一个例子开始，其中源和目标都是光滑曲面，且它们之间的映射一般有限，次数为二。

例 2.1. 设 C 是一条光滑拟射影曲线，设 $\sigma\colon C \to C$ 是一个至少有一个不动点的对合，并设 C 是 C 的相应（概形论）商。考虑带有对合 (σ,σ) 的曲面 $C \times C$，并设 X 为商 $(C \times C)/(\sigma,\sigma)$。设 $X \to X$ 为奇点的最小解消（通过在每个奇点处各进行一次爆破而得到）。存在一个自然映射 $X \to C \times C$，它给出一个态射 $f\colon X \to C \times C$。

注意，本例中的态射 f 并非平坦：虽然态射 $X \to C \times C$ 是有限的，因而根据奇迹平坦性是平坦的，但与爆破 $X \to X$ 复合后会引入正维纤维。更准确地说，态射 f 将 X 的某些除子压缩到 $C \times C$的余维二子集中。我们首先证明该态射的轨形基底非平凡。

引理 2.2. 在例 *2.1* 的情形下，f 的轨形基底除子 Δ_f 由 $12(\Delta \times C + C \times \Delta)$ 给出，其中 $\Delta \subseteq C$ 是商映射 $C \to C$的分歧轨迹。

证明。先考虑两个点 $c, d \in C \setminus \Delta$。此时商映射 $C \to C$ 在 c 和d 上是 étale 的，因此态射 f 在 (c,d) 的某个邻域上是有限且 étale 的。特别地，点 (c,d) 不可能包含在 f 的轨形基底除子的支集内，因此，f 的轨形基底除子的支集必定包含于 $\Delta \times C + C \times \Delta$。现在设 $c \in \Delta$ 是商映射 $C \to C$ 发生分歧的点。我们需证明除子 $\{c\} \times C$ 以重数二出现在轨形基底除子的支集中（由对称性可知，这足以证明结论）。为此，由于轨形基底除子的定义要求我们舍去在 f 下被压缩的任何除子，因此可将讨论限制在 $\{c\} \times C \subseteq C \times C$的一般点的某个扎里斯基开邻域内。因此，为了计算 $\{c\} \times C$ 在 Δ_f中的重数，可将 X 替换为 $C \times (C \setminus \Delta)$ 的原像。注意，商簇 X 在 $C \times (C \setminus \Delta)$ 上是光滑的，故爆破 $X \to X$ 在 $C \times (C \setminus \Delta)$ 上是同构。由于态射 $X \to C \times C$ 的次数为 2，且在 $\{c\} \times C \subseteq C \times C$上发生分歧，结论即得。□

在证明中，我们关键地利用了这样一点：计算重数时，可以不考虑爆破 $X \to X$ 的例外除子，因为它们在$C \times C$（一个曲面）中被压缩为一点。另一方面，如果现在将我们的态射 f 后复合一个投影映射 $C \times C \to C$，那么 $X \to X$ 的例外除子仍会在C 中被压缩为一点——但此时一点的余维为一，因此我们不能再忽略它，必须将例外除子考虑在内。最终，进行这次后复合后，轨形基底除子变得平凡。

引理 2.3. 在例 *2.1* 的情形中，考虑到第一因子的投影 $\mathrm{pr}_1\colon C \times C \to C$。那么复合 $\mathrm{pr}_1 \circ f\colon X \to C$ 的轨形基底是平凡的（即 $\Delta_{\mathrm{pr}_1 \circ f} = 0$）。

证明。如果 $c_0 \in C$ 是对合 σ的不动点，那么由 $c \mapsto (c, c_0)$给出的态射 $C \to C \times C$ 分别关于对合 σ 和 (σ,σ)是等变的。因此，它会下降到相应的商空间，从而得到一个态射 $C \to X$。由于 C 是光滑曲线，且 $X \to X$ 是真，这个态射可提升为一个态射 $C \to X$。根据构造，这给出了 $\mathrm{pr}_1 \circ f$的一个截面。由于 X 是光滑的，截面的存在意味着 $\mathrm{pr}_1 \circ f$ 的每个纤维都有一个约化分支；因此结论成立。□

由这两个事实，几乎可以形式化地推出，$X \to (C \times C, \Delta_f)$不可能是 C-对态射。不过，为了清晰地陈述这一论证，方便起见，我们将扩展映入 C-对的态射这一概念，使其也涵盖 C-对之间的态射。为此，令 (X, Δ_X)

和 (Y, Δ_Y) 为两个 C-对，其中 $\Delta_X = \sum_i (1 - \frac{1}{m_i}) E_i$ 且 $\Delta_Y = \sum_j (1 - \frac{1}{m'_j}) E'_j$。称态射 $f\colon X \to Y$ 为 C-对 $(X, \Delta_X) \to (Y, \Delta_Y)$ 的态射，若 $f^{-1}(\lfloor \Delta_Y \rfloor) \subseteq \lfloor \Delta_X \rfloor$，且对每个 j，要么 f 经由 E'_j 分解，要么对 $f^* E'_j$ 中出现的每个素除子 $D \subseteq X$，$f^* E'_j$ 中 D 的系数至少为 $\frac{m'_j}{m_i}$（若对某个 i 有 $D = E_i$），否则至少为 m'_j。注意，C-对 $(X, 0) \to (Y, \Delta_Y)$ 的态射恰好就是先前定义的态射 $X \to (Y, \Delta_Y)$。还要注意，这一概念在复合下保持不变：给定 C-对态射 $(X, \Delta_X) \to (Y, \Delta_Y)$ 和 $(Y, \Delta_Y) \to (Z, \Delta_Z)$，其复合 $X \to Z$ 定义了一个 C-对态射 $(X, \Delta_X) \to (Z, \Delta_Z)$。

