arXiv:2603.06104v1 [math.AP] 6 Mar 2026

线性化 BGK 方程及其声学极限在网络上的界面层谱方法

R. BORSCHE*、T. DAMM *、A. KLAR*、和 Y. ZHOU†

摘要。 本文研究全线性动理学 BGK 模型的速度离散版本，以及克努森数趋于零时的相应极限，即线性化欧拉系统或声学系统。在网络上考虑这些方程时，通过对网络节点附近进行渐近分析，可由动理学条件推导出宏观方程的耦合条件。在此处，极限方程中的退化不仅要求研究动理学层，还需要讨论黏性层。利用交叉口处的动力学耦合条件，并将动理学层和黏性层与边上的外部问题耦合，可在每个节点处得到一个耦合动力学半空间问题。本文开发了一种谱方法来求解这些耦合动力学半空间问题。这使我们能够详细了解节点附近的各种界面层，并确定由动力学推导出的宏观方程耦合条件中的相关系数。数值结果表明，该方法准确且高效。

关键词。 动理学层，耦合条件，动理学半空间问题，网络

AMS分类号。82B40,90B10,65M08

1. 引言。 已有许多工作试图为网络上的宏观偏微分方程定义耦合条件，例如漂移-扩散方程、标量双曲方程，或诸如波动方程或欧拉型模型等双曲系统，参见例如 [12, 17, 16, 5, 4, 22, 23, 11, 32, 21, 25]。另一方面，网络上动理学方程的耦合条件仅在少得多的文献中得到讨论，参见 [24, 33, 34, 13]。在 [13]中，首次尝试由底层动力学模型为宏观方程推导耦合条件，针对的是趋化性动理学方程的情形。在 [14, 1]中，针对线性动理学方程提出并讨论了更一般、更精确的近似方法。其动机来自基于动理学层分析、为宏观方程寻求动理学滑移边界条件的经典方法 [8, 10, 27, 28, 40]。在最近的工作 [15] 中，重新考虑了非退化情形，证明了动理学耦合半空间问题的存在唯一性，并针对动理学方程的速度离散形式给出了一般的数值方法。

在本文中，我们考虑完整线性 BGK 方程的退化情形。与 [15] 一样，我们考虑速度离散化方程，并通过对节点附近情况进行渐近分析，根据动理学条件推导网络上相应宏观方程的耦合条件。与 [15] 相比，主要的额外难点源于极限方程的退化。这要求我们额外考虑边上的黏性层，以及它们与主体解和动理学层之间的耦合。本文着重讨论该问题的建模和数值方面。更深入的分析研究，包括高阶形式渐近理论和收敛性结果，将在 [42]中给出。

本文结构安排如下。在第2 节，我们讨论本文研究的网络上的动力学方程和宏观方程，以及这些方程的耦合条件类别。

[1]凯泽斯劳滕莱茵兰-普法尔茨工业大学，数学系，德国凯泽斯劳滕 67663（{borsche, damm, klar}@rptu.de）[2]亚琛工业大学，数学系，德国亚琛（zhou@igpm.rwth-aachen.de）

在第3节，我们讨论节点附近动力学方程的渐近分析、由此产生的节点处动力学层，以及相关的黏性层。这将基于耦合的动力学半空间问题，对节点处宏观方程的耦合条件进行抽象表述。在接下来的第4 节，我们考虑通过动理学离散速度模型对动力学方程进行一般速度离散化，并给出相关的动力学矩问题。此外，我们研究矩坐标下的离散层问题，并讨论一种谱方法。在第5 节，我们得到宏观方程的耦合条件，以及渐近极限下节点附近的动力学解的细节。此外，本节还简要概述了两种用于确定耦合条件的近似方法所得到的结果。最后，第6 节通过一个简单的三脚架网络展示上述发现，对比动力学解与宏观网络解，并给出若干示例的数值结果。

2. 方程与耦合条件。对于 $f_\epsilon = f_\epsilon(x,\ v,\ t)$，当 $x \in \mathbb{R}$ 和$v \in \mathbb{R}$ 在时间 $t \in [0, T]$ 时，我们考虑采用双曲时空标度的线性动理学 BGK 模型

$$\partial_t f_\epsilon + v\partial_x f_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}Q(f_\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon}\left(f_\epsilon - \left(\rho + vq + \frac{1}{2}(v^2-1)(S-\rho)\right)M(v)\right), \tag{2.1}$$

其中，密度、平均通量和总能量定义为

$$\rho_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(v)dv, \quad q_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} v f_\epsilon(v)dv, \quad S_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_\epsilon(v)dv$$

标准麦克斯韦分布定义为

$$M(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{v^2}{2}).$$

求动力学系统前 4 个矩的方程可得

$$\begin{aligned} \partial_t\rho_\epsilon + \partial_x q_\epsilon &= 0 \\ \partial_t q_\epsilon + \partial_x S_\epsilon &= 0 \\ \partial_t S_\epsilon + \partial_x h_\epsilon &= 0 \\ \epsilon\partial_t h_\epsilon + \epsilon\partial_x \int v^4 f_\epsilon dv &= -(h_\epsilon - 3q_\epsilon). \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $h_\epsilon = \int v^3 f_\epsilon dv$。取 ϵ 阶近似可得

$$h_\epsilon = 3q_\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.3}$$

因此，当 $\epsilon \to 0$ 趋于无穷时，相应的极限方程为

$$\begin{aligned} \partial_t\rho_0 + \partial_x q_0 &= 0, \\ \partial_t q_0 + \partial_x S_0 &= 0, \\ \partial_t S_0 + a^2\partial_x q_0 &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中含有 $a^2 = 3$。这些方程称为声学系统。此外，

$$f_0 = \left(\rho_0 + vq_0 + \frac{1}{2}(v^2-1)(S_0-\rho_0)\right)M(v). \tag{2.5}$$

方程（2.4）对应特征值 $\lambda_{\mp} = \mp a$和 $\lambda_0 = 0$ 的特征变量为

$$r_- = S_0 - aq_0, \qquad r_0 = S_0 - a^2\rho_0, \qquad r_+ = S_0 + aq_0. \tag{2.6}$$

参见 [7, 9, 29] ，了解从玻尔兹曼方程和 BGK 方程推导声学极限。我们注意到，(2.4) 是在速度为零的状态附近对可压缩欧拉方程进行线性化得到的。

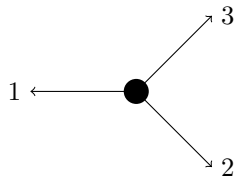

FIG. 2.1。 *Node connecting three edges and orientation of the edges.*

若在网络上考虑动力学方程，只需研究单个节点，见图2.1。每个节点都需要所谓的耦合条件。下文考虑一个连接 n 条边的节点，这些边均从节点向外延伸，如图2.1所示。每条边 i 均由区间 $[0, b_i]$ 参数化，动力学量和宏观量分别记为 f_ϵ^i和 ρ_0^i, q_0^i, S_0^i。在动力学层面，对于每条边，都需要在节点处，即 $x = 0$，对分布函数的流入部分 $f^i(0, v)$ $v > 0$ 施加条件。对于网络问题，动力学问题中这类耦合条件的一种可行选择是

$$f_\epsilon^i(0, v) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} f_\epsilon^j(0, -v), v > 0 \ , i = 1, \dots, n, \tag{2.7}$$

比较 [13]。于是，系统中的总质量守恒，如果

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} = 1, \tag{2.8}$$

因为在这种情况下通量平衡成立，即 $\sum_{j=1}^{n} \int v f_\epsilon^j(0, v) dv = 0$。

REMARK 1. 此外，对于任意满足 $l = 1$ 的 $k = 2l + 1$，耦合条件同样给出.....

$$\sum_{j=1}^{n} \int v^k f_\epsilon^j(0, v) dv = 0$$

特别地，我们将考虑具有对称耦合条件的节点情形，即 $\beta_{ij} = \frac{1}{n-1}, i \neq 0$ 与 $\beta_{ii} = 0$。

