arXiv:2603.06100v1 [math.DS] 6 Mar 2026

平面实解析向量场特征轨道的渐近展开 *

Jun Zhang †

[a]成都理工大学数学科学学院与四川省几何数学重点实验室，四川 610059，中国

摘要

著名的牛顿-普伊瑟定理指出，平面实解析曲线的每个实分支都具有普伊瑟展开。我们将这一结果推广到平面实解析向量场孤立奇点的特征轨道，并证明每条特征轨道都有一个“幂-对数”展开。

关键词： 特征轨道、渐近展开、幂-对数展开。

1 引言与主要结果

著名的牛顿–普伊瑟定理（[9, 定理 4.2.7]）指出，无论选择何种解析坐标，平面实解析曲线的每个实分支在局部都具有普伊瑟展开（由收敛的分数幂级数给出）。

本文研究点 P 附近的平面实解析向量场 $\mathcal{V}$。当 P 是奇异点时，我们总是假设它是孤立的。如 [19, 第 79 页定理 3.10] 或 [17, 第 73 页引理 1], 所示，若存在一条与 P 相连的轨道，则它与 P 的连接方式要么是螺旋式的，要么沿固定方向。后一种情形下的轨道称为特征轨道。设 (x, y) 是 P 附近的一组解析坐标，并假设在该坐标下

$$\mathcal{V} = X(x, y)\partial_x + Y(x, y)\partial_y, \tag{1.1}$$

其中 X 和 Y 是原点 O 处的解析函数：$(0,0)$。假设向量场 $\mathcal{V}$ 具有一条特征轨道 Γ。那么，当 Γ 不位于 y轴上时，轨道 Γ 可视为小 $x \geq 0$ 或 $x \leq 0$ 下函数 $y = y(x)$ 的像。实际上，牛顿-普伊瑟定理（[9, 定理 4.2.7]）意味着

*由国家自然科学基金委员会 #12101087 和国家自然科学基金四川省联合基金 #2024NSFSC1400 资助。

†通讯作者。电子邮箱：mathzhangjun@163.com

存在有限条垂直等倾线和水平等倾线，分别由方程 $X(x,y) = 0$ 和 $Y(x,y) = 0$ 确定。由于由 Puiseux级数给出的非零函数在局部单调，每条等倾线要么是位于坐标轴上的轨道，要么是无接触的。此外，这些等倾线将原点 O 的一个小邻域划分为有限个互不相交的子区域，在每个子区域中，$X(x,y)$ 和 $Y(x,y)$ 都具有确定的符号。因此，特征轨道 Γ 要么位于 y轴上，要么是在小 $x \geq 0$或 $x \leq 0$下函数 $y = y(x)$ 的像。因此，类似于平面解析曲线实分支的普伊瑟展开，我们关注特征轨道的渐近展开（与解析坐标的选择无关）。由于每条特征轨道都是一个不变流形，这个问题自然与不变流形的光滑性相关。在研究奇点例外方向附近的轨道时，构造广义正规扇区 [18]也很有帮助。此外，特征轨道的渐近展开可用于计算由单位时间映射生成的分离曲线上的轨道的盒维数，从而实现奇点的分形分类，见 [3]。

当 O 非奇异时，柯西定理（[1, 第34页，定理8.1]）保证存在一条连接 O 的唯一特征轨道，并且在某些适当的解析坐标下，它具有解析参数化表示 $y = y(x)$。因此，在这种非奇异情形下，普伊瑟展开就是与解析坐标无关的特征轨道渐近展开。然而，当 O是奇异点时，情况就复杂了。我们首先考虑双曲情形：

(H1) 当 O 是双曲焦点时，不存在特征轨道。

(H2) 当 O 是双曲鞍点时，特征轨道都位于解析稳定流形和不稳定流形上。因此，与解析坐标无关的渐近展开是一个 Puiseux级数。

(H3) 当 O 是双曲结点时，考虑解析向量场

$$x\partial_x + (\lambda y + \cdots)\partial_y,$$

其中 $\lambda > 0$和 $\cdots$表示高阶项。Picard（[13, 14]）和庞加莱（´e [15]）证明，对于非整数 λ，上述向量场的每条特征轨道（不位于 y轴上）都是关于 x 和 x^λ 的收敛级数；而对于整数 λ，则是关于 x和 $x\ln x$的收敛级数。然而，这种展开并非与解析坐标无关的展开。

接下来，我们考虑非双曲情形。显然，无需考虑中心型奇点，因为不存在特征轨道。对于半双曲奇点（恰有一个零特征值），[5]中的定理2.19确保每条特征轨道要么位于唯一的强（不）稳定流形上（即C^ω），要么位于中心流形上（即 C^∞）。因此，不依赖解析坐标的展开要么是收敛的Puiseux级数，要么是形式Puiseux级数。对于幂零奇点和

全零奇点（即其雅可比矩阵分别为幂零矩阵和零矩阵），Brezovskaya [2]使用牛顿多边形确定了特征轨道渐近展开的主部。然而，一般形式的展开仍有待研究。因此，我们需要确定双曲节点、幂零奇点和全零奇点不依赖解析坐标的渐近展开。如 [13, 14, 15]所示，这类展开将涉及超越Puiseux级数的超渐近级数。