推论 2.4. 在例 *2.1* 的情形下，态射 f 并不构成 *C*-对态射 $\sim X \to (C \times C, \Delta_f)$。

证明. 令 $\Delta \subseteq C$ 表示商态射 $C \to C$ 的分歧轨迹。由引理 2.2 可知，投影到第一个分量定义了一个 C- 对态射 $(C \times C, \Delta_f) \to (C, \frac{1}{2}\Delta)$。因此，若 $f\colon \widetilde{X} \to (C \times C, \Delta_f)$ 是一个 C- 对态射，则复合 $\mathrm{pr}_1 \circ f$ 将是一个 C-对态射 $\widetilde{X} \to (C, \frac{1}{2}\Delta)$。但这反过来会迫使 $\mathrm{pr}_1 \circ f$ 的轨形基底非平凡，这与引理 2.3 矛盾。□

第二个例子与第一个密切相关，但这次，我们有一个映射到光滑曲面的光滑三维簇，并且它们之间的映射具有连通纤维。

例 2.5. 设 C 是一条光滑拟射影曲线，设 $\sigma\colon C \to C$ 是一个至少有一个不动点的对合，并设 C 是 C 对应的（概形论意义下的）商。设 D 是一条光滑拟射影曲线，并设 $\tau\colon D \to D$ 是一个无不动点对合。考虑三维簇 $C \times C \times D$ 及其自同构 $(\sigma, \sigma, \mathrm{id}_D)$ 和 $(\mathrm{id}_C, \sigma, \tau)$。它们生成一个四阶群（同构于克莱因四元群），记作 G。设 X 是商 $(C \times C \times D)/G$。设 $X \to X$ 是一个奇点消解，它在 X 的正则轨迹上是同构。投影映射 $C \times C \times D \to C \times C$ 诱导一个态射 $X \to C \times C$，复合后得到一个态射 $f\colon X \to C \times C$。

态射 f 确实是所需例子的证明，与引理 2.2 和 2.3 中给出的证明非常相似。

引理 2.6. 在例 *2.5* 的情形下，f 的轨形基底除子 Δ_f 由 $\frac{1}{2}(\Delta \times C + C \times \Delta)$ 给出，其中 $\Delta \subseteq C$ 是商映射 $C \to C$ 的分歧轨迹。

证明. 我们首先证明，X 的奇异轨迹在 $C \times C$ 中的像包含于 $\Delta \times \Delta$ 中，因此特别是有限的。为此，注意到 X 的奇异轨迹位于 $C \times C \times D$ 中稳定子非平凡的点之下。由于假设对合 τ 没有不动点，因此 G 中唯一有不动点的元素是 $(\sigma, \sigma, \mathrm{id}_D)$。$(\sigma, \sigma, \mathrm{id}_D)$ 的不动点在 $C \times C$ 中的像由 $\Delta \times \Delta$ 给出，结论得证。

给定一点 $(c_1, c_2) \in C \times C$，其中两个 c_i 均不包含于 Δ，则 (c_1, c_2) 在 $C \times C \times D$ 中的原像由 D 的四个副本组成，它们在群 G 的作用下彼此置换。特别地，它是既约的。由于映射 $C \times C \times D \to C \times C$ 可分解为 $C \times C \times D \to X \to C \times C$，这就迫使 $X \to C \times C$ 在 (c_1, c_2) 上的纤维也为既约。因此，(c_1, c_2) 不包含在 Δ_f 的支撑中，所以 Δ_f 支撑在 $(\Delta \times C + C \times \Delta)$ 上。

另一方面，给定一点 $(c_1, c_2) \in \Delta \times (C \setminus \Delta)$，$(c_1, c_2)$ 在 $C \times C$ 中的原像由两个重数为二的非既约点组成，这迫使 (c_1, c_2) 在 $C \times C \times D$ 中的原像

也为重数为二的非既约点。同样，由于态射 $C \times C \times D \to X$ 在映射到（c_1, c_2）的点处是有限 ´ etale 的， $X \to C \times C$ 在（c_1, c_2）上的纤维也必定是重数为二的非既约纤维；这说明 Δ_f 包含项 $1\,2$（$\Delta \times C$。由对称性， Δ_f 也包含项 $1\,2$（$C \times \Delta$）；这就证明了该引理。□

前一个证明中的分析还可以让我们迅速推出以下结论。

引理 2.7. 在例 *2.5* 的情形下，态射 f 具有连通纤维。

证明。 正如引理 2.6 的证明中已经指出的，一般点 $(c_1, c_2) \in C \times C$ 在 $C \times C \times D$ 中的原像由四个 D 的副本组成，而群 G 的作用在该原像的连通分支集合上传递。特别地，取商 $X = (C \times C \times D)/G$ 后，只剩下一个 D 的副本，它显然是连通的。因此， $X \to C \times C$ 的一般纤维是连通的。由于 f 和 $X \to C \times C$ 在开子集 $(C \times C) \setminus (\Delta \times \Delta)$ 上的纤维相同，我们可知 f 的一般纤维也是连通的。由于 f 是真映射且 X 是连通的，这就迫使 f 的每个纤维都是连通的，证毕。□