网络上宏观方程的耦合条件是节点 $x = 0$ 处 $3n$ 宏观量 $(\rho_0^i(0)\ q_0^i(0)\ S_0^i(0))$ 所满足的条件。它们由节点处入射特征变量的 n 条件给出

$$r_+^i(0) = S_0^i(0) + aq_0^i(0).$$

这些 n 条件由通量平衡给出

$$\sum_{i=1}^{n} q_0^i(0) = 0$$

并且，特别是在对称节点的情形下，由节点处的不变量给出。对于当前这个仅有一个入射特征的3方程系统，我们在该节点只需再增加一个不变量，例如 $S_0^i(0) + \delta q_0^i(0)$，其中 $\delta > 0$ 为任意量，从而给出$n-1$ 个附加方程

$$S_0^i(0) + \delta q_0^i(0) = S_0^j(0) + \delta q_0^j(0)$$

对于 i，$j = 1$，.....，n。这与 n 由节点处出射特征的给定值所给出的进一步条件相结合

$$S_0^i(0) - aq_0^i(0) = r_-^i(0). \tag{2.9}$$

迄今所讨论的条件已为宏观方程提供了足够数量的条件，因为与特征值 $\lambda_0 = 0$ 相关联的退化特征 r_0 不需要任何条件。

REMARK 2。 我们指出，数 δ 所起的作用类似于所谓的动力学边界层的外推长度，*[8]*。

在下文中，我们将不仅确定节点处宏观方程的耦合条件，还将完整分析动理学解以及在极限 $\epsilon \to 0$下节点附近界面层的结构。

3. 节点处的动理学层和黏性层以及宏观方程的耦合条件。

3.1. 动理学层。 我们进行动理学层分析，参见 [8, 18, 20, 6, 31],每条边 $[0, b_i]$的左边界。对方程（2.1）中的空间变量用 ϵ 重新标度，得到标度后的方程

$$\partial_t f + \frac{1}{\epsilon} v \partial_x f = \frac{1}{\epsilon} Q(f).$$

这在 ϵ 的零阶近似下，对缩放后的空间变量 $x \in [0, \infty]$ 给出了如下定常动理学半空间问题

$$v\partial_x f = \frac{1}{\epsilon} Q(f) = -\frac{1}{\epsilon}\left(f - \left(\rho + vq + \frac{1}{2}(v^2-1)(S-\rho)\right) M(v)\right), \tag{3.1}$$

其中，ρ，q和 S再次分别表示 f 的零阶矩、一阶矩和二阶矩。在 $x = 0$，对于这样的半空间问题，正如对于原动理学问题一样，必须规定入射特征量，即

$$f(0, v), v > 0 \ .$$

在 $x = \infty$，还需要一个额外条件。在当前情况下，该条件由出射宏观特征给出，即

$$\int \left(v^2 - av\right) f dv = r_-(0) = S_0(0) - aq_0(0). \tag{3.2}$$

由半空间问题得到的解在无穷远处具有如下形式

$$f(\infty, v) = \left(\rho_\infty + vq_\infty + \frac{1}{2}(v^2-1)(S_\infty - \rho_\infty)\right) M(v)$$

在 $x=0$ 处得到的半空间问题出射解为 $f(0,\ v)\ v<0$ 或 $f(0,\ -v)\ v>0$.现在，我们将所考虑节点相邻所有边上的层合并起来，并使用动力学耦合条件

$$f^i(0,v)=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}f^j(0,-v),v>0.$$

我们利用动力学耦合条件，得到不同弧上的半空间问题的入射解所需满足的条件。这意味着

$$f^i(0,v)=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}f^j(0,-v),v>0$$

因此，我们在每个节点处得到一个耦合动力学半空间问题。由耦合半空间问题最终确定的无穷远处的值，给出了宏观量所需的耦合条件。

然而，容易注意到，在当前情形下，该问题并不具有唯一解。碰撞不变量的任意线性组合（$\alpha+\beta v+\gamma v^2$）$M$都满足线性方程。此外，对于所有边取相同的 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$，若 $\beta=0$，则它也满足耦合条件。极限条件

$$\int\left(v^2-av\right)fdv=0$$

对所有边都成立，如果

$$\int\left(v^2-av\right)(\alpha+\gamma v^2)Mdv=0,$$

即，当 $\alpha=-3\gamma$.换句话说，对于耦合半空间问题的任意解 $f=(f^1,\ \cdots f^n)$，函数 $\tilde{f}=\varphi+C(v^2-3)M(v)$ 对任意常数 $C\in\mathbb{R}$ 也同样是满足（3.2）的解。为确定该常数，我们必须规定一个附加条件。为此，需要考虑节点处包含附加黏性层的完整情形。

3.2. 黏性层。本小节将更详细地考察黏性层。在每条边上，一个尺度为 $\sqrt{\epsilon}$ 的黏性层将动力学层解与该边上的主体解连接起来。黏性层对应的尺度变换为 $x\to\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}$。在黏性层中，我们写作

$$f(x,v,t)=f_0(x,v,t)+\hat{f}\left(\frac{x}{\sqrt{\epsilon}},v,t\right),$$

ˆ其中 f 满足缩放后的方程

$$\partial_t\hat{f}+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}v\partial_x\hat{f}=\frac{1}{\epsilon}Q(\hat{f}).$$

这等价于矩系统

$$\begin{aligned}\partial_t\hat{\rho}+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\partial_x\hat{q}&=0\\ \partial_t\hat{q}+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\partial_x\hat{S}&=0\\ \partial_t\hat{S}+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\partial_x\hat{h}&=0\\ \epsilon\partial_t\hat{h}+\sqrt{\epsilon}\partial_x\int v^4\hat{f}dv&=-(\hat{h}-3\hat{q}),\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中，$\hat{\rho}$、$\hat{q}$、$\hat{S}$ 分别是$\hat{f}$和$\hat{h}=\int v^3\hat{f}dv$对应的矩。取至 $\sqrt{\epsilon}$ 阶，可得

$$\begin{aligned}\sqrt{\epsilon}\partial_t\hat{\rho}+\partial_x\hat{q}&=0\\ \sqrt{\epsilon}\partial_t\hat{q}+\partial_x\hat{S}&=0\\ \sqrt{\epsilon}\partial_t\hat{S}+3\partial_x\hat{q}&=\sqrt{\epsilon}\partial_{xx}\int v^4\hat{f}dv.\end{aligned}\tag{3.4}$$

利用$\hat{f}=\left(\hat{\rho}+v\hat{q}+\frac{1}{2}(v^2-1)(\hat{S}-\hat{\rho})\right)M(v)+\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$，再次对最后一个方程取至$\sqrt{\epsilon}$阶，可得

$$\sqrt{\epsilon}\partial_t\hat{S}+3\partial_x\hat{q}=\sqrt{\epsilon}\partial_{xx}\int v^4\left(\hat{\rho}+v\hat{q}+\frac{1}{2}(v^2-1)(\hat{S}-\hat{\rho})\right)M(v)dv\tag{3.5}$$

and

$$\sqrt{\epsilon}\partial_t\hat{S}+3\partial_x\hat{q}=\sqrt{\epsilon}\partial_{xx}\left(6\hat{S}-3\hat{\rho}\right)\tag{3.6}$$

然后

$$\partial_t(\hat{S}-3\hat{\rho})=\partial_{xx}\left(6\hat{S}-3\hat{\rho}\right).\tag{3.7}$$

由 $\sqrt{\epsilon}\partial_t\hat{q}+\partial_x\hat{S}=0$ 可知，对于黏性层中的 $\epsilon\to 0$，有 $\partial_x\hat{S}=\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$，因此可得至$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$

$$\partial_t(\hat{S}-3\hat{\rho})=\partial_{xx}\left(\hat{S}-3\hat{\rho}\right)\tag{3.8}$$

或 $\partial_t\hat{r}=\partial_{xx}\hat{r}$，其中$\hat{r}=S-3\hat{\rho}$。

这是宏观方程中与零特征值对应的特征的扩散方程。黏性层中的三阶矩近似为

$$\hat{h}=\int v^3\hat{f}dv=3\hat{q}-\sqrt{\epsilon}\partial_x(\hat{S}-3\hat{\rho})+\mathcal{O}(\epsilon)=3\hat{q}-\sqrt{\epsilon}\partial_x\hat{r}+\mathcal{O}(\epsilon).\tag{3.9}$$