超渐近级数在动力系统研究中发挥着重要作用。设 $\mathcal{P}$ 是平面解析向量场的一个双曲单调多边形环，并考虑该多边形环的一个横截面 Σ $\mathcal{P}$，其沿横截面的局部坐标为 x，坐标原点恰好是 Σ 与 $\mathcal{P}$的交点。于是可以在 Σ上定义庞加莱返回映射D 和返回时间函数 T。Dulac [4]、 ´Ecalle [6] 和 Il'yashenko [7, 8] 证明，庞加莱返回映射 $D(x)$ 在原点处具有如下渐近展开

$$\widehat{D}(x) = c_0 x^{\lambda_0} + \sum_{i\geq 1} x^{\lambda_i} P_i(\ln x), \quad x > 0,$$

其中 $c_0 > 0$，$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots)$ 是一个趋于无穷大的严格递增正实数序列，并且每个 P_i 都是实系数多项式。另一方面，Saavedra [16] 证明，返回时间函数 $T(x)$ 具有如下渐近展开

$$\widehat{T}(x) = \sum_{i\geq 0} x^{\lambda_i} P_i(\ln x), \quad x > 0,$$

这与上面的 $D(x)$ 展开类似，但允许出现负幂以及非恒定的首项系数 P_0。然而，对于非双曲多边形环，还会涉及迭代对数和指数函数。近期，人们研究了超渐近级数的标准形和分类，参见 [10, 11, 12]。

设 $\mathbb{R}[\![x]\!]$ （以及 $\mathbb{R}\{x\}$）为系数取自 $\mathbb{R}$、关于 x 的形式（收敛）幂级数环。对于平面解析向量场的特征轨道的渐近展开，我们得到以下结果。

定理 1.1 假设对于充分小的 $x > 0$， $y = y(x)$ 是向量场 (1.1) 的一条特征轨道。那么以下情况必有一种成立：

(i) 对于某个 $n \in \mathbb{N}_+$， $y(x) \in \mathbb{R}[\![x^{\frac{1}{n}}]\!]$；或者

(ii) $y(x) = \sum_{i\geq 1} c_i x^{\lambda_i}$，其中 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ 是一个趋于无穷大的正实数严格递增序列；或者

(iii) $y(x) = \sum_{i+j\geq 1} x^{\frac{i}{n}} \ell^{\frac{j}{n}} P_{ij}(\ln x, \ln \ell)$，其中 $\ell := e^{-1} \ln x$，且 P_{ij} 均为多项式。

2 主要结果的证明

根据消奇点定理（[5, 定理 3.3]），解析向量场 $\mathcal{V}$ 的一个孤立奇点可以分解为有限个初等奇点（至少有一个非零特征值）。正如引言中所述，对于初等奇点，渐近展开中唯一尚未解决的情形是涉及共振的双曲结点情形。根据正规形理论（[5, 第 2]章），在适当的解析坐标下并消去一个非零常数后，原点处具有双曲结点的向量场可表示为以下形式之一

$$x\partial_x + y\partial_y, \quad x\partial_x + (x+y)\partial_y, \quad x\partial_x + \lambda y\partial_y, \quad x\partial_x + (py + bx^p)\partial_y,$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}_+\backslash\mathbb{N}$、$p \in \mathbb{N}_+\backslash\{1\}$ 和 $b \in \mathbb{R}$。显然，上述向量场中不位于 y 轴上的那些特征轨道由下式给出

$$y = cx, \quad y = x(c + \ln|x|), \quad y = c|x|^\lambda, \quad y = x^p(c + b\ln|x|), \tag{2.1}$$

分别，其中 $c \in \mathbb{R}$。

2.1 消奇点

根据去奇异化过程（[5, 第 3] 章），存在局部坐标 (x_k, y_k)，使得 $k = 0, 1, \ldots, m-1$ 满足

$$(x_{m-1}, y_{m-1}) \xrightarrow{\pi_{m-1}} (x_{m-2}, y_{m-2}) \xrightarrow{\pi_{m-2}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} (x_1, y_1) \xrightarrow{\pi_1} (x_0, y_0) = (x, y), \tag{2.2}$$

其中 $\pi_k \in \{\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_h, \mathcal{T}_v, \mathcal{T}_h\}$ 满足

$$\mathcal{B}_v : \begin{cases} x_{k-1} = x_k, \\ y_{k-1} = x_k y_k, \end{cases} \qquad \mathcal{B}_h : \begin{cases} x_{k-1} = y_k x_k, \\ y_{k-1} = y_k, \end{cases}$$
$$\mathcal{T}_v : \begin{cases} x_{k-1} = x_k, \\ y_{k-1} = y_k + y_k^*, \end{cases} \qquad \mathcal{T}_h : \begin{cases} x_{k-1} = x_k + x_k^*, \\ y_{k-1} = y_k \end{cases}$$