引理 2.8. 在例 *2.5* 的情形中，考虑第一因子投影 $\mathrm{pr}_1\colon C \times C \to C$。那么复合 $\mathrm{pr}_1 \circ f\colon X \to C$ 的轨形基底是平凡的。

证明。与引理 2.3 的证明相同，只需构造态射 $X \to C \times C \to C$ 的一个截面。令 X' 为 $C \times C \times D$ 关于对合 $(\mathrm{id}_C, \sigma, \tau)$ 的商。 $C \times C \times D$ 的对合 $(\sigma, \sigma, \mathrm{id}_D)$ 与 $(\mathrm{id}_C, \sigma, \tau)$ 交换，因此它下降为 X' 上的对合 $[\sigma, \sigma, \mathrm{id}_D]$。因此，商态射 $C \times C \times D \to X$ 可经由 X' 分解。现在令 $c_0 \in C$ 为 σ 的一个不动点，并令 $d_0 \in D$ 为任意一点。那么，由 $c \mapsto (c, c_0, d_0)$ 给出的态射 $C \to C \times C \times D$ 给出一个态射 $C \to X'$，它分别关于对合 σ 和 $[\sigma, \sigma, \mathrm{id}_D]$ 是等变的。因此，它下降到相应的商空间，并给出所需的截面 $C \to X$。□

推论 2.9. 在例 *2.5* 的情形下，态射 f 并不构成 *C*-对态射 $X \to (C \times C, \Delta_f)$。

证明. 令 $\Delta \subseteq C$ 表示商态射 $C \to C$ 的分歧轨迹。由引理 2.6 可知，投影到第一个分量定义了一个 C- 对态射 $(C \times C, \Delta_f) \to (C, \frac{1}{2}\Delta)$。因此，若 $f\colon \widetilde{X} \to (C \times C, \Delta_f)$ 是一个 C- 对态射，则复合 $\mathrm{pr}_1 \circ f$ 也将是一个 C-对态射 $\widetilde{X} \to (C, \frac{1}{2}\Delta)$。但这又会迫使 $\mathrm{pr}_1 \circ f$ 的轨形基底非平凡，与引理 2.8 矛盾。□

3. Neat morphisms

本节讨论整洁性如何有助于确保到轨形基底的态射是一个 C-对态射，从而证明定理 B。为表述我们的论证，我们遵循 Campana [Cam11, 第 2 节5]的做法，并引入附属于光滑 C-对的对称微分 1-形式层。这里，若一个 C-对 (X, Δ) 的支集是简单正规交叉除子，我们就称其为光滑 。若 X 是光滑簇，且 $D \subseteq X$ 是约化简单正交交叉除子，我们将至多沿 D 具有对数极点的 1-形式层记为 $\Omega^1_X(\log D)$；其定义和基本性质参见 [Iit82, §11.1] 。

定义 3.1. 设 (X, Δ) 是一个光滑 C-对，且 $n \geq 1$ 为整数。我们将 (X, Δ) 上的对称 1-形式层定义为子层 $S^n\Omega^1_{(X,\Delta)} \subseteq \mathrm{Sym}^n \Omega^1_X(\log \text{支集 } \Delta)$，它在闭点 $x \in X$ 附近由以下局部生成元生成。选取局部坐标 $x_1, \ldots, x_d$

在 x 附近，使得支集 Δ 由方程 $x_1x_2\dots x_r=0$ 给出，其中某个 $r\le d$（可能为零）。令 m_i 表示除子 $\{x_i=0\}$ 在 Δ 中的重数。则局部生成元具有以下形式。

$$x^{\lceil v/m\rceil}\bigotimes_{i=1}^{n}\frac{dx_{j_i}}{x_{j_i}}=x^{\lfloor -v(1-1/m)\rfloor}\bigotimes_{i=1}^{n}dx_{j_i}$$

这里，j_1、……、j_n是 $\{1,2,\dots,d\}$的元素，符号 v 表示一个 d元整数元组，其 k项统计 j_i 等于 k 的个数，记号 $x^{\lceil v/m\rceil}$ 表示乘积$\prod_{k=1}^{d}x_k^{\lceil v_k/m_k\rceil}$，而记号 $x^{\lfloor -v(1-1/m)\rfloor}$ 含义类似。

这个层的定义方式使其对于 C-对态射具有良好的性质。

引理 3.2. 设 X 是一个光滑簇，设$(Y、\Delta)$ 是一个光滑 *C*-对，且设 $f\colon X\to(Y、\Delta)$ 是一个不通过支集 Δ分解的 *C*-对态射。那么，对每个整数 $n\ge1$，微分形式的拉回诱导出一个层态射 $f^*S^n\Omega^1_{(Y,\Delta)}\to\mathrm{Sym}^n\Omega^1_X$。

证明。 这归结为一个直接的计算；详情见 [Cam11, 命题2.11.(1)]或 [BJ24, 引理 4.3] 。□

然而，层 $S^n\Omega^1_{(X,\Delta)}$ 还具有一个很好的性质，即上述引理的逆命题成立——也就是说，可以利用该层来检测C-对态射。下面的引理与 [Cam11, 命题 2.11.(2)]类似。

