arXiv:2603.06105v1 [math.DS] 6 Mar 2026

纤维化双曲3-流形上阿诺索夫流的构造

FRANÇOIS BÉGUIN、CHRISTIAN BONATTI、BIAO MA 和 BIN YU

摘要。我们证明，承载传递阿诺索夫流的纤维化双曲3-流形大量存在。更确切地说，对于每个 $g \geqslant 2$，都存在 $\mathrm{Mod}(S_g)/\mathrm{Tor}(S_g) \simeq \mathrm{Sp}(2g$ 的一个有限指数子群 Γ，$\mathbb{Z})$，使得 Γ 中的每个元素都有一个代表元 $\varphi \in \mathrm{Mod}(S_g)$，其映射环面 $M_\varphi := S_g \times [0, 1]/(x,1) \sim (\varphi(x),0)$ 承载一个传递阿诺索夫流。对于 Γ 中几乎所有元素，流形 M_φ 都是双曲的。这尤其表明，在所有纤维化双曲流形中，承载阿诺索夫流的流形所构成的子集（除去平凡的线性单值化）具有正密度。此外，子群 Γ 由一个显式生成元集定义，而我们的构造给出了许多承载阿诺索夫流的简单纤维化双曲流形实例。

1. 引言

1.1. 背景。 三维空间中动力学、拓扑与几何之间的相互作用，在对阿诺索夫流的研究中得到了很好的体现。这类流以一致双曲行为为特征，在光滑动力系统和低维拓扑中发挥着重要作用。一个核心问题是，哪些闭三流形承载阿诺索夫流。尽管许多可解流形和 Seifert 流形上都存在此类流，但在几何结构最丰富的情形——闭双曲三维流形 ——中，它们是否存在仍未得到充分理解。

Goodman [12] 首次构造了闭双曲三维流形上的阿诺索夫流。此后， [8] 又构造了更多例子。最近，Bowden-Mann [3] 和 Béguin-Yu [5] 构造了任意多个彼此不等价的闭双曲流形上的阿诺索夫流。

Agol 的虚纤维化定理 [1]表明，每个闭双曲三维流形 M 都有一个有限覆盖 $\widehat{M}$，它纤维化为圆上的纤维丛。因此，如果某个闭双曲三维流形 M 承载阿诺索夫流 X，那么根据虚纤维化定理，可以提升流 $\widehat{X}$，从而在一个纤维化双曲流形 $\widehat{M}$上得到阿诺索夫流。然而，虚拟纤维化定理的证明并未明确描述这个覆盖 $\widehat{M} \to M$。这些考量引出了以下两个自然且引人关注的问题：

问题 1.1. 哪些闭纤维化双曲三维流形承载阿诺索夫流？大多数（或几乎所有）闭纤维化双曲三维流形是否都承载阿诺索夫流？

问题 1.2. 能否构造一些简单、明确的闭纤维化双曲*3*-流形实例，使其承载阿诺索夫流？

这里，我们所说的“简单”纤维化双曲流形，是指纤维的亏格较小（若可能，取 2），且其单值化由沿简单闭曲线进行的少数几次 Dehn 扭转的乘积给出的流形。

最近，Matthew Hedden、Katherine Raoux 和 Jeremy Van Horn-Morris [13] 宣布，某些纤维化闭双曲三维流形——包括通过对 $\mathbb{S}^3$ 中的双曲 L空间纽结进行零次手术得到的流形——不容许 Anosov 流

日期：2026年3月9日。2020 数学学科分类。37D20、37E99、55K32。关键词和短语。阿诺索夫流、双曲三维流形、Dehn 手术。

且其稳定叶状结构与不稳定叶状结构可共定向。这一结果可视为朝着问题 1.1 迈出的重要进展。

此外，在双曲流形上构造阿诺索夫流，有望推动关于紧叶状结构存在性的问题与猜想取得进展。设X 是闭定向三维流形 M上的一个阿诺索夫流。其弱稳定叶状结构 F^s是一个紧叶状结构，因为 F^s 的每一片叶都是非紧致的。此外，当 F^s 可共定向时，其欧拉类满足 $e(\mathrm{F}^s)=0$，因为阿诺索夫向量场 X 与 F^s相切。因此，上述关于阿诺索夫流的两个问题与叶状结构理论中的一个基本问题直接相关：

问题 1.3 （问题 9.2，见 [25]）。 哪些第一贝蒂数为正的3-流形存在欧拉类平凡的紧叶状结构？

问题 1.3 与 Thurston 的欧拉类一猜想直接相关。设 M 是一个配备了可共定向紧叶状结构 F 的闭定向三维流形。Thurston 的奠基性工作 [22] 证明，欧拉类 $e(\mathrm{F})$的对偶 Thurston 范数 x^* 满足：

$$x^*(e(\mathcal{F}))\in B^*(M)\quad\text{with}\quad x^*(e(\mathcal{F}))\leqslant 1,$$

其中 $B^*(M)$是 M的 Thurston 单位对偶球。Thurston 的欧拉类为一猜想指出，对于任意满足 $\mathbb{Z})$且 $x^*(a)=1$的整类 $a\in H^2(M$，应存在 M 上的一个紧叶状结构 F，使得 $e(\mathrm{F})=a$。在 Gabai 的部分肯定结果（ [10]）之后，Yazdi 反驳了这一猜想（ [25]；另见 [14]）。这促使我们提出以下改进版的问题 1.3：

问题 1.4 (问题 9.1 见 [25])。 $B^*(M)$ 中的哪些格点对应于余可定向的紧叶状结构？

在问题 1.1 或问题 1.2 上取得进展，便可直接推动问题 1.3 的进展，进而推动问题 1.4 的进展。

1.2. **本文的主要结果**。 本文旨在为问题 1.1 和问题 1.2 提供部分解答。对于 $g\geqslant 2$，我们用 S_g 表示一个亏格为 g 的闭可定向曲面，用 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 表示 S_g的映射类群，并用 $\mathrm{Tor}(S_g)$ 表示 $\mathrm{Mod}(S_g)$的 Torelli 子群，即 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 中在 $H_1(S_g,\mathbb{Z})$上作用为恒等映射的元素所构成的子群。回顾一下，任取 $H_1(S_g,\mathbb{Z})$ 的一组基，便可得到 $\mathrm{Mod}(S_g)/\mathrm{Tor}(S_g)$ 与辛群 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$之间的一个识别。我们将证明以下结论：

定理 1.5。 存在一个有限指数子群 Γ，属于 $\mathrm{Mod}(S_g)/\mathrm{Tor}(S_g)$，使得 Γ 中的每个元素都有一个代表元 $\varphi\in\mathrm{Mod}(S_g)$，其映射环面$M_\varphi:=S_g\times[0,1]/(x,1)\sim(\varphi(x),0)$ 承载一个传递阿诺索夫流。

备注 1.6。 (1) 定理 1.5 给出的有限指数子群 Γ 是明确已知的（由一组生成元给出）。它不是 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 的主同余子群。尽管如此，我们证明了 Γ 包含 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 的层为 2^{2g-2} 的主同余子群（见第 6 节）。这意味着$[\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}):\Gamma]$ 的指数至多为 2^{8g^3} （这肯定远非最优上界）。因此，自然会想到 Γ 是否可以取为全群 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$。

（2）注意，对于 Γ 的每个元素 g，以及表示 g 的每个 $\varphi_g\in\mathrm{Mod}(S_g)$，相应的映射环面 M_{φ_g} 都不可能承载传递阿诺索夫流。例如，令 g 为 Γ 的单位元且 $\varphi_g=\mathrm{Id}^{S_g}$，则 M_{φ_g} 与 $S_g\times\mathbb{S}^1$ 同胚，而根据 [11]，后者不承载任何阿诺索夫流。

实际上，定理 1.5 将作为一个更精确、更明确的陈述的推论出现。考虑 S_g 上的简单本质闭曲线组，以及图 1 所示的 S_g 的定向：记 τ_{a_i}、τ_{b_j}、τ_{c_k}、τ_{d_l} 为沿以下曲线的左 Dehn 扭转

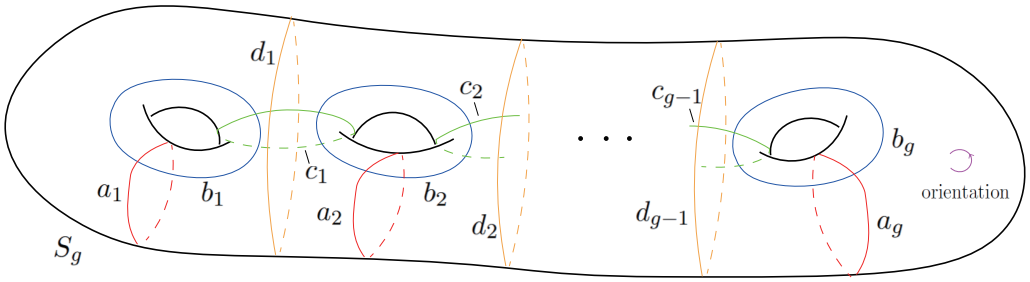


图 1. 曲面 S_g上的简单闭曲线 a_i, b_j, c_k, d_l。

曲线 a_i, b_j, c_k, d_l，其中 $1 \leqslant i$, $j \leqslant g$，以及 $1 \leqslant k$, $l \leqslant g-1$。

备注 1.7. (1) 根据 Lickorish-Wallace定理，Dehn 扭转 $\{\tau_{a_i}\}_{1\leqslant i\leqslant g}$、$\{\tau_{b_j}\}_{1\leqslant j\leqslant g}$ 和 $\{\tau_{c_k}\}_{1\leqslant k\leqslant g-1}$ 生成曲面 S_g的映射类群。(2) 由于沿不相交曲线的 Dehn 扭转彼此可交换，Dehn 扭转 $\{\tau_{a_i}\}_{1\leqslant i\leqslant g}$、$\{\tau_{b_j}\}_{1\leqslant j\leqslant g}$、$\{\tau_{c_k}\}_{1\leqslant k\leqslant g-1}$、$\{\tau_{d_l}\}_{1\leqslant l\leqslant g-1}$两两可交换，但以下几对除外：$(\tau_{a_m}, \tau_{b_m})$、$(\tau_{b_n}, \tau_{c_n})$、$(\tau_{b_{n+1}}, \tau_{c_n})$以及 (τ_{c_n}, τ_{d_n})，且 $1 \leqslant m \leqslant g$和 $1 \leqslant n \leqslant g-1$也不交换。

我们考虑以下由 Dehn 扭转构成的无限族乘积

$$\mathcal{T} := \left\{ \tau_{d_1}^{-2} \cdots \tau_{d_{g-1}}^{-2} \tau_{b_1}^{q_1} \cdots \tau_{b_g}^{q_g} \tau_{c_1}^{r_1} \cdots \tau_{c_{g-1}}^{r_{g-1}} \tau_{a_1}^{p_1} \cdots \tau_{a_g}^{p_g} \right\}_{\substack{r_1,\ldots,r_{g-1}=0 \text{ or } -2 \\ q_1,\ldots,q_g \in \mathbb{Z} \\ p_1,\ldots,p_q \in \mathbb{Z}}}$$

我们强调，族 T 中的每个元素都满足：沿曲线 a_1、……、a_g、b_1、……、b_g的左 Dehn 扭转的幂可以是任意整数，但沿曲线 c_1、……、c_{g-1} 的左 Dehn 扭转的幂只能等于 0 或 -2，而沿曲线 d_1、……、d_{g-1} 的左 Dehn 扭转的幂等于 -2。注意，族 T 包含

$$\mathcal{T}_0 := \{\hat{\tau}_d\} \cup \{\hat{\tau}_d \tau_{a_i}^{\pm 1}\}_{1\leqslant i\leqslant g} \cup \{\hat{\tau}_d \tau_{b_j}^{\pm 1}\}_{1\leqslant j\leqslant g} \cup \{\hat{\tau}_d \tau_{c_k}^{-2}\}_{1\leqslant k\leqslant g-1},$$

其中

$$\hat{\tau}_d = \tau_{d_1}^{-2} \tau_{d_2}^{-2} \cdots \tau_{d_{g-1}}^{-2}.$$

定理 1.8。 如果 φ 是 $\mathcal{T}$ 中元素的非平凡乘积，那么映射环面 s

$$M_\varphi = S_g \times [0,1]_{/((x,1)\sim(\varphi(x),0))}$$

承载一个传递 *Anosov* 流。

特别地，对于由 $\{\hat{\tau}_d\}$、$\{\hat{\tau}_d \tau_{a_i}^{\pm 1}\}_{1\leqslant i\leqslant g}$、$\{\hat{\tau}_d \tau_{b_j}^{\pm 1}\}_{1\leqslant j\leqslant g}$ 和 $\{\hat{\tau}_d \tau_{c_k}^{-2}\}_{1\leqslant k\leqslant g-1}$ 生成的 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 子半群中的任意非平凡元素 φ，φ 的映射环面都承载一个传递 Anosov 流。

由于曲线 $d_1,\ldots,d_{g-1}$同调于零，Dehn 扭转的乘积 $\hat{\tau}_d = \tau_{d_1}^{-2} \tau_{d_2}^{-2} \cdots \tau_{d_{g-1}}^{-2}$ 在 $H_1(S_g, \mathbb{Z})$上的作用是平凡的，即属于 Torelli 子群。因此，下面的陈述是定理 1.8 的直接推论。

推论 1.9. 设 Γ 为由 *Dehn* 扭转的等价类生成的 $Mod(S_g)/\mathrm{Tor}(S_g) \cong \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ 的子半群

$$\tau_{a_1}^{\pm 1}, \ldots, \tau_{a_g}^{\pm 1}, \tau_{b_1}^{\pm 1}, \ldots, \tau_{b_g}^{\pm 1}, \tau_{c_1}^{-2}, \ldots, \tau_{c_{g-1}}^{-2}.$$

那么，Γ 中的每个元素都有一个代表元 $\varphi \in Mod(S_g)$，使得 φ 的映射环面承载一个阿诺索夫流。

推论 1.9 中所述的子半群 Γ 实际上是一个子群（而不只是子半群）（命题 6.2），且该子群在 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z})$ 中具有有限指数（命题 6.4）。因此，定理 1.5 将作为定理 1.8、命题 6.2 和命题 6.4 的推论得出。

1.3. **示例与讨论**。 定理 1.8 使我们能够构造一些简单的纤维化双曲3-流形示例，这些流形承载阿诺索夫流。

示例 1.10。 使用小节 *1.2* 中的记号，考虑如下同胚

$$\varphi = \tau_{d_1}^{-2}\tau_{c_1}^{-2}\tau_{a_1}\tau_{d_1}^{-2}\tau_{b_2}\tau_{b_1}$$

亏格为 *2* 的曲面 S_2。在典范基 (a_1, a_2, b_1, b_2) 下，φ 在 $H_1(S_2, \mathbb{Z})$ 上的作用矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

该矩阵的特征多项式为 $\chi_\varphi(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$。此多项式在 $\mathbb{Z}$ 上辛不可约，不是分圆多项式，也不是 x^2 中的多项式。根据 [7, 定理 14。5], ，这意味着 φ 的映射类属于伪阿诺索夫类型。因此，φ 的映射环面是一个双曲流形。由于 φ 是小节 *1.2* 中定义的族 $\mathcal{T}$ 中元素的乘积，定理 *1.8* 断言该流形承载传递 *Anosov* 流。

示例 1.10 中介绍的方法相当一般，还可以用类似的方式构造许多其他示例。也可以应用 Papadopoulos 的一个结果（[16]）来获得更多示例，具体如下所述。

观察 1.11。 设 φ 和 ψ 是 $\mathcal{T}$ 中元素的两个乘积。假设 φ 的映射类是伪阿诺索夫型，并且 $\psi(f^u)$ 不与 f^s 同痕，其中 f^s 和 f^u 是 ψ 的稳定叶状结构和不稳定叶状结构。那么，根据 $[16, \text{定理 } 1]$, ，对于所有充分大的 k，复合映射 $\varphi^k \circ \psi$ 是伪阿诺索夫的，因此 $\varphi^k \circ \psi$ 的映射环面是一个纤维化双曲流形。由于 $\varphi^k \circ \psi$ 是 $\mathcal{T}$ 中元素的乘积，定理 *1.8* 保证该纤维化双曲流形承载一个传递 *Anosov* 流。

正如我们在备注 1.6 中指出的，对于 $\varphi_g = \mathrm{Id}^{S_g}$，$M_{\varphi_g}$ 不承载任何 Anosov 流。为了构造托雷利群中的单值化，我们可以取 $\varphi_g = \hat{\tau}_d$，于是根据定理 1.8，M_{ϕ_g} 承载一个 Anosov 流，并且 $\phi_g \in \mathrm{Tor}(S_g)$。这种 Anosov 流是通过在 S_g 上沿着 d_i 的提升对测地流实施 Dehn-Fried 手术而得到的（参见第 4 节）。然而，$\hat{\tau}_d$ 不是伪阿诺索夫的。这引出了以下有趣的问题。

问题 1.12. 是否存在一个伪阿诺索夫映射类 $\varphi \in \mathrm{Tor}(S_g)$，使得 M_φ容许一个传递 *Anosov* 流?

现在让我们解释定理 1.5 的一般含义及其一些推论。该定理表明，对于任意固定的亏格 $g \geqslant 2$，在所有具有亏格为 g 的纤维的纤维化双曲3-流形中，承载传递阿诺索夫流的那些流形是“丰富的”；这里的丰富程度是根据其单值化的辛表示来衡量的。事实上，根据 Rivin 的一个结果（ [18]），对于 $\mathrm{Mod}(S_g)/\mathrm{Tor}(S_g)$ 中的一个一般陪集，该陪集中的每个元素 φ 都是伪阿诺索夫型的（因而 M_φ 是双曲的）。这里，一般是指固定有限对称生成集的 $\mathrm{Sp}(2g,\ \mathbb{Z})$ 中元素的乘积几乎处处如此（见[18, 定理 8.2]）。从这个意义上说，定理 1.5 表明，对于固定亏格 g，具有亏格为 g 的纤维且承载阿诺索夫流的纤维化双曲3-流形，在所有具有亏格为 g 的纤维、并按“平凡线性单值化”视为相同的所有纤维化3-流形中具有正密度（也就是说，按同调中作用平凡的单值化变更来分类）。

结合虚拟纤维化定理以及 [13], 中公布的结果，这些事实使 Potrie 提出的以下开放问题更具吸引力。

问题 1.13。 [17] 每个闭双曲 *3*-流形是否都有一个承载阿诺索夫流的有限覆盖？

1.4. 论文结构。 Dehn-Fried 手术是三维中构造阿诺索夫流的经典且重要的工具。在本文中，它们将发挥核心作用。在第 2 节中，我们将仔细回顾这些手术的定义，并研究哪些 Dehn-Fried 手术能够保持流形具有纤维化性质。

在第 3 节中，我们构造了一个具有亏格 2 纤维和非常简单的单值化的纤维化（非双曲）3-流形，它承载着具有许多水平周期轨道的阿诺索夫流，即 这些周期轨道在同痕意义下包含于某个纤维中。这是本文的主要技术部分。该构造考虑亏格2闭曲面的单位切丛上的测地流，并对该流的两条特定轨道实施 Dehn-Fried 手术。主要困难在于证明所得流形是纤维化的。为此，我们将亏格为 2 的闭曲面切割成两个半部——每个半部都是一个带一个穿孔的环面——，仔细地在两个半部上分别定义单位切丛的一族显式部分截面，并证明在实施 Dehn-Fried 手术后，左半部分上的每个截面都可以与右半部分上相应的截面粘合，从而在手术后的流形中得到一族闭的亏格 2 曲面；这些曲面将作为圆周上的纤维化的纤维。

在第 4 节中，我们通过有限覆盖论证，将第 3 节的结果推广到任意亏格 $g \geqslant 2$。

定理 1.8 的证明在第 5 节中完成。具体做法是，考察第 3 节（针对亏格为 2 的纤维）和第 4 节（针对任意亏格的纤维）中构造的纤维化流形上的特定阿诺索夫流，取一个有限覆盖，并对水平轨道进行 Dehn-Fried 手术。这种 Dehn-Fried 手术保留底流形为纤维化流形这一性质，但会改变纤维化的单值化，从而能够得到具有复杂单值化且承载阿诺索夫流的纤维化流形。

在本文最后的第 6 节中，我们解释定理 1.5 为何可由定理 1.8 推出。换言之，我们证明，对于每个 g，由定理 1.8 允许的 Dehn 扭转在 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 中的共轭类生成的 $\mathrm{Sp}(H_1(S_g,\mathbb{Z})) \simeq \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$的子半群，实际上是 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$中的有限指数子群。为此，我们证明该子半群包含由 $\mathrm{Sp}(2g)$的经典根系所对应的根向量生成的单参数子群的时间 2^{g-1} ，从而可以应用 Bass、Milnor、Serre 和 Tits 的结果，推出该子半群包含 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$的层 2^{2g-2} 主同余子群。

2. 纤维化流形中的 Dehn-Fried 手术

David Fried 在 [9], 提出的 Dehn-Fried 手术，在三维（伪）阿诺索夫流理论中发挥着核心作用，更具体地说，它在定理 1.8 的证明中尤为重要。本节旨在找出充分条件，使 Dehn-Fried 手术能够保留圆周上的纤维化。换言之，我们将讨论以下问题：

问题2.1. 设 M 是一个闭的3维流形，允许纤维化 $p\colon M \to \mathbb{S}^1$ ，并且带有传递阿诺索夫向量场 X ，使得 X 的一个周期轨道 γ 包含在该纤维化的某个纤维中。设 M' 和 X' 分别为对轨道 γ 进行指数 k 的 ***Dehn-Fried*** 手术后得到的流形和阿诺索夫流。求出确保流形 M' 也纤维化为圆上的纤维丛的充分条件。若确实如此，描述 M' 的纤维化的单值化。

正如预期的那样，我们将看到，当 γ 的局部稳定流形与纤维“平行”时， M' 仍然纤维化为圆上的纤维丛。更令人惊讶的是，我们将证明，在某些特定情形下，即使 γ 的局部稳定流形相对于纤维发生了“扭转”，结论仍然成立。