且 x_k^*和 y_k^*均不为零；并且对于 $k = 0$、1、...、$m-2$，映射 π_{k+1}^{-1} 将连接点 P_k 的向量场 $\mathcal{V}_k$ 的特征轨道 Γ_k 映到连接点 P_{k+1}的向量场 $\mathcal{V}_{k+1}$ 的特征轨道 Γ_{k+1}，如图 1 所示。其中，P_k 是点 (0, 0)、$(0, y_k^*)$ 或 $(x_k^*, 0)$；P_{k+1} 是点 (0, 0)、$(0, y_{k+1}^*)$ 或 $(x_{k+1}^*, 0)$；而 $\mathcal{V}_{k+1}$ 是 $\mathcal{V}_k$ 的拉回（某个公因子可以消去）。注意，若 $\pi_k = \mathcal{T}_v$（分别地，$\mathcal{T}_h$），则 $\pi_{k-1} = \mathcal{B}_v$（分别地，$\mathcal{B}_h$）。不失一般性，我们可以假设特征轨道 Γ_{m-1}与 (x_{m-1}, y_{m-1}) 平面中的原点 O_{m-1}：(0, 0) 相连；否则，可以进行更一般的平移 $\mathcal{T}_v$ 或 $\mathcal{T}_h$。那么，点 O_{m-1} 是向量场 $\mathcal{V}_{m-1}$的非奇异点或初等奇点。

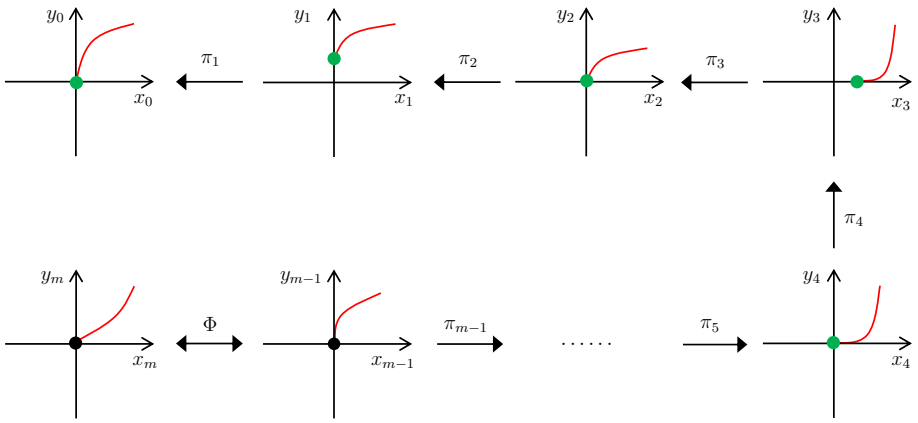


图 1：沿特征轨道 Γ 的去奇异化过程。

当 O_{m-1} 是非奇异点或双曲鞍点时，存在一个解析坐标变换

$$\Phi : \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_{m-1} \\ y_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x_m, y_m) \\ \phi_2(x_m, y_m) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

保持原点不变，并将特征轨道 Γ_{m-1} 拉直至正 x_m 轴。

当 O_{m-1} 是双曲结点时，由 (2.1) 可知，在解析坐标变换 (2.3) 下，轨道 Γ_{m-1} 变为以下三条曲线之一

$$y_m = 0, \quad y_m = cx_m^{\lambda} \quad \text{and} \quad y_m = x_m^p(c + b\ln x_m)$$

对于 $x_m \geq 0$，其中 b，$c \in \mathbb{R}$、$\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ 和 $p \in \mathbb{N}_+$。

当 O_{m-1} 是半双曲时，如果 Γ_{m-1} 位于强（不）稳定流形上，那么可以像上文一样，通过解析坐标变换 (2.3) 将轨道 Γ_{m-1} 拉直至正 x_m 轴。相反，如果 Γ_{m-1} 位于中心流形上，即 C^∞，那么存在形式坐标变换 (2.3)，可将轨道 Γ_{m-1} 拉直至正 x_m 轴。

由上述三种情形可得，解析或形式坐标变换 (2.3) 将轨道 Γ_{m-1} 变为曲线

$$y_m = \varphi(x_m) = 0 \tag{2.4}$$

对于 $x_m \geq 0$，或者解析坐标变换 (2.3) 将轨道 Γ_{m-1} 变为该曲线

$$y_m = \varphi(x_m) = cx_m^{\lambda}, \quad \text{or} \tag{2.5}$$

$$y_m = \varphi(x_m) = x_m^p(c + b\ln x_m) \tag{2.6}$$

对于 $x_m \geq 0$，其中 b，$c \in \mathbb{R}$，$\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ 以及 $p \in \mathbb{N}_+$。向下爆破后，我们在下述引理中得到特征轨道 $\Gamma_0 = \Gamma$ 的参数表示。

引理 2.1 向量场 (1.1) 的特征轨道 Γ 具有如下参数表示

$$\begin{cases} x = \mathcal{X}(x_m) := \alpha_{r_1,s_1} T_1^{r_1} T_2^{s_1} + \sum_{i>r_1, j>s_1} \alpha_{i,j} T_1^i T_2^j, \\ y = \mathcal{Y}(x_m) := \beta_{r_2,s_2} T_1^{r_2} T_2^{s_2} + \sum_{i>r_2, j>s_2} \beta_{i,j} T_1^i T_2^j, \end{cases} \tag{2.7}$$