引理 3.3。 设 (Y,Δ) 为一个光滑 *C*-对，且设 $f\colon X\to Y$ 为光滑簇之间的一个态射。假设 f不经由支集 Δ分解。设 N为一个整数，使得 $N\Delta$ 是一个 $\mathbb{Z}$-除子。假设对称微分的拉回 $f^*\,\mathrm{Sym}^N\Omega^1_Y\to\mathrm{Sym}^N\Omega^1_X$ 延拓为一个态射$f^*S^N\Omega^1_{(Y,\Delta)}\to\mathrm{Sym}^N\Omega^1_X$。那么 f是一个 *C*-对态射 $X\to(Y,\Delta)$。

证明。令 $D\subseteq\operatorname{supp}\Delta$ 为一个不可约分支，令 m 为其在 Δ 中的重数，并令 $E\subseteq X$ 为出现在 f^*D 中的一个素除子。我们需要证明， E 在 f^*D 中的系数至少为 m。令 η_E 为 E 的一般点，并令 $\xi:=f(\eta_E)$ 为其在 Y 中的像。为了验证 E 的重数条件，我们可以将 Y 替换为 ξ 的一个开邻域，因此可以假设 D 是一个主除子。令 y 为 Y 上零点轨迹为 D 的正则函数。现在考虑 $\frac{dy^{\otimes N}}{y^{N(1-1/m)}}$ 上的对称微分形式 Y（关于 N 的假设确保 $N(1-1/m)$ 是一个整数）。它定义了 $S^N\Omega^1_{(Y,\Delta)}$的一个整体截面。因此，根据假设，拉回 $f^*\frac{dy^{\otimes N}}{y^{N(1-1/m)}}$ 在 X 上是正则的。取离散赋值环 $\mathcal{O}_X$, η_E 的一个一致化子 t，并写作 $f(y)=ut^k$，其中 $u\in\mathcal{O}_X^\times$、η_E 和 $f(y)$ 表示 y 在环同态 $\mathcal{O}_Y$, $\xi\to\mathcal{O}_{X,\eta_E}$ 下的像，该环同态由 f 诱导。现在我们进行计算。

$$f^*\frac{dy^{\otimes N}}{y^{N(1-1/m)}}=\frac{d(ut^k)^{\otimes N}}{(ut^k)^{N(1-1/m)}}=\frac{(ut^{k-1}dt+t^kdu)^{\otimes N}}{u^{N(1-1/m)}\,t^{kN(1-1/m)}}$$

分子中唯一的 $dt^{\otimes N}$-项的系数为 $u^Nt^{(k-1)N}$，而分母包含一个指数为 $kN(1-\frac{1}{m})$的 t-幂。因此，要使该表达式成为 X上的正则形式，我们必须有$(k-1)N\ge kN(1-\frac{1}{m})$，这等价于 $k\ge m$。这意味着函数f^*y 在η_E处以 $\ge m$ 阶消失，而这正是我们所需要的。□

在将 C-对理论推广到奇异空间时，Kebekus–Rousseau 实质上将引理 3.3 变成了定义；详情见 [KR24] 。

另一方面，对于足够良好的态射 f，轨形基底上的对称微分（Y，Δ_f）会如人所愿地准确拉回。（回忆一下，若存在一个真双有理态射 $X \to X'$，使得 X'光滑，且 $X \to Y$所收缩的每个除子也都被 $X \to X'$收缩，则称光滑簇之间的支配态射$X \to Y$ 为 整洁 。）

引理 3.4. 设 $f\colon X \to Y$ 为光滑簇之间的支配态射。假设 Y 是准射影的，f 是整洁的，且轨形基底除子 Δ_f 具有简单正规交叉支撑。则对每个整数 $n \geq 1$，对称微分的拉回诱导一个态射 $f^* S^n \Omega^1_{(Y,\Delta_f)} \to \mathrm{Sym}^n \Omega^1_X$。

证明。 由假设，存在一个适当双有理态射 $p\colon X \to X'$，其中 X' 光滑，使得被 f 收缩的每个素除子也被 p收缩。现设 $U \subseteq Y$ 为一个开子集，并设 $\omega \in S^n\Omega^1_{(Y,\Delta_f)}(U)$ 为一个截面。我们必须证明 $f^*\omega$是 $f^{-1}(U)$ 上的正则对称 1-形式。由于 X光滑，层 $\mathrm{Sym}^n \Omega^1_X$是局部自由的，因此只需验证 $f^*\omega$在 $f^{-1}(U)$ 的所有余维一点处的正则性（Hartogs 引理）。

首先，考虑一个余维一点 $\eta \in f^{-1}(U)$，使得 $\xi = f(\eta)$ 在 Y 中的余维为 ≤ 1。于是存在 η 的一个开邻域 $V \subseteq f^{-1}(U)$，使得限制态射$V \to Y$不收缩任何除子。因此，它定义了一个 C-对态射 $V \to (Y, \Delta_f)$。由此，根据引理 3.2，$f^*\omega$ 在 V 上正则，特别是在 η 处没有极点。

