arXiv:2603.06086v1 [hep-th] 6 Mar 2026

# 具有四次多项式势的双分量标量场论中的 BPS 与半 BPS 扭结族

A. Alonso-Izquierdo[1,2],M. A. Gonz´alez Le´on[1,2],A. Gonz´alez-Parra[2],J. Mart´ın-Vaquero[1,2]

[1] 应用数学系，萨拉曼卡大学，Casas del Parque 2，37008 - 西班牙萨拉曼卡。[2] IUFFyM，萨拉曼卡大学，Plaza de la Merced 1，37008 - 西班牙萨拉曼卡

**摘要**

我们系统地研究了（$1+1$）维、相互作用项最高为四次阶的双分量标量场论中的扭结解。我们的方法基于 Bogomolny形式主义，通过适当的超势构造标量势，并分析相应的一阶方程。虽然三次多项式超势自然会产生四次相互作用项，但我们表明，更一般的函数形式也能导出同一类别中符合要求的模型。由此，我们找到了支持连续扭结族的新模型；这些扭结具有非平凡的内部结构，因此可解释为由多个局域能量团构成的复合构型。

## 1 引言

拓扑缺陷是非线性标量场论中的解，其能量密度局域化，因此表现为延展粒子。一般而言，由于存在守恒荷——拓扑荷，它反映了构型空间的拓扑结构，因此这类构型无法衰变为该理论的真空。此外，这些缺陷所揭示的非微扰现象目前在许多领域都备受关注；例如，它们有助于解释凝聚态物理 [1–3], 宇宙学 [4],生物化学 [5],光学 [6],等领域中墙和膜的存在。

本文将聚焦于扭结，即 $(1+1)$ 维标量场论中的拓扑缺陷。尽管只涉及一个实标量场，诸如 $\phi^4$ 理论这样的典型模型仍展现出异常丰富的动力学行为，这主要归因于其非可积性 [7–10]。将理论扩展到包含多个标量分量的情形，会大幅拓展可能的静态解范围；数十年来，在这类模型中系统地寻找扭结构型一直是活跃且成果丰硕的研究领域 [11–13]。在这一更广泛的背景下，求得缺陷的显式解析表达式尤为重要，因为这有助于深入了解其结构、稳定性与相互作用。已有多种方法框架被证明能有效解决这一问题。一种重要方法基于相应力学类比系统的 Hamilton–Jacobi可分离性，由此确保完全的 Liouville可积性，并能够显式构造扭结轨道 [13–15]。变形方法等其他技术也产生了大量可解析处理的模型与解 [16–21]。另一种强大且广泛使用的方法是 Bogomolny 配置 [22], ，它将静态扭结解的求解归结为求解一组一阶常微分方程。这一构造依赖于超势函数的存在，其梯度（定义在内部场空间中）决定标量势，后者等于该梯度平方范数的一半。在单场模型中，这样的超势总是可以构造出来，并且除一个加法常数外是唯一确定的。相比之下，对于多分量理论，超势的存在并无保证。事实上，取决于模型的结构，可能

根本不存在超势；也可能存在一个、两个，甚至多个彼此具有非平凡关系的超势[13, 23, 24]。

从理论角度来看，包含多个分量且具有至多四次阶多项式相互作用的标量场论，在经典与量子框架中都占据着独特地位。在量子场论中，四次及以下的多项式势可在 $(1+3)$ 维中导出微扰可重整化模型。这一要求严格限制了允许的自相互作用，并凸显出四次项是与幂次计数可重整化性相容的最高阶算符。因此，多场 $\phi^4$ 型理论为一致地研究非平凡相互作用、对称性破缺模式和拓扑扇区提供了天然平台，同时无需引入难以控制的紫外发散。除了可重整化性之外，四次多项式势也自然地作为统计与凝聚态系统中临界点附近的有效描述出现。在朗道–金兹堡范式中，自由能被展开为序参量的多项式，通常只需截断至四次阶，便足以刻画自发对称性破缺、相变以及简并真空的结构。在包含多个标量场的模型中，这一框架能够容纳丰富的真空流形和对称性破缺方案，从而产生多种多样的拓扑缺陷和界面解。因此，四次截断构成了这样一种最简设定：既能得到多个孤立极小值，又保有解析处理的便利。

在本工作中，我们系统地分析了 $(1+1)$ 维时空中相互作用项最高为四次阶的双分量标量场论。我们采取的策略是通过恰当选取超势函数来构造模型，再由标准的一阶（Bogomolny）框架导出标量势。尽管三次多项式超势自然会产生四次标量相互作用，但这并未涵盖此类模型的所有可能实现。事实上，更复杂的函数形式也能导出次数不超过四次的势；我们的目标之一，便是在统一的框架下厘清并整理这些不同的可能性。为避免参数过多，我们施加离散的 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 对称性，对应于对每个标量场分量进行反射。这一假设显著限制了允许的相互作用，同时仍保留了足够丰富的现象学特征。值得强调的是，对内部场空间进行平移或旋转，可以直接推广本文考虑的模型，而不会改变解的结构。我们将特别关注那些具有单参数扭结解族的模型。这类解族的小涨落谱必然包含两个零模：一个对应于物理空间中的平移不变性，另一个则反映了静态解族本身存在连续简并。我们关注这类理论，是因为其中的拓扑缺陷具有尤为丰富的结构。在这些情况下，扭结会形成内部结构，并可解释为由多个局域能量团构成的复合对象；这些能量团的相对排列由标记该解族的连续参数控制。这种内部模空间结构赋予缺陷额外的动力学特征，使其从数学和物理角度来看都格外引人关注。

自然地，上述框架涵盖了文献中已经研究过的模型，主要是通常称为 MSTB 和 BNRT 的模型。然而，本文的核心目标是确定：在 $(1+1)$ 维、至多具有四次相互作用并具有 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 对称性的双分量标量场论中，已知实例是否穷尽了所有能够容纳扭结解族的可能性。我们的分析表明，事实并非如此。基于超势方法的构造性程序使我们能够识别出此前尚未研究过的新模型，而这些模型仍然支持连续的拓扑缺陷族。尽管我们将主要关注这些新颖系统，但也将重新考察文献中已有记载的经典模型，旨在突出并比较当标量势包含不同类型的相互作用时，扭结族可能形成的不同内部结构。为强调前述经典模型的重要性，下面介绍一些历史背景：

1. 如今称为 MSTB 系统的模型最初由 Montonen 于 1976 年提出，当时他在具有全局 $U(1)$ 对称性的复标量场论背景下研究带电孤子 [25]。在参数范围 $\sigma \in (0,1)$ 内，人们发现了两种不同类型的拓扑扭结：一类是单分量解，其中一个场分量消失，剩余分量复现标准的 $\phi^4$ 扭结剖面；另一类是真正的双分量解，其在内部空间中受限于椭圆轨道。Rajaraman 和 Weinberg 早期的工作中已经出现了相关的孤立波 [26], ，使该模型处于新兴的多场缺陷研究的交汇点。不久之后，Sarker、Trullinger 和 Bishop 进行的详细稳定性分析阐明了拓扑扇区的结构 [27]。尽管嵌入的 $\phi^4$ 扭结仍是双场理论的一个静态解，但它在扩展后的构型空间中变得不稳定，而双分量扭结则在能量上是稳定的。随后， [28]开展了基于小涨落的进一步分析。与此同时，Rajaraman 发现了一个非拓扑扭结解 for $\sigma = \frac{1}{2}$ [29]，后来证明它属于在 $\sigma \in (0,1)$ [30, 31] 内存在的单参数族。这些解被证明是不稳定的，并且满足一个能量和规则，将其总能量与拓扑扭结的总能量联系起来。对 MSTB 系统数学理解的一个决定性进展，是 Magyari 和 Thomas 证明了相关力学类比系统的完全可积性 [32]。研究表明，静态场方程在椭圆坐标中可进行哈密顿–雅可比分离，从而使 Ito 得以获得完整扭结轨道族的隐式表达式，并通过莫尔斯指标论证确立其不稳定性 [23, 33]。Mateos-Guilarte 的一系列工作进一步发展了这一几何观点：其中，扭结流形被解释为莫佩尔蒂–雅可比作用量的测地线，并通过莫尔斯理论加以分析 [34–36]。后续研究揭示，MSTB模型并非孤立的实例，而是更广泛的多分量标量理论中的一个原型；这一理论在不同情形下得到了推广 [14, 37–39]。该模型中涉及不同扭结、其激发态及衰变道的散射过程已在 [40, 41] 中得到研究。稳定拓扑扭结的半经典量子化则已在 [42–44]中得到考察。

2. Bazeia 及其合作者在参考文献 [12, 45], 中讨论了 BNRT 模型，作者在其中确定了一对拓扑扭结。Shifman 和 Voloshin 指出，这类系统可由一个含有两个手征超场的广义 Wess-Zumino 模型经维数约化得到 [46, 47]。他们发现，该模型中的静态扭结流形包含一个由能量简并复合扭结构成的一参数族。这些解由两个属于不同拓扑扇区、中心位于不同位置的基本扭结组成。文献 [48]明确证明了其中一些解的稳定性。此外，Sakai 和 Sugisaka 还从解析角度探究了畴壁–反畴壁对束缚态的存在性 [49]。文献 [50]构造了该模型的一个与局域超对称性相容的超对称版本，其中（1+1）维模型的扭结提升为 $\mathcal{N} = 1$ （3+1）维超引力的精确延展解。在这一框架下，Bazeia 在 [51]中研究了翘曲时空中该标量场论模型与（4+1）维引力的耦合。文献 [52, 53]探讨了拓扑缺陷平面网络的形成。文献 [54, 55]研究了量子诱导相互作用如何打破静态扭结族的经典能量简并。文献 [56] 首次在绝热近似下研究了该模型的扭结动力学，假设扭结运动极其缓慢；而文献 [57]则考察了更一般的框架。

上述模型的历史概述清楚地展现了它们长期以来所引发的关注，以及广泛的应用范围。从可积性和稳定性分析，到超对称扩展、引力耦合、量子修正及动力学研究，这些系统为各种分析和物理思想提供了肥沃的试验场。同时，它们丰富的模空间结构及其所支持的多样化扭结族，凸显了具有四次相互作用的多分量标量场理论所蕴含的结构可能性。这

一视角自然促使人们在相同的总体框架内寻找新模型，以纳入不同的相互作用模式，并在扭结解空间中产生新颖的构型。本研究正是在这一背景下展开的。

本文结构如下。第2节介绍（$1+1$）维多分量标量场理论的一般框架，以及全文采用的工作假设。特别是，我们引入 BPS 和半 BPS 扭结的概念，并建立后续分析所需的基本工具。第3节系统搜索满足我们对称性和结构限制的模型，首先聚焦于由三次多项式超势生成的模型。第4节将这一构造推广到与仅有一个奇点的无理超势相关的模型。在这一类模型中，我们找到了新的理论，并详细研究其扭结流形和稳定性。第5节对由含有两个奇点的无理超势导出的模型开展类似分析。第6节探讨我们称为合流的现象，即给定的标量势可能由多个超势生成。这一特性意味着单个模型可能容纳多个不同的扭结族，因此也可能呈现内部结构显著更加丰富的静态解。最后，第7节总结主要结果，并概述若干未来研究方向。

## 2 双分量标量场论中的 BPS 和半 BPS 扭结

考虑一个定义在 $(1+1)$ 维闵可夫斯基时空中的双分量场论。该模型的动力学由以下作用量支配：

$$S[\phi_1,\phi_2]=\int d^2x\Big(\sum_{a=1}^{2}\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a-U(\phi_1,\phi_2)\Big), \tag{1}$$

其中，$\phi_a\in \mathrm{Maps}(\mathbb{R},\mathbb{R})$、$a\in\{1,2\}$为实标量场，时空指标采用爱因斯坦求和约定。闵可夫斯基度规取为 $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\{1,-1\}$，从现在起将使用记号$x^0\equiv t$, $x^1\equiv x$。此外，势能项 $U(\phi_1,\phi_2)$ 被视为正半定函数。

作用量泛函 (1) 的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}=-\frac{\partial U}{\partial \phi_1}\quad,\quad \frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}=-\frac{\partial U}{\partial \phi_2} \tag{2}$$

特定场构型的守恒能量为

$$E[\phi_1,\phi_2]=\int_{-\infty}^{\infty}dx\Big[\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{2}\Big(\frac{\partial\phi_a}{\partial t}\Big)^2+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{2}\Big(\frac{\partial\phi_a}{\partial x}\Big)^2+U(\phi_1,\phi_2)\Big]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\mathcal{E}[\phi_1(x^\mu),\phi_2(x^\mu)]. \tag{3}$$