我们的首要任务是在第2.1小节回顾沿周期轨道对流形进行爆破的定义，并且更重要的是，确定一些定向约定。在第2.2小节，我们将回顾带指数 k 的 Dehn-Fried 手术的精确定义。在第2.3小节，我们将引入一个整数，用以度量流的双曲周期轨道的局部稳定流形相对于纤维化的纤维的“扭转”。在第2.4和2.5小节，我们将说明 Dehn-Fried 手术对底流形拓扑的影响：先从（经典拓扑意义上的）Dehn 手术角度说明，再从曲面上的 Dehn 扭转角度说明。最后，我们将在第2.6、2.7和2.8小节解答问题2.1。

一些记号。 全文中， $\mathbb{S}^1$ 表示 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, , $\mathbb{D}$ 表示相对于标准欧几里得度量的 $\mathbb{R}^2$ 中的开单位圆盘。给定一个实向量空间V，我们用 $\mathbb{P}^+(V)$ 表示 V的正射影化，即 将 $V-\{0\}$ 按正齐次变换取商，即 V中的定向方向集合。更一般地，若 E 是一个向量丛，我们用 $\mathbb{P}^+(E)$ 表示这样一个丛，其纤维是 V各纤维的（正）射影化。

2.1. 沿周期轨道爆破流形。 设 M 是一个定向闭三维流形， X 是 M 上的一个向量场， γ 是 X的一条周期轨道。沿周期轨道 γ 爆破，大致而言，就是在横截于 γ的方向上取极坐标。更精确地，取 γ 的一个管状邻域 V 以及一个微分同胚$\zeta=(\theta,\ x,\ y)$：$V\to\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}$，使得 $\zeta(\gamma)=\mathbb{S}^1\times\{0_{\mathbb{R}^2}\}$。 M沿 γ爆破所得的流形 是一个带边界的三维流形（在微分同胚意义下良定义）

$$\widehat{M}=\widehat{M}_\gamma:=\left((\mathbb{S}^1\times[0,1)\times\mathbb{S}^1)\sqcup(M-\gamma)\right)_{/(\theta,\rho,\varphi)\sim\zeta^{-1}(\theta,\rho\cos(\varphi),\rho\sin(\varphi))\text{ for }\rho>0}.$$

$\widehat{\ }$根据构造， $M-\gamma$ 与 $\mathrm{int}(M)$之间存在典范识别，且 ∂M 是一个二维环面。该构造还提供了一些坐标

$$(\theta,\rho,\varphi):\widehat{V}\to\mathbb{S}^1\times[0,1)\times\mathbb{S}^1$$

$\widehat{\ }$定义在 M中 ∂M的领圈邻域 V上。实际上， $(\rho,\ \varphi)$ 不过是由 $(x,\ y)=(\rho\cos\ \varphi,\ \rho\sin\ \varphi)$定义的极坐标。环面 ∂M对应于集合 $(\rho=0)$。存在自然投影 $M\to M$，它在 $\mathrm{int}(M)$上是“恒等映射”，并将 $\partial\widehat{M}$中的圆 $\{\theta_0\}\times\{0\}\times\mathbb{S}^1$ 映射到 γ中的点 $\zeta^{-1}(\theta_0,\ 0,\ 0)$。该投影的限制定义了一个 $\mathbb{S}^1$-丛 $\partial\widehat{M}\to\gamma$。

T $\widehat{\ }$环面 ∂M 自然地与轨道 γ的射影化法丛相识别

$$N_\gamma:=\partial\widehat{M}\simeq\mathbb{P}^+\left(TM/\mathbb{R}.X\right)_{|\gamma},$$

$\widehat{\ }$从而为 ∂M提供了一个更内禀的定义。该识别通过将点 $(\theta,\ \varphi)\in\partial M$映射到坐标为 $(\theta,\ 0,\ 0)\in\gamma$的点 m，以及将向量$v=\cos(\varphi)\partial_x+\sin(\varphi)\partial_y$在 $\mathbb{P}^+(T_mM/\mathbb{R}.X(m))$中的向量类映射而得到。注意，该识别与 $\partial\widehat{M}$和 $\mathbb{P}^+\left(TM/\mathbb{R}.X\right)_{|\gamma}$的 $\mathbb{S}^1$-丛结构相容。参见图 2。

现在我们约定一些定向的记号。首先注意到，由于 $M-\gamma$典范地
$\widehat{\ }$与 $\mathrm{int}(M)$同一， M的定向在 M上诱导出一个典范定向。

$\widehat{\ }$**约定 2.2.** 我们赋予环面 $\partial M\simeq N_\gamma$ 以作为定向三维流形$\widehat{\ }$ M之边界时所具有的定向。

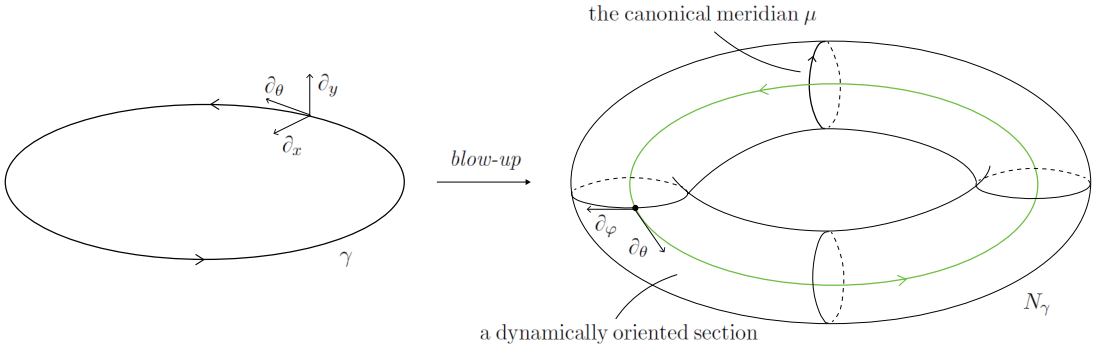


图 2。环面 $N_\gamma \simeq \partial M$、其投影到 γ 的纤维、典范子午线 μ、一个动力定向截面以及标架 $(\partial_\theta,\ \partial_\varphi)$。

我们注意到，M 的定向与 γ 的定向在 $TM/\mathbb{R}.X$ 的纤维上诱导出一个典范定向（这里用到了 M 是奇数维这一点）；而这一典范定向又在 $\mathbb{P}^+(TM/\mathbb{R}.X)$ 的纤维上诱导出一个定向（这与平面的标准定向在圆上诱导出三角定向的方式完全相同）。因此，N_γ 的纤维获得了一个典范定向。

定义 2.3。我们将环面 $N_\gamma = \mathbb{P}^+(TM/\mathbb{R}.X) \simeq \partial M$, 的典范（定向）子午线 定义为 μ，即 $H_1(N_\gamma,\ \mathbb{Z})$ 中由 $N_\gamma \to \gamma$ 的纤维构成的类，并赋予其由 M 的定向典范地诱导的定向。

坐标 $(\theta,\ \varphi)$ 为这些定向提供了更易处理的刻画。事实上，容易验证：

事实 2.4。如果 γ 附近的局部坐标 $(\theta、\ x、\ y)$：$M \to \mathbb{S}^1 \times M$ 满足 $(\partial_\theta、\ \partial_x、\ \partial_y)$ 是 M 的正向标架，并通过令 $(x、\ y) = (\rho\cos(\varphi)、\ \rho\sin(\varphi))$ 来定义 $(\rho、\ \varphi)$，则：

- 环面 $N_\gamma = \partial M$ 的定向选取为使得 $(\partial_\theta, \partial_\varphi)$ 构成正向标架；
- $N_\gamma = \partial M$ 的典范子午线由向量场 ∂_θ定向。

最后，我们注意到，曲线 γ 的定向会在 $\partial M \simeq N_\gamma$的截面上诱导出一个典范定向：

定义 2.5。我们将 $\mathbb{S}^1$-丛 $\partial\widehat{M} \simeq N_\gamma \to \gamma$ 的截面（的像）的动力学定向 定义为由轨道 γ 的动力学定向推前得到的定向。

观察 2.6。请注意，按照我们的约定，任意动力学定向的截面 σ 与典范子午线 μ 的交数为 $\mathrm{Int}(\sigma, \mu) = +1$。

注 2.7。我们仅考虑 γ 是向量场 X 在 M 上的一个周期轨道的情形，因为这是 Dehn-Fried 手术的自然背景。尽管如此，第2.1小节的全部内容都可以推广到更一般的情形，即 γ 是 M中的任意定向简单闭曲线。只需在射影化法向丛 N_γ的定义中，将方向 $\mathbb{R}.X$ 替换为 $\mathbb{R}.\dot{\gamma}$即可。

2.2. **指数 k Dehn-Fried 手术**。现在我们来回顾一下，在传递 Anosov 流的一条周期轨道上进行指数 k Dehn-Fried 手术的含义。下文陈述的断言，其详细内容和证明可见例如 Shannon 的博士论文 [21]。

设 M 为一个闭定向三维流形，X 为 M 上的传递阿诺索夫向量场，γ 为 X^t 的一条具有正乘子的周期轨道。设 $\widehat{M}$ 为沿着 γ 对 M 进行爆破所得的流形。回想一下，∂M 的边界环面与射影化法

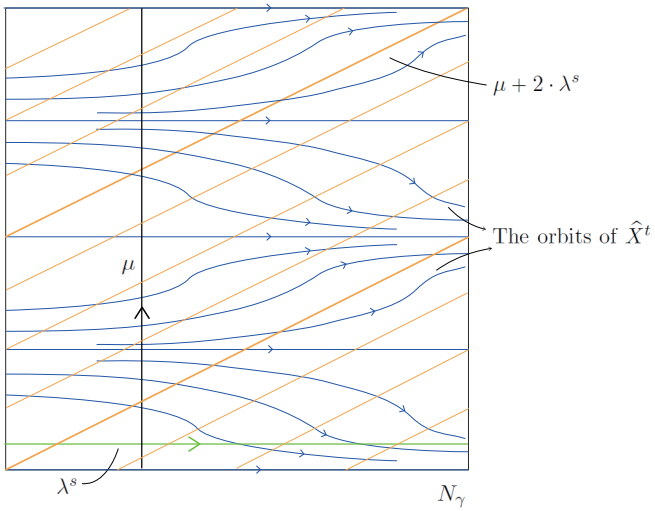


图 3。 $\widehat{X}^t$ 在环面 N_γ 上的轨道（蓝色）。 N_γ 的典范子午线 μ （黑色）和典范经线 λ^s （绿色），以及一个纤维化，其纤维属于同调类 $\mu + 2 \cdot \lambda^s$，并且横截于 X 的轨道 $\widehat{\ }$（橘色）。

丛 $N_\gamma = \mathbb{P}^+(TM/\mathbb{R}.X)_{|\gamma}$ 同一。此外还要回想，投影 $N_\gamma \to \gamma$ 的纤维继承了典范定向，而定向纤维在 $H_1(N_\gamma, \mathbb{Z})$ 中的同调类称为 N_γ 的典范子午线，记作 μ （见定义 2.3）。

由于流 X^t 是 C^1，它可提升为连续流 $\widehat{X}^t$ ，并与一个 C^0 向量场相切： N_γ 上对 $\widehat{X}^t$ 的限制，按典范方式定义为 X^t 的导数在 γ 的射影化法丛上的作用。轨道 γ 的双曲性给出了这一作用的完整描述，因而也完整描述了 $\widehat{X}^t$ 在 N_γ 上的动力学。沿 γ 的弱稳定（分别为不稳定）平面定义了 γ 的两个相反的 $\widehat{X}^t$- 不变截面 [1] 。由此得到 $\widehat{X}^t$ 的四条平行周期轨道。当然，这些周期轨道的流定向与它们作为 N_γ 的截面时的动力学定向一致。这四条周期轨道将环面 N_γ 分成四个环带，每个环带都有一个对应稳定方向的边界分支，以及一个对应不稳定方向的边界分支。 $\widehat{X}^t$ 的其他轨道都包含在上述某个环带中，并从对应稳定方向的边界分支螺旋至对应不稳定方向的边界分支。见图 3。

定义 2.8。 $H_1(N_\gamma$中由 $\widehat{X}^t$ 的定向周期轨道（即 对应于 N_γ 稳定/不稳定方向的动力定向截面）构成的类，称为 N_γ 的典范经线 。我们将其记为 λ^s。

鉴于 $\widehat{X}^t_\gamma$ 在 N上的动力学，对每一个 $k \in \mathbb{Z}$，都可以在 p' 上找到一个新的光滑纤维化： $N_\gamma \to \gamma$，使得纤维的同调类为 $\pm(\mu + k \cdot \lambda^s)$ （见图3中 $k = 2$的情形），并且使得 $\widehat{X}^t_\gamma$ 横截于 p'的纤维。我们考虑 $\widehat{\ }$闭三维流形 $M' := M/p'$ （这里的商意味着我们将p'的每条纤维坍缩为一个点）。由 $\widehat{X}^t$ 的轨道给出的 $\widehat{M}$ 的定向一维叶状结构投影为 M' 上的一个连续定向一维叶状结构，它切于一个连续半直线场（连续性源于 p' 的纤维对$\frown M$上叶状结构的横截性）。可以选择一个连续无奇点向量场 X' ，使其切于该

[1]回想一下，我们假设 γ 的乘子为正。这里使用这一假设，以确保我们得到的确实是真正截面，而不是“两点值截面”。

叶状结构。由构造可知，环面 N_γ 在 M' 中的投影 γ' 是向量场 X'的一条周期轨道，并且存在一个典范的轨道等价

$$i : \left(M' - \gamma', X'_{|M'-\gamma'}\right) \to \left(M - \gamma, X_{|M-\gamma}\right),$$

（由于它是通过将 $M-\gamma$ 和 $M'-\gamma'$ 与 $\mathrm{int}(M)$ 的自然识别$\widehat{}$复合而得到的，因此可以将其视为“恒等映射”。）向量场 X'具有阿诺索夫向量场的许多性质，但并非 C^1。尽管如此，Shannon 已证明， X'与一个真正的传递阿诺索夫向量场轨道等价，并且 (M', X')在拓扑等价意义下仅取决于 M、 X、 γ 和 k，参见 [21]。

我们将在稍微一般的情形下应用上述构造过程： $\widehat{X}^t_\gamma$ 的轨道并非真正横截，而只是与纤维化 p' 的纤维拓扑横截： $N_\gamma \to \gamma$。在这种情形下，由 $\widehat{X}^t$ 的轨道构成的叶状结构仍投影为 M' 上的连续定向叶状结构。该叶状结构的叶不一定与连续半直线场相切，但仍是某个拓扑 Anosov 流的轨道，因此 Shannon 定理仍然适用。

定义 2.9. 将 (M, X^t) 变换为 (M', X') 的手术，是对轨道 γ进行的指数为 k 的 Dehn-Fried 手术。

2.3. **周期轨道的局部稳定流形相对于曲面的扭转数**。设 M 是一个定向三维流形， γ 是流 X^t 在 M 上的一条具有正乘子的周期轨道。我们用 N_γ 表示 γ 的射影化法丛。

回忆一下，流形 M 的定向会诱导环面 N_γ 的定向（见约定 2.2）。还要回忆，丛 $N_\gamma \to \gamma$ 的每个截面的像都带有一种典范定向，称为动力学定向，它由轨道 γ 的动力学定向推前得到（见第2.1小节）。因此， N_γ 中任意两个截面的像之间的同调交都有明确定义。

每个包含轨道 γ 的可定向曲面 S 都会诱导圆丛 $N_\gamma \to \gamma$ 的一对相反截面$\pm\sigma_S$。注意，若 S 和 S' 是包含 γ 的两个可定向曲面，则交数 $\mathrm{Int}(\sigma_{S'}, \sigma_S)$ 不会因将 $\sigma_{S'}$ 和/或 σ_S 替换为其相反截面而改变（因为任一截面 σ 都与 $-\sigma$ 同调）。由此，下面的定义便有了明确含义：

定义 2.10。给定包含轨道 γ 的两个可定向曲面 S 和 S'， S' 相对于 S 的扭转数 定义为

$$\mathrm{Twist}_\gamma(S', S) := \mathrm{Int}(\sigma_{S'}, \sigma_S)$$

其中， σ'_S（分别是 σ_S）是由 S'（分别是 S）的切平面所确定的射影化法丛 $N_\gamma = \mathbb{P}^+(TM/\mathbb{R}.X)_{|\gamma}$ 的两个相反截面中的任意一个。

特别地，若 S 是包含具有正乘子的双曲周期轨道 γ 的可定向曲面，则 γ 相对于 S 的局部稳定流形的扭转数 为

$$\mathrm{Twist}_\gamma\left(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma), S\right) := \mathrm{Int}\left(\lambda^s, \sigma_S\right)$$

其中， λ^s 是 N 的典范经线（定义 2.8）。若 S 是纤维化 p: $M \to \mathbb{S}^1$ 的一个纤维，则 Twist $_\gamma\left(W^s{}_{\mathrm{loc}}(\gamma), S\right)$ 称为 $W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma)$ 相对于 p 的扭转数；若 $\mathrm{Twist}_\gamma\left(W^s{}_{\mathrm{loc}}(\gamma), S\right) = 0$，则称 $W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma)$ 水平的 （相对于 p）。

我们将使用以下事实：

事实 2.11. 设 S 与 S' 为两个可定向曲面，它们包含一条具有正乘子的双曲轨道 γ。分别用 λ_S 与 $\lambda_{S'}$ 表示 $H_1(N_\gamma、\ \mathbb{Z})$ 中与 S 和 S' 分别相关联的 N_γ 的动力学定向截面的类。用 μ 表示 N_γ的典范子午线。则

$$\lambda_{S'} = \lambda_S - \mathrm{Twist}_\gamma(S', S) \cdot \mu.$$

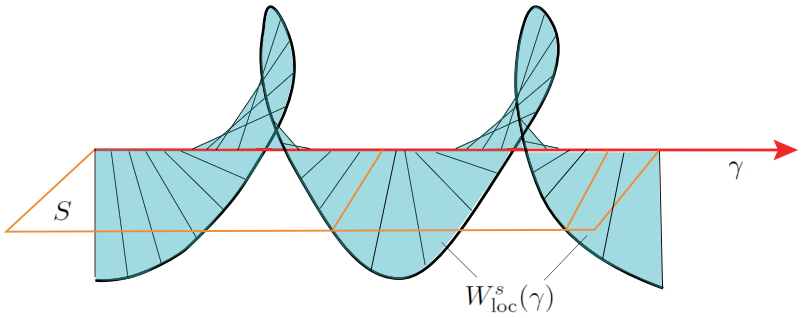


图 4。$\mathrm{Twist}(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma),\ S) = -2$ 的情形（假设定向与 $\mathbb{R}^3$ 的标准定向一致，且图的左侧与右侧相粘合）

证明. 由于 λ_S 与 $\lambda_{S'}$ 是两个截面的同调类，故必存在一个整数 $j \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\lambda_{S'} = \lambda_S + j \cdot \mu.$$

与 λ_S 取交集，得到

$$\mathrm{Twist}_\gamma(S', S) = \mathrm{Int}(\sigma_{S'}, \sigma_S) = \mathrm{Int}(\lambda_S + j \cdot \mu, \lambda_S) = j \cdot \mathrm{Int}(\mu, \lambda_S) = -j,$$

其中最后一个等式由观察 2.6 得出。因此，我们得到

$$\lambda_{S'} = \lambda_S - \mathrm{Twist}_\gamma(S', S) \cdot \mu.$$

正如所期望的。 □

2.4. **Dehn-Fried 手术作为 Dehn 手术**。在三维流形拓扑中，一种非常经典的工具是沿闭合简单曲线进行 Dehn 手术。

设 M 为一个闭三维流形，$\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to M$ 为一条简单闭曲线，并与其像等同，$V \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}$ 为 γ 在 M中的管状邻域。设 M_V为去掉 V的内部后所得的带边界闭流形。M_γ 的边界是环面 $\partial M_V = \partial V$。一条（无定向）子午线 是 ∂M_V上任意一条简单闭曲线，它在环面 $\partial M_V = \partial V$上非零同伦，并且在实心环面 V中围成一个圆盘。

M_V 的一个Dehn填充是流形$M_{\gamma,\varphi}$ ，它由 M_V 通过微分同胚 $\varphi\colon \mathbb{S}^1 \times \partial\mathbb{D} \to \partial M_V$将实心环面$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}$粘合到环面 ∂M_V上而得到。三维拓扑中的一个经典结果是，$M_{\gamma,\varphi}$ （在相差一个于 γ的任意小邻域之外等于恒等映射的微分同胚的意义下）仅依赖于 $m := \varphi(\partial\mathbb{D})$在环面 ∂M_V中作为无定向曲线的自由同伦类。换言之，$M_{\gamma,\varphi}$仅依赖于新的无定向子午线 m的同伦类。人们称$M_{\gamma,\varphi}$ 是由 M 通过一次***Dehn***手术沿 γ 以新子午线 m得到的。

现在假设 M 定向，X 是 M 上的传递阿诺索夫向量场，而 γ 是 X 的一条具有正乘子的 $\widehat{\ }$ 周期轨道。将 γ 吹起后得到的流形 M 与 M_V 微分同胚，该微分同胚在 γ 的任意小邻域之外等于恒等映射（实心环面 V 可以取得任意小）。由 M 的定向所诱导的 X 的横截定向，使我们得以定义典范定向子午线 μ （定义 2.3）；而 γ 的不变（稳定/不稳定）流形 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 则在 $N_\gamma \simeq \partial M$ 上定义了典范经线 λ^s（定义 2.8）。当我们将 M 与

M_V 等同起来时，典范定向子午线 μ 被识别为 $\partial M_V = \partial V$ 上由 V 中圆盘所界定的曲线（同伦类），并赋予其作为这些圆盘边界的定向，再由 γ 横截定向。