现在，考虑一个余维一点 $\eta \in f^{-1}(U)$，使得 $\xi = f(\eta)$ 在 Y 中的余维为 ≥ 2。设 ϕ 是 Y 上的一个有理函数，使得 $\phi\omega$ 在属于 $Y \setminus U$ 的每个余维一点处都正则，并且 ϕ 在 $\xi \in Y$ 的一个邻域内既没有极点也没有零点（这样的函数存在，因为 Y 是准射影的）。由于 ϕ 在 $\xi \in Y$ 周围的一个邻域内既没有极点也没有零点，验证 $f^*\omega$ 在 η 处没有极点，等价于验证 $f^*(\phi\omega)$ 在 η 处没有极点。由于我们假设 η 被 f 收缩，它也被 p 收缩。因此，$p(\eta)$ 在 X' 中的余维至少为二。由于两个簇 X 和 X' 双有理，我们可以将 $f^*(\phi\omega)$ 视为 X' 上的一个有理多重微分形式。若它在 $p(\eta) \in X'$ 处（视为 X' 上的形式）正则，那么它在 $\eta \in X$ 处（视为 X 上的形式）也正则。由于 X' 光滑，多重微分形式的极点只出现在余维一处（再次由 Hartogs 引理可知），因此，若 $f^*(\phi\omega)$ 在 $\eta \in X$ 处不正则，则存在一个余维一点 $\tilde{\eta} \in X'$，它专化到 $p(\eta) \in X'$，使得 $f^*(\phi\omega)$ 在 $\tilde{\eta}$ 处也不正则。点 $\tilde{\eta} \in X'$ 是一个余维一点，因此，由于 p 在 X' 上的一个余维二子集之外是同构，点 $\tilde{\eta}$ 可视为 X 上的一个余维一点。显然，该点在映射 p 下不被收缩，所以在映射 f 下也不被收缩。因此，根据本证明的第二段，$f^*(\phi\omega)$ 在 $\tilde{\eta}$ 处有极点，意味着 $\tilde{\eta} \notin f^{-1}(U)$。然而，假设 $\phi\omega$ 在属于 $Y \setminus U$ 的任何余维一点处都没有极点，因此它在 $f(\tilde{\eta})$ 处不可能有极点。因此，$f^*(\phi\omega)$ 在 $\tilde{\eta}$ 处不可能有极点；这意味着 $\tilde{\eta}$ 不可能存在，从而 $f^*(\phi\omega)$ 必定在 $\eta \in X$ 处正则，进而 $f^*\omega$ 本身在 $\eta \in X$ 处正则。这正是我们要证明的。□

证明依赖辅助函数 ϕ 这一点有些奇怪，但似乎很难在没有它的情况下完成论证。如果这种依赖最终被证明是不必要的，就可以去掉对 Y 的拟射影性假设。不过，对于我们预期的应用而言，这一假设并无妨碍。还要注意，如果只想得到一个拉回态射 $\mathrm{H}^0(Y, S^n\Omega^1_{(Y,\Delta_f)}) \to \mathrm{H}^0(X, \mathrm{Sym}^n \Omega^1_X)$，那么涉及 ϕ 的技巧便无须使用。因此，H^0 上的态射无需任何拟射影性假设便存在。

结合引理 3.3 和引理 3.4，定理 B 立即得证。

4. Applications

在本节中，我们利用定理 B 证明：若 C-对推广的弱 Green–Griffiths–Lang 猜想成立，则 Campana 关于每个存在稠密整曲线的簇都是 Campana 特殊簇的猜想也成立。我们还证明了类似的结果：对于存在潜在稠密整点集的簇，弱 Bombieri–Lang 猜想也能推出相应结论（下文将明确指出我们需要哪些猜想）。

不过，在讨论这些猜想之前，我们先对一般型映射和 Campana 特殊簇作一些说明。令 X 为一个光滑簇。给定一个支配有理映射$f\colon X \dashrightarrow Y$到一个光滑簇 Y，我们可以通过与一个真双有理映射 $\overline{p}\colon X' \to X$作前合成来定义其轨形基底除子 Δ_f，其中 $f\circ p$为一个态射，并令 $\Delta_f := \Delta_{f\circ p}$。一个简单的计算表明，这实际上与 p 的选择无关，因而 [是良定义的 BJR26，引理 2.3]。我们原本想说， f 的 ***Kodaira*** 维数 是除子 $K_Y+\Delta_f$的 Iitaka 维数；然而，事实证明，这在 Y中的双有理修改下并不稳定（例如参见 [Cam04，例 1.11]）。因此，我们改为遵循 Campana，作出如下定义。

定义 4.1。 设 $f\colon X \dashrightarrow Y$ 是光滑簇之间的一个支配有理映射。 f 的 ***Kodaira*** 维数 定义为$K_{Y'}+\Delta_{f'}$ 的 Iitaka 维数的最小值，其中取遍所有与 Y双有理的光滑射影簇 Y'。（这里，我们将 $X \dashrightarrow Y'$记作 f'，它是与 f在一般点处一致的支配有理映射。）如果 f的 Kodaira 维数等于 dim Y，则称其为 一般型 。