关于 T_1 和 T_2 的多项式，其中 r_i 和 s_i 是非负整数，且 $r_i + s_i \geq 1$、$T_i := \phi_i(x_m, \varphi(x_m))$，其中 ϕ_i 由 (2.3) 给出，且 φ 是以下形式之一：(2.4)-(2.6)，对于$i = 1$、2 和 $\alpha_{r_1, s_1}\beta_{r_2, s_2} \neq 0$。

证明。注意，Γ_m 可表示为 $y_m = \varphi(x_m)$，其中 φ 是形式 (2.4)-(2.6) 之一。于是，Γ_{m-1} 可写成参数表示

$$\begin{cases} x_{m-1} = \phi_1(x_m, \varphi(x_m)) = T_1, \\ y_{m-1} = \phi_2(x_m, \varphi(x_m)) = T_2, \end{cases}$$

相 同的形式，如 (2.7) 所示。假设 Γ_k、$k \in \{2, ...m-1\}$ 可以表示为 s

$$\begin{cases} x_k = a_{i_1,j_1} T_1^{i_1} T_2^{j_1} + o(T_1^{i_1}, T_2^{j_1}), \\ y_k = b_{i_2,j_2} T_1^{i_2} T_2^{j_2} + o(T_1^{i_2}, T_2^{j_2}), \end{cases}$$

与 (2.7) 相同的形式，其中 $o(T_1^{i_1}, T_2^{j_1})$ 为简洁起见表示这些项 $\sum_{i>i_1, j>j_1} a_{i,j} T_1^i T_2^j$。分为四种情况：(i) $\pi_k = \mathcal{B}_v$，(ii) $\pi_k = \mathcal{B}_h$，(iii) $\pi_k = \mathcal{T}_v$ 和 $\pi_{k-1} = \mathcal{B}_v$，以及(iv) $\pi_k = \mathcal{T}_h$ 和 $\pi_{k-1} = \mathcal{B}_h$。在情况(i)中，轨道 Γ_{k-1} 可表示为

$$\begin{cases} x_{k-1} = x_k = a_{i_1,j_1} T_1^{i_1} T_2^{j_1} + o(T_1^{i_1}, T_2^{j_1}), \\ y_{k-1} = x_k y_k = a_{i_1,j_1} b_{i_2,j_2} T_1^{i_1+i_2} T_2^{j_1+j_2} + o(T_1^{i_1+i_2}, T_2^{j_1+j_2}), \end{cases}$$

与 (2.7) 形式相同。类似地，在情形 (ii) 中，轨道 Γ_{k-1}的表示也与 (2.7) 形式相同。在情形(iii) 中，轨道 Γ_{k-2} 可表示为

$$\begin{cases} x_{k-2} = x_{k-1} = x_k = a_{i_1,j_1} T_1^{i_1} T_2^{j_1} + o(T_1^{i_1}, T_2^{j_1}), \\ y_{k-2} = x_{k-1} y_{k-1} = x_k(y_k + y_k^*) = a_{i_1,j_1} y_k^* T_1^{i_1} T_2^{j_1} + o(T_1^{i_1}, T_2^{j_1}), \end{cases}$$

与 (2.7) 形式相同。类似地，在情形 (iv) 中，轨道 Γ_{k-2}的表示也与 (2.7) 形式相同。由于 $\pi_1 \in \{\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_h\}$，与上述类似，轨道$\Gamma = \Gamma_0$ 具有参数表示 (2.7)，证明得证。□

引理 2.2 引理 *2.1* 中给出的函数 $\mathcal{X}$ 满足以下情况之一：

(C1) $\mathcal{X}(u) \in \mathbb{R}[\![u]\!]$ *or* $\mathbb{R}\{u\}$,

(C2) $\mathcal{X}(u) \in \mathbb{R}\{u, u^\lambda\}$,

(C3) $\mathcal{X}(u) = c_k u^k + \sum_{i \geq k+1} u^i P_i(\ln u)$,

(C4) $\mathcal{X}(u) = u^k P_k(\ln u) + \sum_{i\geq k+1} u^i P_i(\ln u)$,

其中 $\lambda \in \mathbb{R}_+\backslash\mathbb{N}$, k 是正整数， $c_k \neq 0$, P_i s 是多项式，且 次数 $P_k \geq$ 1.

注 2.1 引理 2.1 中给出的函数 $\mathcal{Y}$ 也满足上述 4 种情形之一，正如 $\mathcal{X}$。此外，若 $\mathcal{X}$ 满足 **(C1)** （或 **(C2)**），则 $\mathcal{Y}$ 满足 **(C1)** （或**(C2)**）。若 $\mathcal{X}$ 满足**(C3)**（或**(C4)**），则 $\mathcal{Y}$ 满足**(C3)** 或**(C4)**。