这里，$\mathcal{E}[\phi_1(x^\mu)\ \phi_2(x^\mu)]$ 是该场所携带的能量密度。构型空间定义为从时空到内部空间的有限能量映射的集合，即 $\mathcal{C}=\{\Phi(x^\mu)\equiv(\phi_1(x^\mu)\ \phi_2(x^\mu)):E[\Phi(x^\mu)]<\infty\}$。构型属于构型空间的必要条件是

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial\Phi(x^\mu)}{\partial t}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial\Phi(x^\mu)}{\partial x}=0,\qquad\text{and}\qquad\lim_{x\to\pm\infty}\Phi(x^\mu)\in\mathcal{M}, \tag{4}$$

其中，$\mathcal{M}$ 是该模型的真空流形，由势的简并零点集合构成，

$$\mathcal{M}=\big\{v_i=(v_i^1,v_i^2)\in\mathbb{R}^2\ :\ U(v_i)=0,\ i\in 1,...,n\big\} \tag{5}$$

其中 $n$ 为真空态总数。这里，我们将 $\mathcal{M}$ 视为离散集合。
中的每个元素 $\mathcal{M}$都是方程（2）的零能量常数解。此外，场的渐近值是一个运动常数，因为任何变化都需要无限多的能量。因此，构型空间是以下个不连通拓扑扇区的并集：，$_j\mathcal{C}_{ij}$，其中下标$i$，$j$ 分别指在 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$ 处达到的真空。

我们关注以恒定速度传播的解，即孤立波。为此，方程（1）在洛伦兹变换下的不变性使我们能够寻找静态构型（$\phi_1$（$x$） $\phi_2$（$x$））， 因此，场方程可化为如下常微分方程组

$$\frac{d^2\phi_1}{d\,x^2} = \frac{\partial U}{\partial\,\phi_1}, \qquad \frac{d^2\phi_2}{d\,x^2} = \frac{\partial U}{\partial\,\phi_2}. \tag{6}$$

将 $x$ 重新解释为时间坐标，并将（$\phi_1$， $\phi_2$）视为在 $\mathbb{R}^2$上运动的粒子的坐标，系统（6）不过就是该粒子在势$V = -U$下的经典运动方程，而静态能量泛函现在起着力学作用量的作用：

$$E[\phi_1, \phi_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Big[\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{2}\Big(\frac{\partial\phi_a}{\partial\,x}\Big)^2 + U(\phi_1, \phi_2)\Big]\ . \tag{7}$$

在涉及两个标量场的模型中，只要势 $U(\phi_1,\ \phi_2)$ 能表示为超势 $W(\phi_1,\ \phi_2)$ 的形式，就可以应用Bogomolny方法：

$$U(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial\,\phi_1}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial\,\phi_2}\Big)^2. \tag{8}$$

按构造，该关系确保势 $U(\phi_1,\ \phi_2)$ 非负，并且系统的真空态对应于超势 $W(\phi_1,\ \phi_2)$ 的临界点。若超势可微，则静态能量泛函（7）可改写为

$$E[\phi_1, \phi_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{a=1}^{2}\Big(\frac{d\phi_a}{d\,x} + (-1)^{\alpha}\frac{\partial W}{\partial\,\phi_a}\Big)^2 + T \quad , \tag{9}$$

其中 $\alpha = 0,\ 1,\ T$ 是一个拓扑量，定义为

$$T = \Big|\int_{v_i}^{v_j} dW\Big|$$

最低能量解是那些使 BPS界取等的解，即满足以下一阶常微分方程组的解

$$\frac{d\phi_1}{dx} = (-1)^{\alpha}\frac{\partial W}{\partial\,\phi_1}, \qquad \frac{d\phi_2}{dx} = (-1)^{\alpha}\frac{\partial W}{\partial\,\phi_2}; \tag{10}$$

其能量完全取决于它们所属的拓扑扇区，

$$E[\phi_1, \phi_2] = T = |W(\Phi(\infty)) - W(\Phi(-\infty))|\ \ . \tag{11}$$

满足一阶方程组（10）且连接两个不同真空态的解称为*BPS kink*。式（$-1$）$^{\alpha}$ 中出现的因子（10）可以有两种不同的解释：它可以吸收到空间坐标 $x$中，此时，扭结型解和反kink型解可通过空间反射由同一组方程相互联系。或者，也可以将该因子直接并入$\widetilde{\ }$超势 $W$，从而得到两个不同的超势，即 $W$和 $W = -W$。

在某些模型中，超势在一个或多个点处不可微；尽管如此，Bogomolny构造仍可分段应用。在这种情况下，若 $\Phi_0 = \Phi(x_0)$是解所经过的奇点，则能量必须表示为如下形式

$$E[\phi_1, \phi_2] = \int_{-\infty}^{x_0} dx \sum_{a=1}^{2}\Big(\frac{d\phi_a}{d\,x} + (-1)^{\alpha}\frac{\partial W}{\partial\,\phi_a}\Big)^2 + \int_{x_0}^{\infty} dx \sum_{a=1}^{2}\Big(\frac{d\phi_a}{d\,x} + (-1)^{\beta}\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial\,\phi_a}\Big)^2 + T \quad , \tag{12}$$

其中 $W$ 与 $W$ 可表示超势的任意一种与符号相关的形式。于是，解的每一段都满足不同的一阶微分方程，而总能量不仅取决于真空态，还取决于超势的奇异点，

$$E[\phi_1,\phi_2] = T = |W(\Phi(\infty)) - W(\Phi_0)| + |W(\Phi(-\infty)) - W(\Phi_0)| \quad . \tag{13}$$

在这些情况下，我们将其称为半*BPS*解。

无论如何， $\phi_1$-$\phi_2$ 平面上的 BPS 或半BPS 扭结轨迹都满足一阶微分方程

$$\frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \frac{\partial W/\partial\phi_1}{\partial W/\partial\phi_2}. \tag{14}$$

对于一个或多个超势。

在本文中，我们着重于识别遵循上述方案并产生 BPS 型和半BPS 型扭结族的模型。为便于比较不同模型，我们要求其势在 $\phi_1$ 轴上的投影重现标准的 $\phi^4$ 模型，即

$$U(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{2}(1-\phi_1^2)^2 + \phi_2^2\, f(\phi_1,\phi_2); \tag{15}$$

其中， $f(\phi_1,\phi_2)$ 是一个正半定二次多项式。为简便起见，我们还要求内部空间具有 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 对称性，即势在以下反射变换下保持不变： $U((-1)^a\phi_1,(-1)^b\phi_2) = U(\phi_1,\phi_2)$，其中 $a,b = 0,1$。因此，本文所考虑的所有模型至少都有两个真空态，位于

$$A_\pm = (\pm 1, 0) \tag{16}$$

而且它们总是存在连接这些真空态的标准 $\tanh(x)$-扭结，即表达式

$$\mathcal{K}_1^{(\alpha)}(x) = ((-1)^\alpha \tanh\bar{x},\, 0) \tag{17}$$

这对应于该模型的一个单非零分量扭结解。这里， $\alpha = 0$ 表示扭结解， $\alpha = 1$表示反扭结。此外， $\bar{x} \equiv x - x_0$, $x_0$ 是一个积分常数，用于确定扭结中心。下标表示该解在内平面 $\phi_1$-$\phi_2$ 上的 $\phi_1$ 轴内仅包含一个非零分量。从现在起，我们将分别把 $i$ 轴上含一个非零分量的扭结解或反扭结解称为 $\mathcal{K}_i(x)$，而将连接真空态 $v_i$， $v_j$ 的解称为 $\mathcal{K}_{v_iv_j}(x)$。

本文探讨的核心问题是：如何将这一单分量标量场理论（即 $\phi^4$模型）推广，使其在引入额外的内自由度 $\phi_2$后产生扭结族。请注意，考虑形式为 (15) 的势并不失一般性，因为任何具有至少两个真空态的其他多项式表达式，都可通过在 $\phi_1$-$\phi_2$ 平面中的旋转和平移与表达式 (15) 联系起来。

遵循前述框架，我们提出两类超势。由于我们要研究的势是四次多项式，一种自然的做法是考虑三次超势，并在所需约束下对由此得到的模型进行分类。另一种途径（可导出半 BPS 扭结族）是引入含有奇点的无理函数超势。据我们所知，这种构造产生了全新的模型，此前文献中尚未对此进行研究。

## 3 多项式超势模型

在本节中，我们为超势采用多项式拟设

$$W(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{3}\phi_1^3 + a_1\,\phi_1 + a_2\,\phi_1^2\,\phi_2 + a_3\,\phi_1\,\phi_2^2 + a_4\,\phi_2^3 + a_5\,\phi_2, \qquad a_i\in\mathbb{R}, \tag{18}$$

其中，首项的系数已固定，以重现表达式（15）的结构，即 $\phi^4$-势的二次项系数。将形式（18）代入关系式（8），并施加先前引入的 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-对称性约束后，若干系数 $a_i$ 将被确定，或可用其余自由参数表示。通过这一过程，我们可以确定不同的单参数超势族及其对应的势，列举如下：

- **情形 1：** *Wess-Zumino*型模型：在这种情况下，单参数族超势

$$W_1(\phi_1,\phi_2)=\frac{\alpha\,\phi_1\left(-\phi_1^2+3\phi_2^2+3\right)+\phi_2\left(-3\phi_1^2+\phi_2^2+3\right)}{3\sqrt{\alpha^2+1}},\qquad \alpha\in\mathbb{R}, \tag{19}$$

导出如下形式的单一势

$$U_1(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{2}\left(1-\phi_1^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(1+\phi_2^2\right)^2+\phi_1^2\phi_2^2-\frac{1}{2}; \tag{20}$$

因此，尽管势 $U_1(\phi_1,\ \phi_2)$ 是由包含自由参数 $\alpha$ 的超势生成的，但由此得到的势是一个系数全为数值的多项式表达式。换言之，$U_1(\phi_1,\ \phi_2)$ 对应于单一势，但它仍允许存在无穷多个超势。这种现象在 Wess–Zumino模型 [58] 中广为人知，并且与超势为调和函数有关。事实上，如果将内部空间 $\mathbb{R}^2$ 通过标准对应关系 $\phi_1=\mathrm{Re}(z)$ 和 $\phi_2=\mathrm{Im}(z)$ 解释为复平面，那么超势就变为全纯函数

$$W(z)=\frac{1}{3\sqrt{\alpha^2+1}}(z^3-3\,z),$$

参见 [24, 59]。Wess–Zumino模型得到了深入研究，因为它们构成了首个具有线性实现超对称性的相互作用量子场论，而且与超对称量子色动力学的低能有效场论有关， [60]。在这一（1+3）维背景下，该模型允许存在畴壁解，它们不过是一维扭结的静态三维嵌入， [61–65]。众所周知，此处扭结解的轨道由以下表达式给出：$e^{i\theta}\mathrm{Re}\,W(z)=C$，参见 [24], 其中相位 $\theta$ 和积分常数 $C$ 必须选取为使轨道经过真空点。势（20只有此前确定的两个真空态 $A_\pm=(\pm1,\ 0)$，此时扭结多样性简化为 $\phi^4$-扭结（17）。

此外，研究发现，势 $U_1(\phi_1,\ \phi_2)$ 属于著名的 MSTB 势族 $U_1(\phi_1,\ \phi_2)=\frac{1}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2-1)^2+\frac{1}{2}\sigma^2\phi_2^2$，其中 $\sigma=2$；也就是说，$U_1(\phi_1,\ \phi_2)$ – – = $\frac{1}{2}\,\phi_1^2+\phi_2^2-1\,^2+2\phi_2^2$ [25, 27] ()，见。

- **情形2：** *BNRT*型模型：在这种情况下，超势的形式为

$$W_2(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{3}\phi_1\left(3\,\beta\,\phi_2^2+\phi_1^2-3\right),\qquad \beta\in\mathbb{R}, \tag{21}$$

这定义了一个单参数势族

$$U_2(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{2}(1-\phi_1^2)^2+\frac{1}{2}(1-\beta\,\phi_2^2)^2+\beta\,(1+2\beta)\,\phi_1^2\,\phi_2^2-\frac{1}{2}. \tag{22}$$

这个势等价于之前提到的 BNRT 模型，该模型在 [45] 中提出。例如，通过对 $\phi_1\to\phi_1/2$ 进行重标度，即可简单地重现 [45] 中的表达式，