沿着第2.2小节中考虑的新纤维化 p' 对 $\hat{M}$ 进行吹下，等价于进行一次 Dehn 填充，其中新的子午线是 p' 的纤维。更准确地说，

事实 2.12。 通过沿 γ 进行指数为 k 的 *Dehn-Fried* 手术，从 M 得到的、携带传递 *Anosov* 流的 3-流形 M' 与流形 $M_{\gamma,\ \varphi}$ 同胚；后者由沿 γ 进行 *Dehn* 手术并取 $\pm(\mu + k\lambda^s)$ 为新子午线得到。此外，可以选择该同胚，使其在 γ 的任意小邻域之外与到 M 的典范识别一致。

我们称沿 γ 进行的指数为 k 的 Dehn-Fried 手术与沿 γ 进行的、以 $\pm(\mu + k\lambda^s)$ 为新子午线的 Dehn 手术是拓扑等价的。

2.5. **纤维中的 Dehn 扭转作为 Dehn 手术**。 现在假设 M 是一个纤维化到圆上的闭定向三维流形。更准确地说，假设

$$M := (S \times [0, 2\pi])_{/(\psi(x),0)\sim(x,2\pi)},$$

其中， S 是一个定向闭曲面， ψ 是一个保向微分同胚，其同痕类称为该纤维化的单值化。对于 $\nu \in \mathbb{S}^1$，我们用$S_\nu = S \times \{\nu\}$ 表示位于 ν之上的纤维。

设 $\gamma\colon\ \mathbb{S}^1 \to S_\nu$是一条简单闭曲线。设 $\tau_\gamma\colon\ S_\nu \to S_\nu$是$S_\nu$ 的一个微分同胚，它在 γ 的一个小邻域之外是恒等映射，并且在 S_μ中 γ 的一个环形邻域 A_γ 内沿 γ 作左 Dehn 扭转。下文中，我们将把 τ_γ 视为 S 的微分同胚（同时也是 $S_\nu = S \times \{\nu\}$的微分同胚）。

对于 $k \in \mathbb{Z}$，我们将由以下步骤得到的闭三维流形记为 $M_{\tau_\gamma,\ k}$；该过程称为在 S_μ 中沿 γ作 k 阶 *Dehn* 扭转：

- 对于某个足够小的 $\varepsilon > 0$，沿 S_ν 切割 M，使得 S_ν 的一个邻域 $S \times [\nu - \varepsilon,\ \nu + \varepsilon]$不连通并变为

$$S \times [\nu - \varepsilon, \nu^- := \nu] \coprod S \times [\nu^+ := \nu, \nu + \varepsilon];$$

- 将 $S \times \{\nu^-\}$与 $S \times \{\nu^+\}$通过 $(\tau_\gamma^k(x),\ \nu^+) \simeq (x,\ \nu^-)$.重新粘合

于是，$M_{\tau_\gamma,\ k}$ 是一个以圆为底、以 S 为纤维且单值化为$\psi \circ \tau_\gamma^k$的闭三维流形。

流形 $M_{\tau_\gamma,\ k}$ 可以视为沿着 γ 对 M 进行 Dehn 手术的结果，具体如下。在将 $S \times \{\nu^-\}$ 与 $S \times \{\nu^+\}$粘合时，首先通过恒等映射将 $(S - A_\gamma) \times \{\nu^-\}$ 与 $(S - A_\gamma) \times \{\nu^+\}$ 粘合。由此得到一个边界为 M_{A_γ}的拓扑流形，其边界是环面 T_γ，由两个环带 A_γ 沿边界通过恒等映射粘合而成。这个流形 M_{A_γ}同胚于 $M \backslash \mathrm{int}(V)$，其中 V是 γ的一个闭管状邻域。为了得到$M_{\tau_\gamma,\ k}$，还需通过微分同胚 $\tau\gamma$将 $A_\gamma \times \{\nu^-\}$ 与 $A_\gamma \times \{\nu^+\}$ 粘合。这等价于进行一次 Dehn 填充，其中新的子午线由一条本质弧 $\alpha \subset A_\gamma \times \{\nu^-\}$ 及其像 $\tau_\gamma(\alpha) \subset A_\gamma \times \{\nu^+\}$的并组成。对于 γ的任意定向，这条新的子午线都与 $\pm(\mu + k\lambda_S)$ 自由同伦，其中：

- μ 是 T_γ 的旧子午线，定向由 γ 给出（若将 M_{A_γ} 视为沿 γ对 M 进行爆破所得的空间，则它就是典范定向子午线，见注 2.7）；• λ_S 是 T_γ 的经线， T_γ 是环带 $A_\gamma \subset S$的边界分支，其定向与 γ相同。

注意，改变 γ 的定向会同时改变子午线 μ的定向和经线 λ_S的定向，因此不会改变 $\pm(\mu + k\lambda_S)$。

综上可得，

事实 2.13. 沿曲线 γ 进行 ***Dehn*** 手术所得的流形，与在 S_ν中沿 γ 进行 k 次 ***Dehn*** 扭转所得的流形同胚；其中，新子午线为 $\pm(\mu + k\lambda_S)$（且可选取该同胚，使其在这些流形与从 γ的任意小管状邻域中取出的 M 的典范识别一致）。特别地，经过此 ***Dehn*** 手术所得的流形仍是纤维化流形，其新的单值化为 $\psi \circ \tau_\gamma^k$。

我们将称沿 γ、以新子午线 $\pm(\mu + k\lambda_S)$ 进行的 Dehn 手术与在 S_ν 中沿 γ 的 k 阶 Dehn 扭转是拓扑等价的。

注记 2.14. Dehn 手术与 Dehn 扭转之间的等价性是证明 Lickoricz-Wallace 定理时所用的经典论证，参见例如 [19, 第 9] 章。

我们可以对有限族简单闭曲线同时施行 Dehn 扭转 s:

命题 2.15. 设 $M = (S \times [0、 2\pi])_{/(\psi(x),0)\sim(x,2\pi)}$ 为圆 S^1 上的闭定向纤维化流形，纤维为 S，单值化为 ψ。考虑有限序列 $0 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \cdots \leqslant \nu_j < 1$、简单闭曲线序列 $\gamma_i, \ldots, \gamma_j$ 以及整数序列 $k_1, \ldots, k_j \in \mathbb{Z}$，使得对每个 i 都有 $\gamma_i \subset S \times \{\nu_i\}$，并且位于同一纤维中的诸 γ_i 两两不相交。

考虑对每个 $i \in \{1$ 在 γ_i 上进行阶数为 k_i 的 ***Dehn*** 扭转后得到的流形 $M_{\{\gamma_i,\ k_i\}}$。那么 $M_{\{\gamma_i,\ k_i\}}$ 是一个纤维为 S 的纤维化流形，其单值化为

$$\psi \circ \tau_{\gamma_j}^{k_j} \circ \tau_{\gamma_{j-1}}^{k_{j-1}} \circ \cdots \circ \tau_{\gamma_1}^{k_1}.$$

注 2.16. 由于曲线 $\gamma_1,\ldots,\gamma_j$ 两两不相交，流形 $M_{\{\gamma_i,\ k_i\}}$ 不依赖于进行 Dehn 扭转手术的顺序。

证明. 证明采用归纳法，依次按递减顺序进行 Dehn 扭转（先在 γ_j 上，然后在 γ_{j-1} 上，依此类推.....）。在 γ_j 上进行的手术保持纤维化，并保持纤维化在区间 $[0,\ \nu_j)$ 上的平凡化，但新的单值化为 $\psi \circ \tau_{\gamma_j}^{k_j}$.

假设我们证明了在 $\gamma_j,\ldots,\gamma_{i+1}$ 上的 Dehn 扭转会导出单值化为 $\psi \circ \tau_{\gamma_j}^{k_j} \circ \tau_{\gamma_{j-1}}^{k_{j-1}} \circ \cdots \circ \tau_{\gamma_{i+1}}^{k_{i+1}}$ 的纤维化。关键在于，这一系列 Dehn 扭转并未影响纤维化在区间 $[0,\ \nu_{i+1}]$ 上的平凡化。由于 $\nu_i \in [0,\ \nu_{i+1}]$，可知沿 γ_i 进行阶数为 k_i 的 Dehn 扭转所对应的单值化，是 Dehn 扭转之前的单值化与沿 γ_i 进行阶数为 k_i 的 Dehn 扭转的复合，即 $\left(\psi \circ \tau_{\gamma_j}^{k_j} \circ \tau_{\gamma_{j-1}}^{k_{j-1}} \circ \cdots \circ \tau_{\gamma_{i+1}}^{k_1}\right) \circ \tau_{\gamma_i}^{k_i}$。由此通过归纳法完成证明。□

注记 2.17。如前所述，手术的顺序不会影响所得流形的拓扑。我们在前面的证明中采用了特定顺序，只是因为这样能大大简化单值化的计算。

2.6.**保留曲面纤维化的 Dehn-Fried 手术 I：水平非扭转情形**。由第 2.4 节和第 2.5 节可直接推出：

命题 2.18。设 $M := (S \times [0, 2\pi])_{/(\psi(x),0)\sim(x,2\pi)}$ 是闭定向曲面 S 上一个保向微分同胚 ψ 的映射环面。假设 M 承载一个传递阿诺索夫向量场 X，使得一条水平曲线 $\gamma \subset S_\nu = S \times \{\nu\}$（其中 $\nu \in [0, 2\pi)$）是 X 的一个具有正乘子的周期轨道。假设 γ 的局部稳定流形相对于 S_ν 的扭转数为零。

对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，沿周期轨道 γ 进行的指数为 k 的 ***Dehn-Fried*** 手术，在拓扑上等价于在纤维 S_ν 中沿 γ 进行的 k 次 ***Dehn*** 扭转。因此，从 M 经沿 γ 进行指数为 k 的 ***Dehn-Fried*** 手术（从而承载一个传递 ***Anosov*** 流）得到的流形，是一个纤维为 S、单值化为 $\psi \circ \tau_\gamma^k$ 的纤维化流形，其中 τ_γ 是在 S 中沿 γ 进行的 ***Dehn*** 扭转。

证明。 在第 2.4 节和第 2.5 节中，我们已经看到，沿 γ 进行指数为 k 的 Dehn-Fried 手术，以及在 S_ν 中沿 γ 进行 k 次 Dehn 扭转，在拓扑上都等价于某种 Dehn 手术。我们还需要确认这两种手术得到的新子午线相同。对于指数为 k 的 Dehn-Fried 手术，新子午线为 $\pm(\mu+k\lambda^s)$，其中 μ 和 λ^s 分别是典范定向子午线和典范经线（由 γ 的稳定流形给出，见定义 2.8）。对于在S_ν中进行 k 次 Dehn 扭转，新子午线为 $\pm(\mu + k\lambda_S)$，其中 λ_S 是由曲面 S_ν 定义、按 γ 定向的经线。最后，根据定义，扭转数 Twist$(W^s_{loc}(\gamma), S_\nu)$ 等于零，与（自由同伦类意义下的）经线 λ^s 和 λ_S 重合是同一回事。因此，沿 γ 进行指数为 k 的 Dehn-Fried 手术，与在 S_ν 中沿 γ 进行 k 次 Dehn 扭转，在拓扑上等价于同一个 Dehn 手术。□

2.7.**保留曲面纤维化的 Dehn-Fried 手术 II：水平扭转情形**。 现在，我们考虑局部稳定流形的扭转数不为零的情形。

命题 2.19。 设 $M := (S \times [0, 2\pi])_{/(\psi(x),0)\sim(x,2\pi)}$ 是闭定向曲面 S 上保向微分同胚 ψ 的映射环面。假设 M 携带传递阿诺索夫向量场 X，使得一条满足 $\nu \in S^1$ 的水平曲线 $\gamma \subset S_\nu = S \times \{\nu\}$) 是 X 的一个具有正乘子的周期轨道。假设相对于 S_ν， γ 的局部稳定流形的扭转数 扭转$_\gamma(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma, X), S_\nu)$ 不为零。

那么，沿 γ 进行的指数为 k 的 ***Dehn-Fried*** 手术，在以下情形下与 S_ν 中沿 γ 进行的 ℓ 阶 ***Dehn*** 扭转拓扑等价

- 扭转$_\gamma(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma, X), S_\nu) = 1$和 $k = 2 = -\ell$• 扭转$_\gamma(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma, X), S_\nu) = -1$和 $k = -2 = -\ell$• 扭转$_\gamma(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma, X), S_\nu) = 2$和 $k = 1 = -\ell$• 扭转$_\gamma(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma, X), S_\nu) = -2$和 $k = -1 = -\ell$

在所有这些情况下，新纤维化的单值化为 $\psi \circ \tau_\gamma^{-k}$。

证明。 根据第2.4节和第2.5节，只需检查 Dehn-Fried 手术和 Dehn 扭转所对应的新子午线是否相同。请记住，这些子午线没有定向。当且仅当以下条件成立时，这些子午线相等：

$$\mu + k\lambda^s = \pm(\mu + \ell\lambda_S) \in H_1(\partial V, \mathbb{Z}),$$

其中， V是 γ的管状邻域。由于扭转数 Twist$_\gamma(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma, X), S_\nu))$不为零，经线 λ^s 和 λ_S 的交数非零。由此可推知，上述等式中的符号不可能是 $+$。因此，当且仅当.....时，子午线重合

$$2\mu = -k\lambda^s - \ell\lambda_S \in H_1(\partial V, \mathbb{Z}).$$

λ^s 和 λ_S 与 μ的交数均为 1。因此，该方程等价于 $\ell = -k$ 和

$$2\mu = -k(\lambda^s - \lambda_S).$$

现在， $\lambda_S = \lambda^s +$(Twist$_\gamma(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma, X), S_\nu))\cdot\mu$（见事实 2.11）。因此，该方程等价于 $k = -\ell$ 和

$$2\mu = k\left(\mathrm{Twist}_\gamma(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma, X), S_\nu)\right) \cdot \mu.$$

由此可得前述四种可能的情形。事实 $k = -\ell$ 意味着新的单值化为 $\psi \circ \tau_\gamma^{-k}$，证明至此结束。□

2.8. **保持曲面纤维化的 Dehn-Fried 手术序列**。总结第2.5、2.6和2.7小节的结果，可得如下

命题 2.20。 设 $M := (S \times [0, 2\pi])_{/(\psi(x),0)\sim(x,2\pi)}$ 是一个闭的定向 3 维流形，纤维化于 $\mathbb{S}^1$ 上，纤维为 S，单值化为 ψ。假设 M 承载一个传递 *Anosov* 向量场 X，并且存在 $0 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2 \cdots \leqslant \nu_j < 1$ 和周期轨道$\gamma_1, \ldots, \gamma_j$，其乘子为正，使得 γ_i 包含于纤维 $S_{\nu_i} = S \times \{\nu_i\}$ 中，且包含在同一纤维中的 γ_i 两两不相交。此外，假设 γ_i 相对于 $S \times \{\nu_i\}$ 的局部稳定流形的扭转数为零，或属于 $\{-1, 1, 2, -2\}$。设 $k_1 \ldots k_j$ 为一个整数序列，满足如下条件：若 扭转$_{\gamma_i}(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma_i, X), S_{\nu_i}) = 0$，则 k_i 可以是任意整数，并且

$$k_i = 2, -2, 1, -1 \quad \textit{if } \mathrm{Twist}_{\gamma_i}(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma_i, X), S_{\nu_i}) = 1, -1, 2, -2, \textit{ respectively.}$$

当 $\ell_i = k_i$ 扭转$_{\gamma_i}(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma_i$ 时， $X), S_{\nu_i})$ 消失；否则为 $\ell_i = -k_i$。

然后，对每个 i 沿 γ_i 进行指数为 k_i 的 ***Dehn-Fried*** 手术，在拓扑上等价于对 $i = 1, \ldots, j$ 中曲面上的曲线 γ_i 进行阶数为 ℓ_i 的 ***Dehn*** 扭转。所得流形承载一个传递 *Anosov* 流，并以 S 为纤维、以 $\psi \circ \tau^{\ell_j}_{\gamma_j} \circ \cdots \circ \tau^{\ell_1}_{\gamma_1}$ 为单值化，纤维为 $\mathbb{S}^1$。

注 2.21。 如事实 2.12 和 2.13 中所述，Dehn-Fried 手术和 Dehn 扭转都可以在轨道 γ_i 的任意小邻域内进行，因此所得流形之间的同胚在这些邻域之外与典范识别一致。

注记 2.22. 本文将命题 2.20 应用于流形 M的一种略有不同的表示，该纤维化流形承载着传递阿诺索夫流 X。我们不将 M 视为 $(S \times [0, 2\pi])_{/(\psi(x),0)\sim(x,2\pi)}$ 而是考虑

$$M := \left(\bigsqcup_{s=1}^{l} S \times [2(s-1)\pi, 2s\pi] \right)_{/ \begin{array}{l} (x, 2s\pi^-) \sim (\psi_s(x), 2s\pi^+),\ s = 1 \ldots, l-1 \\ (x, 2l\pi) \sim (\psi_l(x), 0) \end{array}}$$

这意味着我们将 M 视为圆周 $\mathbb{R}/2l\pi$, 上的纤维化，其纤维为 S，单值化为 $\psi = \psi_l \circ \psi_{l-1} \circ \cdots \circ \psi_1$。

我们假设存在

$$0 \leqslant \nu^1_1 \leqslant \cdots \leqslant \nu^1_{j_1} < 2\pi \leqslant \nu^2_1 \leqslant \cdots \leqslant \nu^2_{j_2} < 4\pi \leqslant \ldots \cdots < 2(l-1)\pi \leqslant \nu^l_1 \leqslant \cdots \leqslant \nu^l_{j_l} < 2s\pi$$

并且 X具有周期轨道 γ^1_1，…，$\gamma^1_{j_1}$，γ^2_1，…，$\gamma^2_{j_2}$，…，γ^l_1，…，$\gamma^l_{j_l}$，其乘子均为正，因此 γ^s_i包含在纤维 $S_{\nu^s_i}$中，并且包含在同一纤维中的轨道两两不相交。我们假设扭转数 Twist$_{\gamma^s_i}(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma^s_i, X), S_{\nu^s_i})$要么为零，要么属于 $\{-2, -1, 1, 2\}$。我们考虑一些整数 k^s_i，并要求若 Twist$_{\gamma^s_i}(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma^s_i, X), S_{\nu^s_i}) = 1$分别为 -1，2，-2，则 $k^s_i = 2$，-2，1，-1。记作 $\ell^s_i = k^s_i$，若 Twist$_{\gamma^s_i}(W^s_{\mathrm{loc}}(\gamma^s_i, X), S_{\nu^s_i})$ 为零；否则记作 $\ell^s_i = -k^s_i$。

因此，命题 2.20 以同样的方式适用于这一表示。沿 γ^s_i 对每个 i, s 施行indexk^s_i Dehn-Fried 手术，得到一个承载阿诺索夫流的纤维化流形，其单值化在手术之后为

$$\psi_l \circ \left(\tau^{\ell^l_{j_l}}_{\gamma^l_{j_l}} \circ \cdots \circ \tau^{\ell^l_1}_{\gamma^l_1} \right) \circ \psi_{l-1} \circ \cdots \circ \psi_2 \circ \left(\tau^{\ell^2_{j_2}}_{\gamma^2_{j_2}} \circ \cdots \circ \tau^{\ell^2_1}_{\gamma^2_1} \right) \circ \psi_1 \circ \left(\tau^{\ell^1_{j_1}}_{\gamma^1_{j_1}} \circ \cdots \circ \tau^{\ell^1_1}_{\gamma^1_1} \right).$$

3. 具有许多水平周期轨道的阿诺索夫流的构造：亏格二情形

定理 1.8 的证明的主要步骤是：对于每个 $g \geqslant 2$，构造一个亏格为 g、其纤维承载着具有“许多”

水平周期轨道的环面纤维化闭三维流形。本节中，我们在亏格为 $g = 2$ 的情形下进行构造。为此，我们将引言中的记号调整为适用于这一情形的记号。

令 S 为闭合、可定向、连通的二亏格曲面，并考虑一组本质有向简单闭曲线 a_ℓ，b_ℓ，c，a_r，b_r，d，它们与图5所示的曲线微分同胚。S 的定向取为使 $\mathrm{int}(a_\ell, b_\ell) = -1$。

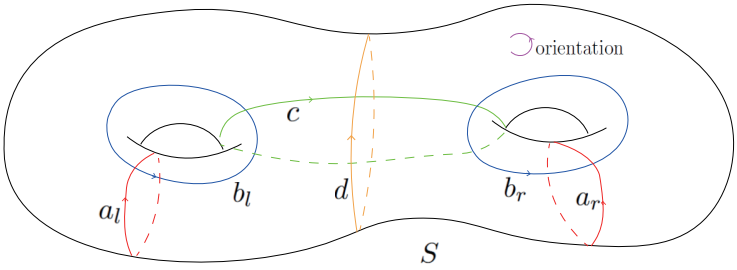


图5. 亏格为 2 的曲面 S 及定向曲线 a_ℓ，b_ℓ，a_r，b_r，c，d（下标 ℓ 和 r 相对于 d 分别表示“左”和“右”）。

回顾一下，纤维化的一个纤维中所含周期轨道的局部稳定流形的扭转数已在上一节中定义（定义 2.10）。本节的主要结果是以下命题。

定理 3.1. 令 τ_d^{-2} 为沿曲线 d 的左 *Dehn* 扭转的平方。考虑映射环面

$$M = S \times [0, 2\pi]_{/(x,2\pi)\sim(\tau_d^{-2}(x),0)}$$

并将 $\wp\colon M \to \mathbb{S}^1$ 记为由 $S \times [0, 2\pi]$ 到第二个坐标的投影所诱导的 M 的纤维化。存在 M 上的一个传递阿诺索夫流 Y^t，其稳定叶状结构和不稳定叶状结构均可定向，使得：