证明。注意，对于 $r = 1$、2， $T_r(u) = \phi_r(u, \varphi(u))$，而 $\varphi(u)$ 具有 (2.4)–(2.6) 中的一种形式。当 $\varphi(u) \equiv 0$ 时，我们有 $T_r(u) = \phi_r(u, 0) \in \mathbb{R}[\![u]\!]$ 或 $\mathbb{R}\{u\}$ ，因为$\phi_r(x, y) \in \mathbb{R}[\![x, y]\!]$ 或 $\mathbb{R}\{x, y\}$。由于 $\mathcal{X}$ 是关于 T_1 和 T_2 的多项式，因此 $\mathcal{X}(u) \in \mathbb{R}[\![u]\!]$ 或 $\mathbb{R}\{u\}$。当 $\varphi(u) = cu^\lambda$ 时，我们有 $\phi_r(x, y) \in \mathbb{R}\{x, y\}$ ，因此 $T_r(u) = \phi_r(u, cu^\lambda) \in \mathbb{R}\{u, u^\lambda\}$，这意味着，出于与上文相同的原因， $\mathcal{X}(u) \in \mathbb{R}\{u, u^\lambda\}$。由此得到前两种可能性 (C1) 和 (C2)。

当 $\varphi(u) = u^p(c + b\ln\ u)$ 时，我们有 $\phi_r(x, y) \in \mathbb{R}\{x, y\}$。假设

$$\phi_r(x, y) = \sum_{i+j\geq 1} \mu_{i,j}^{(r)} x^i y^j$$

并令 $\ell_r := \min\{i\colon\ \mu_{i,0}^{(r)} \neq 0\}$ 对 $r = 1,2$。由于 $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ 是一个坐标变换，我们有 $\mu_1^{(1)}{}_{,0}\mu_0^{(2)}{}_{,1} - \mu_1^{(2)}{}_{,0}\mu_0^{(1)}{}_{,1} \neq 0$，这意味着 $\min\{\ell_1, \ell_2\} = 1$。可以计算出，对于 $r = 1,2$,

$$T_r(u) = \begin{cases} \mu_{\ell_r,0}^{(r)} u^{\ell_r} + \sum_{i>\ell_r} u^i Q_i^{(r)}(\ln u) & \text{if } 1 \leq \ell_r \leq p-1, \\ u^p Q_p^{(r)}(\ln u) + \sum_{i>p} u^i Q_i^{(r)}(\ln u) & \text{if } \ell_r \geq p, \end{cases}$$

其中 $Q_i^{(r)}$ 为多项式且 $\deg Q_p^{(r)} \geq 1$。将 $T_1(u)$ 与 $T_2(u)$ 的上述表达式代入 $\mathcal{X}$ 的表达式 (2.7)，我们得到 $\mathcal{X}$ 的展开满足 **(C3)** 或**(C4)**。至此，引理 2.2 的证明完成。□

2.2 反函数的渐近展开

引理 2.3 反函数的渐近展开 $\mathcal{X}^{-1}(x)$ 满足定理 *1.1* 中给出的三种情形之一。

证明。 对于引理 2.2 所给的情形**(C1)** ， 方程

$$x - \mathcal{X}(u) = 0 \tag{2.8}$$

是一个形式方程或解析方程。根据牛顿-普伊瑟定理（[9, 定理 4.2.7]） ， 解 $u = \mathcal{X}^{-1}(x)$ 是一个形式Puiseux级数或收敛Puiseux级数，即

$\mathcal{X}^{-1}(x) \in \mathbb{R}[\![x^{\frac{1}{n}}]\!]$或 $\mathbb{R}\{x^{\frac{1}{n}}\}$，其中 n 是某个正整数，满足定理 1.1 的（**i**）或（**ii**）情形。

在(**C2**)的情况下，函数 $\mathcal{X}(u)$ 可写为

$$\mathcal{X}(u) = \sum_{i+j\geq 1} \gamma_{i,j} u^i (u^\lambda)^j$$

并令 $\Delta(\mathcal{X}) := \{(i,j) \in \mathbb{R}_+^2 : \gamma_{i,j} \neq 0\}$。对于有理数子情形，即 $\lambda = p/q$ 对于一对互素正整数 p 和 q，令 $w = u^{1/q}$，于是方程 (2.8) 变为

$$x - \mathcal{X}(w^q) = x - \sum_{(i,j)\in\Delta(\mathcal{X})} \gamma_{i,j} w^{iq+jp} = 0,$$

关于 x 和 w的解析方程。此外，牛顿-普伊瑟定理（[9, 定理 4.2.7]）表明，上述方程的解 $w = W(x)$ 是一个收敛Puiseux级数，因此方程 (2.8) 的解 $u = w^q = (W(x))^q$ 也是一个收敛Puiseux级数，并满足定理 1.1 的(ii) 情形。

对于无理数情形，任意两个不同的格点 (i,j) 和 (i',j') 均满足 $i+\lambda j \neq i'+\lambda j'$。因此，集合 $\Delta(\mathcal{X})$ 中的格点可排列成一个序列 $((i_1,j_1),(i_2,j_2)\ \cdots)$，使得 $i_1+\lambda j_1 < i_2+\lambda j_2 < i_3+\lambda j_3 < \cdots$.。于是方程 (2.8) 可改写为

$$x - \mathcal{X}(u) = x - \sum_{k\geq 1} \gamma_{i_k,j_k} u^{\delta_k} = 0,$$

其中 $\delta_k := i_k + \lambda j_k$。在上述方程中代入变量变换 $u = x^{1/\delta_1}(z_* + z)$，其中$z_* := (\gamma_{i_1,j_1})^{-1/\delta_1}$，可得

$$0 = x - \sum_{k\geq 1} \gamma_{i_k,j_k} \{x^{1/\delta_1}(z_*+z)\}^{\delta_k} = xF(x,z), \tag{2.9}$$