$\phi_2 \to \phi_2/2$、 $x^\mu \to 2\sqrt{2}\, x^\mu$，并确定参数 $\sigma = 2\,\beta$。静态解所满足的二阶微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} &= 2\phi_1 \left[\beta\,(2\,\beta+1)\,\phi_2^2 + \phi_1^2 - 1\right] , \\ \frac{d^2\phi_1}{dx^2} &= 2\,\beta\,\phi_2 \left[(2\,\beta+1)\,\phi_1^2 + \beta\,\phi_2^2 - 1\right] . \end{aligned} \tag{23}$$

这族模型的解已在文献中通过梯度方程进行了详尽研究

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \beta\,\phi_2^2 + \phi_1^2 - 1 \quad , \quad \frac{d\phi_2}{dx} = 2\,\beta\phi_1\phi_2 \ , \tag{24}$$

该方程由与超势（21）相关的 Bogomolny界饱和条件导出，参见[13, 34–37, 45]。根据耦合常数的取值 $\beta$，我们可以在该模型中确定两个区间。

– 如果 $\beta < 0$ ，则点 $A_\pm = (\pm 1,0)$ 构成该模型唯一的真空态。在这种情况下，可以证明扭结多样性再次约束为解（17）。因此，在当前语境下，这种情况并无研究价值。

– 然而，如果 $\beta > 0$ 在位于各点的新真空态

$$B_\pm = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$$

除预先定义的真空态 $A_\pm$之外还可以找到。因此，该模型总共包含四个真空态 $\mathcal{M} = \{A_-, A_+, B_-, B_+\}$。由（24）导出的轨道方程的积分取决于耦合常数 $\beta$，从而得到以下表达式

$$\begin{aligned} (2\beta+1)\,\kappa\,|\phi_2|^{\frac{1}{\beta}} - \beta\,\phi_2^2 + (2\beta-1)\,\phi_1^2 - 2\,\beta + 1 = 0 \quad &\text{if} \quad \beta \neq 1/2, \\ \phi_1^2 - \phi_2^2\,(\kappa + \log|\phi_2|) - 1 = 0 \quad &\text{if} \quad \beta = 1/2, \end{aligned} \tag{25}$$

其中， $\kappa \in \mathbb{R}$ 是积分常数。曲线（25）的单参数族中的每条曲线都从真空点 $A_+$ 或 $A_-$出发。然而，并非积分常数 $\kappa$的所有取值都能使这些曲线到达另一个真空 $A_-$ 或 $A_+$ ，并形成扭结型解。如果常数 $\kappa$ 超过临界积分常数 $\kappa_c$

$$\kappa_c(\beta) = \begin{cases} -\frac{2\beta^{\frac{1}{2\beta}+1}}{2\beta-1} & \beta \neq 1/2, \\ -\frac{1}{2}(1+\log 2) & \beta = 1/2. \end{cases} \tag{26}$$

，则从某个真空点出发的解会在内平面中趋于无穷远。反过来，曲线（25）中所有满足 $\kappa < \kappa_c$ 的曲线都构成 $AA$拓扑扇区中的扭结，即它们渐近连接真空态 $A_+$ 和 $A_-$。在 $\kappa = \kappa_c$的特殊情形下，解属于不同的拓扑扇区，即 $AB$ 扇区；该扇区连接 $A_+$ 或 $A_-$与真空态 $B_+$ 或 $B_-$。前者包含一个（非平凡的）扭结解单参数族，而后者由八个解组成（包括扭结和反扭结）。这些解的轨道如图1所示，其中 $AA$ 扇区中的解族以蓝色表示，对应不同的 $\kappa$取值；而 $AB$ 扇区中的解以红色表示。

根据轨道方程（25），我们可以求出其中一个场，例如 $\phi_2 = g(\phi_1)$，从而将该表达式代入一阶问题（24），得到 $\phi_1(x)$ 。

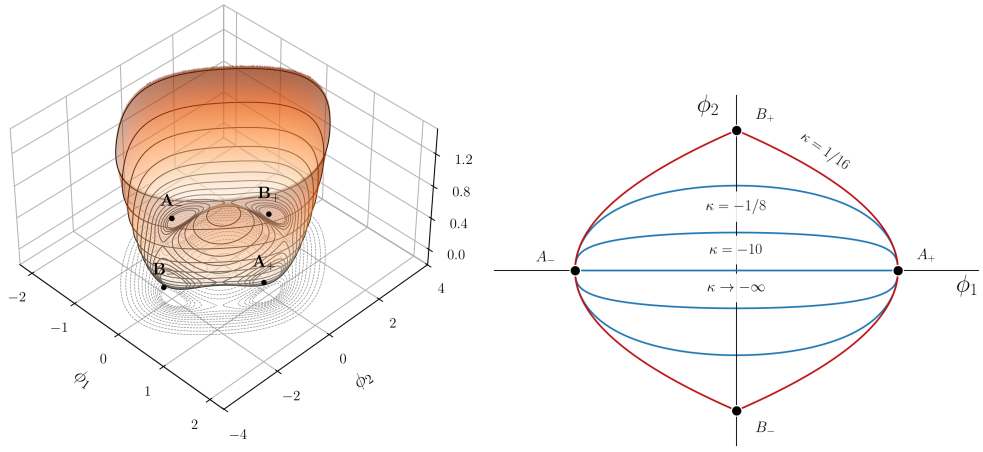


图1：势 $U_2$ （左）及其扭结轨道（25）（右），对应耦合常数 $\beta = 1/4$ 以及族参数 $\kappa$的若干取值。蓝色曲线对应拓扑扇区 $AA$ 中的扭结，而红色曲线则表示扇区 $AB$ 中由数值 $\kappa = \kappa_c = 1/16$表征的扭结。黑点表示模型的真空态。

然而，一般而言，无法解析地求得由此得到的一阶常微分方程的解。例外情况是，若在（ $\kappa = 0$ 式25）中取该值，轨道将成为一个椭圆，

$$\frac{\beta\,\phi_2^2}{1-2\,\beta} + \phi_1^2 = 1; \tag{27}$$

并且已知剖面的显式表达式，

$$\mathcal{K}^{(\alpha,\beta)}_{A\overline{A}}(x) = \left((-1)^\alpha \tanh 2\,\beta\,\bar{x}, (-1)^\beta \sqrt{\frac{2\,\beta-1}{\beta}}\,\mathrm{sech}\,2\,\beta\,\bar{x}\right). \tag{28}$$

这里， $\alpha$， $\beta = 0$，**1**，而下标 $AA$ 表示该扭结连接一个真空态 $A_\pm$ 与另一个真空态 $A_\mp$，从而得到连接不同真空态的拓扑解。不过请注意，此解仅在范围 $\beta \in$ （**0**， $1/2$）内有效，因为当 $\beta > 1/2$ 时，轨道（27）变为双曲线。一些 $AA$扭结剖面及其能量密度如图2所示。请注意，根据 $\kappa$的取值，能量密度通常会集中在两个区域。每个能量团都可解释为一个扩展粒子，因此，拓扑扭结可解释为复合解，其中 $\kappa$是与基本粒子间距相关的参数。这一点可通过计算这些解的能量得到证实，

$$E[\mathcal{K}_{A\overline{A}}(x;\kappa)] = 2E[\mathcal{K}_{AB}(x)] = \frac{4}{3}. \tag{29}$$

因此， $AA$扇区中的解由两个 $AB$ 扇区中的扭结组成 .

$AA$ 解的复合性质使得研究其线性稳定性颇有意义。为此，我们将利用这样一个事实来分析其稳定性：对于 $\beta > 0$ 的任意取值，扭结 $\mathcal{K}_1(x)$都属于这一族。在这种情况下，谱问题

$$\mathcal{H}_{ij}[\Phi(x)] = -\delta_{ij}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial\phi_i\partial\phi_j}[\Phi(x)], \qquad i,j \in \{1,2\}. \tag{30}$$

由两个解耦的 P¨oschl-Teller 势构成，因此可进行解析求解；

$$\mathcal{H}[\mathcal{K}_1(x)] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 4 - 6\,\mathrm{sech}^2\bar{x} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + 4\,\beta^2 \; - 2\beta(1+2\beta)\,\mathrm{sech}^2\bar{x} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

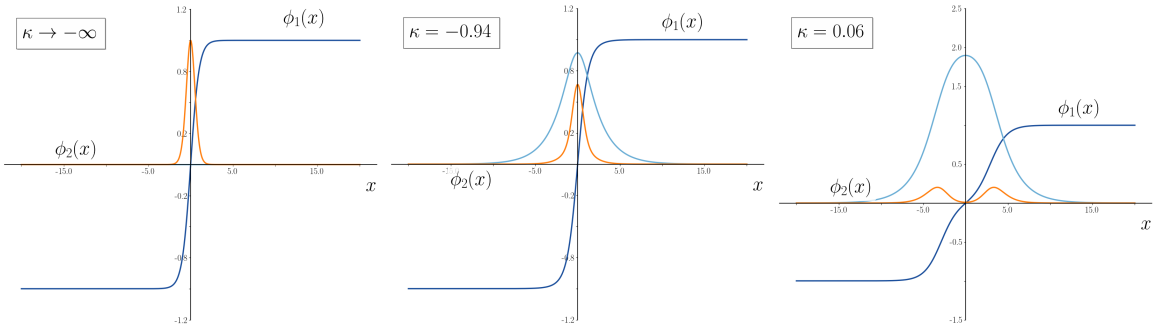


图2：轨道 $\kappa \to -\infty$ ($\mathcal{K}_1(x)$)（左）、 $\kappa = -0.94$（中）和 $\kappa = 0.06$ （右）在 $\beta = 1/4$ 时的剖面 $\Phi(x)$ 图示。这里， $\phi_1(x)$ 是深蓝色曲线， $\phi_2(x)$ 是浅蓝色曲线。橙色曲线表示与各剖面对应的能量密度。

纵向模由通常的 $\phi^4$ 扭结周围的涨落构成：一个零模，$F_0(x) = (\text{sech}^2 x,\ 0)$，它对应于扭结的平移不变性；一个激发态形状模， $F_1(x) = (\text{sech}\, x \tanh x,\ 0)$，其特征值为 $\omega_1^2 = 3$；以及连续谱，其$\omega_1^2 = 4 + k_1^2$，其中 $k_1 \in \mathbb{R}$。

另一方面, oth横向涨落谱包含一个由特征值构成的离散集合

$$\varpi_n^2 = n\,(4\,\beta - n)\,, \qquad n = 0, 1, ..., \mathrm{E}[2\,\beta], \tag{32}$$

其中，$\mathrm{E}[r]$ 表示 $r$的整数部分。第一个特征值为零，因此，围绕 $\mathcal{K}_1(x)$ 的线性微扰谱始终包含两个零模。这种现象的出现是因为 $AA$扭结构成了一个双参数解族。因此，无论是移动扭结中心（纵向微扰），还是改变族参数 $\kappa$（横向微扰），都会将解映射为解。事实上，我们可以通过分析线性涨落谱中是否出现两个零模，来判断一个拓扑孤子是否属于一个解族。下一个形状模的位置为 $\omega_1^2 = 4\,\beta - 1$（当 $\beta \geq 1/4$ 时）、 $\omega_2^2 = 8\beta - 4$ （当 $\beta \geq 1/2$ 时），依此类推。因此，我们可以得出结论：对于任意 $\beta > 0$， $\mathcal{K}_1(x)$-解都是稳定的。

上述扭结解属于 $AA$ 拓扑扇区（其中扭结渐近地连接点 $A_+$ 和 $A_-$ ），或属于 $AB$ 扇区（将真空点 $A_\pm$ 与 $B_\pm$中的另一个真空点连接起来）。一个随即出现的问题是，剩余扇区（即 $BB$ 扇区）中是否存在解，在该扇区中，真空态 $B_+$ 和 $B_-$ 渐近地相连。从超势 $W_2$ 导出的一阶方程并未提供有关这种可能性的信息。不过，从二阶方程可以轻易找出该扇区中的一个扭结解；具体而言，它对应于沿 $\phi_2$轴局域化的解，其表达式如下：

$$\mathcal{K}_2^{(\alpha)}(x) = \left(0, \frac{(-1)^\alpha}{\sqrt{\beta}} \tanh\, \sqrt{\beta}\,\bar{x}\right) \tag{33}$$

对这一特定解进行线性稳定性分析，可确定矩阵微分算子的特征值

$$\mathcal{H}[\mathcal{K}_2(x)] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 4\beta - 2(2\beta+1)\text{sech}^2\left(\sqrt{\beta}\,\bar{x}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + 4\,\beta - 6\,\beta\,\text{sech}^2\left(\sqrt{\beta}\,\bar{x}\right) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