当 f 是整洁的，且轨形基底除子 Δ_f 的支撑 [具有简单正规交叉支撑时，定义 4.1 中的最小值可以取到，见 [BJR26，注 2.11]；若 X 是真态射，则可以省去关于支集 Δ_f 的条件。映射 f 的 Kodaira 维数可解释为衡量 Y上次数最高的多重微分形式的数量；这些形式或许带有极点，而其拉回到 X 后，在无穷远处至多有对数极点且是正则的；精确陈述见 [BJR26，命题 2.9] 。现在我们可以给出如下定义。

定义 4.2。 若光滑簇 X 不允许存在一般型有理映射，且其像为正维，则称其为***Campana*** 特殊 。

定义 4.2 与引言中的定义一致，因为每个态射都可以通过双有理修改变为整洁态射；见下文引理 4.3 的证明。

回到 C-对，若光滑 C-对 (X,Δ) 中的 X 是真态射，且 $\mathbb{Q}$-除子 $K_X+\Delta$ 是大的，则称其为一般型 。因此，Campana 特殊簇的定义强烈暗示，非 Campana 特殊簇存在一个到一般型光滑 C-对的支配态射，或许需要先作双有理修改。事实确实如此，但这并非定义的形式推论，如第 2 节中的例子所示。尽管如此，文献中多次有人作出这一断言，以至于几乎可以将其视为“众所周知的知识”。这一断言的源头或许只是对 [Cam04]和[Cam11]，，尤其是 [Cam11，命题 4.10]的结果过于乐观的解读。因此我们明确强调，现在陈述的结果并非 [Cam11，命题 4.10]的特殊情形。

引理 4.3。 设 X 是一个非 ***Campana*** 特殊的光滑簇。那么存在一个真双有理态射 $X \to X$，其中 X 光滑；还存在一个一般型的光滑 ***C***-对 (Y,Δ)，其中 Y 射影，使得存在一个支配 ***C***-对态射 $X \to (Y,\Delta)$。

证明。 由于 X 不是 Campana 特殊，它存在一个一般型纤维化 $X \dashrightarrow Y$，其中 Y是一个光滑真簇（例如 X的核）。取一个适当双有理态射 $X' \to X$，使得 X' 光滑

且 $f\colon X' \to Y$ 是一个态射。根据 Raynaud–Gruson 平坦化 [RG71，定理 5.2.2]，存在一个适当双有理态射 $Y' \to Y$，使得若 X'' 表示 $X' \times_Y Y'$ 的主分支，则诱导态射 $X'' \to Y'$ 是平坦的。进一步对 Y' 进行爆破后，还可假设 Y' 是光滑射影的，且 $\operatorname{supp} \Delta_f$ 的全变换是 Y' 上的一个简单正规交叉除子。令 $\widetilde{X}$ 为 X'' 的奇点消解。我们断言 $g\colon X \to Y'$ 是整洁的。事实上，被 g 压缩的每个除子 $\widetilde{}$ 都必定已被 $X \to X''$ 压缩，因为 $X'' \to Y'$ 是平坦的。特别地，被 g 压缩的每个 $\widetilde{}$ 除子也被 $X \to X'$ 压缩，这证明了 g 的整洁性。此外，由于 $\sim g\colon X \to Y'$ 是态射 $f\colon X' \to Y$ 的一个双有理模型，很容易看出 Δ_g 的支撑包含于 Δ_f 的支撑的全变换中。特别地，Δ_g 支撑在一个 $\widetilde{}$ 简单正规交叉除子上。因此，由定理 B，态射 g 是一个 C-对态射 $X \to (Y', \Delta_g)$。由于 $X \to Y$ 是一般型纤维化，数对 (Y', Δ_g) 是一般型的，因此结论成立。□ ---

利用引理 4.3，定理 C 和 D 的证明现在已是标准的。但让我们精确说明究竟需要哪些猜想。

4.1. **稠密整曲线**。 我们从定理 C 的证明开始，该定理涉及稠密整曲线。首先注意到，在复数上，引言中给出的 C-对态射定义可以逐字沿用，从而给出从复流形到 C-对的态射概念。因此，我们可以作出如下定义。

定义 4.4。 设 (X, Δ) 为 $\mathbb{C}$ 上的一个 C-对。一条整曲线 是一个全纯 C-对映射 $\mathbb{C} \to (X, \Delta)^{\mathrm{an}}$。一条稠密整曲线 是其像在 X 中扎里斯基稠密的整曲线。

Green–Griffiths–Lang 猜想断言：给定复数上一个一般型的光滑射影簇 X，存在一个真扎里斯基闭子集 $Z \subsetneq X$，使得每条非常值整曲线都经由 Z 分解。作为推论，它预言这样一个正维的 X 不容许稠密整曲线；然而这一具体推论弱于“完整的”Green–Griffiths–Lang 猜想，因此我们称之为弱 *Green–Griffiths–Lang* 猜想。C-对的弱 Green–Griffiths–Lang 猜想现在表述如下；它是[Cam11 猜想 13 的一个特殊情形。17]。

猜想 4.5 （C-对的弱 Green–Griffiths–Lang 猜想）。设（X, Δ）是复数域上的一般型光滑 *C*-对，且 X 射影且正维。那么（X, Δ）不包含稠密整曲线。

若某个（从而每个）紧化 $X \subseteq X$ 的边界 $D := X \setminus X$ 是简单正规交叉除子，且除子 $K_X + D$ 是大除子，则称光滑簇 X 为对数一般型。在这种情况下，(X， D) 是一般型 C-对，因此弱 Green–Griffiths–Lang 猜想预言，(X， D) 不包含稠密整曲线。等价地， X 不包含稠密整曲线。