其中

$$F(x,z) := 1 - \gamma_{i_1,j_1}(z_*+z)^{\delta_1} - \sum_{k\geq 2} \gamma_{i_k,j_k} x^{\delta_k/\delta_1 - 1}(z_*+z)^{\delta_k}.$$

注意，$F(0,0) = 1 - \gamma_{i_1,j_1} z_*^{\delta_1} = 0$ 且 $F_z(0,0) = -\delta_1(\gamma_{i_1,j_1})^{1/\delta_1} \neq 0$。由隐函数定理和待定系数法，方程$F(x,z) = 0$ 有如下形式的解

$$z = Z(x) = e_1 x^{\mu_1} + e_2 x^{\mu_2} + \cdots + e_k x^{\mu_k} + \cdots,$$

其中 $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \cdots)$ 是一个严格递增且趋于无穷大的正实数序列。于是，解

$$u = \mathcal{X}^{-1}(x) = x^{1/\delta_1}(z_* + Z(x)) = x^{1/\delta_1}(z_* + \sum_{k\geq 1} e_k x^{\mu_k}) \tag{2.10}$$

方程 (2.8) 满足定理 1.1 的情形 （**ii**）。

在 （**C3**） 情形下，方程 (2.8) 的形式为

$$x - \mathcal{X}(u) = x - c_k u^k - \sum_{i \geq k+1} u^i P_i(\ln u) = 0.$$

我们将 $x = X^k$和 $u = X(w_* + w)$ 用 $w_* := (c_k)^{-1/k}$ 代入上述方程，得到 $X^k G(w, X) = 0$，其中

$$\begin{aligned} G(w, X) &:= 1 - c_k(w_* + w)^k - \sum_{i \geq k+1} X^{i-k}(w_* + w)^i P_i\big(\ln X + \ln(w_* + w)\big) \\ &= -c_k \left(k w_*^{k-1} w + \cdots + w^k\right) + \sum_{i \geq 0, j \geq 1} w^i X^j \mathcal{P}_{i,j}(\ln X) \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{P}_{i,j}$ 是一些多项式。注意， $G(0,0) = 0$ 且 $G_w(0,0) = -k(c_k)^{1/k} \neq 0$。根据隐函数定理和待定系数法，方程 $G(w, X) = 0$ 有如下形式的解

$$w = W(X) = \sum_{s \geq 1} X^s Q_s(\ln X)$$

其中 Q_s 是一些多项式。因此，该解

$$u = \mathcal{X}^{-1}(x) = x^{\frac{1}{k}} \left(w_* + W(x^{\frac{1}{k}})\right) = w_* x^{\frac{1}{k}} + \sum_{s \geq 1} x^{\frac{s+1}{k}} Q_s\left(\frac{\ln x}{k}\right) \tag{2.11}$$

满足方程 (2.8) 的解属于定理 1.1 的情况 (iii)。

在情况 (C4) 下，方程 (2.8) 的形式为

$$x - \mathcal{X}(u) = x - u^k P_k(\ln u) - \sum_{i \geq k+1} u^i P_i(\ln u) = 0.$$

假设对于所有 $i \geq k$， $\deg P_i = \rho_i$ and $P_i(\omega) := e_{i,\ \rho_i}\omega^{\rho_i} + \cdots + e_{i,\ 1}\omega + e_{i,\ 0}$。在进行变量变换 $x = X^k$ and $u = X\Phi(X)(u_0 + Z)$ 后，

$$\Phi(X) := (-\ln X)^{-\frac{\rho_k}{k}} \quad \text{and} \quad u_0 := \left((-1)^{\rho_k} e_{k,\rho_k}\right)^{-\frac{1}{k}},$$

上述方程变为 $X^k H(Z,\ X,\ \Phi) = 0$，其中 $H(Z,\ X,\ \Phi) := 1 - \{I\} - \{II\}$，

$$\begin{aligned} \{I\} &:= \Phi^k (u_0 + Z)^k P_k\big(\ln X + \ln \Phi + \ln(u_0 + Z)\big), \\ \{II\} &:= \sum_{i \geq k+1} X^{i-k} \Phi^i (u_0 + Z)^i P_i\big(\ln X + \ln \Phi + \ln(u_0 + Z)\big). \end{aligned}$$

可以计算得出

$$\{I\} = \Phi^k \sum_{j \geq 0} Q_{k,j}(\ln X, \ln \Phi) Z^j,$$

其中 $Q_{k,\ j}$s 均为多项式，$\deg Q_{k,\ j} \le \rho_k$ 对所有 $j \ge 0$ 都成立，而且

$$\begin{aligned} Q_{k,0}(\ln X, \ln \Phi) &= u_0^k P_k\big(\ln X + \ln \Phi + \ln(u_0)\big) \\ &= u_0^k e_{k,\gamma_k} (\ln X)^{\gamma_k} + R_0(\ln X, \ln \Phi) \\ &= (\ln X)^{\gamma_k} + R_0(\ln X, \ln \Phi), \\ Q_{k,1}(\ln X, \ln \Phi) &= u_0^{k-1} P_k'\big(\ln X + \ln \Phi + \ln(u_0)\big) + k u_0^{k-1} P_k\big(\ln X + \ln \Phi + \ln(u_0)\big) \\ &= k u_0^{k-1} e_{k,\rho_k} (\ln X)^{\rho_k} + R_1(\ln X, \ln \Phi) \\ &= \frac{k}{u_0} (\ln X)^{\rho_k} + R_1(\ln X, \ln \Phi), \end{aligned}$$