(1) 曲线 $a_\ell \times \{0\}$、$a_r \times \{0\}$、$b_\ell \times \{\frac{3\pi}{2}\}$、$b_r \times \{\frac{3\pi}{2}\}$ 和 $c \times \{0\}$（在 M 中的投影）是 Y^t 的正乘子周期轨道；*(2)* 轨道 $a_\ell \times \{0\}$、$a_r \times \{0\}$、$b_\ell \times \{\frac{3\pi}{2}\}$ 和 $b_r \times \{\frac{3\pi}{2}\}$ 的局部稳定流形是水平的，即，这些轨道的局部稳定流形相对于纤维化 $\wp$ 的扭转数等于零；*(3)* 轨道 $c \times \{0\}$ 的局部稳定流形相对于曲面 $\wp^{-1}(\{0\})$ 的扭转数等于 1。

注 3.2. 图5 所示的曲线 $a_\ell \times \{0\}$、$a_r \times \{0\}$、$b_\ell \times \{\frac{3\pi}{2}\}$、$b_r \times \{\frac{3\pi}{2}\}$ 和 $c \times \{0\}$ 的定向并不都与它们作为流 Y^t 的轨道时的定向一致。这并不构成问题：我们为曲线 a_ℓ、b_ℓ、a_r、b_r、c、d选取了一些定向，因为这样在定理 3.1 的证明过程中会比较方便；但证明结束后，这些定向便毫无意义，因为沿曲线进行左 Dehn 扭转并不取决于该曲线的定向。

本节篇幅较长，专门用于证明定理 3.1。现在我们概述证明的策略。设 S_ℓ 和 S_r 是 $S \backslash d$ 的两个连通分支，其中 S_ℓ 包含曲线 a_ℓ 和 b_ℓ，而 S_r 包含曲线 a_r 和 b_r。显然，S_ℓ 和 S_r 是两个一次穿孔环面。我们将在 S 上赋予一个精心选取的双曲度量 g，并考察单位切丛 U 上相应的测地流 $X^t := T^1 S$。圆丛 $\pi\colon U \to S$ 并非全局平凡化。然而，π 在 $U_\ell := T^1 S_\ell$ 和 $U_r := T^1 S_r$ 上的限制都是平凡的。换言之，沿环面 $T = \pi^{-1}(d)$ 将 U 剖开后，我们得到两个平凡的 $\mathbb{S}^1$ 丛 $U_\ell \to S_\ell$ 和 $U_r \to S_r$。我们将精心选取这些丛的若干平凡化，从而定义平凡纤维化 $U_\ell \cong S_\ell \times \mathbb{S}^1 \to S_\ell$ 和 $U_r \cong S_r \times \mathbb{S}^1 \to S_r$。由于 U 并非全局平凡化，U_ℓ 和 U_r 上的纤维化结构无法沿 $T = \partial U_\ell = \partial U_r$ 直接粘合。尽管如此，我们将证明

通过沿测地流 X^t 的轨道 $\widetilde{d}^+$ 和 $\widetilde{d}^-$ 进行 Dehn 手术，可以将这些纤维化拼接在一起；这两条轨道分别投影到定向测地线 d 和 d^{-1} 上。换言之，从 $U = T^1S$ 上的测地流 X^t 出发，沿周期轨道 $\widetilde{d}^+$ 和 $\widetilde{d}^-$ 进行 Dehn-Fried 手术后，我们将得到流形 M 上的阿诺索夫流 Y^t ，且该流形以圆为底空间进行纤维化。我们将仔细确定 M 上纤维化的单值化，并得出 M 微分同胚于沿曲线 d 的左 Dehn 扭转的平方所对应的映射环面，即，

$$M = S \times [0,1]_{/\left((x,1)\sim\left(\tau_d^{-2}(x),0\right)\right)}.$$

双曲度量 g 将被选取，使得 a_ℓ， b_ℓ， c， a_r， b_r 为测地线。此外， U_ℓ 与 U_r 上的纤维化结构将被选取，使得测地流中投影到 a_ℓ， b_ℓ， c， a_r， b_r 上的周期轨道包含于这些 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$纤维化的某些特定纤维中。沿 d^+ 与 d^- 的 Dehn-Fried 手术将保持这些性质（回顾一下，一次 Dehn-Fried 手术除在单一轨道上外，处处不改变该流，见第 2.1 小节）。因此，我们将得到 M上的定向曲线 $a_\ell \times \{0\}$、 $a_r \times \{0\}$、$b_\ell \times \{\frac{3\pi}{2}\}$、 $b_r \times \{\frac{3\pi}{2}\}$与 $c \times \{0\}$ 是流 Y^t的周期轨道。由于测地线 X^t 的稳定叶状结构与不稳定叶状结构横截于单位切丛的纤维，除最后一条轨道外，上述所有轨道对于 Y^t 的局部稳定流形都将是水平的。通过细致分析，我们将证明轨道 $c \times \{0\}$ 的局部稳定流形相对于包含它的纤维的扭转数等于 1。形式上，定理 3.1 将通过结合命题 3.31、命题 3.32 与推论 3.35 得到。

3.1. **双曲度量 g 与对称性 ς**。首先，我们需要在 S 上构造一个双曲度量 g，使曲线 a_ℓ、b_ℓ、c、d、a_r、b_r 成为测地线，并满足一些特定性质。下面的引理可由标准双曲几何推出，参见例如 [4, 第 1 节7]。

引理 3.3. 存在 S 上的一个双曲度量 g，以及 (S 的一个反定向等距对合 ς， g)，使得：

(1) 曲线 a_ℓ、b_ℓ、c、d、a_r、b_r 是关于 g 的测地线。***(2)*** 对于曲线 a_ℓ、b_ℓ、c、d、a_r、b_r中任意两条曲线的每个交点，相交的曲线均正交相交。***(3)*** 测地线 d 的长度为 2π，而 c 与 d 的两个交点 p 和 q 沿测地线 d彼此相距 π 。***(4)*** 对称性 ς 逐点保持 d 不变，全局保持 c 不变，将 a_ℓ 映射到 a_r，并将b_ℓ 映射到 b_r。

我们固定一个双曲度量 g 于曲面 S 上，如引理 3.3 所给出。我们记

$$U := T^1S = \{(x,v) \mid x \in S, v \in T_xS, g(v,v) = 1\}$$

曲面 S 的单位切丛， $\pi:\ U \to S$ 自然投影，以及 X^t 在 U 上与 g 相关联的测地流。对于任意定向测地线 e 于 S 中，我们将用$\tilde{e}^+$ 表示 X^t 的定向轨道，其投影到 e 上（具有正确的定向），以及 $\tilde{e}^-$ 表示 X^t 的定向轨道，其投影到 e^{-1} 上。

上述引理的最后一项意味着度量 g 关于“中间”曲线 d 是对称的。我们用 S_ℓ 和 S_r 表示 $S\backslash d$ 的两个连通分支，其中 S_ℓ 包含曲线 a_ℓ 和 b_ℓ，而 S_r 包含曲线 a_r 和 b_r。因此我们有一个分解

$$S = S_\ell \sqcup d \sqcup S_r.$$

注意， S_ℓ 和 S_r 是两个一次穿孔环面，并且 ς 将 S_ℓ 映射到 S_r，反之亦然。 S 的分解会导出单位切丛的一个分解

$$U = U_\ell \sqcup T \sqcup U_r$$

其中

$$U_\ell := T^1 S_\ell = \pi^{-1}(S_\ell),\ T := \pi^{-1}(d) \text{ and } U_r := T^1 S_r = \pi^{-1}(S_r).$$

请注意， T 是一个环面，而 U_ℓ 和 U_r 是以一次穿孔环面为底的平凡 $\mathbb{S}^1$-丛。

3.2. 环面邻域上的坐标系 $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ 在环面 T 上。 现在，我们在 S中测地线 d 的邻域上引入一个“良好”的坐标系。由于 S中的 d是一条长度为 2π 的闭测地线，因此 S 中存在 d 的一个邻域，它是一个标准双曲圆柱。因此（例如参见 [4]）：

事实 3.4。 存在一个常数 $\epsilon \in \big(0$、一个 S中 d 的闭环带邻域 A ，以及一个坐标系 $(\rho$、 $\theta)$: $A \to [-\epsilon$ 、 $\epsilon] \times \mathbb{S}^1$ ，使得:
(1) 曲线 $(\rho = 0)$ 恰好是测地线 d。*(2)* g 在 A 上的限制$g_{|A}$ 可以写成

$$g = d\rho^2 + \cosh^2(\rho) d\theta^2.$$

(3) 环带 A 与曲线 a_ℓ、 a_r、 b_ℓ 和 b_r 不相交。

定向将在某些交集数和扭转数的计算中发挥重要作用，因此我们需要确定坐标沿哪些方向递增。通过将 ρ 替换为 $-\rho$ 和/或将 θ 替换为 $-\theta$，不失一般性，我们假设:

(1) 向量场 ∂_ρ 沿测地线 d 指向子曲面 S_r 。(2) 向量场 ∂_θ 的方向与测地线 d 的定向一致。根据这一约定，立即可得:

事实 3.5。 环带 A 的左侧部分 $S_\ell \cap A$ 和右侧部分 $S_r \cap A$ 分别对应于 (ρ,θ) 坐标系中的区域 $\{\rho < 0\}$ 和 $\{\rho > 0\}$ 。

g 在 (ρ,θ) 坐标中的表达式意味着， $(\theta = \text{constant})$ 这些弧是 $g_{|A}$ 中与 d 正交的测地弧。现在回顾一下，根据引理 3.3， c 是一条与 d 正交的测地线，并且 $c \cap d$ 上两点之间沿 d 的距离等于 π。因此，如有必要，在坐标 θ 上加上一个常数，便得到:

事实 3.6。 测地线 c 与环带 A 的交集对应于 (ρ,θ)坐标系中的线段$\{\theta = 0\}$ 和 $\{\theta = \pi\}$ 。

因此，特别地， c 和 d 的两个交点 p, q 的坐标分别为 $(0,0)$ 和 $(0,\pi)$。交换 p 和 q 的名称后，不妨假设p是坐标为 $(0,0)$ 的点，而 q是坐标为 $(0,\pi)$的点。

根据度量 $g_{|A}$的表达式，点 A 的 ρ坐标的绝对值就是它到测地线 d的距离。因此:

事实 3.7。 在 (ρ,θ)坐标系中，对称性 ς 在 A 上的限制写作

$$\varsigma(\rho,\theta) = (-\rho,\theta).$$

坐标 (ρ,θ) 使我们能够在曲面 S上定义定向：我们赋予 S如下定向，使得（见图 6） $(\partial_\rho, \partial_\theta)$ 构成正向标架。

我们现在定义一个新的坐标 φ，使得 $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ 成为单位切丛 $U = T^1 S$中环面 T 的一个邻域上的坐标系。度量 g以及 S 上的定向使我们能够测量 S的同一点 m 处两个切向量 v_1 与 v_2 之间的有向角 $\text{Angle}_m(v_1,\ v_2)$ 。限制到 A，我们定义一个坐标 φ 于

$$U_A := T^1 A = \pi^{-1}(A)$$

如下：对于 $m \in A$ 和 $v \in T^1_m S$，我们令

$$\varphi(m,v) := \text{Angle}_m\left(\partial_\theta, v\right).$$

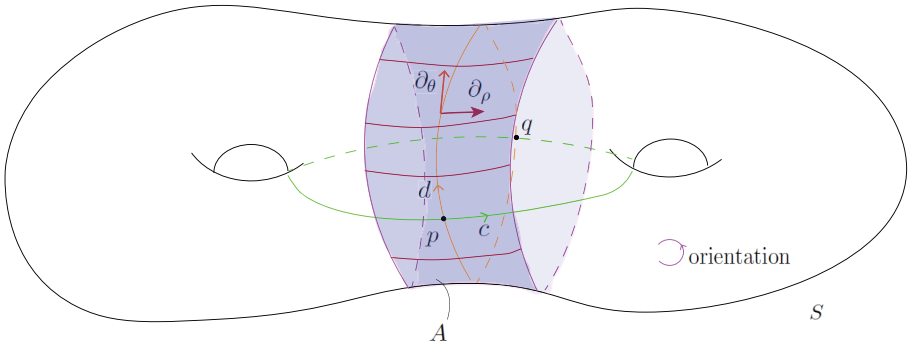


图 6。 S上的定向

将 φ 添加到 (ρ,θ)-坐标系，我们得到一个坐标系

$$(\rho,\theta,\varphi) : U_A \longrightarrow [-\epsilon,\epsilon]\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1.$$

以下事实是坐标构造的直接推论。

事实3.8。 环面 $T=\pi^{-1}(d)$ 对应于 (ρ中的集合 $\{\rho=0\}$、 θ、 φ) 坐标。 U_A 的左半部分 $U_\ell\cap U_A$ 和右半部分 $U_r\cap U_A$ 分别对应区域 $\{\rho<0\}$和 $\{\rho>0\}$ 。

回顾一下，在曲面 S中，曲线 $\{\rho=0\}$ 是测地线 d。此外，向量场 ∂_θ 的指向与 d的定向一致。因此，在 T^1S中：

事实3.9。 d在 $U=T^1S$中的典范提升 $\tilde{d}$是曲线 $\{\rho=0、\ \varphi=0\}$，而 d^{-1} 的典范提升 $\tilde{d}^{-1}$ 是曲线 $\{\rho=0、\ \varphi=\pi\}$。

A 的定向诱导 $U_A=T^1A$ 上的一个定向，从而也诱导 $U=T^1S$上的一个定向。

约定3.10. 我们赋予 U_A如下定向，使得 $(\partial_\rho,\ \partial_\theta,\ \partial_\varphi)$ 构成一个正向基。

3.3. **单位切丛的显式截面 $U_\ell=T^1S_\ell$ 与 $U_r=T^1S_r$**。回顾 S_ℓ 与 S_r 是 S中测地线 d的补集的连通分支。显然， S_ℓ 与 S_r 是一次穿孔环面。因此，单位切丛 $U_\ell\to S_\ell$与 $U_r\to S_r$ 是可平凡化的。现在我们将定义单位切丛 U_ℓ 与 U_r的一族显式截面，即 $S_\ell\sqcup S_r$上的单位向量场族。我们用 c_ℓ与 c_r 表示测地线 c的左半部与右半部，即 $c_\ell:=c\cap S_\ell$ 与 $c_r:=c\cap S_r$.

命题3.11. 在非紧曲面 $S-d$ 上存在单位向量场的一个连续族 $(V_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$ ，具有如下性质

(1) 向量场 V_0 沿闭有向测地线 a_ℓ 和 a_r以及有向测地线弧 c_ℓ 和 c_r正向相切。*(2)* 向量场 $V_{3\pi/2}$ 沿闭有向测地线 b_ℓ 和 b_r正向相切。*(3)* 对于每个 $\nu\in\mathbb{S}^1$，向量场 V_ν 在 $A-d$ 上的限制在 (ρ,θ) 坐标系中可表示为：

$$V_\nu(\rho,\theta)=\lambda(\rho,\theta)\left(|\rho|\cos(\theta-\nu)\partial_\rho-\frac{\rho}{|\rho|}\sin(\theta-\nu)\partial_\theta\right), \tag{1}$$

其中 $\lambda(\rho,\theta)$ 是归一化正因子，用以确保 $g(V_\nu,V_\nu)=1$。
(4) 对于每个 $m\in S-d$，映射

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{S}^1 & \to & T^1_mS\\ \nu & \mapsto & V_\nu(m)\end{array}$$

是一个同胚。相对于第 *3.2* 节中定义的纤维定向以及 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，的典范定向，这个同胚对 $m \in S_\ell$ 是保向的，对 $m \in S_r$ 是反向的。

(5) 对于每个 $\nu \in \mathbb{S}^1$，向量场 V_ν 与对称性 ς 反交换：

$$\varsigma_* V_\nu = -V_\nu.$$

注 3.12. (1) 向量场 V_ν 定义在 $S - d$ 上，无法扩展为 S 上的向量场。从公式 (1) 可以看出，它在 $\rho = 0$ 处不连续。实际上， S 是一个欧拉示性数非零的闭曲面，因此 S 的切丛不可平凡化，也就是说，不存在定义在整个曲面 S 上的连续单位向量场。

(2) V_ν 在 $(\rho,\ \theta)$ 坐标系中的表达式（公式 (1)）具有一种几何 ic
解释。事实上，对于 $\nu = 0$，公式

$$\mathbb{R}^+.V_0(\rho,\theta) = \mathbb{R}^+.\left(|\rho|\cos(\theta)\partial_\rho - \frac{\rho}{|\rho|}\sin(\theta)\partial_\theta\right)$$

对应于 $\mathbb{R}^2$ 上水平半直线场在原点处爆破后的极坐标表达式。半直线场 $\mathbb{R}^+.V_\nu$ 是半直线场 $\mathbb{R}^+.V_0$ 在这些坐标下旋转角 ν 后的像。

(3) 图7表示曲面 S 上的向量场 V_0，该曲面已沿测地线 $a_\ell, b_\ell, d, a_r, b_r$切开。请注意，为了得到原始曲面 S，应将两个正方形各自的下侧与上侧粘合在一起，将两个正方形各自的左侧与右侧粘合在一起，并沿 d 利用关于竖直轴的对称性将正方形粘合到右侧正方形上。例如，左侧部分上的点 p、 q 应粘合到右侧部分上的点 p、 q 。图8试图在不沿 d切开 S 的情况下表示 V_0，以便可以看出 V_0 沿 d是不连续的。

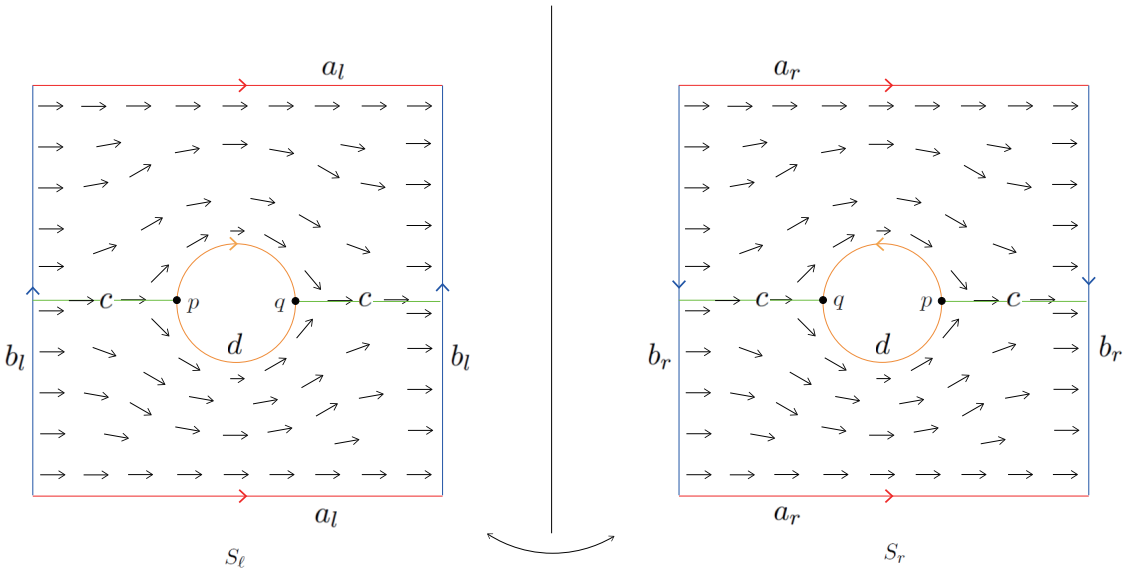


图7. 向量场 V_0 表示在沿测地线 $a_\ell, b_\ell, d, a_r, b_r$切开的曲面 S 上。

在下文中，pr 表示 $\mathbb{R}^2$ 到环面 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$的自然投影。为了证明命题3.11，我们将构造一个微分同胚 h，将曲面 S_r映到标准穿孔环面 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 - \{\mathrm{pr}(0_{\mathbb{R}^2})\}$，在 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 - \{\mathrm{pr}(0_{\mathbb{R}^2})\}$上定义一族显式的向量场 $(\mathrm{V}_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$，并借助微分同胚 h 和 $h \circ \varsigma$ 将 V_ν拉回到 S_r 和 S_ℓ 上，从而得到 $S\backslash d$上的向量场族 $(\mathrm{V}_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$。

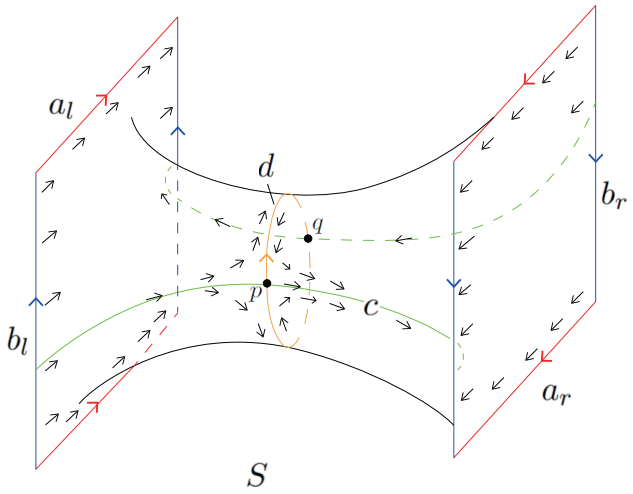


图8. 沿测地线 a_ℓ, b_ℓ, a_r, b_r切开的曲面 S 上的向量场 V_0。注意 V_0 沿测地线 d的不连续性。

引理 3.13. 存在微分同胚 $h:\ S_r \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 - \{\mathrm{pr}\{0_{\mathbb{R}^2}\}$，使得：
(1) h 将 S_r 的定向映为 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$的标准定向。*(2)* $h(a_r) = \mathrm{pr}\left(\mathbb{R}\times\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$和 $h(b_r) = \mathrm{pr}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\times\mathbb{R}\right)$。*(3)* $h(c_r) = \mathrm{pr}\left(\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]-\{0\}\right)\times\{0\}\right)$，其中 $c_r = c\cap S_r$。*(4)* $h(A\cap S_r) = \mathrm{pr}\left(\{(x,y)\mid 0<x^2\mp\bar{y}^2\leqslant\epsilon\}\right)$，且 h 将 $A\cap S_r$上的坐标 (ρ,θ) 映为 $\mathbb{R}^2$上的标准极坐标 $(\bar{\rho},\bar{\theta})$（在 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 中的投影）。