纵向谱与在 $\mathcal{K}_1(x)$ 情况下所研究的谱相同。然而，横向谱由一组离散的特征值组成

$$\varpi_n^2 = 4\beta - \frac{\beta}{4}\left(\sqrt{\frac{8}{\beta} + 17} - 2n - 1\right)^2, \qquad n = 0, 1, ..., \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{8}{\beta} + 17} - 1\right)\right]. \tag{35}$$

对于这种情况，最低特征值 $\omega_0^2$ 始终为负，因此解 $\mathcal{K}_2(x)$ 不稳定。此外，在特定取值下还存在第二个零模

$$\beta = \frac{2}{n^2+5n+2}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{36}$$

因此，我们预期在该模型中，对于特定取值，能找到第二个（非平凡的）单参数扭结族

$$\beta = 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{13}, \dots$$

它大概是由不同于 $W_2$ 的超势所对应的一阶微分方程导出的。

- 此外，根据第2节中提到的条件，也可得到以下形式的超势

$$\overline{W}(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{3}\phi_2\left(-\gamma\,\phi_2^2 - 3\phi_1^2 + 3\right) \tag{37}$$

作为一个解，由此得到的势如下：

$$\overline{U}(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{2}(1-\phi_1^2)^2 + \frac{1}{2}(1-\gamma\,\phi_2^2)^2 + (\gamma+2)\,\phi_1^2\,\phi_2^2 - \frac{1}{2}, \tag{38}$$

然而在这种情况下，将场 $\phi_1$ 与 $\phi_2$互换的对称性结合适当的重标度，会使我们回到上文讨论的情形2。具体而言，对于 $\beta > 0$ 变换 $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ 以及重新定义 $\beta = 1/\gamma$ 可恢复表达式（22）。这一事实与一般方程所允许的一种可能性有关：得到相同的系统，但此时真空态 $B_\pm$ 出现在 $\phi_1$轴上。请注意，这些模型仅在以下区间 $\beta > 0$ 和 $\gamma > 0$分别存在一族拓扑扭结，因此，这些解通过上述变换彼此关联。

总之，可以指出，由多项式超势导出的、在标量场中具有偶对称性的四次多项式势模型中，唯一能产生扭结族的模型对应于 BNRT 型模型及其通过变换得到的可能变体。

## 4 容许具有一个奇点的超势的模型

如前所述，仍可选择超势 $W(\phi_1,\phi_2)$ 的其他形式，同时生成四次多项式势 $U(\phi_1,\phi_2)$，而这仍是本工作的主要关注点。特别地，可以考虑涉及无理函数的超势。此外，若这些函数包含一个临界点 $(a_1,a_3)$，且函数在该点不可微，则有可能找到半 BPS 扭结族。就本节而言，我们将对超势采用如下一般形式：

$$W(\phi_1,\phi_2) = \sqrt{(\phi_1-a_1)^2 + a_2\,(\phi_2-a_3)^2}\left(b_1\,\phi_1^2 + b_2\,\phi_2^2 + b_3\,\phi_1\,\phi_2 + b_4\,\phi_1 + b_5\,\phi_2 + b_6\right); \qquad a_i,\, b_j \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

将此表达式再次代入（8），并施加形式（15）及 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 对称性，我们得到生成四次多项式势的最小独立参数集。在这种情况下，可以确定两个单参数模型族，列举如下：

- **情形 3：** *MSTB*型模型：在这种情况下，超势由以下表达式给出 on

$$W_3(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{3}\sqrt{(\phi_1 \pm \sigma)^2 + \phi_2^2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 \mp \sigma\,\phi_1 + \sigma^2 - 3\right), \tag{40}$$

这定义了所谓的 MSTB势族

$$U_3(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{2}(1-\phi_1^2)^2+\frac{1}{2}(1-\phi_2^2)^2+\phi_1^2\,\phi_2^2+\frac{\sigma^2}{2}\,\phi_2^2-\frac{1}{2}, \tag{41}$$

其中 $\sigma\in\mathbb{R}$。首先应注意，式（40）定义了两个不同的超势族，每个超势族由式（$\pm$）中符号的选择决定，该式见于式（40）。在每种情况下，超势的奇点均不同，分别为 $F_\pm=(\pm\sigma,\,0)$。换言之，对于给定的耦合常数 $\sigma$，每个势（41）都具有两个不同的超势。因此，这将导致两个支配扭结型解的（非平凡）一阶方程系统，并带来存在两个扭结族的可能性。为完整起见，我们在此回顾其扭结多样性的结构：

1. 如果 $\sigma^2\geq 1$，则扭结流形归结为单个扭结（17）的存在。因此，在这种情况下不存在连续解族，也正因如此，扭结（17）在此参数区间内是稳定的。

2. 相反，对于 $0<\sigma^2<1$，可以证明存在三个拓扑 kink/反 kink，由表达式（17）描述，并且

$$\mathcal{K}_{A\overline{A}}^{(\alpha,\beta)}(x)=\left((-1)^\alpha\,\tanh\sigma\bar{x},(-1)^\beta\,\sqrt{1-\sigma^2}\,\mathrm{sech}\,\sigma\bar{x}\right), \tag{42}$$

其中 $\alpha,\ \beta=0,\ 1$ 和 $\bar{x}\equiv x-x_0$，其中 $x_0\in\mathbb{R}$ 是表示扭结中心的积分常数。在此参数范围内，单非零分量扭结（17）变得不稳定，并衰变为能量更低的稳定解（42），

$$E[\mathcal{K}_{A\overline{A}}(x)]=2\,\sigma\left(1-\frac{\sigma^2}{3}\right). \tag{43}$$

这些解的轨道符合椭圆 $\phi_1^2+\phi_2^2/(1-\sigma^2)=1$，其焦点对应于超势的奇点（40），$F_\pm\equiv(\pm\sigma,\,0)$。这些拓扑解的轨道如图3所示，其剖面见图4。观察图4 中的能量密度可知，$\mathcal{K}_1(x)$ 扭结和$\mathcal{K}_{AA}(x)$ 扭结都是该模型的基本粒子。

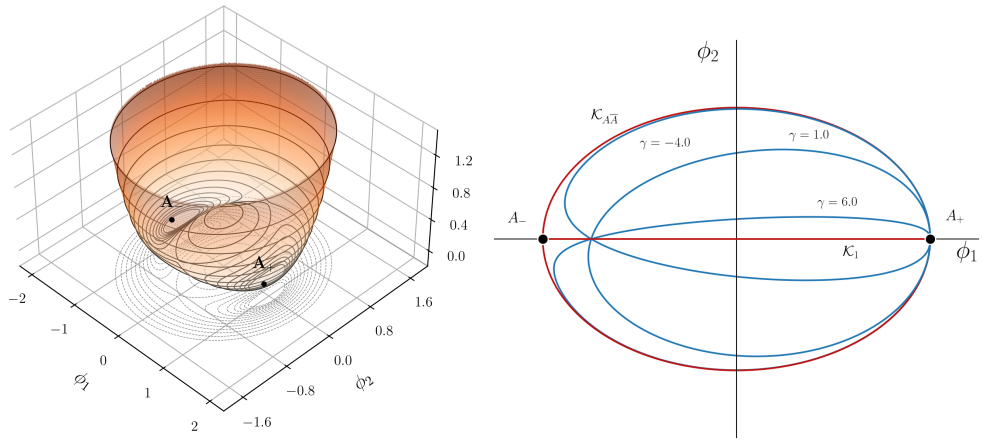


图 3：当 $\sigma$ =3/4时，MSTB模型的势（左）和轨道（右）的示意图。红色曲线是该模型的拓扑扭结，$\mathcal{K}_{AA}(x)$ 和 $\mathcal{K}_1(x)$。蓝色曲线对应非拓扑解 $\mathcal{K}_{AA}(x;\ \gamma)$, (44)，对应族参数 $\gamma$的若干取值。

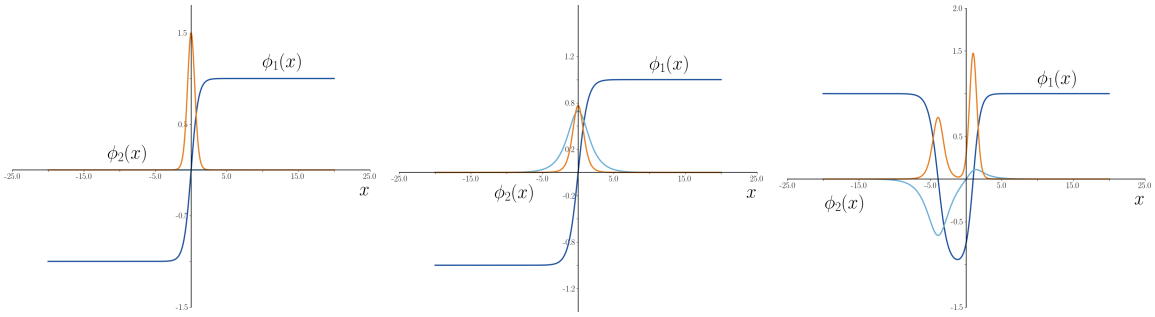


图4：MSTB模型的剖面 $\Phi(x)$ 的图示（深蓝色表示 $\phi_1(x)$，浅蓝色表示 $\phi_2(x)$），以及相应的能量密度（橙色曲线）。从左到右依次为： $\mathcal{K}_1(x)$、 $\mathcal{K}_{AA}(x)$ 和 $\mathcal{K}^{(1)}_{AA}(x;6)$。

此外，还出现了两个族的非拓扑扭结，其形式为

$$\mathcal{K}^{(\alpha)}_{AA}(x;\gamma) = \left((-1)^\alpha \frac{\sigma_- \cosh\sigma_+ x_+ - \sigma_+ \cosh\sigma_- x_-}{\sigma_- \cosh\sigma_+ x_+ + \sigma_+ \cosh\sigma_- x_-}, \frac{\sigma_+\sigma_- \sinh\bar{x}}{\sigma_- \cosh\sigma_+ x_+ - \sigma_+ \cosh\sigma_- x_-}\right). \quad (44)$$

这里 $\gamma$ 是用于标识族中每个成员的参数，我们将$x_\pm \equiv \bar{x} - \gamma\sigma(1 \mp \sigma)$ 和 $\sigma_\pm = 1 \pm \sigma$记作。这些解渐近地离开真空点 $A_\pm$，随后（渐近地）返回该点，却不会到达另一个真空；它们都经过奇点 $F_\mp$。这两个扭结族通过反射变换 $\phi_1 \to -\phi_1$彼此关联。注意，查看图4 右侧的能量密度图可知，这些非拓扑扭结是由两个能量团组成的复合解，其性质还可由能量和规则加以补充

$$E[\mathcal{K}_{AA}(x;\gamma)] = E[\mathcal{K}_1(x)] + E[\mathcal{K}_{A\overline{A}}(x)]. \quad (45)$$

MSTB模型确实是一个非常特殊的情形。刻画该场模型静态解的动力系统完全可积，具有两个可显式计算的第一积分。此外，该系统可进行哈密顿-雅可比分离；具体而言，利用椭圆坐标系，可以将相关的二阶常微分方程解耦并求解，其中等坐标曲线的焦点为 $F_\pm$ 。换言之，无论耦合常数 $\sigma$ 取何值，所有这类模型都具有上述意义上的完全可积性。这也解释了为何存在两个不同的超势，它们分别导出两组一阶常微分方程。这些方程可通过从相关力学问题的第一积分中求出空间导数，并施加扭结型解所对应的渐近条件而得到。

• **情形4：**具有四次多项式势的一族新模型：除前述情形外，我们还发现了一个全新的模型，据我们所知，文献中尚未讨论过该模型。这是本文的主要结果：发现了一种具有四次多项式势且存在扭结族的新模型。对于这一情形，超势由下式给出：

$$W_4(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{3}\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}\,(\phi_1^2 + \mu\,\phi_2^2 - 3); \quad (46)$$