并且这些余项 $R_0(\ln X, \ln \Phi)$ 和 $R_1(\ln X, \ln \Phi)$ 满足

$$\lim_{X \to 0^+} \Phi^k R_0(\ln X, \ln \Phi) = \lim_{X \to 0^+} \Phi^k R_1(\ln X, \ln \Phi) = 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned} \{I\} = 1 + \Phi^k R_0(\ln X, \ln \Phi) + \left((-1)^{\rho_k} \frac{k}{u_0} + \Phi^k R_1(\ln X, \ln \Phi) \right) Z \\ + \sum_{j \ge 2} \Phi^k Z^j Q_{k,j}(\ln X, \ln \Phi). \end{aligned}$$

类似地，可以计算得到

$$\{II\} = \sum_{i \ge k+1, j \ge 0} X^{i-k} \Phi^i Z^j Q_{i,j}(\ln X, \ln \Phi),$$

其中 $Q_{i,j}$ 为某些多项式。因此，$H(Z, X, \Phi)$ 可以改写为

$$H(Z, X, \Phi) = 1 - \{I\} - \{II\} = (-1)^{\rho_k + 1} \frac{k}{u_0} Z - \sum_{i \ge k, j \ge 0} X^{i-k} \Phi^i Z^j \widetilde{Q}_{i,j}(\ln X, \ln \Phi),$$

其中 $\widetilde{Q}_{k,0} := R_0(\ln X, \ln \Phi)$，$\widetilde{Q}_{k,1} := R_1(\ln X, \ln \Phi)$，以及 $\widetilde{Q}_{i,j} := Q_{i,j}(\ln X, \ln \Phi)$ 对其余所有的 i 和 j。根据隐函数定理和待定系数法，我们得到方程 $H(Z, X, \Phi) = 0$ 具有如下形式的解

$$Z = Z(X, \Phi) = \sum_{i+j \ge 1} X^i \Phi^j \mathcal{Q}_{i,j}(\ln X, \ln \Phi)$$

对于某些多项式$P_{i,\ j}$。因此，方程（2.8）的解具有如下形式

$$\begin{aligned} u = \mathcal{X}^{-1}(x) &= x^{\frac{1}{k}} \Phi(x^{\frac{1}{k}}) (u_0 + Z(x^{\frac{1}{k}}, \Phi(x^{\frac{1}{k}}))) \\ &= x^{\frac{1}{k}} \boldsymbol{\ell}^{\frac{\rho_k}{k}} \left(\tilde{u}_0 + \sum_{i+j \ge 1} x^{\frac{i}{k}} \boldsymbol{\ell}^{\frac{\rho_k j}{k}} \widetilde{\mathcal{Q}}_{i,j}(\ln x, \ln \boldsymbol{\ell}) \right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $\tilde{u}_0$ 是非零常数，$\mathcal{Q}_{i,\ j}$ 为多项式，且 $\boldsymbol{\ell} := -1/\ln x$。因此，引理 2.3 的证明完成。□

2.3 定理 1.1 的证明

证明。 由参数表示 (2.7) 可知，特征轨道Γ 具有显式表达式 $y = y(x) := \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}^{-1}(x)$。根据注 2.1，我们只需考虑以下 6 种情形：**(S1)** $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 均满足 **(C1)**，**(S2)** $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 均满足**(C2)**，**(S3)** $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 均满足**(C3)**，**(S4)** $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 均满足**(C4)**，**(S5)** $\mathcal{X}$ 满足**(C3)**，但 $\mathcal{Y}$ 满足**(C4)**，以及**(S6)** $\mathcal{X}$ 满足**(C4)**，但$\mathcal{Y}$ 满足**(C3)**。

在情形 **(S1)** 中， $\mathcal{Y}(u) \in \mathbb{R}[\![u]\!]$（或 $\mathbb{R}\{u\}$），且 $\mathcal{X}^{-1}(x) \in \mathbb{R}[\![x^{1/n}]\!]$（或 $\mathbb{R}\{x^{1/n}\}$）。因此，$y(x) = \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}^{-1}(x) \in \mathbb{R}[\![x^{1/n}]\!]$（或 $\mathbb{R}\{x^{1/n}\}$），并满足定理 1.1 的 (i)（或 (ii)）。在情形 (S2) 中，若 λ 为有理数，则 $\mathcal{Y}(u)$ 和 $\mathcal{X}^{-1}(x)$ 均为收敛Puiseux级数，因此 $y(x)$ 也是收敛Puiseux级数，满足定理 1.1 的 (ii)。相反，若 λ 为无理数，则 $\mathcal{Y}(u) \in \mathbb{R}\{u, u^{\lambda}\}$，且 $\mathcal{X}^{-1}(x)$ 具有展开式 (2.10)。从 (2.10) 可见，对于所有 $i + j \geq 1$，$(\mathcal{X}^{-1}(x))^{i+\lambda j}$ 都是定理 1.1 的 (ii) 中给出的形式。因此，$y(x) = \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}^{-1}(x)$ 的展开满足定理 1.1 的 (ii)。在情形 (S3) 中，我们有