证明。令 ϵ 为事实 3.4 给出的常数。记 $\mathbb{D}_\epsilon$ 为以 $\mathbb{R}^2$中原点为圆心、半径为 ϵ 的欧氏圆盘。首先，我们定义一个微分同胚

$$h_A : A\cap S_r \to \mathrm{pr}\left(\mathbb{D}-\{0_{\mathbb{R}^2}\}\right)$$

令 $h_A(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$，其中 (ρ,θ) 是事实 3.4 中定义的坐标。这样可确保 h_A 将 (ρ,θ) 映射到 $\mathbb{R}^2$上的标准极坐标 $(\bar{\rho},\bar{\theta})$。

接着我们注意到 $S_r - \mathrm{int}(A)$ 是一个去掉闭圆盘的环面，并且 a_r, b_r 是 $S_r - \mathrm{int}(A)$ 中的两条定向本质简单闭曲线，且其代数交数为 $\mathrm{Int}(a_r,b_r) = -1$。由此可知，存在一个微分同胚

$$h_{A^c} : S_r - \mathrm{int}(A) \to (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) - \mathrm{pr}\left(\mathbb{D}_\epsilon\right)$$

将 a_r映射到 $\mathrm{pr}\left(\mathbb{R}\times\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$，将 b_r映射到 $\mathrm{pr}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\times\mathbb{R}\right)$，并保持定向。

微分同胚 h_A 与 h_{A^c} 不必在圆$\partial(A\cap S_r)$上重合。但由于圆的任意两个保向微分同胚都是同痕的，我们可以在 $\partial(A\cap S_r)$ 的一个小邻域上修改h_{A^c}，以得到这一重合。然后，我们可以把 h_A与 h_{A^c} 粘合在一起，从而得到一个微分同胚 $h:\ S_r \to (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) - \{\mathrm{pr}(0_{\mathbb{R}^2})\}$，它满足第(1)、(2)和(4)项。

我们进一步在 b_r的一个邻域上修改 h，使得 $h(b_r\cap c) = \left\{\mathrm{pr}\left(\frac{1}{2},0\right)\right\}$。现在 h满足第(2)项。经过这一修改后，$h(c\cap S_r)$ 与$\mathrm{pr}\left(\{\mathbb{R}-\{0\}\}\times\{0\}\right)$ 是恰当嵌入穿孔环面 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 - \{\mathrm{pr}(0_{\mathbb{R}^2})\}$中的两条弧。这两条弧在 $h(A\cap S_r)$中重合，并且它们与闭曲线$\mathrm{pr}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\times\mathbb{R}\right) = h(b_r)$有同一个唯一交点。因此我们可以在 $S_r - (A\cup a_r\cup b_r)$ 上修改 h，使得修改后它把 $c_r = c\cap S_r$映到$\mathrm{pr}\left(\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]-\{0\}\right)\times\{0\}\right)$，从而满足第(3)项。□

现在我们将在 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 - \{\mathrm{pr}(0_{\mathbb{R}^2})\}$ 上定义一族向量场 $\{\mathrm{V}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$，并通过引理 3.13 中构造的微分同胚 h 将它们拉回，从而得到 S_r 上的一族向量场 $\{V_\nu\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$。为构造这族 $\{\mathrm{V}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$，我们选取一个光滑函数

η: $(0,\ +\infty) \to [0,\ 1]$ 使得

$$\eta = 0 \quad \text{on} \quad (0, \epsilon] \quad \text{and} \quad \eta = 1 \quad \text{on} \quad \left[\tfrac{1}{4}, +\infty\right).$$

用 $(\bar{\rho}, \bar{\theta})$ 表示 $\mathbb{R}^2$上的标准极坐标，我们按公式定义 $\mathbb{R}^2 - \{(0_{\mathbb{R}^2})\}$ 上的向量场 $\widetilde{\mathrm{V}}_0$

$$\widetilde{\mathcal{V}}_0(\bar{\rho}, \bar{\theta}) = [(1 - \eta(\bar{\rho})) \cdot \bar{\rho} + \eta(\bar{\rho})] \cos(\bar{\theta}) \partial_{\bar{\rho}} - \sin(\bar{\theta}) \partial_{\bar{\theta}}.$$

于是，对每个 $\nu \in \mathbb{S}^1$，我们将 $\mathbb{R}^2$上的角度为 ν 的线性旋转记为 R_ν，并通过设定以下内容来定义 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上的向量场 $\widetilde{\mathrm{V}}_\nu$

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\nu := (R_\nu)_* \widetilde{\mathcal{V}}_0.$$

注意，V_ν 在极坐标下可表示为：

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\nu(\bar{\rho}, \bar{\theta}) = [(1 - \eta(\bar{\rho}))\bar{\rho} + \eta(\bar{\rho})] \cos(\bar{\theta} - \nu) \partial_{\bar{\rho}} - \sin(\bar{\theta} - \nu) \partial_{\bar{\theta}}.$$

引理 3.14。对于每个 $\nu \in \mathbb{S}^1$，$\widetilde{\mathcal{V}}_\nu$ 在去心正方形$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 - \{0_{\mathbb{R}^2}\}$上的限制，投影为穿孔环面 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 - \{\mathrm{pr}(0_{\mathbb{R}^2})\}$上的向量场 $\mathcal{V}_\nu$。

证明。回顾一下，对于 $\bar{\rho} \geqslant \frac{1}{4}$，$\eta(\bar{\rho}) = 1$。因此，在正方形 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$的边界附近，向量场 $\widetilde{\mathrm{V}}_\nu$的表达式为

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\nu(\bar{\rho}, \bar{\theta}) = \cos(\theta - \nu) \partial_{\bar{\rho}} - \sin(\bar{\theta} - \nu) \partial_{\bar{\theta}} = (R_\nu)_* \left(\cos(\bar{\theta}) \partial_{\bar{\rho}} - \sin(\bar{\theta}) \partial_{\bar{\theta}}\right) = (R_\nu)_* \partial x,$$

其中 ∂x 是 $\mathbb{R}^2$上的水平向量场。特别地，$\widetilde{\mathrm{V}}_\nu$ 在正方形 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$边界的某个邻域上的限制，在 $(x, y) \mapsto (X + 1, y)$ 以及 $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$所表示的平移下保持不变。结论得证。□

引理 3.15。对于每个 $m \in \mathbb{R}^2 - \{(0_{\mathbb{R}^2})\}$，映射

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{P}_+(T_m\mathbb{R}^2) \\ \nu & \mapsto & \mathbb{R}_{>0}.\widetilde{\mathcal{V}}_\nu(m) \end{array}$$

当圆 $\mathbb{P}_+(T_m\mathbb{R}^2)$ 赋予由 $\mathbb{R}^2$的标准定向诱导的定向时，是一个保向同胚。

证明。这直接由定义向量场 V_ν的公式得到。事实上，若 $m \in \mathbb{R}^2 - \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ 是极坐标为 $(\bar{\rho}_0, \bar{\theta}_0)$ 的点（因此 $\rho_0 > 0$），则曲线

$$\nu \mapsto \widetilde{\mathcal{V}}_\nu(\bar{\rho}_0, \bar{\theta}_0) = [(1 - \eta(\bar{\rho}_0)) \cdot \bar{\rho}_0 + \eta(\bar{\rho}_0)] \cos(\bar{\theta}_0 - \nu) \partial_{\bar{\rho}} - \sin(\bar{\theta}_0 - \nu) \partial_{\bar{\theta}}$$

是 $(\bar{\rho}, \theta)$–平面中的椭圆，按照基 $(\partial_{\bar{\rho}}, \partial_{\bar{\theta}})$ 所给出的定向进行参数化；该基是 $T_m\mathbb{R}^2$ 关于标准定向的正向基。□

命题*3.11*的证明。观察极坐标中定义向量场 $\left(\widetilde{\mathrm{V}}_\nu\right)_{\nu \in \mathbb{S}^1}$的公式，我们发现：

(1) $h(a_r) = \mathrm{pr}\left(\mathbb{R} \times \{\frac{1}{2}\}\right)$和 $h(c \cap S_r) = \mathrm{pr}\left(([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] - \{0\}) \times \{0\})\right)$是向量场$\mathrm{V}_0$的轨道。
(2) $h(b_r) = \mathrm{pr}(\{\frac{1}{2} \times \mathbb{R}\})$ 是向量场$\mathrm{V}_2^{3\pi}$ 的一条轨道。(3) 在 $h(A \cap S_r)$上，我们有

$$\mathcal{V}_\nu(\bar{\rho}, \bar{\theta}) = \bar{\rho} \cos(\bar{\theta} - \nu) \partial_{\bar{\rho}} - \sin(\bar{\theta} - \nu) \partial_{\bar{\theta}}$$

（这里我们稍微滥用了记号，将标准极坐标 $(\bar{\rho},\ \theta)$ 视为$\mathbb{R}^2$ 在点 $(0,\ 0)$ 于 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 中的投影附近的邻域上的坐标。）

（4）对于每个 $m \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 - \{0_{\mathbb{R}^2}\},$，映射

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \to & T_m(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \\ \nu & \mapsto & \mathcal{V}_\nu(m) \end{array}$$

是一个保向同胚（参见引理 3.15）。

对于 $\nu \in \mathbb{S}^1$，我们通过沿 h^{-1} 拉回 $\mathsf{V}\nu$，并按照范数 $\|\cdot\|_g$ 归一化，在 S_r 上定义单位向量场 V_ν：

$$V_\nu := \frac{(h^{-1})_*\mathcal{V}_\nu}{\|(h^{-1})_*\mathcal{V}_\nu\|_g}.$$

我们通过沿 $(h\circ\varsigma)^{-1}$ 拉回 $\mathsf{V}\nu$，取其反向并归一化，在 S_ℓ 上定义单位向量场 V_ν：

$$V_\nu := -\frac{\left((h\circ\varsigma)^{-1}\right)_*\mathcal{V}_\nu}{\|((h\circ\varsigma)^{-1})_*\mathcal{V}_\nu\|_g}.$$

显然，向量场族 $(V_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$ 满足命题3.11 的第 (5) 项。上述第 (1)...(4) 项显然意味着，向量场 $(V_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$ 在 S_r 上的限制满足命题3.11 的第 (1)...(4) 项。最后，利用对称性 ς 的性质（引理 3.3 和事实 3.7），我们推得向量场 $(V_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$ 在 S_ℓ 上的限制也满足命题3.11 的第 (1)...(4) 项。□

对于 $\nu \in \mathbb{S}^1$，命题3.11给出的向量场 V_ν 可用于定义开曲面 $S - d$的单位切丛的一个截面。具体而言，对于 $\nu \in \mathbb{S}^1$，我们令

$$S_{\ell,\nu} = \left\{\left(m, V_\nu(m)\right) \mid m \in S_l\right\} \subset T^1S_\ell = U_\ell,$$

$$S_{r,\nu} = \left\{\left(m, V_\nu(m)\right) \mid m \in S_r\right\} \subset T^1S_r = U_r.$$

and

$$S_\nu = S_{\ell,\nu} \sqcup S_{r,\nu}.$$

根据构造，$S_{r,\ \nu}$ 是单位切丛 U_r的一个截面。此外，根据命题3.11的第(4)项，对于每个 $m \in S_r$，映射 $\nu \mapsto V_\nu(m)$ 定义了从 $\mathbb{S}^1$ 到 $T^1_mS_r$的一个同胚。因此，我们可以定义映射

$$\begin{array}{ccc} U_r = T^1S_r & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ (m, v) & \longmapsto & \text{the unique } \nu \text{ such that } v = V_\nu(m), \end{array}$$

该映射是 U_r 到圆上的一个纤维化，其纤维为曲面 $\{S_{r,\ \nu}\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$。类似地， U_ℓ 到圆上也存在一个纤维化，其纤维为曲面 $\{S_{\ell,\ \nu}\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$。回想一下，对于 S中的每条定向测地线（或测地线弧） e，我们用 $\tilde{e}^+$ 表示 e 到 $U = T^1S$的典范提升，用 $\tilde{e}^-$ 表示方向相反的测地线 e^{-1}的典范提升。向量场 $(V_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$ 经过特意选取，使得提升某条定向测地线 a_ℓ，b_ℓ，a_r，b_r，c_ℓ，c_r，d 的测地流 X^t 的轨道包含于某个截面 S_ν 中，其中 $\nu \in \mathbb{S}^1$。更确切地说，由命题3.11的第(1)项和第(2)项可立即得到：

推论 3.16。

- 闭提升测地线 $\tilde{a}^+_\ell$ 和 $\tilde{a}^+_r$ 包含在曲面 S_0中。• 闭提升测地线 $\tilde{b}^+_\ell$ 和 $\tilde{b}^+_r$ 包含在曲面 $S_{\frac{3\pi}{2}}$ 中。• 测地线弧 $\tilde{c}^+_\ell$ 和 $\tilde{c}^+_r$ 包含在 S_0 中（因此，闭提升测地线$\tilde{c}^+$ 包含在 U中 S_0 的拓扑闭包 S_0 内）。

3.4. 截面的闭包$S_{\ell,\ \nu}$ 和$S_{r,\ \nu}$。 将曲面 S 分解为$S_\ell \sqcup d \sqcup S_r$，进而得到单位切丛 U的分解 $U_\ell \sqcup T \sqcup U_r$。在上一小节中，我们定义了单位切丛 U_ℓ 和 U_r上的截面族$\{S_{\ell,\ \nu}\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$和$\{S_{r,\ \nu}\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$。我们已经知道，这些截面无法沿环面 T 拼接起来，从而得到单位切丛 U的全局截面，因为该丛不可平凡化。接下来，我们的任务是精确理解截面$\{S_{\ell,\ \nu}\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$和$\{S_{r,\ \nu}\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$趋近环面 T时的行为。这将分为以下两个步骤。首先，我们将从纯粹的拓扑视角考察这些截面，并描述其闭包与环面 T 的交集（命题 3.17）。其次，我们将从微分视角研究这些截面，并证明趋近环面 T 时，它们的切平面表现良好（命题3.21）。

对于 $\theta_0 \in \mathbb{S}^1$，我们将用 p_{θ_0} 表示坐标为 $(0,\ \theta_0)$ 的点，其中所用坐标系为环带 A 上的 $(\rho,\ \theta)$ 坐标系。注意， p_{θ_0} 是测地线 d上的一个点；因此，$U = T^1S$ 在 p_{θ_0} 上方的纤维包含于环面 $T = \pi^{-1}(d)$中。我们用 $\widetilde{d}^+$ （分别用 $\widetilde{d}^-$）表示 U 上的测地流轨道，该轨道投影到定向测地线 d （分别为 d^{-1}）上。我们将证明以下结论：

命题 3.17。 对于每个 $\nu \in \mathbb{S}^1$，曲面 $S_\nu = S_{\ell,\ \nu} \sqcup S_{r,\ \nu}$ 在$U = T^1S$ 中的闭包 S_ν 是一个带边界的紧致拓扑曲面，其两个边界分支$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$恰好是提升测地线 d^+ 和 d^-。

然而，上述紧致拓扑曲面 S_ν 与$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$环面 T 的交集并不只有提升测地线$\widetilde{\ }$ d^+ 和 d^-。在命题 3.17 的证明过程中，我们将完整描述这一交集。

补充说明 3.18。 曲面 S_ν 与环面 T 的交集是以下部分的并集：

- $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$提升测地线 d^+ 和 d^-，
- 纤维 $T^1_{p_\nu}S$的弧 d^-_ν（按照纤维定向）从$\widetilde{\ }$与提升测地线 d^- 的交点延伸至与$\widetilde{\ }$提升测地线 d^+的交点，
- 纤维 $T^1_{p_{\nu+\pi}}S$的弧 d^+_ν（按照纤维定向）从与提升测地线 $\widetilde{d}^+$ 的交点延伸至与$\widetilde{\ }$提升测地线 d^-的交点。

见图 *3.4*。

命题 *3.17* 的证明。 我们关注曲面 $S_{\ell,\ \nu}$ 和 $S_{r,\ \nu}$在环面 T附近的行为，而 $U_A = T^1_{|A}U$是 U中 T的一个邻域，因此我们可以在坐标系中进行研究

$$(\rho, \theta, \varphi) : U_A \longrightarrow [-\epsilon, \epsilon] \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

在第 3.2 节中构造。回顾一下， (ρ, θ) 是环带 A上的一个坐标系，而 φ 是单位切丛 $U_A \to A$的纤维坐标。更确切地说，φ 定义如下：对于 $m \in A$ 和 $v \in T^1_m A$，则

$$\varphi(m, v) = \mathrm{Angle}\left(\partial_\theta, v\right),$$

其中角是相对于度量 g测量的，该度量为

$$g_{|A} = d\rho^2 + \cosh^2(\rho) d\theta^2.$$

由于 φ 是一个具有给定方向的角，沿纤维按照由曲面 S的定向所诱导的纤维定向移动时，它会增大。另请回忆，环面 $T = T^1_d S$ 对应于 (ρ, θ, φ) 坐标中的集合 $\{\rho = 0\}$。

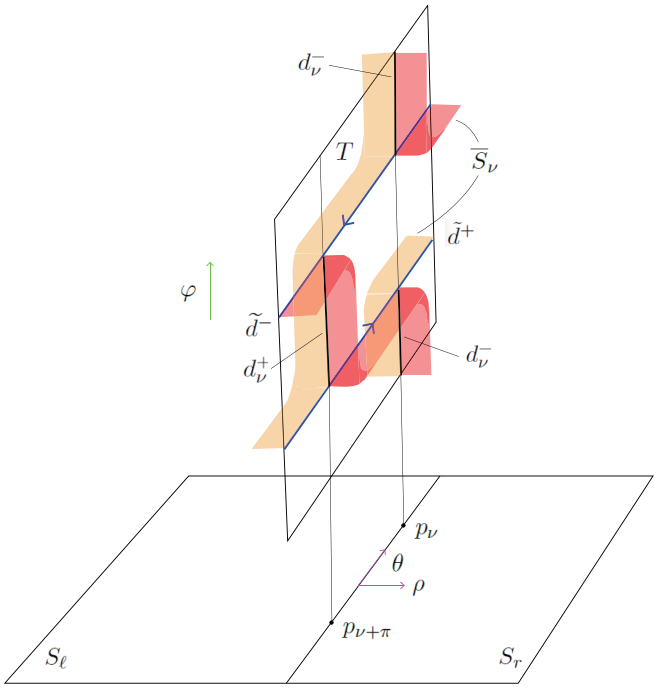


图9. 紧曲面 S_ν 在环面 T的一个邻域中的局部图像。环面 T 被表示为一个正方形。曲面 S_ν 是红色部分与橘红色部分的并。 S_ν 的边界由两条水平的提升测地线 d^- 和 d^+构成。

根据命题3.11中的公式（1），曲面 $S_{r,\nu}$ 与 $S_{\ell,\nu}$和 U_A 的交集分别对应于以下在 $A\cap S_r$ 和 $A\cap S_\ell$ 上的图像

$$S_{r,\ \nu}\cap U_A=\left\{(\rho,\ \theta,\ \varphi):\ \rho\in(0,\ \epsilon],\ \ \theta\in\mathbb{S}^1,\ \ \varphi=\text{角}(\partial_\theta,\ \rho\cos(\theta-\nu)\partial_\rho-\sin(\theta-\nu)\partial_\theta)\right\},$$

$$S_{\ell,\ \nu}\cap U_A=\left\{(\rho,\ \theta,\ \varphi):\ \rho\in[-\epsilon,\ 0),\ \ \theta\in\mathbb{S}^1,\ \ \varphi=\text{角}\,(\partial_\theta,\ -\rho\cos(\theta-\nu)\partial_\rho+\sin(\theta-\nu)\partial_\theta)\right\}.$$

现在观察到该角

$$\text{Angle}\,(\partial_\theta,\rho\cos(\theta-\nu)\partial_\rho-\sin(\theta-\nu)\partial_\theta)$$

当 $\rho\to0^+$时，其行为如下。当 $\rho\to0^+$ 和 $\theta\not\to\nu,\nu+\pi$, 时，它趋于：

$$\begin{cases}\pi & \text{when } \theta\in(\nu,\nu+\pi) \pmod{2\pi}\\ 0 & \text{when } \theta\in(\nu-\pi,\nu) \pmod{2\pi}\end{cases}$$

当 $\rho\to0^+$ 和 $\theta\to\nu$时，它在整个线段 $[-\pi,\ 0]$ (模 2π) 上累积。当$\rho\to0^+$，$\theta\to\nu+\pi$时，它在整个线段 $[0,\ \pi]$ (模 2π) 上累积。这给出了 $S_{r,\ \nu}$ 在 $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ 坐标系中的闭包 $S_{r,\ \nu}$ 的如下描述：

$$\begin{aligned}\overline{S}_{r,\nu}-S_{r,\nu}\ =\ &(\{0\}\times\{\nu\}\times[-\pi,0])\cup(\{0\}\times[\nu,\nu+\pi]\times\{\pi\})\\ &\cup(\{0\}\times\{\nu+\pi\}\times[0,\pi])\cup(\{0\}\times[\nu+\pi,\nu+2\pi]\times\{0\})\,.\end{aligned}$$

现在，回想一下，$p_{\theta_0}\in d$ 是曲面 S 上坐标为 $(\rho,\ \theta)=(0,\ \theta_0)$ 的点，因此，U 中位于 p_{θ_0} 上方的纤维对应于圆 $\{0\}\times\{\theta_0\}\times\mathbb{S}^1$。还要回想一下，测地线 d^+ 和 d^- 分别对应于闭曲线 $\{\rho=0,\ \ \varphi=0\}$ 和 $\{\rho=0,\ \ \varphi=\pi\}$。因此，

(1) 集合 $\{0\}\times\{\nu\}\times[-\pi,\ 0]$ 是点 p_ν 上方的纤维弧，随着增大，它从测地线 d^- 上的点 $(0,\ \nu,\ -\pi)$ 延伸至测地线 d^+ 上的点 $(0,\ \nu,\ 0)$；我们将此弧记为 d^-_ν；