由此得到势的单参数族

$$U_4(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{2}(1-\phi_1^2)^2 + \frac{1}{2}(1-\mu\,\phi_2^2)^2 + \frac{1}{9}(2+\mu)(1+2\mu)\,\phi_1^2\,\phi_2^2 - \frac{1}{2}, \quad (47)$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 为耦合常数。因此，我们将对该模型进行更详细的分析，确定扭结型解的种类，并在可能的情况下明确讨论它们的稳定性。与式（47）相关的静态场方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} &= \frac{2}{9}(\mu+2)(2\mu+1)\,\phi_1\,\phi_2^2 + 2\,\phi_1\left(\phi_1^2-1\right) \\ \frac{d^2\phi_2}{dx^2} &= \frac{2}{9}(\mu+2)(2\mu+1)\,\phi_1^2\,\phi_2 - 2\,\mu\,\phi_2\left(1-\mu\,\phi_2^2\right)\ . \end{aligned} \tag{48}$$

可以验证，对于 $\mu = 1$这一情形，势（47）具有旋转不变性，从而在单位圆 $S^1 = \{(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^2$ 上形成 $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 1\}$连续真空集。采用极坐标后，此情形可约化为一个模型，其中只有内部场空间的径向坐标起相关作用；因此，结果即为标准扭结（17），并且可在内平面内旋转。除这一特殊情形外，该模型可视为具有两个不同区间，见图5：

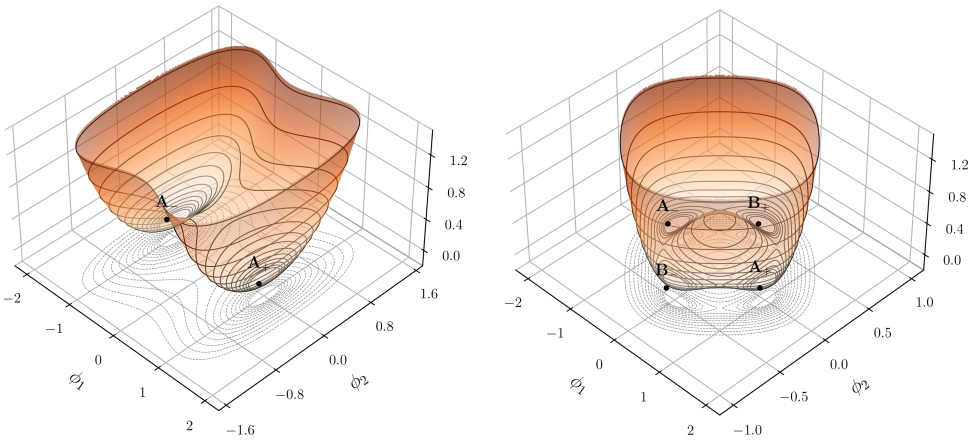


图5：势 $U_4$ 在 $\mu = -1/2$ （左）和 $\mu = 4$ （右）时的表示。

• 如果 $\mu < 0$ 势仅涉及两个真空态，它们的位置如前所述，为 $A_\pm$。在这种情况下，扭结流形仅限于解（17）。通常，对该解进行线性稳定性研究可归结为对取值于前述解上的二阶小涨落算子进行谱问题分析；在此例中，该算子为

$$\mathcal{H}[\mathcal{K}_1^{(\alpha)}(x)] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 4 - 6\,\mathrm{sech}^2\bar{x} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{4}{9}(\mu-1)^2 - \frac{2}{9}(2+\mu)(1+2\mu)\,\mathrm{sech}^2\bar{x} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

纵向微扰是关于 $\phi^4$ 扭结的微扰，之后不再赘述。关于正交微扰的贡献，可以看出，与算子（49）相关的势阱取值范围为 $2|\mu|$ 到 $\frac{4}{9}(\mu-1)^2$。换言之，在此范围内，势始终严格为正。因此，算子（49）的特征值必然为正，这意味着对于任意负的 $\mathcal{K}_1(x)$ 值，扭结解都稳定。

• 由于现在有四个真空态， $\mu > 0$ 情形更为有趣

$$\mathcal{M} = \{A_\pm = (\pm 1, 0)\ ,\quad B_\pm = (0, \pm 1/\sqrt{\mu})\}\,. \tag{50}$$

并且在此情形下会出现一族半 BPS 扭结。根据构造，存在必须满足由超势（46）导出的梯度方程的扭结型解，

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dx} &= \pm\,\frac{\phi_1\left((\mu+2)\,\phi_2^2+3\,\phi_1^2-3\right)}{3\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}}\\ \frac{d\phi_2}{dx} &= \pm\,\frac{\phi_2\left((2\mu+1)\,\phi_1^2+3\,\mu\,\phi_2^2-3\right)}{3\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}}.\end{aligned} \tag{51}$$

（46）的奇点成为方程组的奇异性。由其导出的轨道方程
(51)

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \frac{\phi_2\left((2\,\mu+1)\,\phi_1^2+3\,\mu\,\phi_2^2-3\right)}{\phi_1\left((\mu+2)\,\phi_2^2+3\,\phi_1^2-3\right)} \tag{52}$$

可以利用积分因子求解

$$\mu(\phi_1,\phi_2) = \frac{\phi_1^3\left((\mu+2)\,\phi_2^2+3\phi_1^2-3\right)}{(1-\mu)\,\phi_2\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)^{3/2}}\left(\frac{2(1-\mu)\,\phi_2^2}{\phi_1^2}\right)^{\frac{3}{2-2\mu}}, \tag{53}$$

前一个方程。在这种情况下，扭结轨道可以写成

$$F(\phi_1,\phi_2;\kappa)\equiv\phi_1^2-\sqrt{1+z}\;z^{\frac{-3}{2(1-\mu)}}\left(\kappa+(-1)^{\frac{-3}{2(1-\mu)}}\frac{3}{2(1-\mu)}B_{-z}\left(\frac{3}{2(1-\mu)},\frac{-1}{2}\right)\right)=0; \tag{54}$$

其中，$\kappa\in\mathbb{R}$ 是一个积分常数，用于标记该族中的每个成员；$z\equiv\frac{\phi_2^2}{\phi_1^2}$和 $B_u\,(a,\;b)$是不完全欧拉贝塔函数。注意，当 $0<\mu<1$时，$A_+$ 和 $A_-$ 是 $W_4$ 的极小值，否则为鞍点。反之，当 $\mu\in(0,\;1)$时，$B_+$ 和 $B_-$ 是极小值，而当 $\mu>1$时为鞍点。因此，我们预计当 $\mu\in(0,\;1)$时，会找到连接 $B_+$ 和 $B_-$ 的拓扑解；当 $\mu>1$时，则会找到将 $A_+$ 与 $A_-$连接起来的拓扑解。然而，对于任意 $\mu>0$，在$AA$ 扇区中的一点与 $BB$ 扇区中的另一点之间，都存在grad $W$ 的流线。这些评论表明，有必要将该模型区分为两个不同的区间，其特征分别为$0<\mu<1$ 或 $\mu>1$。

– 若 $0<\mu<1$ 轨道（54）在 $\kappa<0$ 下确定的曲线族渐近起始于真空态 $B_+$ 或 $B_-$，并保持在内平面的单一象限内，且收敛于原点。所有此类轨道在进入相对象限之前均经过原点，最终分别到达 $B_-$ 或 $B_+$ 真空，见图 6 （左）。我们将这些解称为 $\mathcal{K}_{BB}\,(x,\;\kappa)$。注意，作为族 $\mathcal{K}_{BB}\,(x,\;\kappa)$ 的成员，我们可以找到一个由下式确定的单非零分量kink

$$\mathcal{K}_2^{(\alpha)}(x)=\left(0,\frac{(-1)^\alpha}{\sqrt{\mu}}\tanh\sqrt{\mu}\,\bar{x}\right). \tag{55}$$

对于值 $\kappa\to\infty$。
对于 $\kappa=0$，（54）给出连接真空点 $A_+$ 或 $A_-$ 之一与真空态 $B_+$ 或 $B_-$之一的孤立曲线。这些总共对应于八个孤立的kink和antikink，记为 $\mathcal{K}_{AB}\,(x)$。利用（12）可以计算出这些解的能量，

$$E[\mathcal{K}_{B\overline{B}}(x,\kappa)]=\frac{4}{3\sqrt{\mu}}\quad,\quad E[\mathcal{K}_{AB}(x)]=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}-1\right)$$

请注意，除了 $\mathcal{K}_{BB}(x,\;\kappa)$这一族（由一阶方程（51）得到）之外，对于耦合常数 $\mu$ 的任意取值，我们还可以找到扭结（17），此时它是二阶方程（48）的一个解。在这种情况下，总能量为

$$E[\mathcal{K}_1(x)]=\frac{4}{3}$$

因此，下一个能量和规则为

$$E[\mathcal{K}_{B\overline{B}}(x,\kappa)] = 2\,E[\mathcal{K}_{AB}(x)] + E[\mathcal{K}_1(x)]$$

成立。这意味着，在此参数范围内，$BB$ 扭结可以解释为复合扩展粒子，由与扭结 $\mathcal{K}_{AB}(x)$ 相关的两个更基本的能量团，以及与单个扭结 $\mathcal{K}_1(x)$相关的一个能量团组成。

另一方面，应当注意的是，在满足 $\mu > \frac{1}{4}$ 时，包含两个 $\mathcal{K}_{AB}(x)$-扭结的 $AA$ 构型在能量上比 $\mathcal{K}_1(x)$-扭结更有利；而当 $\mu < \frac{1}{4}$ 时，其能量则变得更高。自然地，这一特征对这些构型的稳定性具有重要影响，后文将对此进行讨论。

– 另一方面，如果 $\mu > 1$ 我们会发现一个与前述情形类似的模式；不过，扭结解的单参数族现在渐近地连接真空点 $A_-$ 和 $A_+$，且该族中的每个成员都经过原点，见图6（右）。因此，这一族将被称为 $\mathcal{K}_{AA}(x,\ \kappa)$。当 $\kappa$ 取值范围为 $\kappa < \kappa_c$ 且

$$\kappa_c = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(1+\frac{3}{2(1-\mu)}\Big)\Gamma\Big(\frac{3}{2}-\frac{3}{2(1-\mu)}\Big)\,,$$

其中 $\Gamma(u)$为欧拉伽马函数。若常数 $\kappa$ 达到临界值 $\kappa_c$，则孤立扭结解会在 $AB$ 拓扑扇区中出现；因此，我们再次用记号 $\mathcal{K}_{AB}(x)$表示它们。此时，扭结能量为

$$E[\mathcal{K}_{A\overline{A}}(x,\kappa)] = \frac{4}{3} \quad , \quad E[\mathcal{K}_{AB}(x)] = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right).$$

在这种情况下，由表达式（ $\mathcal{K}_1(x)$ 17）给出的扭结属于族$\mathcal{K}_{AA}(x,\ \kappa)$，其中 $\kappa \to \infty$，而（ $\mathcal{K}_2(x)$ 55）中的唯一解满足二阶方程（48），其总能量为

$$E[\mathcal{K}_2(x)] = \frac{4}{3\sqrt{\mu}}$$

从而得到能量和规则

$$E[\mathcal{K}_{A\overline{A}}(x,\kappa)] = 2\,E[\mathcal{K}_{AB}(x)] + E[\mathcal{K}_2(x)]$$

请注意，在此区间内，扭结 $\mathcal{K}_2(x)$的能量低于扭结 $\mathcal{K}_{AA}(x,\ \kappa)$，因此前述关系是自洽的。

值得注意的是，前述两个区间可通过内对称性联系起来。模型（47）在以下内变换和重新参数化下保持不变

$$\mu \mapsto 1/\mu, \qquad \phi_1 \mapsto \sqrt{\mu}\,\phi_2, \qquad \phi_2 \mapsto \sqrt{\mu}\,\phi_1; \qquad \mu > 0. \tag{56}$$

因此，我们可以从 $\mu \in (0,\ 1)$中的解确定 $\mu \in (1,\ \infty)$的解。

根据扭结轨道流 (54)，我们可以得到 $\phi_1 = \phi_1(z)$，因此利用 (51)，可以求出 $z$ 关于空间坐标 $z(x)$ 的显式关系，从而得到扭结剖面 $\Phi(x)$。然而，关于 $z(x)$ 的方程无法进行解析积分，因此一般无法以闭式求得 $\Phi(x)$。其中一些剖面已通过数值方法求得，其形状及能量密度如图 7所示。可以看出，能量密度呈现一个或三个能量团，具体取决于 $\kappa$的取值；这表明 (54) 中的扭结是复合解，其分离距离由以下因素决定：