$$\mathcal{Y}(u) = c_s u^s + \sum_{i \geq s+1} u^i P_i(\ln u)$$

且 $\mathcal{X}^{-1}(x)$ 具有展开式 (2.11)。注意

$$\ln \mathcal{X}^{-1}(x) = \frac{1}{k} \ln x + \ln \left(w_* + \sum_{s \geq 1} x^{\frac{s}{k}} Q_s \left(\frac{\ln x}{k} \right) \right).$$

于是，对于所有 $i \geq s + 1$，$(u^i P_i(\ln u))|_{u=\mathcal{X}^{-1}(x)}$ 都是关于 x 的收敛分数幂级数，其系数为 $\ln x$ 的多项式。因此， $y(x) = \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}^{-1}(x)$ 的展开也具有这种形式，并满足定理 1.1 的(iii) 。在情形(S4)下，我们有

$$\mathcal{Y}(u) = u^s P_s(\ln u) + \sum_{i \geq s+1} u^i P_i(\ln u)$$

且 $\mathcal{X}^{-1}(x)$ 具有展开式 (2.12)。由 (2.12) 可知

$$\ln \mathcal{X}^{-1}(x) = \frac{1}{k} \ln x + \frac{\rho_k}{k} \ln \boldsymbol{\ell} + \ln \tilde{u}_0 + \sum_{i+j \geq 1} x^{\frac{i}{k}} \boldsymbol{\ell}^{\frac{\rho_k j}{k}} \mathcal{P}_{i,j}(\ln x, \ln \boldsymbol{\ell}).$$

于是，对于所有 $i \geq s$，$(u^i P_i(\ln u))|_{u=\mathcal{X}^{-1}(x)}$ 的展开满足定理 1.1 的(iii)，因此 $y(x) = \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}(x)$ 的展开也满足定理 1.1 的(iii) 。类似地，可以证明，在情形(S5)和(S6)下， $y(x)$ 的展开都满足定理 1.1 的(iii)。定理 1.1 的证明至此完成。□

参考文献

[1] E. A. Coddington 和N. Levinson，《常微分方程理论》，麦格劳-希尔，纽约，1987。

[2] F. Berezovskaya，具有固定牛顿多边形的 Kolmogorov 型平面向量场的轨道渐近性，美国数学会会刊 142（2014），2671-2681。[3] L. H. Dmitrovi´c、R. Huzak、D. Vlah 和 V. ˇZupanovi´c，平面幂零奇点的分形分析与数值应用，微分方程杂志 293（2021），1-22。[4] H. Dulac，关于极限环，法国数学会通报 51 （1923），45-188。[5] F. Dumortier 、 J. Llibre 和 J. C. Art´es，《平面微分系统定性理论》，施普林格，纽约，2006。[6] J. ´Ecalle，《可解析函数引论及 Dulac 猜想的构造性证明》，《数学现状》，Hermann，巴黎，1992，ii +340 页。[7] Yu. S. Il'yashenko，极限环的有限性定理，《数学科学进展》45:2（272）（1990），143-200；英文译文见《俄罗斯数学调查》45:2（1990），129-203。[8] Yu. S. Il'yashenko，极限环的有限性定理，《数学专著译丛》，第 94卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1991，x+288 页。[9] S. G. Krantz 和 H. R. Parks，《实解析函数入门》，第 2 版，Birkh¨auser，波士顿 - 巴塞尔 - 柏林，2002。[10] P. Marde˘si´c 和 M. Resman，抛物型杜拉克芽的解析模，《俄罗斯数学调查》76（2021），389-460。[11] P. Marde˘si´c、M. Resman、J. P. Rolin 和 V. ˇZupanovi´c，幂对数超越级数的正规形与嵌入，《数学进展》303（2016），888-953。[12] D. Peran、M. Resman、J. P. Rolin 和 T. Servi，双曲对数超越级数的正规形，微分方程杂志 348（2023），154-190。[13] E. Picard，关于二阶微分方程在某些临界点邻域内积分的形式，C.R. Hebd. S ´eances Acad. Sci 87（1878），430-432，743-746。[14] E. Picard，关于一阶微分方程在某些临界点邻域内积分的形式，法国数学会通报 12（1884），48-51。[15]H. Poincar´e，关于由方程定义的函数的性质，J. ´Ec. Polytech. 45（1878），13-26。[16] M. Saavedra，周期函数的渐近展开 II，微分方程杂志 222（2006），476-486。[17] G. Sansone 和 R. Conti，《非线性微分方程》，培格曼，纽约，1964。

[18] Y. Tang 和 W. Zhang，例外方向上的广义正规扇形与轨道，*Nonlinearity* 17 (2004),1407-1426.

[19] Z.-F. Zhang等，《微分方程定性理论》，数学专著译丛 101，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1992.