~(2) 集合 $\{0\}\times[\nu,\nu+\pi]\times\{\pi\}$ 是测地线 d^- 的弧，随着 θ 增大，它从纤维 p_ν 上的点$(0,\nu,\pi)$ 延伸至纤维 $p_{\nu+\pi}$ 上的点 $(0,\nu+\pi,\pi)$[2]；(3) 集合 $\{0\}\times\{\nu+\pi\}\times[0,\pi]$ 是点 $p_{\nu+\pi}$ 上方的纤维弧，随着 ~ ~增大，它从测地线 d^+ 上的点 $(0,\nu+\pi,0)$ 延伸至测地线 d^- 上的点 $(0,\nu+\pi,\pi)$；我们将此弧记为 d^+_ν；~(4) $(\{0\}\times[\nu+\pi,\nu]\times\{0\})$ 是测地线 d^+ 的弧，随着 θ 增大，它从纤维 $p_{\nu+\pi}$ 上的点 $(0,\nu+\pi,0)$延伸至纤维 p_ν 上的点 $(0,\nu,0)$。

因此，$S_{r,\ \nu}$ 的闭包是一个带边界的拓扑曲面，其边界从拓扑视角来看如图 10 所示。

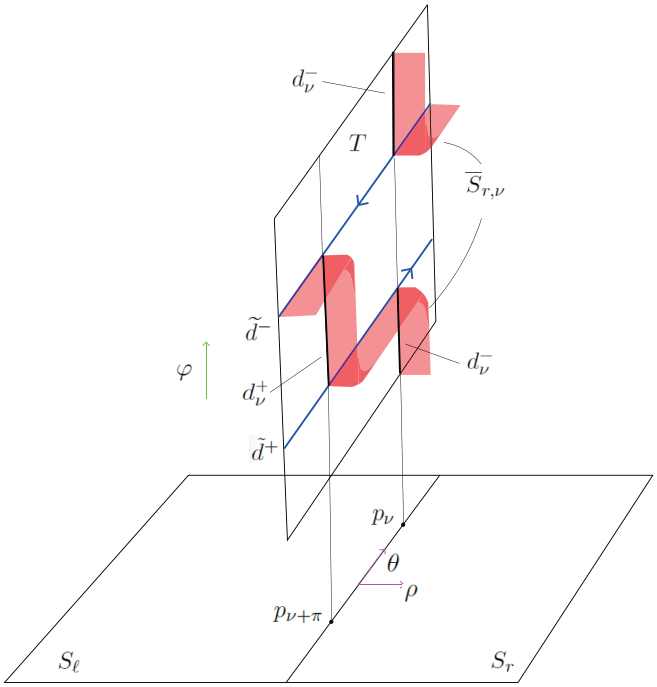


图 10. 环面 T邻域中的带边界曲面 $S_{r,\ \nu}$ ¯

类似地，角

$$\mathrm{Angle}\left(\partial_\theta, -\rho\cos(\theta-\nu)\partial_\rho+\sin(\theta-\nu)\partial_\theta\right)$$

其行为如下。当 $\rho\to 0^-$ 和 $\rho \nearrow \nu,\nu+\pi,$ 时，它趋于

$$\begin{cases} 0 & \text{when } \theta\in(\nu,\nu+\pi) \mod 2\pi \\ \pi & \text{when } \theta\in(\nu+\pi,\nu+2\pi) \mod 2\pi \end{cases}$$

当 $\rho\to 0^-$ 和 $\theta\to\nu$时，它在整个线段 $[-\pi,\ 0]$ 上模 2π 累积。当 $\rho\to 0^-$ 和 $\theta\to\nu+\pi$ 时，它在整个线段 $[0,\ \pi]$ (上模 2π) 累积。

As 因此，曲面 $S_{\ell,\nu}$ 的闭包 $S_{\ell,\nu}$ 具有如下描述

在 e $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ 坐标系:

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\ell,\nu}-S_{\ell,\nu} \ =\ & (\{0\}\times\{\nu\}\times[-\pi,0])\cup(\{0\}\times[\nu,\nu+\pi]\times\{0\}) \\ & \cup(\{0\}\times\{\nu+\pi\}\times[0,\pi])\cup(\{0\}\times[\nu+\pi,\nu+2\pi]\times\{\pi\})\,.\end{aligned}$$

这意味着 $S_{\ell,\nu}-\overline{S}_{\ell,\nu}$ 是以下部分的并集

[2]注意：使 θ 递增的定向与 $\tilde{d}^-$ 作为测地流轨道时的动力学定向相反。

(1) 点 p_ν 上方纤维的弧 d^-_ν，它从测地线 d^- 上的点 $(0,\nu,-\pi)$ 延伸至测地线 d^+ 上的点 $(0,\nu,0)$，其中 φ 递增；(2) 测地线 d^+ 的弧，它从 p_ν 的纤维上的点 $(0,\nu,0)$ 延伸至 $p_{\nu+\pi}$ 的纤维上的点 $(0,\nu+\pi,0)$，其中 θ 递增；(3) 点 $p_{\nu+\pi}$ 上方纤维的弧 d^+_ν，它从测地线 d^+ 上的点 $(0,\nu+\pi,0)$ 延伸至测地线 d^- 上的点 $(0,\nu+\pi,\pi)$，其中 φ 递增；(4) 测地线 d^- 的弧，它从 $p_{\nu+\pi}$ 的纤维上的点 $(0,\nu+\pi,\pi)$ 延伸至 p_ν 的纤维上的点 $(0,\nu,\pi)$，其中 θ 递增。

因此，曲面$S_{\ell,\ \nu}$的闭包$S_{\ell,\ \nu}$是一个带边界的拓扑曲面，其边界从拓扑视角来看如图11所示。

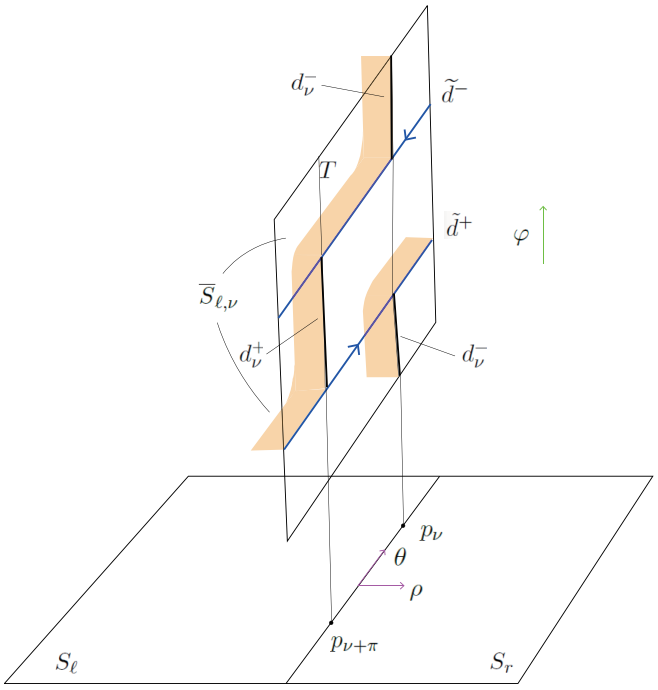


图11。环面 T邻域中的带边界曲面$S_{\ell,\ \nu}$

注意，包含在$S_{\ell,\ \nu}$ 边界中的两条纤维弧 d^-_ν 和 d^+_ν，与包含在$S_{r,\ \nu}$边界中的纤维弧完全相同。另一方面，测地线 d^- 和 d^+ 中包含在$S_{\ell,\ \nu}$ 边界内的弧，不同于包含在$S_{r,\ \nu}$边界内的弧。由此可知，$S_\nu = S_{\ell,\ \nu} \cup S_{r,\ \nu}$是一个拓扑曲面，其边界分支恰好是两条提升测地线 d^+和 d^-；此外，S_ν 与环面 T 的交集恰如补充说明 3.18 中所述。参见图 3.4。□

作为命题 3.17 的推论，如果我们能将两条测地线 d^+ 和 d^- 各自压缩为一个点，那么每个 S_ν 都会变成一个闭曲面。这表明 Dehn-Fried 手术或许能将 S_ν 变成一个闭曲面，而手术对象是 d^+ 和 d^-。为了更好地理解这一点，我们需要爆破 d^+ 和 d^-，并研究爆破流形中曲面 $S_{\ell,\ \nu}$ 和 $S_{r,\ \nu}$ 的提升。

我们将沿着两条提升测地线 d^+ 和 d^- 进行爆破（见第2.1小节），所得的带边界 3-流形记为 U。我们将 $N_{\tilde{d}^-}$（分别为 $N_{\tilde{d}^+}$）记为 U 中对应于 d^-（分别为 d^+）的边界分支。回想一下，$N_{\tilde{d}^\pm}$ 自然同构于 $\tilde{d}^\pm$ 的射影化法丛 $\mathbb{P}^+(TM/\mathbb{R}X)_{|\gamma}$。

~ ~非紧曲面 $S_\nu = S_{\ell,\nu} \sqcup S_{r,\nu}$ 包含于 $U\backslash(d^+ \cup d^-)$ 中；因此，它在 U 中同胚提升为 ^ — ^。然而，紧致拓扑曲面 S_ν 未必能提升到 U。我们将 S_ν 在 U 中的提升的闭包记为 S_ν 。我们的目标是证明 S_ν 是一个带边界的紧曲面，并了解它的边界（当然，它包含于 $N_{\tilde{d}^-} \cup N_{\tilde{d}^+}$ 中）。为此，我们需要在边界环面 $N_{\tilde{d}^\pm}$ 的邻域内为 U 选取一些显式坐标。

回想一下，提升测地线 ~ d^+ 对应于曲线 $(\rho = 0,\ \theta \in \mathbb{S}^1,\ \varphi = 0)$ 在 $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ 坐标系中。因此，当 η 为较小的正数时， d^+ 的一个管状邻域可由 $(\theta,\ \varphi,\ \rho) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}_\eta$ 参数化，其中

$$\mathbb{D}_\eta = \{(\varphi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \rho^2 + \varphi^2 \leqslant \eta^2\}.$$

注意， $(\partial_\theta,\ \partial_\varphi,\ \partial_\rho)$ 是与 U的定向相符的正向标架（这一点很重要）。根据^爆破流形 U的定义，通过考虑 $(\varphi,\ \rho)$-平面上的极坐标，可以得到 U 中 $N_{\tilde{d}^\pm}$^邻域上的一个坐标系。具体而言，令$(\tau^+,\ \psi^+) \in [0,\ \eta) \times \mathbb{S}^1$ 定义为

$$(\varphi, \rho) = (\tau^+ \cos\psi^+, \tau^+ \sin\psi^+)$$

于是， $(\theta,\ \tau^+,\ \psi^+) \in \mathbb{S}^1 \times [0,\ \eta) \times \mathbb{S}^1$ 是 $\widehat{U}$中 $N_{\tilde{d}^+}$ 邻域上的一个坐标系。特别地， $(\theta,\ \psi^+) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 是 $N_{\tilde{d}^+}$ 上的一个坐标系，而 $(\partial_\theta,\ \partial_{\psi^+})$ 是 $N_{\tilde{d}^+}$中的一个正向标架。

同样，提升测地线 $\tilde{d}^-$ 在坐标系 (ρ, θ, φ) 中对应于曲线 $(\rho = 0, \theta \in \mathbb{S}^1, \varphi = \pi)$ ，因此，通过设定，我们得到坐标系 $(\theta, \tau^-, \psi^-) \in \mathbb{S}^1 \times [0, \eta) \times \mathbb{S}^1$，它是 $\widehat{U}$中 $N_{\tilde{d}^-}$ 邻域上的坐标系

$$(\varphi, \rho) = (\pi + \tau^- \cos\psi^-, \tau^- \sin\psi^-).$$

特别地， $(\theta, \psi^-) \in (\mathbb{S}^1)^2$ 是 $N_{\tilde{d}^-}$ 上的坐标系，而 $(\partial_\theta, \partial_{\psi^+})$ 是 $N_{\tilde{d}^+}$中的正向标架。

T坐标 $(\theta, \psi^\pm)$ 使我们能够确定 $N_{\tilde{d}^\pm}$的一些特定同调类 :

记号 3.19。我们记:

- μ^+ 表示 $H_1(N_{\tilde{d}^+}, \mathbb{Z})$ 中由 ∂_{ψ^+}定向的曲线 $(\theta = 常数)$ 的同调类，
- λ^+ 表示 $H_1(N_{\tilde{d}^+}, \mathbb{Z})$ 中由 ∂_θ定向的曲线 $(\psi^+ = 常数)$ 的同调类，
- μ^- 表示 $H_1(N_{\tilde{d}^-}, \mathbb{Z})$ 中由 $-\partial_{\psi^-}$ 定向的曲线 $(\theta =$ 常数 $)$ 的同调类，
- λ^- 表示 $H_1(N_{\tilde{d}^-}, \mathbb{Z})$ 中由 $-\partial_\theta$ 定向的曲线 $(\psi^- = 常数)$ 的同调类,

类 $\mu^\pm$ 和 $\lambda^\pm$ 具有一些自然的解释。回顾一下，我们已经在环面 $N_{\tilde{d}^\pm}$ 上定义了一个典范定向子午线和一个典范定向经线（见定义2.3和2.8）。

引理3.20。 $\mu^\pm$ 和 $\lambda^\pm$ 分别是环面 $N_{\tilde{d}^\pm}$的典范定向子午线和典范定向经线。

证明。关于 $\mu^\pm$ 的陈述直接由定义2.3、上面对 $\mu^\pm$ 的定义，以及提升测地线 $\tilde{d}^\pm$ 的动力学定向按照 $\pm\partial_\theta$指向这一事实得出。

为了证明 $\lambda^\pm$ 是典范经线，我们注意到度量g 是不变的，测地线 d以及坐标 φ 的定义在坐标 θ平移下是不变的。因此，测地流以及提升测地线 $\tilde{d}^\pm$ 的局部稳定流形也必定在 θ平移下保持不变。由此可知，与 $\tilde{d}^\pm$ 的局部稳定流形对应的射影化法丛 $N_{\tilde{d}^\pm}$ 的截面必定是

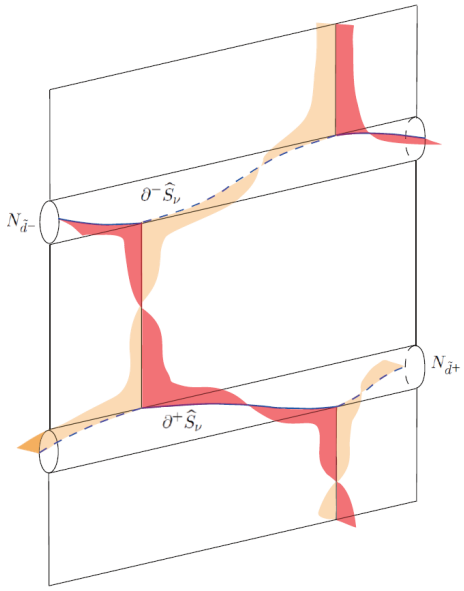


图12。环面 T 在 U 中的提升附近的曲面 S_ν 。

在 $(\theta,\ \psi^\pm)$ 坐标系[3]中形如 $(\theta = \text{常数})$ 的圆。换言之， $N_{\tilde{d}^\pm}$ 的典范经线是水平圆 $\theta =$ 常数的同调，至多相差一个定向。要检验定向是否一致，只需回想轨道 $\tilde{d}^\pm$ 的动力学定向由向量场 $\pm\partial_\theta$给出。□

下面的论述保证拓扑紧曲面 S_ν 实际上在其边界 $d^- \cup d^+$附近是可微的，并描述了沿边界的切平面的行为：

命题3.21。 对于每个 $\nu \in \mathbb{S}^1$，曲面 S_ν 在 $\widehat{U}$ 中的提升的闭包 $\widehat{S}_\nu$ 是一个带边界的紧（拓扑）曲面。 S_ν 的边界由简单闭曲线构成

$$\partial^+ \widehat{S}_\nu := \left\{\psi^+ = \theta - \nu + \pi\right\} \quad on\ the\ torus \quad N_{\tilde{d}^+}$$

以及简单闭曲线

$$\partial^- \widehat{S}_\nu := \left\{\psi^- = \theta - \nu\right\} \quad on\ the\ torus \quad N_{\tilde{d}^-}.$$

参见图 *3.4*。

推论3.22。 若将曲线 $\partial^+ S_\nu$ 的定向取为使 θ 递增的方向，并将曲线 $\partial^- S_\nu$ 的定向取为使 θ 递减的方向，则

$$\left[\partial^\pm \widehat{S}_\nu\right] = \mu^\pm + \lambda^\pm \ in\ H_1(N_{\tilde{d}^+}, \mathbb{Z}).$$

证明。 这可直接由曲线 $\mu^\pm, \lambda^\pm$ 的定义（见记号3.19），以及命题3.21给出的曲线方程 $(\psi^+ = \theta - \nu + \pi, \psi^- = \theta - \nu)$ 得出。□

命题*3.21*的证明。回忆一下，在 $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ 坐标系中：

[3]写出法向费米坐标系 (ρ, θ, φ) 中测地流导数的显式公式（见引理3.23的证明），便可看出，与局部稳定流形（分别为不稳定流形）相对应的截面是圆 $(\theta = -\frac{\pi}{4}$ 模 $\pi)$（分别为 $(\theta = \frac{\pi}{4}$ 模 $\pi)$）。

- 在环带 A上，曲面$S_{r,\ \nu}$ 由方程定义

$$\varphi = \operatorname{Angle}\left(\partial_\theta, \rho\cos(\theta-\nu)\partial_\rho - \sin(\theta-\nu)\partial_\theta\right) \tag{2}$$

其中，有向角是相对于度量 $g = d\rho^2 + \cosh^2(\rho)d\theta$ 测量的 [2].

- 提升测地线 $\widetilde{\quad}$ d^+ 是曲线 $\{(\rho,\ \theta,\ \varphi) \mid \rho = 0,\ \varphi = 0\}$，而交集$\widetilde{S}_{r,\ \nu} \cap d^+$ 是弧

$$\{(\rho,\theta,\varphi) \mid \rho = 0,\, \nu+\pi \leqslant \theta \leqslant \nu+2\pi,\, \varphi = 0\}.$$

方程 (2) 可以改写为：

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{\cosh\rho\cdot\sin(\theta-\nu)}{\sqrt{\rho^2\cos^2(\theta-\nu)+\cosh^2\rho\sin^2(\theta-\nu)}} \\ \sin\varphi = -\dfrac{\rho\cos(\theta-\nu)}{\sqrt{\rho^2\cos^2(\theta-\nu)+\cosh^2\rho\sin^2(\theta-\nu)}} \end{cases}$$

W我们先考虑 $\theta-\nu \in (\pi,\ 2\pi)$ 的情形。将上面的两个等式线性化在$\rho \approx 0$ ，$\varphi \approx 0$ 对于 $\theta-\nu \in (\pi,\ 2\pi)$，我们得到：

$$\begin{cases} 1 = -\frac{\sin(\theta-\nu)}{|\sin(\theta-\nu)|} = 1 \\ \varphi = -\rho\dfrac{\cos(\theta-\nu)}{|\sin(\theta-\nu)|} = \rho\dfrac{\cos(\theta-\nu)}{\sin(\theta-\nu)} \end{cases}$$

或者等价地

$$\rho\cos(\theta-\nu) - \varphi\sin(\theta-\nu) = 0.$$

在 $(\theta,\ \tau^+,\ \psi^+)$ 坐标中，上述方程可写为

$$\tau^+\sin(\psi^+)\cos(\theta-\nu) - \tau^+\cos(\psi^+)\sin(\theta-\nu) = 0,$$

这等价于

$$\sin(\psi^+ - (\theta-\nu)) = 0,$$

也就是说 $\psi^+ = \theta-\nu$模 π.但是 $\theta-\nu \in (\pi,\ 2\pi)$且 $\psi^+ \in [0,\ \pi]$（因为 $\rho \geqslant 0$且 $\rho = \tau^+$正弦(ψ^+)），所以 $\psi^+ = \theta-\nu-\pi$。因此，$S_{r,\ \nu}$在 $\widehat{U}$中的提升的闭包描绘出曲线：

$$\psi^+ = \theta-\nu+\pi, \quad \nu+\pi \leqslant \theta \leqslant \nu+2\pi$$

在环面 $N_{\widetilde{d^+}}$ 上。

我们对 S_ν 的左侧部分 $S_{\ell,\ \nu}$ 进行类似的计算，该部分由以下方程给出：

$$\varphi = \operatorname{Angle}\left(\partial_\theta, -\rho\cos(\theta-\nu)\partial_\rho + \sin(\theta-\nu)\partial_\theta\right) \tag{3}$$

$\widetilde{\ }$，其边界沿弧 $\{\rho = 0,\ \nu \leqslant \theta \leqslant \nu+\pi,\ \varphi = 0\}$与 d^+ 相交。方程ı(3) 可改写为：

$$\cos\varphi = \frac{\cosh\rho\cdot\sin(\theta-\nu)}{\sqrt{\rho^2\cos^2(\theta-\nu)+\cosh^2\rho\sin^2(\theta-\nu)}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\rho\cos(\theta-\nu)}{\sqrt{\rho^2\cos^2(\theta-\nu)+\cosh^2\rho\sin^2(\theta-\nu)}}.$$

在 $\rho \approx 0$、$\varphi \approx 0$ 处对上述两个等式进行线性化，对于 $\theta-\nu \in (0,\ \pi)$，我们得到：

$$\begin{cases} 1 = \frac{\sin(\theta-\nu}{|\sin\theta-\nu)|} = 1 \\ \varphi = \rho\dfrac{\cos(\theta-\nu)}{|\sin(\theta-\nu)|} = \rho\dfrac{\cos(\theta-\nu)}{\sin(\theta-\nu)} \end{cases}$$