定理 *C* 的证明。 X 上的稠密整曲线可提升为 X 的任意消解上的稠密整曲线。因此，我们可以假设 X 是光滑的。现在我们用反证法证明结论，假设 X 不是 Campana 特殊的。根据假设，存在一个全纯映射 $\mathbb{C} \to X^{\mathrm{an}}$，其像扎里斯基稠密。如果 X 是一般型，这就与簇 X 的弱 Green–Griffiths–Lang 猜想矛盾，结论即得。因此，我们可以假设 X 不是一般型。$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ 根据引理 4.3，存在一个真双有理态射 $X \to X$，其中 X 光滑，并且存在一个一般型的光滑 C-对 (Y, Δ)，其中 Y 是射影的，使得存在一个支配 C-对态射

$\sim$ $\sim f\colon X \to (Y,\Delta)$。如果 $\dim Y = \dim X$，黎曼–赫尔维茨公式蕴含 $f^*(K_Y+\Delta) \le K_{\widetilde{X}}$，因此 $K_Y+\Delta$ 的 Iitaka 维数至多为 $K_{\widetilde{X}}$的 Iitaka 维数，而后者就是 $\sim$ $\sim$ $\sim X$的 Kodaira 维数。因此，由于 X 不是一般型，我们必有 $\dim Y < \dim X$。整曲线 $\mathbb{C} \to X^{\mathrm{an}\sim}$ $\sim$沿真双有理态射 $X \to X$ 提升为整曲线 $\mathbb{C} \to X^{\mathrm{an}}$，其像仍然扎里斯基稠密。复合映射后，我们得到 $(Y,\Delta)^{\mathrm{an}}$中的一条稠密整曲线，这与 C-对 (Y,Δ)的弱 Green–Griffiths–Lang 猜想矛盾。□

注意，如果在定理 C 的表述中只考虑维数为 $\le n$ 的真 X，那么只需假设维数为 $\le n$ 的光滑射影簇 X 满足弱 Green–Griffiths–Lang 猜想即可。然而，仍需假设所有维数为 $\le n-1$ 的 C-对都满足弱 Green–Griffiths–Lang 猜想，这也就包括假设所有维数为 $\le n-1$ 的准射影簇都满足该猜想。（看起来似乎只需假设具有有限 重数的 C-对满足该猜想，但很容易看出，这种情形可以推出所有 C-对都满足该猜想；详见[BCJW26，第 6 节。1]）

4.2. **整点的稠密性**。 证明数论定理 D 的策略与证明复解析定理 C 的策略类似。不过，为了准确陈述这些猜想，我们需要讨论簇和 C-对上的整点。若 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的簇，且 $R \subseteq \mathbb{Q}$ 是一个子环，那么 X 在 R 上的一个模型 是一个配备同构$\mathcal{X} \otimes_R \mathbb{Q} \cong X$的 R-概形 $\mathcal{X}$。

定义 4.6。 设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$的某个子域上的簇。若存在一个数域 K、 K的有限位的有限集 S，以及 X 在$\mathcal{O}_K$上的有限型分离模型 $\mathcal{X}$，S 使得 X中的 $\mathcal{X}(\mathcal{O}_K,\ S) \subseteq X(\mathbb{Q})$ 扎里斯基稠密，则称 X 具有整点的潜在稠密性。

若 X是真，则模型 $\mathcal{X}$可取为真模型。此时，我们有 $\mathcal{X}(\mathcal{O}_K,\ S) = \mathcal{X}(K)$，因此整点的潜在稠密性等价于 X上有理点的潜在稠密性。C-对的潜在稠密性定义稍为复杂。

定义 4.7。设(X,Δ)是定义在 $\mathbb{Q}$的某个子域上的 C-对，设 K 是一个数域， K是其有限位的有限集。设 X 是$\mathcal{O}_K$上的 $\mathcal{X}$ 的一个模型， $\Delta_{\mathcal{X}}$ 是 $\mathcal{X}$中 Δ 的闭包。记 $\Delta_{\mathcal{X}} = \sum_i (1-\frac{1}{m_i})D_i$。那么，态射 $f\colon \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K,S} \to \mathcal{X}$是$(\mathcal{X},\Delta_{\mathcal{X}})$的一个整点，如果它与 $\lfloor \Delta_{\mathcal{X}} \rfloor$ 不相交，并且对每个 i，要么 f经由 D_i 分解，要么 f^*D_i的每个系数都至少为 m_i。若对于上述 K、 S和 $\mathcal{X}$的某种选择，$(\mathcal{X},\Delta_{\mathcal{X}})$的整点在 X 中扎里斯基稠密，则称(X,Δ)具有整点的潜在稠密性。

之所以作此定义，是因为这恰好就是“C-对态射”$\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K,S} \to (\mathcal{X},\Delta_{\mathcal{X}})$ 应有的形式（只是我们尚未在如此一般的情形下定义 C-对态射）。证明 C-对态射可以复合的同一计算，便可轻易推出下述引理。

引理4.8. 设 X 是一个光滑簇，设 (Y,Δ) 是一个 *C*-对，并设 $f\colon X \to (Y,\Delta)$ 是一个支配 *C*-对态射。假设 X 具有整点的潜在稠密性。那么(Y,Δ) 具有整点的潜在稠密性。