将黏性层与主体解匹配，可得黏性层解的无穷远边界条件为

$$\hat{r}(\infty,t)=0.$$

将黏性层方程与动理学层匹配，可得以下条件

$$S(\infty,t)-3\rho(\infty,t)=r_0(0,t)+\hat{r}(0,t)$$

其中 $S(\infty,t)=S_\infty(t)$ $\rho(\infty,t)=\rho_\infty(t)$ 是动力学层的渐近状态

3.3. 最终耦合条件。在本小节中，我们将得到动力学半空间问题所缺少的条件。如前所述，动力学耦合条件给出

$$\sum_{i=1}^{n}\int v^3 f^i(0,v,t)dv = 0,$$

其中，$f^i(x,\ v,\ t)$表示每条边上的分布函数。利用动力学层中 $\int v^3 f(x,\ v,\ t)dv$ 的不变性，我们得到 $x=0$处动力学三阶矩的以下 $\mathcal{O}(\epsilon)$近似

$$\begin{aligned}\int v^3 f(0,v,t)dv = \int v^3 f(\infty,v,t)dv = \int v^3 f_0(0,v,t)dv + \int v^3 \hat{f}(0,v,t)dv\\ =h_0(0,v,t)+\hat{h}(0,v,t) = 3q_0 + 3\hat{q} - \sqrt{\epsilon}\partial_x \hat{r}(0,t) + \mathcal{O}(\epsilon).\end{aligned}$$

现在利用通量平衡以及动力学层中 $\int v f(x,\ v,\ t)dv$ 的不变性，我们得到

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\int v f^i(0,v,t)dv = \sum_{i=1}^{n}\int v(f_0^i(0,v,t)+\hat{f}^i(0,v,t))dv = \sum_{i=1}^{n}(q_0^i+\hat{q}^i) = 0.$$

由此得到条件

$$\sum_{i=1}^{n}\partial_x \hat{r}^i(0,t) = 0.$$

现在考虑量的黏性层解

$$\hat{R}(x,t) = \sum_{i=1}^{n}\hat{r}^i(x,t)$$

我们得到

$$\partial_t \hat{R} = \partial_{xx}\hat{R} \tag{3.10}$$

满足条件 $\hat{R}(\infty,\ t) = 0$ 以及 $\partial_x \hat{R}(0,\ t) = 0$。由此得到平凡解 $\hat{R}(x,\ t) = 0$ 以及所需条件

$$\sum_{i=1}^{n}(S^i(\infty,t) - 3\rho^i(\infty,t)) = R_0(0,t) + \hat{R}(0,t) = R_0(0,t) = \sum_{i=1}^{n}(S_0^i(0,t) - 3\rho_0^i(0,t)) \tag{3.11}$$

对于耦合动力学半空间问题。在第5 节中，针对具有任意数量速度的动力学离散速度模型，详细讨论了采用上述耦合条件求解耦合问题的情况。

3.4. 节点处的情况。首先考虑变量 q 和 S，节点附近的量由动理学层问题的解 q_∞ 和 S_∞ 在无穷远处的值给出。它们在整个动理学层内均为常数，因为在该层中 $\int v\varphi dv$ 以及 $\int v^2\varphi dv$ 均为常数。此外，根据第 q 和 S 节的讨论，它们在整个黏性层内也均为常数。3.2最后，在 a 和 S 中观察到一个以速度 q 传播的波，其左态为 q_∞ 和 S_∞ ，右态则由相应的初始值给出。

变量 ρ的情况则更为复杂。对于这个量，除了行波解之外，还可能出现动理学层和黏性层。由于零特征速度 $S-3\rho$ 中不存在行波，且 S 中行波解的左态为 $S_\infty(t)$，因此我们得到 ρ 中行波解的左态为

$$\rho_0(0,t)+\frac{1}{3}(S_\infty(t)-S_0(0,t)).$$

因此， ρ 中的解由从 $\rho(0,\ t)$开始的动力学层组成；动力学层末端处，节点上的解为 $\rho_\infty(t)\ =\rho(\infty,\ t)$。随后，节点附近存在一个黏性层，其范围从 $\rho_\infty(t)$延伸至上文求得的行波解的左侧状态。

4. 离散速度BGK方程。为更详细地分析节点处的耦合层问题，并确定宏观耦合系数 δ ，我们聚焦于离散速度版本的动理学方程，关于离散边界层的更多细节请参见 [2, 3] 。我们按以下方式展开。与 F. Coron 的工作 [19] 一样，我们考虑正交归一厄米多项式 $P_k(v)\ k=0,\ \ldots\ldots,\ 2N$，定义在 $[-\infty,\infty]$上，其定义为 $P_0=\frac{1}{\pi^{1/4}}$，$P_1=\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}v$并且

$$vP_k(v)=\alpha_{k+1}P_{k+1}+\alpha_kP_{k-1},k=1,\cdots 2N-1$$

取 $\alpha_k=\sqrt{\frac{k}{2}}$，再次比较 [19]。注意， $P_2=\sqrt{2}v^2P_0-\frac{1}{\sqrt{2}}P_0$, $P_3=\frac{2}{\sqrt{3}}v^3P_0-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}P_1$, $P_4=\sqrt{\frac{2}{3}}v^4P_0-\sqrt{3}P_2-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}P_0$。此外，定义伴随函数

$$H_k=P_k\exp(-\frac{v^2}{2}).$$

利用变换 $v=\sqrt{2}\tilde{v}$ 和 $f=\tilde{f}H_0$，动力学方程可改写为

$$\partial_tf+\sqrt{2}v\partial_xf=-\frac{1}{\epsilon}\left(f-(H_0g_0+H_1g_1+H_2g_2)\right), \tag{4.1}$$

with

$$g_k=\int H_k(v)f(v)dv,k=0,1,2.$$

动理学密度、平均通量和总能量 $\rho,\ q,\ S$随后由下式得到

$$\rho=\sqrt{2}g_0,\quad q=\sqrt{2}g_1\quad S=2g_2+\rho$$

4.1. 离散速度模型。下面我们对 BGK 方程（2.1）在速度空间中进行离散，从而得到离散分布函数 $f_i\ (x,\ t)\ \ i=1,\ \cdots 2N$如下

$$\partial_tf_i+v_i\partial_xf_i=-\frac{1}{\epsilon}\left(f_i-M_i\right) \tag{4.2}$$

采用速度离散化

$$-1\le v_1<v_2<\cdots<v_N<0<v_{N+1}<\cdots<v_{2N-1}<v_{2N}\le 1.$$

出于对称性的考虑

$$v_{2N} = -v_1, \cdots, v_{N+1} = -v_N.$$

令 $w_i \geq 0, i = 1, \ldots 2N$为对称权重，满足 $\sum_{i=1}^{2N} w_i = 1$。我们选取$v_i, i = 1, \ldots 2N$作为 $[-\infty, \infty]$上的高斯-埃尔米特点，并取 w_i为相应的高斯-埃尔米特权重。

此外，我们使用由下式给出的离散线性化麦克斯韦分布 M_i

$$M_i = w_i e^{v_i^2}(H_0(v_i)g_0 + H_1(v_i)g_1 + H_2(v_i)g_2) \tag{4.3}$$

其中 $g_k, k = 0, \ldots, 2N-1$定义如下

$$g_k = \sum_{i=1}^{2N} H_k(v_i) f_i \ .$$

离散麦克斯韦分布的选取使得 $k = 0,1,2$

$$\sum_{i=1}^{2N} M_i H_k(v_i) = g_k \tag{4.4}$$

and

$$\sum_{i=1}^{2N} M_i H_k(v_i) = 0, k = 3, \ldots, 2N-1 \tag{4.5}$$

这是由于离散正交性。

此外,

$$\sum_{i=1}^{2N} H_{2N}(v_i) f_i \ = 0.$$

现在令 $G = (u, g)T$，其中 $u = (g_0, g_1, g_2, g_3)^T$，且 $g = (g_4, \ldots, g_{2N-1})$。考虑类范德蒙矩阵

$$S = \begin{bmatrix} H_0(v_1) & \cdots & H_0(v_{2N}) \\ H_1(v_1) & \cdots & H_1(v_{2N}) \\ & \vdots & \\ H_{2N-1}(v_1) & \cdots & H_{2N-1}(v_{2N}) \end{bmatrix}$$