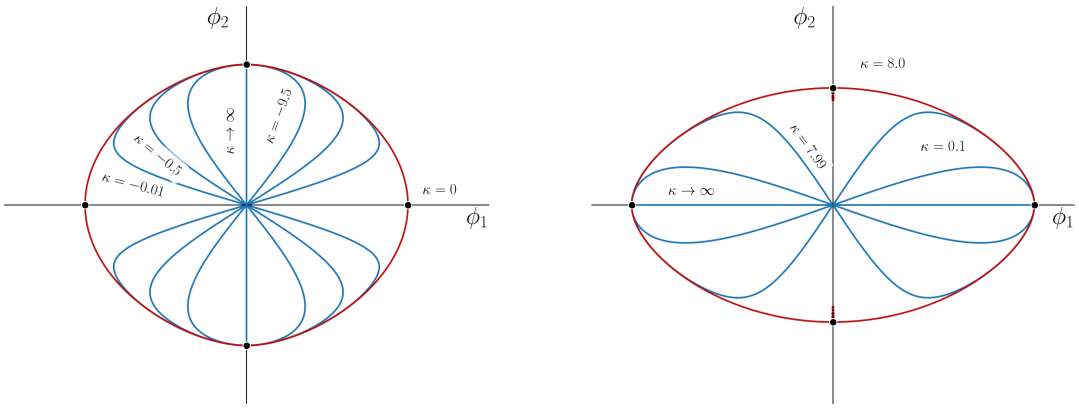


图6：轨道（54）在内部空间中的图形表示，针对 $\mu = 1/2$ （左）和 $\mu = 2$以及 $\kappa$的若干取值。黑点表示真空态。红色曲线对应于临界轨道， $\kappa_c\,(1/2) = 0$ （左）和 $\kappa_c\,(2) = 8$ （右）。

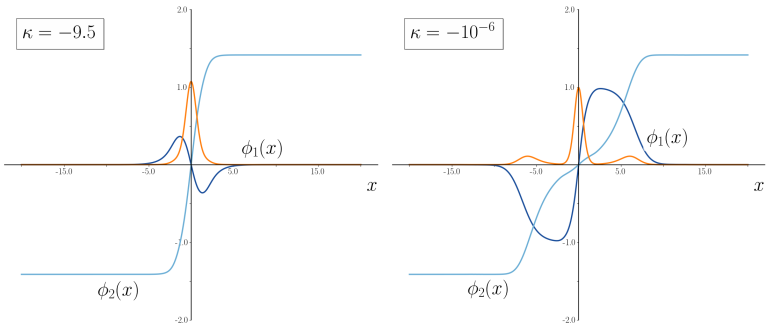


图 7：剖面 $\Phi(x)$（蓝色曲线）的图形表示，这些剖面是针对轨道$\kappa = -9.5$ （左）和 $\kappa = -10^{-6}$ （右）在 $\mu = 1/2$ 处数值得到的，及其能量密度（橙色曲线）。

参数 $\kappa$。事实上，在图 7 中，当 $\kappa = -9.5$ 粒子彼此非常接近，以至于三个能量团在扭结中心重叠。

值得注意的是，单个非零分量扭结 $\mathcal{K}_1\,(x)$ 和 $\mathcal{K}_2\,(x)$ 由表达式（17）和（55）给出，对于耦合常数 $\mu$的任意取值仍然是解，而与它们作为扭结族成员出现的区间无关。现在我们将利用这些解的简单性来分析其稳定性。我们将分别分析$\mathcal{K}_1\,(x)$ 和 $\mathcal{K}_2\,(x)$ 扭结的线性稳定性：

– 围绕 $\mathcal{K}_1(x)$ 的小涨落谱。如前所述，此处的海森算子由算子（49）给出。与正交涨落相关的本征值为：

$$\omega_n^2 = -\frac{1}{3}(n-1)(3\,n - 4\,\mu + 1) \qquad \text{with} \qquad n = 0, 1, ..., n < \mathrm{E}[\tfrac{2\,\mu+1}{3}]$$

最低特征值为

$$\omega_0^2 = \frac{1}{3}(1 - 4\mu)$$

当 $\mu > \frac{1}{4}$ 时，该值为负，因此此解存在一个不稳定通道。请注意，在 $\mu > 1$ 的范围内，扭结 $\mathcal{K}_1(x)$ 属于族 $\mathcal{K}_{AA}$，因此该解是不稳定的。在 $\frac{1}{4} < \mu < 1$ 的范围内， $\mathcal{K}_1(x)$ 是一个孤立扭结，此扭结趋向于衰变为由两个 $\mathcal{K}_{AB}$ 构成的构型，正如我们此前所述，这种构型在能量上更有利。

此外，在 $\mu > 1$ 的范围内， $n = 1$ 为我们提供了一个零特征值 $\omega_{n=1}^2 = 0$，也就是说，它确定了第二个零模。请注意，该模的存在要求满足条件 $\frac{1}{3}(2\mu + 1) > 1$。除此之外，如果 $\mu > \frac{13}{4}$，则会出现一个形状模（具有正特征值）。随着 $\mu$ 增大，新的形状模也会出现。

另一方面，如果$0 < \mu < \frac{1}{4}$ 离散谱仅包含基态，且该基态具有正特征值，则扭结 $\mathcal{K}_1(x)$是稳定的。因此，处于 $AA$ 扇区中的两个$\mathcal{K}_{AB}$-扭结构成的构型可能衰变为这个单一扭结，因为在这一参数区间内，后一个扭结的能量低于前一个构型。

小涨落的谱围绕 $\mathcal{K}_2(x)$的。此时的扭结涨落算符为

$$\mathcal{H}[\mathcal{K}_2^{(\alpha)}(x)] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2(\mu+2)(2\mu+1)\left(1-\operatorname{sech}^2\sqrt{\mu}\,\bar{x}\right)}{9\mu} - 2 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + 2\mu\left(2 - 3\operatorname{sech}^2\sqrt{\mu}\,\bar{x}\right) \end{pmatrix}. \quad (57)$$

因此，正交涨落谱由以下本征值给出

$$\omega_n^2 = -\frac{1}{3}(n-1)(3n\mu + \mu - 4), \qquad n = 0, 1, ..., \mathrm{E}[\tfrac{\mu+2}{3\mu}]. \quad (58)$$

最低特征值 $\omega_{n=0}^2 = \frac{1}{3}(\mu - 4)$在$\mu < 4$时为负，在 $\mu > 4$时为正。这意味着，解 $\mathcal{K}_2(x)$在第一种情况下是不稳定的，其中包括 $0 < \mu < 1$这一参数区间；在该区间内，此解属于连续扭结族 $\mathcal{K}_{BB}(x,\ \kappa)$，以及 $1 < \mu < 4$这一范围；在该范围内， $\mathcal{K}_2(x)$是一个孤立扭结。当 $\mu > 4$ 时，这个扭结变得稳定。注意到，对于 $\mathcal{K}_1(x)$-扭结，这与前面的稳定性分析具有对称性。

$n = 1$ 的下一个特征值始终为零，也就是说，只要满足$\frac{\mu+2}{3\mu} > 1$，它就确定了第二个零模；换言之，当 $\mu \in (0,\ 1)$且 $\mathcal{K}_2(x)$-扭结属于一个族时，情况便是如此。当 $0 < \mu < \frac{2}{5}$时，$\omega_2^2 = \frac{1}{3}(4 - 7\mu)$会出现下一个形状模，依此类推。

另一方面，如果 $\mu > 4$，离散谱同样只包含一个正特征值，并且 $\mathcal{K}_2(x)$-扭结是稳定的。

作为本节分析的结论，我们可以指出，所研究的模型支持两类基本扭结。在 $\mu \in (0,\ 1)$这一范围内，拓扑扇区 $AB$ 中的扭结 $\mathcal{K}_{AB}(x)$由单个能量团构成，因此可视为该理论的一种基本扩展粒子。同样，在这一范围内，拓扑扇区 $AA$ 中的基本扭结 $\mathcal{K}_1(x)$也由单个能量团构成，是该模型的第二种基本扩展粒子。除这些解之外，扇区 $BB$中还存在一族单参数扭结，即$\mathcal{K}_{BB}(x,\kappa)$-解。对于 $\mu \in (0,1)$，该族包含仅有一个非零场分量的构型，记作$\mathcal{K}_2(x)$。$\mathcal{K}_{BB}(x,\kappa)$-族可解释为三个基本扩展粒子的非线性叠加：两个 $\mathcal{K}_{AB}(x)$-扭结对称地分布在一个中心 $\mathcal{K}_1(x)$-扭结两侧，且与其距离相等。解 $\mathcal{K}_1(x)$的稳定性性质颇为有趣。当 $\mu > \frac{1}{4}$ 时，这个扭结会变得不稳定。在这种情况下，预计它会衰变为两个 $\mathcal{K}_{AB}(x)$型能量团，因此上述复合构型最终将由四个 $\mathcal{K}_{AB}(x)$-能量团构成。相反，当 $\mu < \frac{1}{4}$ 时，扭结 $\mathcal{K}_1(x)$是稳定的。在此条件下，扇区 $AA$中两个 $\mathcal{K}_{AB}(x)$-扭结之间的孤子间作用力可能会使它们彼此靠近，从而形成一种构型，其中两个这样的扭结演化为一个 $\mathcal{K}_1(x)$型能量团。临界情形 $\mu = \frac{1}{4}$ 对应于中性平衡：只要两个 $\mathcal{K}_{AB}(x)$-能量团相对于中心 $\mathcal{K}_1(x)$-扭结保持对称分布，能量团的叠加就能在任意间距下维持。

利用区间 $\mu \in (0,\ 1)$ 与 $\mu > 1$ 之间的对称性，可以对互补参数范围进行完全类似的分析，并得到定性上等价的情形。

## 5 可容许具有两个奇点的超势的模型

最后，我们探讨能否识别出由包含无理函数的超势导出的、具有四阶多项式势的模型

$$W(\phi_1,\phi_2) = \sqrt{((\phi_1-a_1)^2+(\phi_2-a_2)^2)((\phi_1-a_3)^2+(\phi_2-a_4)^2)}\,(b_1\,\phi_1+b_2\,\phi_2+b_3), \qquad a_i,\ b_j\in\mathbb{R}\,. \tag{59}$$

具有两个孤立奇点，分别位于点 $(a_1,\ a_2)$ 和 $(a_3,\ a_4)$。按照第4节中的相同步骤，我们可以确定两个不同的系统，列举如下：

- 第一种可能性确定了系数 $a_i$ 和 $b_i$，使得最终得到的超势$W$ 由下式给出

$$W_5(\phi_1,\phi_2) = \phi_2\sqrt{\phi_1^4+2\,\phi_1^2\,(\phi_2^2-1)+(1+\phi_2^2)^2}; \tag{60}$$

  最终得到如下单一势能项：

$$U_5(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{2}(1-\phi_1^2)^2+\frac{1}{2}(1+3\,\phi_2^2)^2+5\,\phi_1^2\,\phi_2^2-\frac{1}{2}, \tag{61}$$

- 第二种可能性由以下超势表征

$$W_6(\phi_1,\phi_2) = \frac{\phi_1}{3}\sqrt{\phi_1^4+2\,\phi_1^2\,(\phi_2^2-3)+(3+\phi_2^2)^2} \tag{62}$$

  它定义的势 V 表达式如下：

$$U_6(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{2}(1-\phi_1^2)^2+\frac{1}{18}(3+\phi_2^2)^2+\frac{10}{18}\phi_1^2\,\phi_2^2-\frac{1}{2}\,. \tag{63}$$

请注意，这些系统并不构成一族模型；这些表达式只涉及数值系数。此外，两个模型都只有两个真空态 $A_\pm = (\pm1,0)$，并且这些点也是 $W_5$ 和 $W_6$ 变得奇异的位置。因此，与这些超势相关的梯度方程的轨道解从不闭合，因而不包含任何不同于预先确定的单非零分量扭结的其他拓扑孤子（17）。

## 6 C具有不同超势的模型之间的影响 s

在某些情况下，单个模型可能具有两个或更多个超势，这种情况此前已在 Wess-Zumino 型模型中有所提及。当这种情况发生时，可以通过不同方式实现 Bogomolny 配置，每种方式都会导出一组原则上彼此不同的一阶微分方程。这进而意味着两组或更多组单参数扭结解族可能共存。本节旨在探究此前各节分析的模型中是否存在具有多个超势的模型；换言之，我们试图确定所研究的不同超势是否会导出相同的势。对此，我们着重介绍以下几种情况：同一模型中有多个扭结族同时共存：

- 具有 $\beta=1$：如果我们考虑特定耦合常数22对应的势（$\beta=1$，即

$$U(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{2}(1-\phi_1^2)^2+\frac{1}{2}(1-\phi_2^2)^2+3\,\phi_1^2\,\phi_2^2-\frac{1}{2} \tag{64}$$