Bombieri–Lang猜想断言：给定数域 K 上的一般型光滑射影簇 X，存在一个真闭子集 $Z \subsetneq X$，使得对于所有扩张 K 的数域 L，簇 X 的几乎所有 L-有理点都落在 Z 中。因此，该猜想预言，这样的正维簇 X 不具有有理点的潜在稠密集；这一特定

推论却弱于“完整的”Bombieri–Lang猜想，因此我们称之为弱 *Bombieri–Lang* 猜想。关于 C-对的弱 Bombieri–Lang 猜想表述如下；它是 [Cam11，猜想13.23]的一个特殊情形。

猜想4.9 （C-对的弱 Bombieri–Lang 猜想）。 设（X, Δ）是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的一般型光滑 *C*-对，其中 X 射影且正维。那么（X, Δ）不具有整点的潜在稠密性。

与弱 Green–Griffiths–Lang 猜想的情形类似，C-对的 Bombieri–Lang 猜想特别蕴含：给定一个对数一般型光滑簇 X，它不具有整点的潜在稠密性。

定理 D 的证明。整点的潜在稠密性在真双有理态射下不变，因此我们可以假设 X 光滑。现在我们用反证法证明该结果，假设 X 不是 Campana 特殊的。根据假设， X 有一个潜在稠密的整点集。如果 X 是一般型，这就直接与关于簇 X 的弱 Bombieri–Lang 猜想矛盾，证明即告完成。因此我们可以假设 X 不是一般型。由引理 4.3， $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ 存在一个真双有理态射 $X \to X$，其中 X 光滑；并且存在一个一般型光滑 C-对（Y, Δ），其中 $\widetilde{\ }$ 一般型、 Y 射影，使得存在一个支配 C-对态射 $f\colon X \to$（Y, Δ）。若 $\widetilde{\dim}\ Y = \dim\ X$，则由黎曼–赫尔维茨公式可得 $f^*(K_Y + \Delta) \leq K_{\widetilde{X}}$，因此 $K_Y + \Delta$ 的 Iitaka 维数至多为 $K_{\widetilde{X}}$ 的 Iitaka 维数，也就是 X 的 Kodaira 维数。于是，由于 $\widetilde{X}$ 不是一般型，必有 $\dim\ Y < \dim X$。再次利用整点的潜在稠密性在真双有理态射下不变这一性质，我们看到 X 有一个潜在稠密的整点集。由引理4.8可知，（Y, Δ）具有整点的潜在稠密性，这与关于 C-对（Y, Δ）的弱 Bombieri–Lang 猜想矛盾。□

与定理 C 一样，若在定理 D 的陈述中将范围限制为维数为 $\leq n$ 的真 X，则只需假设维数为 $\leq n$ 的光滑射影簇 X 满足弱 Bombieri–Lang 猜想即可。不过，仍需假设维数为 $\leq n-1$ 的所有 C-对都满足弱 Bombieri–Lang 猜想，这也意味着还需假设所有维数为 $\leq n-1$ 的准射影簇都满足该猜想。

References

[BCJW26] F. Bartsch、F. Campana、A. Javanpeykar 和 O. Wittenberg。弱特殊猜想与轨形莫德尔猜想矛盾，因而也与 abc猜想矛盾。2026年。[BJ24] F. Bartsch 和 A. Javanpeykar。一般型轨形对的小林—落合有限性定理。*J. Inst. Math. Jussieu*，23(6):2713–2732，2024。[BJR26] F. Bartsch、A. Javanpeykar 和 E. Rousseau。一般型映射的 Maehara-Severi定理。*Preprint*， *arXiv:2602.02314*，2026年。[Cam04] F. Campana。轨形、特殊簇与分类理论。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，54(3):499–630，2004。[Cam11] F. Campana。紧致凯勒流形的特殊几何轨形与双有理分类。 *J. Inst. Math. Jussieu*，10(4):809–934，2011。[Cam23] F. Campana。特殊流形的阿尔巴内塞映射：勘误。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，73(5):1903– 1908，2023。[CP07] F. Campana 和 M. P˘aun。被退化整曲线所覆盖的弱特殊簇。 *Compos. Math.*，143(1):95–111，2007。[CW09] F. Campana 和 J. Winkelmann。轨形的布罗迪定理。 *Manuscripta Math.*，128(2):195–212，2009。

[Iit82] S. Iitaka。 *Algebraic geometry*，第24卷， *North-Holland Mathematical Library*。Springer-Verlag，纽约—柏林，1982。代数簇双有理几何导论，《数学研究生教材》第76卷。[JR22] A. Javanpeykar 和 E. Rousseau。函数域上拥有许多有理点的簇的阿尔巴尼斯映射与基本群。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(24):19354–19398，2022。[KR24] S. Kebekus 和 E. Rousseau。C-对及其态射。 *Preprint, arXiv:2407.10668*，2024。[RG71] M. Raynaud 和 L. Gruson。平坦性与射影性准则。模的“平坦化”技术。 *Invent. Math.*，13:1–89，1971。

Finn Bartsch, IMAPP Radboud University Nijmegen, PO Box 9010, 6500GL, Nijmegen, The Nether-lands,*Email address*: f.bartsch@math.ru.nl