它将变量 $f = (f_1, \ldots f_{2N})^T$转换为矩$G = Sf.$

利用埃尔米特多项式的递推关系和离散正交性，可将动理学方程改写为矩变量形式:

$$\begin{aligned} \partial_t g_0 + \partial_x g_1 &= 0 \\ \partial_t g_1 + \sqrt{2}\partial_x(g_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} g_0) &= 0 \\ \partial_t g_2 + \sqrt{2}\partial_x(\alpha_3 g_3 + \alpha_2 g_1) &= 0 \\ \partial_t g_k + \sqrt{2}\partial_x(\alpha_{k+1} g_{k+1} + \alpha_k g_{k-1}) &= -\frac{1}{\epsilon} g_k, k = 3, \ldots 2N-2 \\ \partial_t g_{2N-1} + \sqrt{2}\partial_x(\alpha_{2N-1} g_{2N-2}) &= -\frac{1}{\epsilon} g_{2N-1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

重新命名后得到

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho + \partial_x q &= 0 \\
\partial_t q + \partial_x S &= 0 \\
\partial_t S + a^2 \partial_x q + \partial_x (2\sqrt{3} g_3) &= 0 \\
\partial_t g_3 + \sqrt{2} \partial_x (\alpha_4 g_4 + \alpha_3 g_2) &= -\frac{1}{\epsilon} g_3 \\
\partial_t g_k + \sqrt{2} \partial_x (\alpha_{k+1} g_{k+1} + \alpha_k g_{k-1}) &= -\frac{1}{\epsilon} g_k, k = 4, \dots 2N-2 \\
\partial_t g_{2N-1} + \sqrt{2} \partial_x (\alpha_{2N-1} g_{2N-2}) &= -\frac{1}{\epsilon} g_{2N-1}
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

注意，对于该系统，我们在极限下 $\epsilon \to 0$ 直接得到声学系统（2.4）。

4.2. 离散层问题。 相应的离散动力学层方程为

$$
\begin{aligned}
\partial_x q &= 0 \\
\partial_x S &= 0 \\
\partial_x (a^2 q + 2\sqrt{3} g_3) &= 0 \\
\sqrt{2} \partial_x (\alpha_4 g_4 + \alpha_3 g_2) &= -g_3 \\
\sqrt{2} \partial_x (\alpha_5 g_5 + \alpha_4 g_3) &= -g_4 \\
\sqrt{2} \partial_x (\alpha_{k+1} g_{k+1} + \alpha_k g_{k-1}) &= -g_k, k = 5, \dots 2N-2 \\
\sqrt{2} \partial_x (\alpha_{2N-1} g_{2N-2}) &= -g_{2N-1}
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

即 $q = C$、 $S = D$ 和 $D = 2g_2 + \rho$。以及 $a^2 q + 2\sqrt{3} g_3 = \bar{a}^2 C + 2\sqrt{3} g_3$ 另一个常数。令 $g_3 = G$。对于常数 $C, G \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathbb{R}^+$。由此得到

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} \partial_x (\alpha_4 g_4 + \alpha_3 g_2) &= -G \\
\sqrt{2} \partial_x (\alpha_5 g_5) &= -g_4 \\
\sqrt{2} \partial_x (\alpha_{k+1} g_{k+1} + \alpha_k g_{k-1}) &= -g_k, k = 5, \dots 2N-2 \\
\sqrt{2} \partial_x (\alpha_{2N-1} g_{2N-2}) &= -g_{2N-1}
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

仅当 $G = 0$ 时才有有界解，此时 $2g_4 + \sqrt{3} g_2 = H$。利用$\rho = D - 2g_2$ 重写可得

$$
\rho = B + \frac{4}{\sqrt{3}} g_4
$$

引入新的常数 $B = D - H \frac{2}{\sqrt{3}}$。整理后得到

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \rho = \frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} g_4 \\
g_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} C \\
g_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (H - 2g_4) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\frac{\sqrt{3}}{2} (D - B) - 2g_4) = \frac{D - B}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} g_4 \\
g_3 &= 0
\end{aligned}
$$

而 $g=(g_4,\dots g_{2N-1})$ 的系统可写成矩阵形式：

$$\partial_x g = -A^{-1}g$$

其中，对称三对角矩阵 $A\in\mathbb{R}^{2(N-2)\times 2(N-2)}$ 定义为

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_5 & 0 & \alpha_6 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2N-2} & 0 & \alpha_{2N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{2N-1} & 0 \end{bmatrix}$$

线性常微分方程组（4.8）的平衡点为 $g=0$ 和 $\rho=B$ 和 $q=C$和 $S=D$。

LEMMA 4.1. A 是严格双曲的，也就是说，它可对角化，且具有实数且互不相同的特征值。此外， A 的 $N-2$ 个特征值均为正。其余 $N-2$ 个特征值则为相应的负值。我们将与正特征值对应的特征向量记为 r_i、 $i=1$、.....、 $N-2$，并将这些特征向量组成的矩阵记为

$$R_2^+ = \left(r_1,\dots,r_{N-2}\right)\in\mathbb{R}^{2(N-2)\times(N-2)}.$$

5. 耦合问题的解。本节讨论离散速度模型的动力学耦合问题的解。

首先，我们注意到，如果离散半空间问题的初值（$g_4(0)\ \cdots$， $g_{2N-1}(0)$）位于由与 A的正特征值对应的特征向量 r_1， $\cdots r_{N-2}\in\mathbb{R}^{2N-4}$ 张成的方程组稳定流形上，那么我们就能得到离散动力学半空间问题的有界解。这意味着 g必须满足

$$g(0)=\gamma_1 r_1+\cdots+\gamma_{N-2}r_{N-2}=R_2^+\gamma$$

对于某些取值 γ_1，.....， γ_{N-2}属于 $\mathbb{R}$。那么，根据上述考量可直接得到

$$G(0,t)=(u,g)^T(0,t)=T(D,C,B,\gamma)^T \tag{5.1}$$

其中 $T\in\mathbb{R}^{(2N)\times(N+1)}$ 由下式给出

$$T=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & R_2^+ \end{bmatrix}$$

with

$$T_{11}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{12}=\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e_1^T R_2^+ \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}e_1^T R_2^+ \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ 是 $\mathbb{R}^{2(N-2)}$ 中的单位向量。 T 显然是满秩的。最后，通过变换 $f(0, t) = S^{-1}G(0, t)$，得到 $f(0, t) = (f_1, \ldots f_{2N})^T(0, t)$。将 $f(0, t)$ 的这一表达式代入动力学耦合条件

$$f^i(0, v) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} f^j(0, -v), v > 0 \ , i = 1, \cdots n \tag{5.2}$$

给出关于 n（$N + 1$）个未知量的 nN 个方程。

如第 3 节所述，剩余的 n 方程由出射特征量

$$D^i - aC^i = S_0^i(0) - aq_0^i(0), i = 1, \cdots, n. \tag{5.3}$$

这是关于量 C^i、D^i、B^i、γ^i 和 i 的最终一组 n（$N + 1$）个方程 n
特别地，可得到耦合半空间问题的完整解，并且

$$S_0^i(0) + aq_0^i(0) = D^i + aC^i$$

即，宏观方程在各节点处所需的入射特征量。

为进行更详细的考察，我们将讨论范围限定于对称耦合条件的情形。

5.1. 对称耦合条件。对于满足 $\beta_{ij} = {}_{n-1}^{1}, i \neq 0$ 和 $\beta_{ii} = 0$ 的完全对称耦合条件，复杂度可以大幅降低。首先注意，耦合条件

$$f^i(0, v) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} f^j(0, -v), v > 0 \ , i = 1, \cdots n$$

给出 $v > 0$ 和 $i \neq j$

$$\begin{aligned}(n-1)f^i(0, v) &= \sum_{l=1, l\neq i}^{n} f^l(0, -v) \\ &= \sum_{l=1, l\neq j}^{n} f^l(0, -v) + f^j(0, -v) - f^i(0, -v) \\ &= (n-1)f^j(0, v) + f^j(0, -v) - f^i(0, -v).\end{aligned}$$

因此，

$$(n-1)f(0, v) + f(0, -v)$$

是节点处的一个不变量，因此对于离散方程，我们得到节点处依赖于 B 的 N 个不变量，C, D 和 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{N-2}$。

$$\begin{aligned}Z_1 &= (n-1)f_{N+1}(0) + f_N(0) \\ Z_i &= (n-1)f_{2N-k+1}(0) + f_k(0), k = 2, \cdots N-1 \\ Z_N &= (n-1)f_{2N}(0) + f_1(0)\end{aligned}$$