As f $\widehat{\quad}$对于曲面 $S_{r,\ \nu}$可知，$S_{\ell,\ \nu}$ 在 U 中的提升的闭包绘制出曲线 e

$$\psi^+ = \theta-\nu+\pi, \quad \nu \leqslant \theta \leqslant \nu+\pi$$

在环面 $N_{\tilde{d}^+}$上。

总之，截面 $S_\nu = S_{\ell,\nu} \cup S_{d,\nu}$ 在 U 中的提升的闭包 S_ν 描绘出闭曲线

$$\psi^+ = \theta - \nu + \pi$$

在环面 $N_{\tilde{d}^+}$上。

类似地，如果我们将曲面 S_ν（或其提升）在 d^-中的点 $(0, \theta, \pi)$ 附近线性化，就得到

$$-\varphi + \pi = -\rho \frac{\cos(\theta - \nu)}{\sin(\theta - \nu)},$$

也就是说，

$$\rho \cos(\theta - \nu) - (\varphi - \pi)\sin(\theta - \nu) = 0.$$

在 (θ, τ^-, ψ^-) 坐标中，上述方程写作

$$-\tau^- \cos(\psi^-)\sin(\theta - \nu) + \tau^- \sin(\psi^-)\cos(\theta - \nu) = 0,$$

这等价于

$$\sin(\psi^- - \theta + \nu) = 0,$$

与前述情形类似的分析表明，$\psi^- = \theta - \nu$。这意味着，曲面 S_ν 在 M 中的提升的闭包 $\widehat{S}_\nu$ 画出曲线

$$\psi^- = \theta - \nu$$

位于环面 $N_{\tilde{d}^-}$ 上。 □

3.5. 将测地流转化为纤维化流形上的阿诺索夫流。回忆一下$\widehat{\widetilde{U}}$，U 是由单位切丛 U 经$\widehat{\widetilde{}}$对提升测地线 d^- 和 d^+进行爆破后得到的带边界的三维流形。U 的边界分支是环面$N_{\tilde{d}^-}$和 $N_{\tilde{d}^+}$。根据命题3.21和推论3.22，曲线 $(\partial^\pm \widehat{S}_\nu)_{\nu \in \mathbb{S}^1}$是环面 $N_{\tilde{d}^\pm}$ 的圆纤维化的纤维。这些纤维（赋予适当的定向后）属于同调类 $\mu^\pm + \lambda^\pm \in H_1(N_{\tilde{d}^\pm}, \mathbb{Z})$ 其中 $\mu^\pm$ 和$\lambda^\pm$ 分别是环面 $N_{\tilde{d}^\pm}$ 的典范子午线和典范经线。

另请回忆，X^t 表示单位切丛 U上的测地流。我们用 X 表示向量场 X 在爆破流形 U上的提升$\widehat{X}$。回忆一下，X 在 M 的两个边界分支 $N_{\tilde{d}^\pm}$ 上的限制$\widehat{X}$，是由 X 的导数诱导的（通过将 $N_{\tilde{d}^\pm}$ 识别为沿 $\tilde{d}^\pm$的射影化法丛）。

引理3.23. 向量场 X 的轨道与环面 $N_{\tilde{d}^\pm}$上的曲线族 $(\partial^\pm \widehat{S}_\nu)_{\nu \in \mathbb{S}^1}$ 拓扑横截。

证明. 我们先讨论环面 $N_{\tilde{d}^+}$的情形，环面 $N_{\tilde{d}^-}$ 的情形类似。先回忆一下，提升测地线 d^+ 对应于(ρ, θ, φ) 坐标系中的曲线 $\rho = \varphi = 0$。由于 ρ、θ和 φ 不过是沿 d^+的正规费米坐标，测地流及其沿这些测地线的导数作用如下（例如参见 [24,命题2.3.7]:

$$X^t(\theta, 0, 0) = (\theta + t, 0, 0) \quad \text{and} \quad DX^t_{(\theta_0,0,0)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_\theta \\ \partial_\rho \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\theta \\ \partial_\rho \\ \partial_\varphi \end{pmatrix}.$$

现在，回想一下，环面 $N_{\tilde{d}^+}$ 由坐标系 (θ, ψ^+) 参数化，其中ψ^+定义为 $(\varphi, \rho) = (\sqrt{\varphi^2 + \tau^2}\cos\ \psi^+, \sqrt{\varphi^2 + \tau^2}\sin\ \psi^+)$。因此，流 X 在环面 $N_{\tilde{d}^+}$ 上的作用可写为

$$\widehat{X}^t(\theta, \psi^+) = \left(\theta + t, \arctan \frac{\cosh t \sin \psi^+ + \sinh t \cos \psi^+}{\sinh t \sin \psi^+ + \cosh t \cos \psi^+} \bmod \pi\right).$$

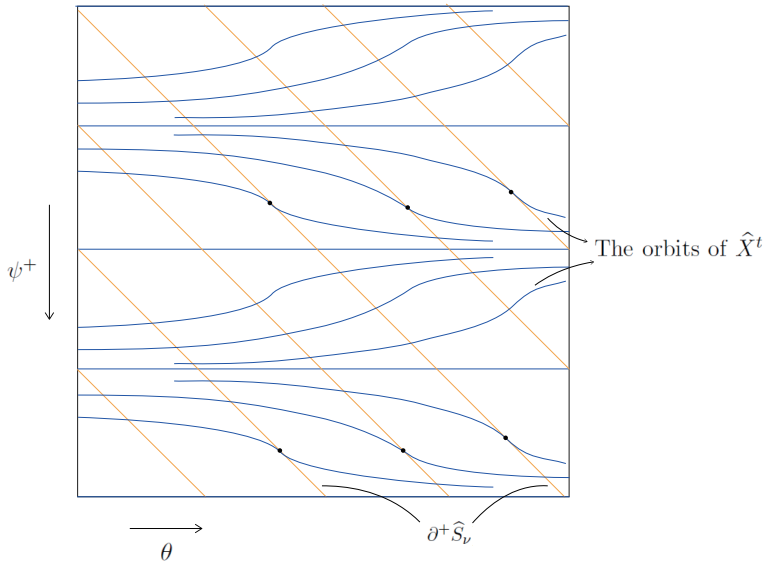


图13. 环面 $T_{\tilde{d}^+}$ 上的流 $\widehat{X}^t$ 的轨道（蓝色）和曲线 $(\partial^+\widehat{S}_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$（黄色）

由此可知，若将坐标 $\theta\in\mathbb{S}^1=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}$上的提升记为 $\tilde{\theta}$，那么 $\widehat{X}^t$ 的轨道是如下形式的图像：

$$\psi^+\left(\tilde{\theta}\right)=\arctan\left(\frac{\cosh\left(\tilde{\theta}\right)\sin\left(\psi_0^+\right)+\sinh\left(\tilde{\theta}\right)\cos\left(\psi_0^+\right)}{\sinh\left(\tilde{\theta}\right)\sin\left(\psi_0^+\right)+\cosh\left(\tilde{\theta}\right)\cos\left(\psi_0^+\right)}\right)\bmod\pi.$$

上面函数的导数为

$$\frac{d\psi^+}{d\tilde{\theta}}\left(\tilde{\theta}\right)=\frac{\cos\left(2\psi_0^+\right)}{\cosh\left(2\tilde{\theta}\right)+\sinh\left(2\tilde{\theta}\right)\sin\left(2\psi_0^+\right)}.$$

容易验证，上述等式的右边不超过 1（要么为正且最大值等于 1，要么为负且最小值等于 -1））。这意味着，在 (θ,ψ^+) 坐标中，向量场 $\widehat{X}$ 的轨道是斜率至多为 1 的图像。现在回想一下，根据命题3.21，曲线 $(\partial^+S_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$ 在 (θ,ψ^+) 坐标中是斜率等于 1 的常数圆。引理得证。图3.5展示了环面 $T_{\tilde{d}^+}$ 上的流 $\widehat{X}^t$ 的轨道和曲线 $(\partial^+\widehat{S}_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$。□

注记3.24。 $\widehat{X}^t$ 的轨道与$\partial^+\widehat{S}_\nu$拓扑横截，但与这些曲线相切，因为轨道的最大斜率恰好等于 1。见图3.5。因此，我们恰好得到了所需的性质，没有任何安全余量。

记号 3.25。 我们将通过把 U 中的每条曲线$\partial^\pm\widehat{S}_\nu$、 $\nu\in\mathbb{S}^1$压缩为一个点而得到的闭定向三维流形记为 U。

引理 3.23 保证， U 上由流 $\widehat{X}^t$ 的轨道构成的定向一维叶状结构投影到 U 后，得到 U 上一个连续的定向一维叶状结构。

记号3.26。 我们将 U 上一个连续的无奇点向量场记为 X；该向量场正向切于由 $\widehat{X}^t$的轨道投影得到的定向一维叶状结构。

命题3.27。 向量场 $\mathcal{X}$ 由测地向量场 X 经对提升测地线 d^+ 进行指数为 $+1$ 的 *Dehn-Fried* 手术以及指数为 $+1$

˜对提升测地线 d^+进行 *Dehn-Fried* 手术得到。特别地，$\mathcal{X}$ 与一个传递阿诺索夫向量场轨道等价。

证明。X 的定义恰好是由 X 经过对提升测地线 $\tilde{d}^{\pm}$ 进行若干 Dehn-Fried 手术（见第2.2小节）得到的向量场，其中我们使用引理3.23来确保被压缩的曲线与膨胀流的轨道横截，这正是该构造所要求的。Dehn-Fried 手术的指标由推论3.22给出。Shannon 已证明，这种 Dehn-Fried 手术的结果与一个传递阿诺索夫向量场轨道等价（[21]）。□

记号3.28。

- 我们将 U 中作为曲线 $\partial^{\pm}\widehat{S}_{\nu}$投影的点记为 $r_{\nu}^{\pm}$。• 我们将 U 中作为环面 $N_{\tilde{d}^{\pm}}$投影的曲线记为 $\mathrm{d}^{\pm}$ 。我们的构造意味着，d^- 和 d^+ 是 X 的两个周期轨道。• 我们将 $\left(\mathrm{U}-\mathrm{d}^{\pm},\right.$ $\left.\mathrm{X}_{\mid \mathscr{U}-\mathscr{d}^{\pm}}\right)$ 与$\left(U-\tilde{d}^{\pm},\ X_{|U-\tilde{d}^{\pm}}\right)$之间的自然识别记为 i。⁀• 我们将曲面 S_{ν}在 U 中的投影记为 S_{ν} 。• 我们将弧 $d_{\nu}^{\pm}$在 U 中的投影记为 $\mathrm{d}_{\nu}^{\pm}$，并令 $\mathrm{d}_{\nu}:=\mathrm{d}_{\nu}^{-}\cup\mathrm{d}_{\nu}^{+}$。

命题 3.29。 对于每个 $\nu\in\mathbb{S}^1$，$\mathcal{S}_{\nu}$ 都是一个闭的（即 紧致且无边界）亏格为二的曲面，而 $\mathscr{d}_{\nu}$ 是一条经过点 r_{ν}^{-}和 r_{ν}^{+}的简单闭曲线，它将曲面 $\mathcal{S}_{\nu}$ 分成两个一次穿孔环面 $\mathcal{S}_{\ell,\ \nu}$ 和 $\mathcal{S}_{r,\ \nu}$。

下面的图 14 和图15 都试图针对给定的 $\nu\in\mathbb{S}^1$，展示曲面 S_{ν} 及其投影 S_{ν}。图 14 是对这些曲面的整体但抽象的表示。图15 展示了 U 和 U 中的局部情形，即环面 $N_{\tilde{d}^{\pm}}$ 及其投影的邻域。

证明。 固定 $\nu_0\in\mathbb{S}^1$。曲面 $\widehat{S}_{\nu_0}$ 的边界分支是曲线 $\partial^{-}\widehat{S}_{\nu_0}$和 $\partial^{+}\widehat{S}_{\nu_0}$。对于 $\nu\neq\nu_0$，曲面 $\widehat{S}_{\nu_0}$ 与曲线 $\partial^{\pm}\widehat{S}_{\nu}$ 不相交。根据定义，流形 U 是将每条曲线 $\partial^{\pm}\widehat{S}_{\nu}$ （ $\nu\in\mathbb{S}^1$）压缩为一个点后，由 $\widehat{U}$得到的。因此，将曲面 $\widehat{S}_{\nu_0}$的两个边界分支$\partial^{-}\widehat{S}_{\nu_0}$，$\partial^{+}\widehat{S}_{\nu_0}$ 各自压缩为一个点后，就得到曲面 S_{ν_0} 。

^现在，曲面S_{ν_0} 是通过将两个一次穿孔环面$S_{\ell,\ \nu_0}$ 与$S_{r,\ \nu_0}$^在上一小节所述并^表示于图 3.4）的$S_{\nu_0}\cap T$ 的邻域上粘合而得到的。由此可知，S_{ν_0} 是一个具有两个边界分支的连通可定向二亏格曲面，即微分同胚于一个闭可定向二亏格曲面减去两个开圆盘。作为进一步的推论，S_{ν_0} 同胚于一个闭的（即紧致且无边界的）二亏格曲面。见图14。

根据定义， $d_{\nu_0}^{-}$ 和 $d_{\nu_0}^{+}$ 是曲面 S_{ν_0}上两条互不相交的弧（见补充说明 3.18）。这两条弧的端点位于测地线$\tilde{d}^{\pm}$上，但其内部与这些测地线不相交。因此， $d_{\nu_0}^{-}$ 和 $d_{\nu_0}^{+}$ 同胚提升为 $\widehat{U}$中的两条互不相交的弧^ $d_{\nu_0}^{-}$和^ $d_{\nu_0}^{+}$，它们的端点位于环面 $N_{\tilde{d}^{\pm}}$^上，内部则与这些环面不相交。由命题3.21中曲线 $\partial^{-}S_{\nu_0}$和 $\partial^{+}\widehat{S}_{\nu_0}$ 的方程可知，弧^ $d_{\nu_0}^{-}$和^ $d_{\nu_0}^{+}$ 都连接曲线 $\partial^{-}\widehat{S}_{\nu_0}$与曲线 $\partial^{+}\widehat{S}_{\nu_0}$。因此，^ $d_{\nu_0}^{-}$ 和^ $d_{\nu_0}^{+}$ 的投影 $\mathrm{d}_{\nu_0}^{-}$ 和 $\mathrm{d}_{\nu_0}^{+}$ 是两条内部互不相交的弧，它们在曲面 S_{ν_0}中连接点 $\mathrm{r}_{\nu_0}^{-}$ 与点 $\mathrm{r}_{\nu_0}^{+}$ 。于是，$\mathrm{d}_{\nu_0}=\mathrm{d}_{\nu_0}^{-}\cup\mathrm{d}_{\nu_0}^{+}$ 的并是 S_{ν_0} 中的一条简单闭曲线，经过点 $\mathrm{r}_{\nu_0}^{-}$至点 $\mathrm{r}_{\nu_0}^{+}$。这条简单闭曲线将 S_{ν_0} 分成两个一次穿孔环面，

^ ^ ^ ^；这是因为它在 U 中的提升 $\mathrm{d}_{\nu_0}^{-}\cup\mathrm{d}_{\nu_0}^{+}\cup\partial^{-}S_{\nu_0}\cup\partial^{+}S_{\nu_0}$ 将曲面 S_{ν_0} 的提升 S_{ν_0} 分成两个一次穿孔环面S_{ℓ,ν_0} 和S_{r,ν_0}，且后者同胚投影到 U 中。再参见图14。□

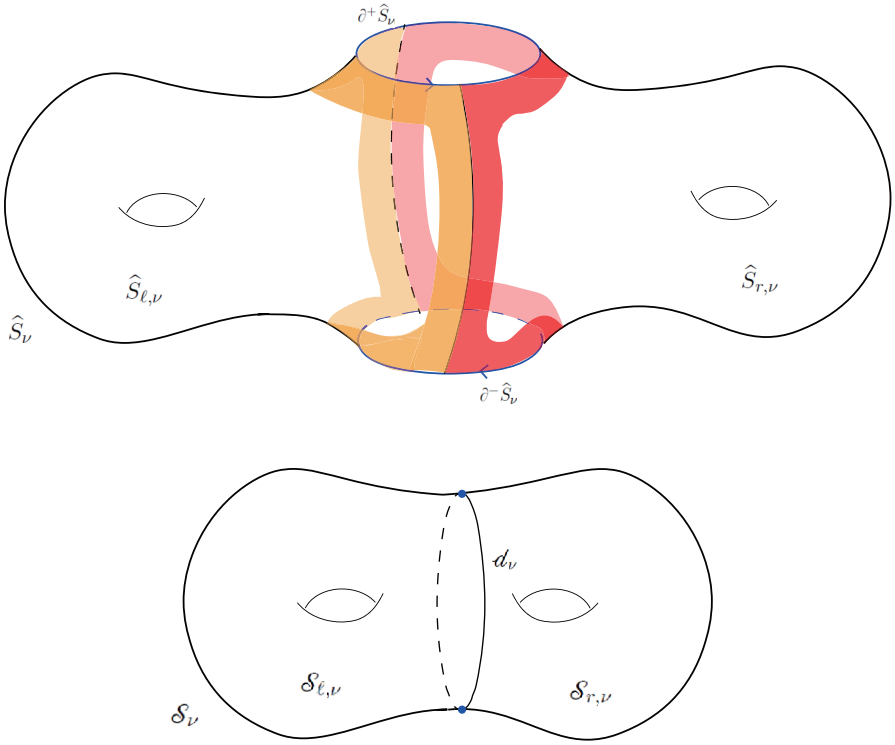


图14. 曲面 S_ν 及其投影 S_ν

命题3.30。 曲面 $(\mathcal{S}_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$ 是$p:\mathcal{U}\to\mathbb{S}^1$的纤维化的纤维。

证明。 曲面 $(S_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$ 是 U 上余维一叶状结构的叶。该叶状结构的所有叶都是闭且可定向的，并且 U 也可定向，因此该叶状结构是一个纤维化。□

3.6. **某些轨道及其稳定流形相对于纤维化的位置**。 我们的下一个任务是证明，阿诺索夫流 X^t 有许多水平周期轨道，即，包含在纤维化 $p:U\to\mathbb{S}^1$的某些纤维中的周期轨道，并计算这些周期轨道的局部稳定流形相对于纤维化的扭转数（参见第2.3节）。

Pro命题 3.31. 阿诺索夫流 $\mathcal{X}^t$ 的以下周期轨道是水平的：

- $a_\ell:=h(\tilde{a}_\ell^+)$ 和 $a_r:=h(\tilde{a}_r^+)$ 包含在纤维 $\mathcal{S}_0$中。• $b_\ell:=h(\tilde{b}_\ell^+)$ 和 $b_r:=h(\tilde{b}_r^+)$ 包含在纤维 $\mathcal{S}_{\frac{3\pi}{2}}$ 中。

此外，所有这些轨道的局部稳定流形相对于纤维化p 都是水平的（见定义 *2.10*）。

证明。 对于所有轨道，论证都类似。我们讨论 a_r 的情形。

根据推论 3.16，提升测地线 $\tilde{a_r}^+$ 包含于 $S_0-\pi^{-1}(d)$ 中。因此 $h(\tilde{a_r}^+)=a_r$ 包含于 $i(S_0-\tilde{d}^\pm)=S_0-d^\pm$ 中。

为了研究该轨道的局部稳定流形的位置，我们考虑射影化法丛 $N_{\tilde{a}_r^+}$ 在 U 中的三个截面：

- 截面$\sigma_{W^s_{\mathrm{loc}}}$ 由稳定方向定义，• 截面 σ_{S_0} 由与曲面 S_0相切的方向定义，• 截面 σ_{Fiber} 由单位切丛 U的纤维方向定义。

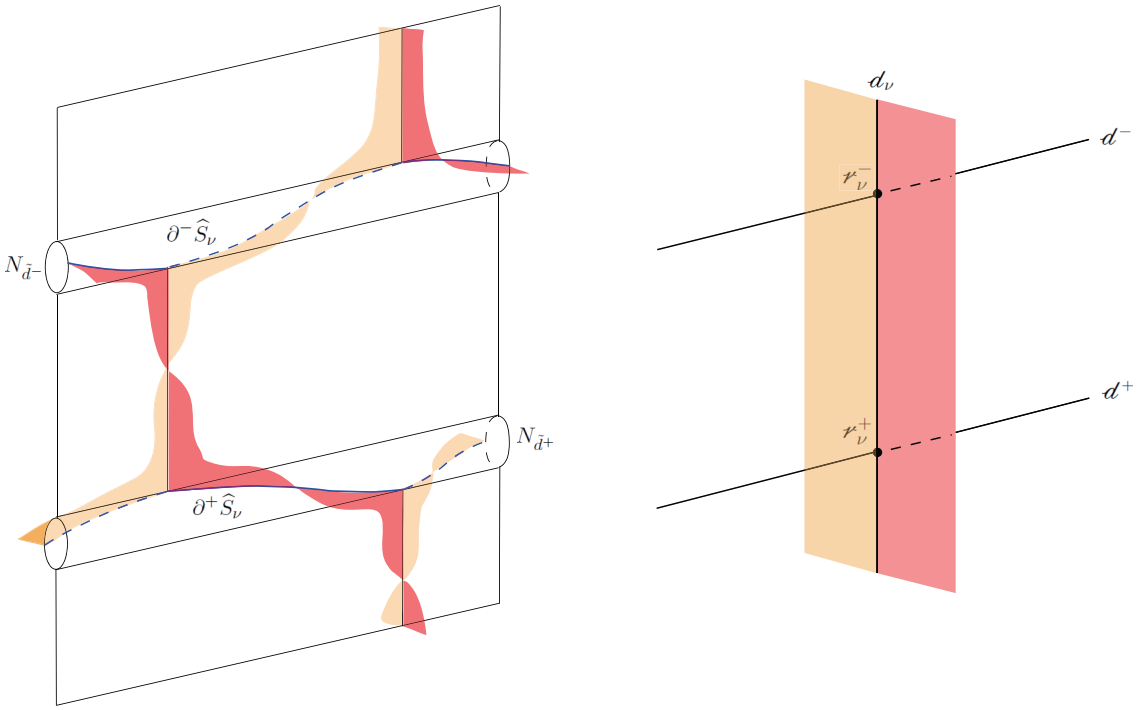


图15. 曲面 S_ν、环面 $N_{\tilde{d}^-}, N_{\tilde{d}^+}$、曲线 $\partial^- S_\nu, \partial^+ S_\nu$在$\mathcal{U}$中。这些对象中的一部分在 U 中的投影：曲面 S_ν、轨道 d^-, d^+、曲线 d_ν；点 r_ν^-, r_ν^+。