  我们注意到，它可以从两个不同的超势导出，分别是超势（21），其中 $\beta=1$，$W_2(\phi_1,\ \phi_2)$ $=\frac{1}{3}\phi_1\left(3\,\phi_2^2+\phi_1^2-3\right)$ 以及（37），其中 $\gamma=1$，$\widetilde{W}(\phi_1,\ \phi_2)=\frac{1}{3}\phi_2(-\phi_2^2-$ –

$3\phi_1^2+3$）。势（64）具有一个真空流形，由四个孤立极小值组成，它们位于 $\mathcal{M}=\{A_\pm=(\pm1,0)\ B_\pm=(0,\ \pm1)\}$。如第3节所示，超势（21）在拓扑扇区 $AA$中产生一个单参数族的扭结解。这些解可以显式写为

$$\mathcal{K}_{A\overline{A}}^{(\alpha,\beta)}(x;b)=\left((-1)^\alpha\frac{\sinh 2\bar{x}}{b+\cosh\bar{x}},(-1)^\beta\frac{\sqrt{b^2-1}}{b+\cosh\bar{x}}\right), \tag{65}$$

并在该扇区内连接相应的一对真空态。在这里，$b\in(1,\ \infty)$。类似地，与另一种超势（37）相关的一阶方程也可以显式求解。由此构造出一族新的扭结解，它们连接真空态 $B_\pm$ 和 $B_\mp$，其表达式为

$$\mathcal{K}_{B\overline{B}}^{(\alpha,\beta)}(x;b)=\left((-1)^\alpha\frac{\sqrt{b^2-1}}{b+\cosh\bar{x}},(-1)^\beta\frac{\sinh 2\bar{x}}{b+\cosh\bar{x}}\right). \tag{66}$$

注意，$\mathcal{K}_1(x)=\mathcal{K}_{AA}(x;1)$，而 $\mathcal{K}_2(x)=\mathcal{K}_{BB}(x;1)$。此外，取极限 $b\to\infty$，无论在 $\mathcal{K}_{AA}(x;b)$还是 $\mathcal{K}_{BB}(x;b)$中，都可以得到 $AB$ 扇区中的扭结，事实上

$$\mathcal{K}_{AB}^{(\alpha,\beta)}(x)=\Big((-1)^\alpha(1-\tanh\bar{x}),(-1)^\beta(1+\tanh\bar{x})\Big). \tag{67}$$

因此，此时族参数 $b$决定了该模型中基本粒子之间的间距。能量和规则清楚地揭示了此情形下的双团块结构，

$$E[\mathcal{K}_{A\overline{B}}(x)]=\frac{2}{3}\qquad,\qquad E[\mathcal{K}_{A\overline{A}}(x;b)]=E[\mathcal{K}_{B\overline{B}}(x;b)]=2E[\mathcal{K}_{A\overline{B}}(x)]. \tag{68}$$

- 参数为的 *BNRT* 模型：显然可以验证，当 $\beta=\mu=1/4$时，势 $U_2$ 与 $U_4$ 相同，

$$U(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{2}(1-\phi_1^2)^2+\frac{1}{32}\left(4-\phi_2^2\right)^2+\frac{3}{8}\,\phi_1^2\,\phi_2^2-\frac{1}{2} \tag{69}$$

这意味着69）可以由以下两个超势导出

$$W_I(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{3}\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}\left(\phi_1^2+\frac{\phi_2^2}{4}-3\right), \tag{70}$$

$$W_{II}(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{3}\phi_1\left(\frac{3}{4}\,\phi_2^2+\phi_1^2-3\right). \tag{71}$$

在这种情况下，真空流形包含四个元素

$$\mathcal{M}=\{A_\pm=(\pm1,0)\ ,\quad B_\pm=(0,\pm2)\}$$

根据前面的结果，可以得出结论：在 $AA$拓扑扇区中存在一个单参数扭结族，其渐近连接点 $A_\pm$ 和 $A_\mp$；此外，在 $BB$ 拓扑扇区中还存在另一个单参数族，连接点 $B_\pm$ 和 $B_\mp$。在这个特定情形下，可以明确计算解的空间依赖关系。因此，第一个族表示为

$$\mathcal{K}_{AA}^{(\alpha,\beta)}(x;b)=\left((-1)^\alpha\frac{\sinh\bar{x}}{b^2+\cosh\bar{x}}\ ,\ (-1)^\beta\frac{2b}{\sqrt{b^2+\cosh\bar{x}}}\right), \tag{72}$$

其中族参数为 $b\in(1,\ \infty)$。另一方面，第二个由下式给出

$$\mathcal{K}_{BB}^{(\alpha)}(x;c)=\left(\frac{(-1)^\alpha 2\sinh 2\sqrt{2}\,c\,\sinh\bar{x}}{2\cosh 2\sqrt{2}\,c\,\cosh\bar{x}+\cosh^2\bar{x}+1},\frac{(-1)^{\alpha+1}2\sinh\bar{x}}{\sqrt{2\cosh 2\sqrt{2}\,c\,\cosh\bar{x}+\cosh^2\bar{x}+1}}\right) \tag{73}$$

其中 $c \in \mathbb{R}$。事实上，族参数 $c$ 与 $\kappa$ 之间的关系为 $\kappa = 8\Big(1 - \text{双曲余切}\ 2\sqrt{2}\,c\Big)$。因此，对于 $\kappa \to \kappa_c(1/4) = 0$，$c \to \infty$，这对应于三个能量团彼此无限分离的情形。反之，当 $c \to 0$ 时，$\kappa \to \infty$。除这些族之外，在 $AB$ 扇区还可以找到八个孤立的拓扑扭结/反扭结，其表达式如下：

$$\mathcal{K}_{AB}^{(\alpha,\beta)}(x) = \left( (-1)^{\alpha} \frac{1}{2} \left( 1 - \tanh \frac{\bar{x}}{2} \right), (-1)^{\beta} \sqrt{2\Big(1 + \tanh \frac{\bar{x}}{2}\Big)} \right) \tag{74}$$

此外，对这些解的总能量进行计算，结果颇具启发性：

$$E[\mathcal{K}_{AB}(x)] = \frac{2}{3}, \qquad E[\mathcal{K}_{A\overline{A}}(x;b)] = 2\,E[\mathcal{K}_{AB}(x)] = \frac{4}{3};$$

$$E[\mathcal{K}_{B\overline{B}}(x;c)] = 2\,E[\mathcal{K}_{A\overline{A}}(x)] = 4\,E[\mathcal{K}_{AB}(x)]\,.$$

可以看出，$AA$ 族的所有成员 $\mathcal{K}_{AA}(x;b)$ 具有相同的能量，是扭结 $\mathcal{K}_{AB}(x)$ 能量的两倍；而 $BB$ 扇区中的扭结 $\mathcal{K}_{BB}(x;c)$ 则具有四倍的能量。能量分布表明，$\mathcal{K}_{AB}(x)$-扭结表现为单个能量团，这说明这些解描述了该模型的基本扩展粒子。相反，$\mathcal{K}_{AA}(x;b)$-扭结可解释为两个基本粒子，它们相隔距离 $d$，该距离由参数值决定（甚至可能彼此重叠）。最后，$\mathcal{K}_{BB}(x;c)$-扭结可视为由四个此类基本粒子组成的构型：其中两个粒子与中心核相隔相同距离，而中心核本身则由两个基本粒子重叠形成。

值得注意的是，关于与超势 (70) 和 (71) 相关的模型，这些解释此前已分别讨论过。然而，在当前情形下，这两种解释可以在同一个模型中实现。这意味着，两个 $\mathcal{K}_{AB}(x)$ 型基本扩展粒子可以任意间隔放置，而不会受到孤子间作用力的影响。此外，当两个 $\mathcal{K}_{AB}(x)$ 型扩展粒子对称地分布在一个 $\mathcal{K}_1(x)$ 型中心能量团两侧、且与其距离相等时，也会出现类似情形。与先前分析的情形 2 和 4 相比，其显著特点是，$\mathcal{K}_1(x)$ 能量团不再能被视为基本扩展粒子。实际上，它可以解释为由两个重叠的 $\mathcal{K}_{AB}(x)$ 能量团构成的复合构型。

我们想强调的是，这里所确定的汇合情形证实了第3节中提出的假设：我们曾预见，对于模型 (22) 中耦合常数 $\beta$ 的某些特定取值，可能存在第二族扭结，即 $\beta = 1,\ 14,\ 18,\ 113,\ \ldots\ldots$。在本节中，我们明确证明了这一预期确实适用于 $\beta = 1$ 和 $\beta = \frac{1}{4}$ 的情形。其余 $\beta$ 取值所对应扭结族的显式构造仍是一个未解决问题。我们有理由预期，这类解来自函数结构比本文所考虑的更为复杂的超势。

## 7 结论

在本研究中，我们对 (1+1) 维的双分量标量场论进行了系统且构造性的分析。这些理论的自相互作用项至多为四次阶，并具有 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-对称性，且允许存在连续族的 BPS 和半 BPS 扭结。我们的主要目标是阐明文献中此前已知的例子是否涵盖了这一框架内所有可能的实现。虽然三次多项式超势自然会产生四次标量相互作用，但我们证明，更一般的函数形式（包括无理函数形式）也可能导出可接受的

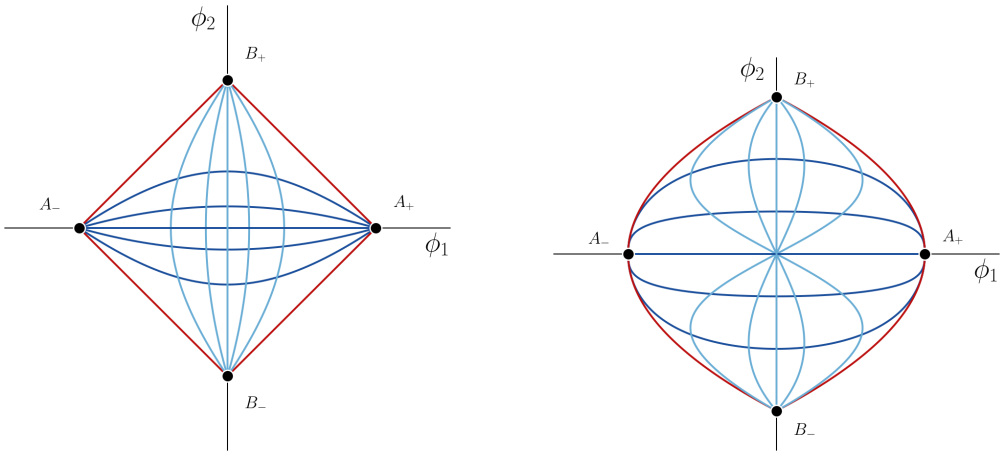


图 8：特殊情形下 BNRT $\beta = 1$ （左）和 BNRT $\beta = 1/4$ （右）的 $AA$ 扇区（深蓝色）、 $BB$ 扇区（浅蓝色）和 $AB$ 扇区（红色）中的扭结轨道。黑点表示各情形下的真空态。

四次模型。这一发现大大拓展了可解析理论的范围，并揭示了文献中尚未探索的新模型。

在这一统一框架下，经典的 MSTB 和 BNRT 模型成为该构造过程中的特定代表。通过重新审视这些基准理论，我们将它们置于共同的结构框架中，并阐明了它们的扭结族如何源自特定的超势选择。更重要的是，我们的构造方法带来了真正的新模型。具体而言，由具有单个奇点的无理超势导出的情形，呈现出半BPS扭结族，其结构与标准多项式模型有着质的不同。超势中存在不可微点，使得解在内部空间的不同区域满足不同的一阶方程，从而产生了新颖的缺陷模空间。具体而言，扭结族中的成员可以解释为复合对象。连续族中的解，最自然的理解是基本单团块扭结的非线性叠加，其相对间距由模参数控制。相应的能量求和规则为这一复合图景提供了精确的定量描述。根据耦合常数所处的参数范围，基本组分所起的作用可能有所不同：给定的单分量扭结既可能是基本稳定粒子，也可能是不稳定构型，并会分解为更基本的能量团。由此，缺陷的内部结构和物理解释会随着参数空间的变化而连续演变。

另一项重要成果是识别并分析了我们称为合流的现象：同一个标量势可以由两个或多个彼此存在非平凡关联的超势生成。这一性质意味着，同一个模型可能拥有多个不同的扭结族，从而使定态解流形比由唯一超势导出的理论所能达到的更加丰富。特殊参数值对应于中性平衡构型，在这些构型中，各组成能量团可以任意分隔放置，而不会受到孤子间作用力，这表明经典构型空间的简并性有所增强。