我们有 $Z = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)$

$$Z = RS^{-1}T \begin{bmatrix} D \\ C \\ B \\ \gamma \end{bmatrix}$$

其中 $R \in \mathbb{R}^{N\times 2N}$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 & 0 & n-1 \end{bmatrix}$$

假设 $RS^{-1}T$ 是满秩的，则通过 QR分解可将矩阵 $RS^{-1}T$ 变换为以下形式

$$\begin{bmatrix} 1 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\delta_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{\delta}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & \tilde{\delta}_{N-2} \end{bmatrix}$$

特别地，这给出了不变量

$$D + \delta_1 C$$

and

$$B + \delta_2 C$$

或者用 S 和 q 以及 ρ 表示，即不变量

$$S_\infty + \delta_1 q_\infty$$

and

$$\rho_\infty + \delta_2 q_\infty$$

如上所述，这在每个节点处给出 $2(n-1)$ 个方程，即条件

$$D^i + \delta_1 C^i = D^j + \delta_1 C^j,\ B^i + \delta_2 C^i = B^j + \delta_2 C^j.$$

再加上通量相等

$$\sum_{i=1}^{n} C^i = 0 \tag{5.4}$$

因此，我们有 $2n-1$ 个耦合条件。此外，根据条件 (2.9)，我们还像之前一样得到 n 个额外条件。这样总共又得到 $3n-1$ 个方程，涉及以下$3n$ 未知量： C^i 和 D^i 以及 B^i 在每个节点处。最后一个条件 (3.11) 可通过考察黏性层得到。

Remark 3。 我们注意到，仅由 $S_\infty + \delta_1 q_\infty$的不变量性、通量 $\sum_j q^j_\infty = 0$ 的通量平衡以及无穷远处的 n 条件，就已经有足够多的条件来耦合宏观方程：这确定了节点处 q^i_∞和S^i_∞ 的值。由于0特征不需要边界条件，这足以实现宏观方程的耦合。

5.2. 节点处的完整动理学解。 为了在极限 $\epsilon \to 0$ 下获得节点处的完整动理学解，我们必须确定 $x = 0$ 处的层解。这意味着，根据（5.1），我们必须确定 γ_1、.....、γ_{N-1}的值。这样最终便可得到节点处分布函数的所有矩。在完全对称耦合条件下，我们可以简化这一过程。注意，在这种情况下，对矩阵 Z 进行变换会给出额外的 $N-2$ 不变量

$$\begin{aligned} & C + \tilde{\delta}_1 \gamma_1, \\ & \gamma_{k-1} + \tilde{\delta}_k \gamma_k, \ k = 2, \dots N-2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

此外，我们可直接由奇数阶矩的耦合条件得到

$$\sum_{i=1}^{n} g_{2k+1}^i (x=0) = 0, k = 2, \dots, N-1,$$

由此可得

$$\sum_{i=1}^{n} e_{2k}^T R_2^+ \gamma^i = 0, k = 2, \dots, N-1. \tag{5.6}$$

(5.5) 和 (5.6) 给出了所需的 $(N-2)(n-1) + N - 2 = (N-2)n$ 条件，此外还需满足上述 $3n$ 条件，因此 C^i, D^i, B^i, γ^i，从而所有矩 ρ^i, q^i, S^i, g^i 在 $x = 0$处均已确定。特别地，$\rho^i(x=0)$ 可表示为

$$\rho^i(x=0) = B + \frac{4}{\sqrt{3}} g_4^i = B + \frac{4}{\sqrt{3}} e_1^T R_2^+ \gamma^i$$

.

边 i 上节点 $f^i = f^i(x=0, v)$ 处 $v \in \mathbb{R}$ 的分布函数最终可由厄米展开表示为

$$f(v) = H_0(\frac{v}{\sqrt{2}}) \sum_{k=0}^{2N-1} g_k H_k(\frac{v}{\sqrt{2}})$$

其中

$$g_0 = \frac{\rho}{\sqrt{2}}, g_1 = \frac{C}{\sqrt{2}}, g_2 = \frac{1}{2}(D-\rho), g_3 = 0$$

并且，$g = (g_4, \dots, g_{2N-1})^T$ 与之前一样为

$$g = R_2^+ \gamma.$$

5.3. 宏观量的耦合条件总结。
上述3n个耦合条件（5.1）（5.4）（5.3）和（3.11）可以写成 a
线性系统 $\mathcal{A}m = b$ 对于

$$\begin{aligned} m &= (S_\infty^1, \cdots S_\infty^n, q_\infty^1 \cdots q_\infty^n, \rho_\infty^1, \cdots \rho_\infty^n) \\ &= (D^1, \cdots, D^n, C^1, \cdots, C^n, B^1, \cdots, B^n) \end{aligned}$$

由分块矩阵给出

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$$

其中 $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 定义为

$$A_{11} = A, A_{12} = B + \delta_1 A, A_{31} = B, A_{32} = \delta_2 A, A_{33} = -3B + A$$

and

$$A_{21} = I, A_{22} = -aI,$$

其中我们定义了

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

and

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

and

$$b = \begin{bmatrix} 0^n & \alpha & \beta & 0^{n-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3n}.$$

这里，我们使用了 $\alpha = (\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$，其中 $\alpha_i = S_0^{(i)} - aq_0^{(i)}$ 和 $\beta = \sum_{i=1}^n [S_0^i - 3\rho_0^i] \in \mathbb{R}$。此外，$0^n \in \mathbb{R}^n$ 是零向量。

$\mathcal{A}$ 可逆，也就是说，当由以下表达式给出的 $\mathcal{A}$ 的行列式

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A_{33}) \det(A_{22}) \det(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) \\ &= \det(A_{33}) \ \det(A_{11} + aA_{12}) \\ &= -3a(-1)^{n+1} n (-1)^{n+1} n (1 + a\delta_1)^{n-1} \\ &= -3an^2 (1 + a\delta_1)^{n-1} \end{aligned}$$

不等于零时，耦合问题有唯一解；这对所有 $\delta_1 \neq -\frac{1}{a}$ 均成立，尤其是对所有非负的 δ_1 和任意的 δ_2均成立。

5.4. 耦合条件的简单近似。关于求解半空间问题渐近状态的近似方法，已有大量文献 [37, 30, 36, 38, 39, 35]。我们采用其中两种适用于网络情形的方法，见 [1], 第6节的数值比较。一个直接的近似方法是：令 $x = 0$ 处的前两个半矩等于 $x = \infty$处的相应半矩，从而得到依赖于入射分布的渐近状态，即

$$\int_0^\infty \begin{pmatrix} v \\ v^2 \end{pmatrix} f(0, v) dv = \int_0^\infty \begin{pmatrix} v \\ v^2 \end{pmatrix} \left(\rho + vq + \frac{1}{2}(v^2 - 1)(S - \rho) \right) M(v) dv$$

并假设出射分布近似为

$$f(0,v)=\left(\rho_\infty+vq_\infty+\frac{1}{2}(v^2-1)(S_\infty-\rho_\infty)\right)M(v),v<0\ .$$

利用耦合条件

$$f^i(0,v)=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}f^j(0,-v),v>0.$$

可得

$$\int_0^\infty\begin{pmatrix}v\\v^2\end{pmatrix}\left(\rho+vq+\frac{1}{2}(v^2-1)(S-\rho)\right)M(v)dv$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\int_0^\infty\begin{pmatrix}v\\v^2\end{pmatrix}\left(\rho_\infty-vq_\infty+\frac{1}{2}(v^2-1)(S_\infty-\rho_\infty)\right)M(v)dv$$

or

$$\rho_\infty^i+\sqrt{2\pi}q_\infty^i+S_\infty=\sum_j\beta_{ij}\left(\rho_\infty^j-\sqrt{2\pi}q_\infty^j+S_\infty\right)$$

and

$$4q_\infty^i+\sqrt{2\pi}S_\infty=\sum_j\beta_{ij}\left(-4q_\infty^j+\sqrt{2\pi}S_\infty\right)$$

在均匀节点的特殊情形下，即 $c_{ij}=\frac{1}{n-1}$ 对于 $i\neq j$ 以及 $c_{ij}=0$ 对于$i=j$，我们有

$$S_\infty^i+\frac{4(n-2)}{n\sqrt{2\pi}}q_\infty^i=\rho_\infty^j+\frac{4(n-2)}{n\sqrt{2\pi}}q_\infty^j$$