对各种解进行稳定性分析，进一步阐明了耦合常数与缺陷结构之间的相互作用。连续扭结族的特征是涨落谱中存在两个零模：平移模，以及一个与族模相关的额外模。在临界参数值处发生的稳定性变化，决定了某些单分量扭结究竟是稳定的基本组成，还是会衰变为复合态的不稳定构型。这些结果为我们分类中识别出的不同区间提供了连贯的动力学解释。

总之，我们的工作扩充了具有可解析扭结族的双分量四次标量场理论的目录，并为其构造与诠释建立了系统框架。我们可以设想对本研究作出若干拓展。首先，一个未解决问题是：在 BNRT 模型的 $BB$ 拓扑扇区中，对于耦合常数的特定取值$\beta = \frac{1}{8}$、$1\,13$，……，是否存在扭结族；在这些取值下，已确认存在两个零模，并且这一点已针对前两个情形得到证明 $\beta = 1$、$1\,4$（见36）。除了这一具体问题，本文提出的方法也可自然推广至更广泛的情形。特别是，可以考虑包含更多标量场分量的模型，这类模型有望具有更丰富的真空结构和模空间。同样，也可以放宽对四次相互作用的限制，允许势为六次多项式。这种拓展很可能产生种类大为增加的模型，并有望揭示文献中尚未探索的新型拓扑缺陷族。

## 致谢

作者部分经费由西班牙科学与创新部（MCIN）通过资助项目 PID2023-148409NB-I00 MTM 提供，也部分获得了 Solórzano 基金会通过项目 FS/11-2024 的资助。

## 利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

## 数据可用性

由于本研究期间未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

## 参考文献

[1] A. A. Abrikosov，关于第二类超导体磁性质的研究，《苏联物理学杂志》**32**（1957）1442。[2] A. H. Eschenfelder，磁泡技术，Springer Verlag（1981）。[3] F. Jona 和 G. Shirane，铁电晶体，Dover（1995）。[4] A. Vilenkin 和 E. P. S. Shellard，宇宙弦及其他拓扑缺陷，剑桥大学出版社（1994）。[5] A. S. Davydov，分子系统中的孤子，Kluwer Academic Publishers（1991）。[6] G. Agrawal，非线性光纤光学，Academic Press（2013）。[7] T. Sugiyama，二维中的扭结-反扭结碰撞 $\phi^4$ 模型，《理论物理进展》**61**（1979）1550–1563。[8] D. K. Campbell、J. F. Schonfeld 和 C. A. Wingate，扭结-反扭结相互作用中的共振结构 $\phi^4$ 理论，Physica D**9**（1983）1–32。

[9] P. Anninos、S. Oliveira 和 R. A. Matzner，标量场 $\lambda(\varphi^2-1)^2$ 理论中的分形结构，Physical Review D 44（1991）1147–1160。[10] A. E. Kudryavtsev，希格斯标量场的孤子型解，ZhETF Pisma Redaktsiiu 22（1975）178。[11] R. Rajaraman，《孤子与瞬子：量子场论中孤子和瞬子的导论》，North-Holland Publishing Company（1982）。[12] D. Bazeia、M. dos Santos 和 R. Ribeiro，耦合标量场系统中的孤子，Physics Letters A 208（1995）84–88。[13] A. Alonso-Izquierdo、M. A. Gonz´alez Le´on 和 J. Mateos Guilarte，二维时空中两个耦合标量场系统的扭结多样性，Physical Review D 65（2002）085012。[14] A. Alonso-Izquierdo、M. A. Gonz´alez Le´on 和 J. Mateos Guilarte，来自动力系统的扭结：变形 $O(N)$线性σ模型中的畴壁，Nonlinearity 13（2000）1137–1169。[15] A. Alonso-Izquierdo、J. Bueno-Sanchez、M. A. Gonz´alez Le´on 和 M. de la Torre Mayado，三分量标量场理论中的扭结流形，Journal of Physics A: Mathematical and General（2004）。[16] D. Bazeia、L. Losano 和 J. M. Malbouisson，变形缺陷，Physical Review D 66（2002）。[17] D. Bazeia、M. A. Gonz´alez Le´on、L. Losano 和 J. Mateos Guilarte，多项式相互作用标量场的变形缺陷，Physical Review D 73（2006）105008。[18] C. A. Almeida、D. Bazeia、L. Losano 和 J. M. Malbouisson，变形缺陷的新结果，Physical Review D 69（2004）067702。[19] D. Bazeia 和 L. Losano，及其在膜世界中的应用的变形缺陷，Physical Review D 73（2006）025016。[20] A. de Souza Dutra，连续可变形拓扑结构，Physica D 238（2009）798–802。[21] D. Bazeia、M. A. Gonz´alez Le´on、L. Losano 和 J. Mateos Guilarte，新型标量场模型及其缺陷解，EPL 93（2011）41001。[22] E. B. Bogomolny，经典解的稳定性，Soviet Journal of Nuclear Physics（1976）。[23] H. Ito，*1+1* 维双分量标量场模型中的扭结能量和规则，Phys. Lett. 112A（1985）119–123。[24] A. Alonso-Izquierdo、M. A. Gonz´alez Le´on 和 J. Mateos Guilarte，$\mathcal{N}=2$ 超对称扭结与实代数曲线，Physics Letters B 480（2000）373–380。[25] C. Montonen，标量场论中带阿贝尔荷的孤子（I）：经典理论与玻尔–索末菲量子化，Nucl. Phys. B112（1976）349。[26] R. Rajaraman 和 E. J. Weinberg，量子场论中的内对称性与半经典方法，Phys. Rev. D11（1975）2950。[27] S. Sarker、S. E. Trullinger 和 A. R. Bishop，一维复场的孤立波解，Phys. Lett. 59A（1976）255–258。[28] J. F. Currie、S. Sarker、A. R. Bishop 和 S. E. Trullinger，具有相位各向异性的一维复标量场的统计力学，Phys. Rev. A20（1979）2213。

[29] R. Rajaraman，二维耦合标量场论中的孤子，《物理评论快报》42 (1979) 200-204.[30] K. R. Subbaswamy 与 S. E. Trullinger，二维耦合标量场论中非拓扑孤子的不稳定性，《物理评论 D》22 (1980) 1495-1496.[31] K. R. Subbaswamy 与 S. E. Trullinger，具有二分量场的简单模型中扭结的有趣性质，Physica D 2 (1981) 379-388.[32] E. Magyari 与 H. Thomas，具有二分量序参量的一维非谐晶格中的孤立波，Phys. Lett. 100A (1984) 11-14.[33] H. Ito 与 H. Tasaki，非线性克莱因-戈尔登扭结的稳定性理论与莫尔斯指标定理，Phys. Lett. A113 (1985) 179-182.[34] J. Mateos Guilarte，关于莫尔斯理论与一维孤子的注记，Lett. Math. Phys. 14 (1987) 169-176.[35] J. Mateos Guilarte，稳相近似与量子孤子族，Ann. Physics 188 (1988) 307-346.[36] J. Mateos Guilarte，二维场论中的斯法拉子与瞬子，Ann. Physics 216 (1992) 122-151.[37]A. Alonso-Izquierdo、M. A. Gonz´alez Le´on 与 J. Mateos Guilarte，(*1+1*) 维标量场论中的扭结流形，J. Phys. A: Math. Gen. 31 (1998) 209-229.[38] A. Alonso-Izquierdo、M. A. Gonz´alez Le´on 与 J. Mateos Guilarte，形变 $O(3)$线性σ模型中扭结缺陷的稳定性，Nonlinearity 15 (2002) 1097-1125.[39] A. Alonso-Izquierdo 与 J. Mateos Guilarte，广义MSTB模型：结构与扭结族，Physica D 237 (2008) 3263-3291.[40] A. Alonso-Izquierdo，MSTB模型中的扭结动力学，Phys. Scr. 94 (2019) 085302.[41] A. Alonso-Izquierdo、D. Migu´elez Caballero、L. M. Nieto 与 J. Queiroga-Nunes，二分量标量场论中的摆动扭结：形状模之间的相互作用，Physica D 443 (2023) 133590.[42] A. Alonso-Izquierdo、M. A. Gonz´alez Le´on、W. Garc´ıa Fuertes 与 J. Mateos Guilarte，量子 $k$分量拓扑扭结的半经典质量，Nucl. Phys. B638 (2002) 378-404.[43] J. Evslin，量子扭结质量的明显有限推导，《高能物理学杂志》11 (2019) 161.[44] J. Evslin、A. Garc´ıa Mart´ın-Caro 与 A. Wereszczynski，MSTB扭结质量的瞬子修正，《高能物理学杂志》04 (2025) 173.[45] D. Bazeia、J. R. S. Nascimento、R. F. Ribeiro 与 D. Toledo，两个实标量场系统中的孤子稳定性，Journal of Physics A: Mathematical and General 30 (1997) 8157.[46] M. Shifman 与 M. B. Voloshin，超对称理论中的简并畴壁解，《物理评论 D》57 (1998) 2590-2598.[47] M. Shifman，超对称畴壁的简并与连续形变，《物理评论 D》57 (1998) 1258-1265.

[48] G. S. Dias、E. L. Graca 与 R. De Lima Rodrigues，标量势模型中畴壁的稳定性方程与双分量本征模，《国际现代物理学杂志 A》22 (2007) 731-747.[49] N. Sakai 与 R. Sugisaka，非线性σ模型中壁的绕数与非 BPS 束缚态，《物理评论 D》66 (2002) 045010.[50] M. Eto 与 N. Sakai，$\mathcal{N}=1$ 超引力中畴壁的可解模型，《物理评论 D》68 (2003) 125001.[51] D. Bazeia 与 A. R. Gomes，布洛赫膜，《高能物理学杂志》2004 (2004) 012.[52] D. Bazeia 与 F. A. Brito，BPS 缺陷与非 BPS 缺陷的袋、结点与网络，《物理评论 D》61 (2000) 105019.[53] P. P. Avelino、D. Bazeia、R. Menezes 与 R. E. Oliveira，两个实标量场情形下的分岔与模式变化，《物理评论 D》79 (2009) 085007.[54] A. Alonso-Izquierdo、W. Garc´ıa Fuertes、M. A. Gonz´alez Le´on 与 J. Mateos Guilarte，扭结族经典质量的单圈修正，《核物理 B》681 (2004) 163-194.[55] A. Alonso-Izquierdo 与 J. Mateos Guilarte，简并 BPS 畴壁模空间中的量子诱导相互作用，《高能物理学杂志》2014 (2014) 125.[56] A. Alonso-Izquierdo、M. A. Gonz´alez Le´on、J. Mateos Guilarte 与 M. de la Torre Mayado，双分量 BPS 扭结的绝热运动，《物理评论 D》66 (2002) 105022.[57] A. Alonso-Izquierdo，二维时空中两个耦合标量场系统里的扭结动力学，Physica D 365 (2018) 12-26.[58] J. Wess 与 B. Zumino，四维中的超规范变换，《核物理 B》70 (1974) 39-50.[59] S. Cecotti 与 C. Vafa，论 $\mathcal{N}=2$ 超对称理论的分类，《非线性数学物理通讯》158 (1993) 569-644.[60] G. Veneziano 与 S. Yankielowicz，纯 $\mathcal{N}=1$ 超对称杨-米尔斯理论的有效拉格朗日量，Physics Letters B 113 (1982) 231-236.[61] E. R. C. Abraham 与 P. K.Townsend，超对称场论中相交的延展对象，《核物理 B》531 (1991) 313-332.[62] M. Cvetic 与 F. Quevedo，弦论畴壁与靶空间模不变性，《物理评论快报》67 (1991) 1836-1839.[63] G. Dvali、G. Gabadadze 与 Z. Kakushadze，大 N 超对称量子色动力学中的 BPS 畴壁，《核物理 B》562 (1999) 158-180.[64] G. Dvali 与 Z. Kakushadze，作为 N $=1$ QCD 弦之 D 膜的大 N 畴壁，《核物理 B》537 (1999) 297-316.[65] B. Chibisov 与 M. Shifman，超对称理论中的 BPS 饱和畴壁，Physical Review D 56 (1997) 7990.[66] E. Magyari 与 H. Thomas，孤波戈德斯通模的缺陷简并，《物理评论快报》30 (1984).[67] R. Bott，莫尔斯理论讲义：旧与新，《美国数学会通报》7 (1982) 331-358.