以及不变量

$$S_\infty+\frac{4(n-2)}{n\sqrt{2\pi}}q_\infty\ . \tag{5.7}$$

or

$$\delta_1=\frac{4(n-2)}{n\sqrt{2\pi}} \tag{5.8}$$

此外，我们得到不变量

$$\rho_\infty+\frac{n-2}{n}\frac{2(\pi-2)}{\sqrt{2\pi}}q_\infty\ . \tag{5.9}$$

or

$$\delta_2=\frac{n-2}{n}\frac{2(\pi-2)}{\sqrt{2\pi}} \tag{5.10}$$

例如，对于 $n=3$，因子 $\delta_1=\frac{4}{3\sqrt{2\pi}}\sim 0.5320$ 和 $\delta_2=\frac{4.32(\pi-2)}{\sqrt{2\pi}}\sim 0.3033$ 为……。 $n\to\infty$ 可得 $\delta_1=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sim 1.5958$ 以及 $\delta_2=\frac{2(\pi-2)}{\sqrt{2\pi}}\simeq 0.9109$。

半矩近似来自 [1]，给出数值 $\delta_1\approx 0.5301$ 和 $\delta_2\approx 0.3402$。对于情形 $n=\infty$，由此得到 $\delta_1\approx 1.5833$ 和 $\delta_2\approx 0.9975$。

5.5. 耦合系数的数值结果。 我们仅限于完全对称耦合条件。从数值角度看， δ_1、δ_2 的计算与网络问题的解无关。它尤其需要知道正特征值 λ_i、 $i = 1$、……、$N-1$（所属矩阵为 A）。此外，需要对类范德蒙矩阵 S 求逆，并对 $RS^{-1}T$做一次高斯消元。对 S 的求逆并非病态，只要采用高斯-埃尔米特点，参见例如 [26]。

图 5.1 显示了 δ_1、δ_2 在 N 取不同值时的结果，以及 $n = 3$ 条边连接到该节点时的相关数值误差。图 5.2 显示了相同的结果，但针对 $n = \infty$ 条边连接到该节点的情况。

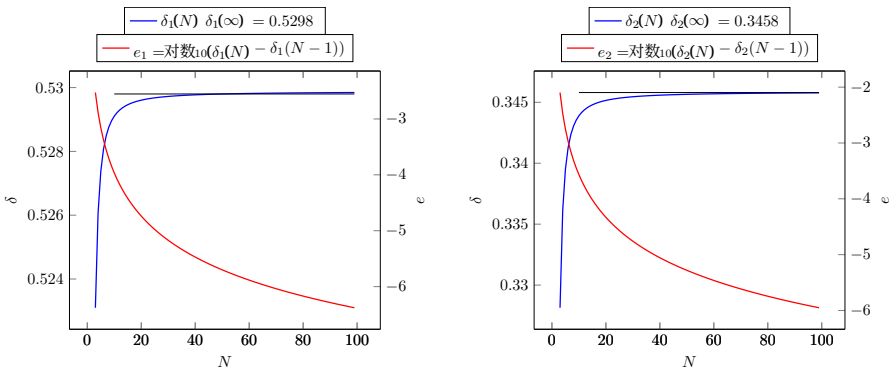

FIG. 5.1。 *Coefficients δ_1 and δ_2 depending on N for $n = 3$. Associated error depending on N.*

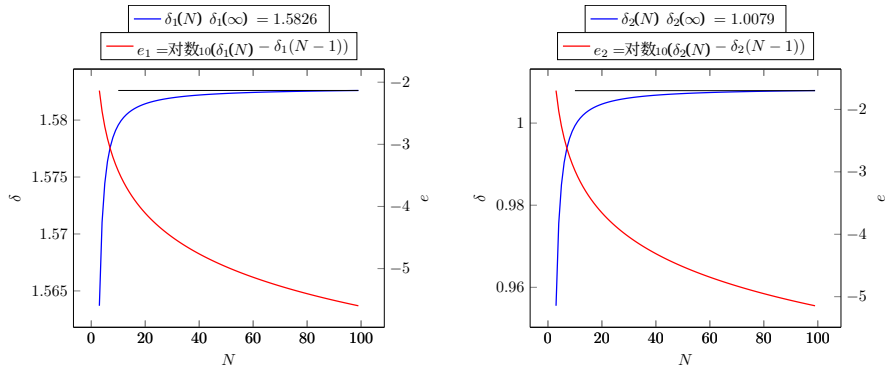

FIG. 5.2。 *Coefficients δ_1 and δ_2 depending on N for $n = \infty$. Associated error depending on N.*

6. 网络的数值结果。 为说明上述结果，我们考虑一个具有 3 条边的单个节点。

作为动力学方程和宏观方程的初始条件，我们选取密度 $\rho_0 = (\rho_0^1, \rho_0^2, \rho_0^3) = (1, 1-\bar{\rho}_0, 1+\bar{\rho}_0)$、通量 $q_0 = (0, \bar{q}_0, -\bar{q}_0)$以及¯二阶矩 $S_0 = (1, 1-S_0, 1+S_0)$，以及动理学解所对应的线性化麦克斯韦分布。这些初始数据也在外边界上给定。

来自第5.3 节的耦合条件给出如下解。

$$
\begin{aligned}
q_\infty &= (0, \bar{q}_\infty, -\bar{q}_\infty) \\
S_\infty &= (1, 1-\bar{S}_\infty, 1+\bar{S}_\infty) \\
\rho_\infty &= (1, 1-\bar{\rho}_\infty, 1+\bar{\rho}_\infty)
\end{aligned}
$$

with

$$
\bar{q}_\infty = \frac{\bar{S}_0 + a\bar{q}_0}{\delta_1 + a},\ \bar{S}_\infty = \delta_1 \bar{q}_\infty,\ \tilde{\rho} = \delta_2 \bar{q}_\infty.
$$

注意，在变量 ρ <style id='4}>动力学层和黏性层可能会在行波解之外额外出现，而在 q 和 S 中只存在内部行波解。后面的量在整个动力学层和黏性层中均为常数。相关讨论见第3.4节。下面我们讨论不同的物理情形。

情形1是一种不存在内部行波解和黏性层的情形。为此，我们选择满足 $\bar{q}_0 = 1$、$\bar{\rho}_0 = \delta_2 \bar{q}_0$ 和 $S_0 = \delta_1 \bar{q}_0$的初始条件，使得初始条件满足耦合条件，因为 $\bar{q}_\infty = \bar{q}_0 = 1$、$S_\infty = S_0 = \delta_1$ 和 $\bar{\rho}_\infty = \bar{\rho}_0 = \delta_2$。在这种情形下，节点处仅在 ρ 中出现动力学层。这一情形如图 6.1所示，图右侧放大显示了节点附近的区域。

情形2是一个在 ρ 中存在合并的动力学层与黏性层，且在 q 和 S中不存在行波的情形。为此，我们选择 $\bar{q}_0 = 1$， $S_0 = \delta_1 \bar{q}_0$，但 $\bar{\rho}_0 = 2\delta_2$。我们得到 $\bar{q}_\infty = \bar{q}_0 = 1$， $S_\infty = S_0 = \delta_1$ 以及 $\bar{\rho}_\infty = \delta_2 \bar{q}_0 = \delta_2 \neq \bar{\rho}_0$。这样可以避免行波解，但会导致节点附近的黏性层与动力学层混合。这种情况如图 6.2所示，右侧再次放大展示了节点附近的区域。

由于零特征速度中不存在行波，根据第 3.4 节的讨论，在 ρ中有一个左行波状态，其表达式为 $\rho_0 + \frac{1}{3}(S_\infty - S_0)$。因此，如果 $\rho_\infty = \rho_0 + \frac{1}{3}(S_\infty - S_0)$ 或等价地 $\bar{\rho}_\infty = \bar{\rho}_0 + \frac{1}{3}(\bar{S}_\infty - \bar{S}_0)$，那么就没有黏性层。因此，对于测试情形3，我们选择 $\bar{q}_0 = 1$，$S_0 = 2\delta_1 \bar{q}_0$ 并

$$
\bar{\rho}_0 = \delta_2 \frac{2\delta_1 + a}{\delta_1 + a} - \frac{1}{3}(\delta_1 \frac{2\delta_1 + a}{\delta_1 + a} - 2\delta_1) = \frac{2\delta_1 + a}{\delta_1 + a}(\delta_2 - \frac{1}{3}\delta_1) + \frac{2}{3}\delta_1.
$$

我们得到 $\bar{q}_\infty = \frac{2\delta_1 + a}{\delta_1 + a}$， $\bar{S}_\infty = \delta_1 \bar{q}_\infty$和 $\bar{\rho}_\infty = \delta_2 \bar{q}_\infty = \delta_2 \frac{2\delta_1 + a}{\delta_1 + a} = \bar{\rho}_0 + \frac{1}{3}(\bar{S}_\infty - \bar{S}_0)$。这在 q 和 S 中产生行波和一个动理学层，但在 ρ中没有黏性层，如图 6.3所示。

最后，对于测试案例 4，我们选择 $\bar{q}_0 = 1$， $\bar{S}_0 = 2\delta_1 \bar{q}_0$ 和 $\bar{\rho}_0 = \delta_2 \frac{2\delta_1 + a}{\delta_1 + a}$。我们得到$\bar{q}_\infty = \frac{2\delta_1 + a}{\delta_1 + a}$，$\bar{S}_\infty = \delta_1 \bar{q}_\infty$和 $\bar{\rho}_\infty = \delta_2 \bar{q}_\infty = \bar{\rho}_0$。这在 q 和S 以及 ρ 中形成行波，并出现合并的动力学层与黏性层，如图 6.4所示。

最后，图 6.5 展示了完整分布函数在 $x = 0$ 处（测试案例 2）的情况。特别地，可以观察到不连续性出现在 $v = 0$ ，以及谱方法的吉布斯振荡。

7. 结论与展望。 本文对网络节点处的界面层进行了详细的数值分析，其动力学由完整的线性化动理学 BGK 方程及其宏观极限——线性化欧拉方程——所描述。

该方法基于对节点附近情形的渐近分析，并研究节点附近的动理学层以及相关的耦合动力学半空间问题。此外，由于宏观方程

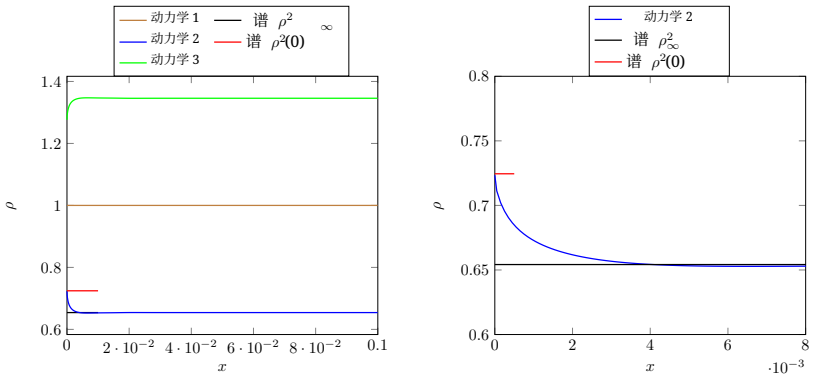

FIG. 6.1 *Testcase 1: ρ for all edges kinetic solution for $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ at time $t = 0.1$ (left).* 。 , *Zoom to solution on edge 2 (right).*

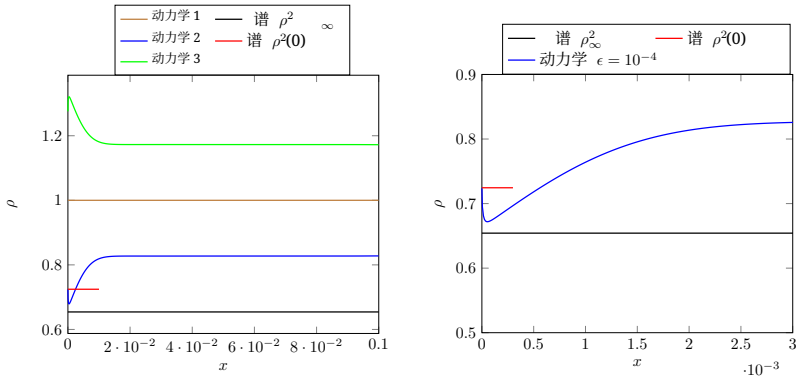

FIG. 6.2。 *Testcase2: ρ for all edges, kinetic solution for $\epsilon = \cdot 10^{-4}$ at time $t = 0.1$ (left). Zoo m to solution on edge 2 (right).*

在一个变量上是退化的，因此除了讨论动力学半空间问题外，还需要研究相关的黏性层。

为获得数值解，我们开发了一种精确的谱方法，用于求解半空间问题并确定渐近状态。

渐近展开的有效性以及动理学解向宏观解的收敛性，将在后续论文中证明，参见 [42] ，该文采用 [41]针对双曲弛豫系统的方法。

最后，我们提及，读者可通过以下网址获取代码和数据，以复现本文最重要的数值结果，特别是 δ_1的计算， δ_2 以及节点处的分布函数：

https://gitlab.rhrk.uni-kl.de/klar/kinetic-network-degenerate.git

参考文献

[1] I. Akramov、R. Borsche、N. Eckhard 和 A. Klar, *Interface layers and coupling conditions on networks for linearized kinetic BGK equation* 17,3, 468 488, , Kinetic and Related Models, -。 2023

[2] H. Babovsky、T. P - *Kinetic boundary layers for the Boltzmann equation on discrete velocity lattices* latko 60 1 87 116, 2008 wski, , Arch.Mech. () , -

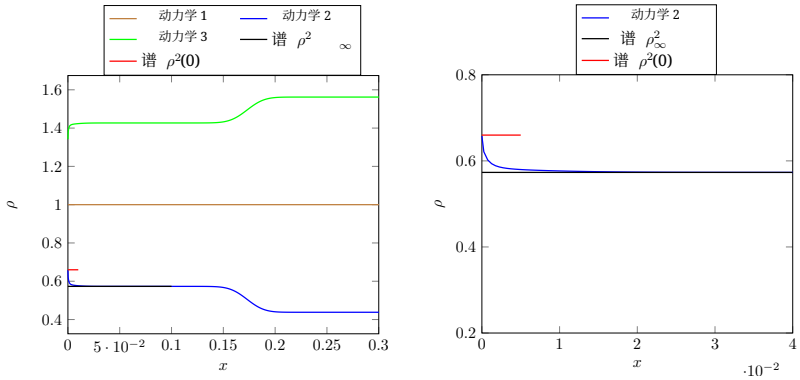

FIG. 6.3 *Testcase 3: ρ for all edges kinetic solution for $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ at time $t = 0.1$ (left). . , Zoom to solution on edge 2 (right).*

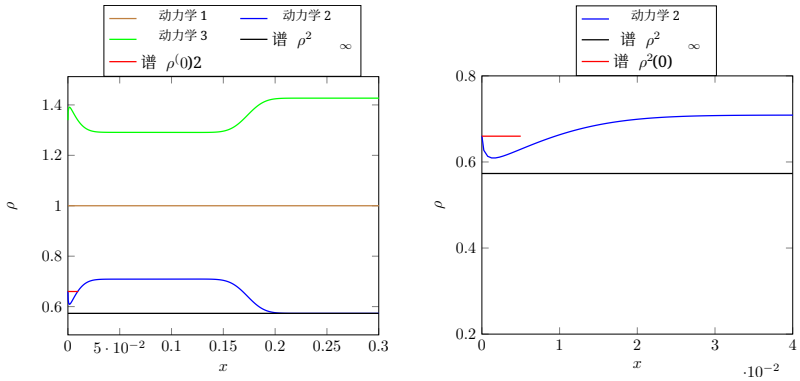

FIG. 6.4 *Testcase 4: ρ for all edges kinetic solution for $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ at time $t = 0.1$ (left). . , Zoom to solution on edge 2 (right).*

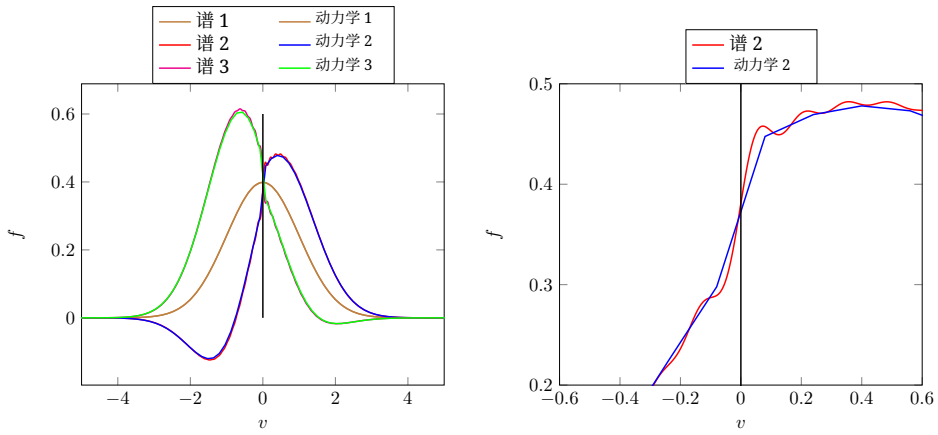

FIG. 6.5 *Kinetic solution for all edges at $x = 0$ at time $t = 0.1$ for testcase 2 computed by $FD_\circ$, method with $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ and $\Delta x = 10^{-4}$*

$\Delta v = 0.005$ and by spectral method with $N = 1000$. On the right a zoom to the discontinuity at $v = 0$ is shown for edge 2.

[3] N. Bernhoff, *Boundary layers for discrete kinetic models: Multicomponent mixtures, polyatomic molecules, bimolecular reactions, and quantum kinetic equations*,《Kinetic and Related Models》, 10, 4, 925-955, 2017年。[4] M. Banda, M. Herty, A. Klar, *Coupling conditions for gas networks governed by the isothermal Euler equations* 1 2 295 314, 2006 , NHM ( ), -。[5] M. Banda, M. Herty, A. Klar, *Gas flow in pipeline networks*, NHM 1(1), 41-56, 2006年。[6] Bardos, C, Caflisch, R. and Nicolaenko, B., *The Milne and Kramers problem for the Boltzmann equation of a hard sphere gas* 39, 323 352, 1986 , Comm. Pure and Appl. Math., –。[7] C. Bardos, F. Golse, D. Levermore, *The acoustic limit for the Boltzmann equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. 153, 177-204, 2000年。[8] C. Bardos, R. Santos, and R Sentis, *Diffusion approximation and computation of the critical size* , Trans. Amer. Math. Soc. 284, 2, 617 649, 1984 - A. Bellouquid, *On the asymptotic analysis of kinetic models towards the compressible Euler and acoustic equation* [9] 14, 6, 853 , Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, –882, 2004年。[10] A. Bensoussan, J.L. Lions, and G.C. Papanicolaou, *Boundary layers and homogenization of transport processes* 15, 53 157, 1979 , J. Publ. RIMS Kyoto Univ. -。[11] R. Borsche, R. Colombo, M. Garavello, *On the coupling of systems of hyperbolic conservation laws with ordinary differential equations* 23, 11, 2749, 2010 , Nonlinearity。[12] R. Borsche, S. G¨ottlich, A. Klar, and P. Schillen, *The scalar Keller-Segel model on networks*, Math. Models Methods Appl. Sci., 24, 2, 221–247, 2014年。[13] R. Borsche, J. Kall, A. Klar, and T.N.H. Pham, *Kinetic and related macroscopic models for chemotaxis on networks* 26, 6, , Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 1219 1242, 2016 , –。[14] R. Borsche, A. Klar, *Kinetic layers and coupling conditions for macroscopic equations on networks* 40 3 1784 , SIAM Scientific Computing ( ), -1808, 2018年。。[15] R. Borsche, T. Damm, A. Klar, Y. Zhou, *Interface layers and coupling conditions for discrete kinetic models on networks: a spectral approach* 2512 04634 , https://arxiv.org/abs/。。。[16] G. Bretti, R. Natalini, and M. Ribot, *A hyperbolic model of chemotaxis on a network: a numerical study* 2 48, 1, 231 258, 2014 , ESAIM: M AN, –。[17] F. Camilli and L. Corrias. *Parabolic models for chemotaxis on weighted networks*, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, 108, 4, 459–480, 2017年。[18] C. Cercignani, *A Variational Principle for Boundary Value Problems*, J. of Stat. Phys., 1, 2, 1969年[19] F. Coron, 89, 1990 *Computation of the Asymptotic States for Linear Halfspace Problems*, TTSP 19(2), [20] F. Coron, F. Golse, C. Sulem, *A Classification of Well-posed Kinetic Layer Problems*, CPAM, 41 409 1988 , [21] *G. M. Coclite M. Garavello, and B. Piccoli, Traffic flow on a road network*, SIAM J. Math. Anal., 36, 1862–1886, 2005年。[22] R. Colombo, M. Herty, V.Sachers, *On* 2×2 *conservation laws at a junction*, SIAM J. Math. Anal. 40, 2, 2008年。[23] H. Egger, Thomas Kugler, *Damped wave systems on networks: Exponential stability and uniform approximations* 138, 839 867,2018 , Num. Math., -。[24] L. Fermo and A. Tosin, *A fully-discrete-state kinetic theory approach to traffic flow on road networks* , Math. Models Methods Appl. Sci., 25, 3, 423–461, 2015年。[25] M. Garavello, *A review of conservation laws on networks* NHM 5, 3, 565 - 581, 2010年。[26] W. Gautschi, *The condition of Vandermonde-like matrices involving orthogonal polynomials*, Linear Algebra and its Applications, 52–53, 293-300, 1983年。[27] *Knudsen Layers from a Computational Viewpoint* 21 3 211, 1992 F. Golse, , TTSP ( ), F. [28] *Analysis of the boundary layer equation in the kinetic theory of gases* Golse, , Bull. Inst. Math. Acad. Sin. 3, 1, 211-242, 2008年。[29] F. Golse, D. Levermore, *Stokes-Fourier and acoustic limits for the Boltzmann equation: convergence proofs* 55, 336 393, 2002 , CPAM -。[30] F. Golse, *Numerical Method for Computing Asymptotic States and Outgoing Distributions for a Kinetic Linear Half Space Problem* 80 5 6 1033 , J. Stat. Phys. (-), A. Klar, - 1061, 1995年。[31] W. Greenberg, C. van der Mee, V. Protopopescu, *Boundary Value Problems in Abstract Kinetic Theory* ¨ 1987 , Birkhauser, 。[32] M. Herty, A. Klar and B. Piccoli, *Existence of solutions for supply chain models based on partial differential equations* 39, 1, 160 173, 2007 , SIAM J. Math. Anal. -。[33] M. Herty and S. Moutari, *A macro-kinetic hybrid model for traffic flow on road networks*,

计算与应用数学, 9, 3,238–252, 2009. [34] Y. Holle, *Kinetic relaxation to entropy based coupling conditions for isentropic flow on networks*, 微分方程杂志, 269, 2, 1192-1225, 2020. [35] Q. Li,J.Lu,W. Sun, *A convergent method for linear half-space kinetic equations*, ESAIM M2AN, 51,5, 1583-1615, 2017年. [36] S.K. Loyalka, *Approximate Method in the Kinetic Theory*, Phys. Fluids 11, Vol. 14, 1971. [37] R. E. Marshak, *Note on the spherical harmonic method as applied to the Milne problem for a sphere*, 71, 443 446, 1947, 《物理评论》 - . [38] C.E. Siewert, J.R. Thomas, *Strong Evaporation into a Half Space I*, 《应用数学与物理学杂志》, 32, 421, 1981. [39] Y. Sone, Y. Onishi, *Kinetic Theory of Evaporation and Condensation Hydrodynamic Equation and Slip Boundary Condition*, 日本物理学会杂志, Vol. 44, No. 6, 1981, 1978. [40] S. Ukai, T. Yang, and S.-H. Yu, *Nonlinear boundary layers of the Boltzmann equation. I. Existence*, 《数学物理通讯》 236, 3, 373-393, 2003. [41] Y. Zhou, W.A.-Yong, *Boundary conditions for hyperbolic relaxation systems with characteristic boundaries*[42] Y. Zhou, A. Klar, *Interface layers and coupling conditions for discrete kinetic models on networks: convergence results*, 准备中