根据构造，曲面 S_0 是 $S - d$上单位切丛的一个截面。特别地， S_0 横截于单位切丛的纤维。另一方面，众所周知， X^t 的轨道的局部稳定流形横截于单位切丛的纤维。因此， $W^s_{\mathrm{loc}}(\tilde{a_r}^+, X^t)$ 也横截于单位切丛的纤维。这意味着$\sigma_{W^s_{\mathrm{loc}}(\widetilde{a_r}^+)}$ 与$\sigma_{S_{r,0}}$ 都不与 σ_{Fiber}相交。因此， $\sigma_{W^s_{\mathrm{loc}}(\widetilde{a_r}^+)}$ 与$\sigma_{S_{r,0}}$ 的同调交必为零。根据定义，这意味着

$$\mathrm{Twist}_{\widetilde{a_r}^+}\left(W^s_{\mathrm{loc}}\left(\tilde{a_r}^+, X^t\right), S_0\right) = 0.$$

将所有对象沿 i 推移后，可得

$$\mathrm{Twist}_{a_r}\left(W^s_{\mathrm{loc}}\left(a_r, \mathcal{X}^t\right), \mathcal{S}_0\right) = 0.$$

换言之，局部稳定流形 $W^s_{\mathrm{loc}}(a_r, X^t)$ 是水平的。 □

周期轨道 $c = i(\tilde{c}^+)$ 的情形要微妙得多。

命题 3.32. 流 $\mathcal{X}^t$ 的周期轨道 $c = i(\tilde{c}^+)$ 包含在曲面$\mathcal{S}_0$中。此外，c 的局部稳定流形相对于$\mathcal{S}_0$ 的扭转数为$+1$:

$$\mathrm{Twist}_c\left(W^s_{\mathrm{loc}}(c, \mathcal{X}^t), \mathcal{S}_0\right) = +1.$$

证明。 第一个断言很容易验证。事实上，回想一下，曲面$\{S_\nu\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$ 的构造意味着提升测地线 $\tilde{c}^+$ 包含在 $\overline{S_0}$ 中（见推论 3.16）。此外，轨道 $\tilde{c}^+$ 与手术后的轨道 d^+ 和 d^-不相交。因此，$c = i(\tilde{c}^+)$ 包含在 $i(S_0 - \tilde{d}^\pm) \subset \mathcal{S}_0$中。

因此，我们只需计算扭转数。使用 i^{-1} ，我们将$U = T^1 S$中的所有对象映射到:

$$\mathrm{Twist}_{c,\mathcal{U}}\left(W^s_{\mathrm{loc}}(c, \mathcal{X}^t), \mathcal{S}_0\right) = \mathrm{Twist}_{\tilde{c}^+, U}\left(W^s_{\mathrm{loc}}(\tilde{c}^+, X^t), \overline{S_0}\right).$$

现在，我们只需计算整数 $\mathrm{Twist}_{\tilde{c}^+}\left(W^s_{\mathrm{loc}}(\tilde{c}^+,\ X^t),\ S_0\right)$。根据定义（见定义 2.10），该整数等于交数 $\mathrm{Int}(\sigma_{W^s_{\mathrm{loc}}},\sigma_{S_0})$，其中$\sigma_{W^s_{\mathrm{loc}}}$ 和σ_{S_0} 是射影化法丛$N_{\tilde{c}^+}=\mathbb{P}^+(TM/\mathbb{R}X)_{|\tilde{c}^+}$的某些动力定向截面。更准确地说，$\sigma_{W^s_{\mathrm{loc}}}$是沿着 $\tilde{c}^+$ 由弱稳定平面定义的两个相反截面之一，而σ_{S_0} 是沿着 $\tilde{c}^+$由曲面$S_{r,\ 0}$ 的切平面定义的两个相反截面之一。

为了计算 $\mathrm{Int}(\sigma_{W^s_{\mathrm{loc}}},\sigma_{S_0})$，我们引入 $N_{\tilde{c}^+}$的另一个截面：记 σ_{Fiber}为对应于单位切丛 $U\to S$的定向纤维方向的截面。我们已经使用过这样一个经典事实：测地流 X^t 的弱稳定方向处处与 U的纤维横截。换言之，截面 σ_{Fiber}和 $\sigma_{W^s_{\mathrm{loc}}}$不相交。特别地，它们的同调交 $\mathrm{Int}(\sigma_{W_{\mathrm{loc}}},\sigma_{\mathrm{Fiber}})$等于 0，因此

$$\mathrm{Int}(\sigma_{W^s_{\mathrm{loc}}},\sigma_{\overline{S}_0})=\mathrm{Int}(\sigma_{\mathrm{Fiber}},\sigma_{\overline{S}_0}).$$

所以我们只需计算 $\mathrm{Int}(\sigma_{\mathrm{Fiber}},\sigma_{S_0})$。

为此，我们首先回顾一下，按构造，$S_0-T=S_0$ 是单位切丛 $U-T=T^1(S-d)\to S-d$的一个截面。这意味着，在 $S-d$上，曲面 S_0 从不与纤维相切。等价地，截面 σ_{Fiber} 和σ_{S_0} 的唯一可能交点必定位于测地线 d上的点。现在回想一下，测地线 c 和 d 在两个点 p 和 q处相交。我们将 p 和q 在 U 中的提升分别记为 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$，其中后者属于提升测地线 $\tilde{c}$。于是，截面 σ_{Fiber} 和σ_{S_0} 只能在 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$处相交。注意到这已经意味着

$$\left|\mathrm{Int}(\sigma_{\mathrm{Fiber}},\sigma_{\overline{S}_0})\right|\leqslant 2.$$

为了更加精确，我们需要考虑定向。

回想一下，根据命题 3.17 的证明，曲面$S_{r,\ 0}$ 的边界 $\partial S_{r,\ 0}$ 可以分解为四条弧：一条提升测地线 d^+的弧，一条提升测地线 d^-的弧，一条位于 $p=p_0$ 上方的纤维弧，以及一条位于 $q=p_\pi$ 上方的纤维弧（见图 10）。前两条弧与方向 $\mathbb{R}\partial_\theta$相切，另外两条弧则与方向 $\mathbb{R}\partial_\varphi$相切。注意，向量 $-\partial_\theta$ 和 ∂_φ 在曲线 $\partial S_{r,\ 0}$ 上诱导相同的定向（再见图 10）。还要注意，∂_ρ 沿着 $\tilde{d}^\pm$与环面 $T=T^1_dS$ 横截，因此它沿着 $\partial S_{r,\ 0}\subset U$提升为向量场 $\tilde{\partial}_\rho$，该向量场与 S_0 相切，并与 $\partial S_{r,\ 0}$横截。

点 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 属于 $\partial S_{r,0}$ 的两条垂直弧（实际上，按照以 φ为参数的参数化，它们恰好位于这些弧的中点）。

曲面 S 赋予如下定向：$(\partial_\rho,\partial_\theta)$ 构成一个正向基。由于 $S_{r,0}$ 是单位切丛 $U_r=T^1S_r\to S_r$ 的一个截面，且 S_r 是 S的一个子曲面，因此曲面 S 的定向可以提升为 $S_{r,0}$的定向；由于 $S_{r,0}$ 是 S_0的一个子曲面，该定向又诱导出 S_0 的定向。不过请注意，S_0 的这一赋予定向并非由 S_ℓ 的定向所诱导（见图16）。

由于向量 $-\partial_\theta$ 和 ∂_φ 为曲线 $\partial S_{r,0}$诱导出相同的定向，因此可知 S_0 在 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 处的定向由有向基 $(\partial_\rho,-\partial_\varphi)$给出。在曲面 S中，测地线 c 在 p 和 q处都与 $\mathbb{R}.\partial_\rho$ 相切。此外，向量 ∂_ρ在 p处指向与 c 的定向一致的方向，而在 q处则与 c 的定向相反。由此可知，$X=\partial_\rho$ 在 $\tilde{p}$ 处，且 $X=-\partial_\rho$ 在 $\tilde{q}$处。因此，$(X,-\partial_\varphi)$是 $\tilde{p}$处 S_0 定向的正向基；而 $(-X,-\partial_\varphi)$，或等价地说，(X,∂_φ)，是 $\tilde{q}$处 S_0 定向的正向基。

曲面 S_0 诱导出 $N_{\tilde{c}^+}$ 的两个相反截面，而σ_{S_0} 可以取这两个相反截面中的任意一个。为进行计算，我们作如下选择：选取σ_{S_0}，使得对于任意点 $r\in\tilde{c}^+$，等价类 $\sigma_{S_0}(r)$ 在 $\mathbb{P}^+(T_rM/\mathbb{R}X(r))$

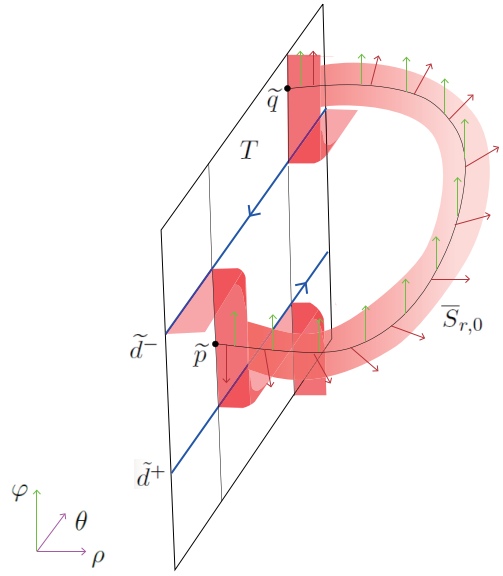


图16. 曲面 $S_{r,0}$ 的边界相对于测地线 $\tilde{d}^{\pm}$、纤维 T^1_pS 和 $T^{\pitchfork}_qS$ 以及轨道 $\tilde{c}^+$ 的位置。沿提升的测地线弧 $\tilde{c}^+ \cap S_0$ 的截面 $\sigma_{S_{r,0}}$ 和 σ_{Fiber} ,r 分别对应红色向量和绿色向量。

由向量 $v \in T_rS_0 \backslash \mathbb{R}X(r)$ 表示，其中 $(X(r),\ v)$ 是 S_0 的一个正向基。因此，

$$\sigma_{\overline{S}_0}(\tilde{p}) = [-\partial_\varphi(\tilde{p})] \text{ and } \sigma_{\overline{S}_0}(\tilde{q}) = [\partial_\varphi(\tilde{q})]\,.$$

现在回想一下，单位切丛的纤维与 $\partial\varphi$ 相切，并由这个向量场定向。因此，

$$\sigma_{\text{Fiber}}(\tilde{p}) = [\partial_\varphi(\tilde{p})] \text{ and } \sigma_{\text{Fiber}}(\tilde{q}) = [\partial_\varphi(\tilde{q})]\,.$$

因此，截面 σ_{S_0} 和 σ_{Fiber} 在 $\tilde{q}$ 重合，在 $\tilde{p}$ 则方向相反。特别地，$\tilde{q}$ 是截面 σ_{S_0} 和 σ_{Fiber} 唯一的交点（见图 16），因此

$$\left|\text{Int}\left(\sigma_{\text{Fiber}}, \sigma_{\overline{S}_0}\right)\right| = 1.$$

剩下的问题是确定 $\tilde{q}$ 处交点的符号。为此，我们在 (ρ, θ, φ) 坐标系中考察曲面 S_0。回想一下，$\tilde{q}$ 的坐标为 $(0, \pi, \frac{\pi}{2})$。根据命题3.21的证明，曲面 $S_{r,0}$ 由以下方程给出：

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{\cosh\rho \cdot \sin\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \cosh^2\rho \cdot \sin^2\theta}} \\ \sin\varphi = -\dfrac{\rho\cos\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \cosh^2\rho \cdot \sin^2\theta}} \end{cases}$$

对 $(\rho、\ \theta、\ \varphi) = (d\rho、\ \pi + d\theta、\ \frac{\pi}{2} + d\varphi)$ 关于变分 $(d\rho、-d\theta、\ d\varphi)$将第一个方程线性化：

$$-d\varphi = \frac{d\theta}{\sqrt{d\rho^2 + d\theta^2}} \quad \text{or equivalently} \quad d\theta + \sqrt{d\rho^2 + d\theta^2}d\varphi = 0.$$

这意味着，在 $\tilde{q}$ 的邻域内，

$$\sigma_{\overline{S}_0} \sim \left[-\sqrt{\rho^2 + (\theta-\pi)^2}\partial_\theta + \partial_\varphi\right].$$

另一方面，回顾

$$\sigma_{\text{Fiber}} = [\partial_\varphi]\,.$$

现在，这些截面具有动力学定向，即由 $\tilde{c}$ 的流定向所定向。在 $\tilde{q}$ 附近，这是使 ρ 递减的定向。此外，由于 $(\partial_\rho,\ \partial_\theta,\ \partial_\varphi)$ 是 U 的正向基，因此可知 $([\partial_\theta],\ [\partial_\varphi])$ 是 $TU/\mathbb{R}.X$ 的负向基（对于 $N_{\tilde{c}^+}$ 的定向）。对于提升测地线 $\tilde{c}^+$ 上一个根据该测地线的定向恰好位于 $\tilde{q}$ 之前的点，ρ 非常小且为正，因此

$$\operatorname{Angle}\left(\sigma_{\mathrm{Fiber}}, \sigma_{\overline{S}_0}\right) = \operatorname{Angle}\left([\partial_\varphi], \left[-\sqrt{\rho^2+(\theta-\pi)^2}\partial_\theta + \partial_\varphi\right]\right)$$

对于平面 $TU/\mathbb{R}.X$ 的定向为正。这意味着，当测地线经过 $\tilde{q}$ 时，该角减小，因此 $\mathrm{Int}\left(\sigma_{\mathrm{Fiber}},\ \sigma_{S_0}\right) = +1$. 我们得出 $\mathrm{Twist}\left(W^s_{\mathrm{loc}}(\mathrm{c},\ \mathrm{X}^t),\ \mathrm{S}_0\right) = +1$。□

3.7. 纤维化的单值化与定理 3.1 的证明。在前几节中，我们构造了一个闭定向三维流形 U，并在其上赋予了一个传递 Anosov 流 X^t，使得存在一个纤维化 $\mathrm{p}:\mathrm{U}\to\mathbb{S}^1$。我们的下一项任务是确定该纤维化的单值化：我们将证明它与沿曲线 $\mathrm{d}_0\subset\mathrm{S}_0=\mathrm{p}^{-1}(\{0\})$ 的右 Dehn 扭转 $\tau^{-2}_{\mathrm{d}_0}$ 同痕（关于 d_0，参见记号 3.25）。实际上，在此过程中，我们将构造 U 与 Dehn 扭转 $\tau^{-2}_{\mathrm{d}_0}$，的映射环面之间的一个相当显式的微分同胚，从而完成定理 3.1 的证明。

回想一下，纤维化 p 的纤维是曲面 $(\mathrm{S}_\nu)_{\nu\in\mathbb{S}^1}$。为了计算纤维化 $\mathrm{p}:\mathrm{U}\to\mathbb{S}^1$ 的单值化，我们将在 U 上构造一个与这些纤维横截的无奇点向量场 W。因此，纤维化的单值化的同痕类就是 W 在纤维 S_0 上的庞加莱回归映射 $\mathrm{f}_{\mathscr{W}}:\mathrm{S}_0\to\mathrm{S}_0$ 的同痕类。向量场 W 的选取将使得 $\mathrm{f}_{\mathscr{W}}$ 除曲线 d_0 的一个小环形邻域外处处为恒等映射。

在开始构造向量场 W 之前，回想一下，存在一个典范的识别

$$\imath:\left(\mathscr{U}-\mathscr{A}^{\pm},\mathscr{X}_{|\mathscr{U}-\mathscr{A}^{\pm}}\right)\longrightarrow\left(U-\tilde{d}^{\pm},X_{|U-\tilde{d}^{\pm}}\right).$$

还要回想一下，我们定义了一个坐标系 $(\rho,\ \theta,\ \varphi):U_A\to[-\epsilon,\ \epsilon]\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$，其中 $U_A=T^1_{|A}S$ 是单位切丛 $U=T^1S$ 中环面 $T=T^1_{|d}S$ 的一个邻域。现在我们选取 ϵ'，使得 $0<\epsilon'<\epsilon$，并将 U_A 中与 $-\epsilon'\leqslant\rho\leqslant\epsilon'$ 相对应的子集记作 $U_{A'}$。接着，我们将 U_A 和 U'_A 分别记作 U 中与 U_A 和 U'_A 相对应的区域，即，

$$\mathscr{U}_A=\imath\left(U_A-\left(\tilde{d}^+\cup\tilde{d}^-\right)\right)\cup(\mathscr{A}^+\cup\mathscr{A}^-),$$
$$\mathscr{U}'_A=\imath\left(U_{A'}-\left(\tilde{d}^+\cup\tilde{d}^-\right)\right)\cup(\mathscr{A}^+\cup\mathscr{A}^-).$$

引理 3.33。存在一个定义在 $\mathscr{W}$ 上的无奇点向量场 $\mathscr{U}$，满足：
(1) $\mathscr{W}$ 与纤维 $\{\mathcal{S}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$ 横截。 *(2)* 三个区域 $\mathscr{U}'_A$、$\mathscr{U}_A-\mathscr{U}'_A$ 和 $\mathscr{U}-\mathscr{U}_A$ 在 $\mathscr{W}$ 的流下保持不变。 *(3)* $\mathscr{W}$ 在 $\mathscr{U}'_A$ 以及 $\mathscr{U}-\mathscr{U}_A$ 中的每条轨道都是闭合的，并且对于每个 $\nu\in\mathbb{S}^1$，恰好在 $\mathcal{S}_\nu$ 上与一个点相交。实际上，$\mathscr{W}$ 在 $\mathscr{U}-\mathscr{U}_A$ 中的轨道，正是通过轨道等价 $\imath$ 将 $U-U_A$ 的纤维映射所得的像。
(4) 在 $U_A-U'_A=\imath^{-1}(\mathscr{U}_A-\mathscr{U}'_A)$ 上，向量场 $W:=\imath_*^{-1}\mathscr{W}$ 表示为：

$$\mathscr{W}(\rho,\theta,\varphi)=\kappa(\rho,\theta,\varphi)\left(\sin(\chi(\rho))\partial_\varphi+\cos(\chi(\rho))\partial_\theta\right),$$

其中，$\chi:[-\epsilon,\epsilon]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 是一个递增的 C^∞ 函数，满足：

$$\chi(-\epsilon)=-\frac{\pi}{2},\quad \chi|_{[-\epsilon',\epsilon']}=0,\quad \chi(\epsilon)=+\frac{\pi}{2},$$

且 κ 是一个 C^1 正因子。

引理 *3.33* 的证明。我们将在单位切丛 U上定义一个向量场 W，然后通过同胚 i 将其推送，得到 U 上的向量场 W。

设 $\chi\colon\ [-\epsilon_0,\ \epsilon_0] \to [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ 是满足第 (3) 项所需性质的函数。我们先考虑定义在 $U_A \subset U$ 上的向量场 W：

$$W(\rho,\theta,\varphi) := \sin(\chi(\rho))\partial_\varphi + \cos(\chi(\rho))\partial_\theta.$$

我们将把 W 延拓为 U 上的向量场。为此，回顾一下，环面 T 将U 分成两半 U_ℓ 和 U_r，而 U_A 是 U 中 T 的一个由纤维饱和的领邻域（见第 3.2 节）。在环面 $\{\rho = +\epsilon\} \subset U_r$ 上，向量场 W 等于 ∂_φ。由于 ∂_φ 与单位切丛 U 的纤维正向相切，我们可以在 $U_r - U_A$ 上延拓 W，令 W 为一个与纤维正向相切的非零向量场。同理，在环面 $\{\rho = -\epsilon\} \subset U_\ell$ 上，向量场 W 等于 $-\partial_\varphi$，因此它与单位切丛 U 的纤维负向相切。所以，我们可以在 $U_\ell - U_A$ 上延拓 W，令其为一个与纤维负向相切的非零向量场。现在，W 已定义在整个闭流形 U 上。

在d^+U和上，向量场 W 等于 ∂_θ。这意味着提升测地线 $\sim d^-$ 是 W的两条轨道，至多相差定向（事实上，回忆一下，d^+ 在 (ρ,θ,φ) 坐标系中表示为（$\rho = 0$, $\varphi = 0$），而$\sim d^-$ 表示为（$\rho = 0, \varphi = \pi$））。这还意味着，当我们对测地线 $\tilde{d}^\pm$进行爆破时，W 的提升在射影化法丛 $N_{\tilde{d}^\pm}$的 $\tilde{d}^\pm$ 个边界环面 $N_{\tilde{d}^\pm}$上、关于 (θ,ψ) 坐标系，也表示为 ∂_θ。特别地，W的提升与 $N_{\tilde{d}^\pm}$上的圆 $(\psi = \theta + \text{const.})$ 横截。由此可知，W 在 U 上诱导出一个向量场 W （ U 是通过将每个圆 $(\psi = \theta + \text{const.})$ 压缩为一个点得到的）。更准确地说，W 在 U 上诱导出一个半直线场，而我们选取一个与该半直线场相切的向量场 W。根据构造，$\mathsf{d}^\pm$ 是 W 的两条周期轨道，而典范识别 i：$U - \tilde{d}^\pm \to$ U $-\mathsf{d}^\pm$ 将不同于 $\tilde{d}^\pm$ 的 W的轨道映射为不同于 $\mathsf{d}^\pm$的 W 的轨道。此外，条目（4）是构造的直接结果。

根据构造，区域 U'_A和 $U - U_A$ 在向量场 W的流下是不变的，并且这些区域中 W 的所有轨道都是周期性的：

- 在 $U - U_A$上，原因是 W 的轨道是纤维（至多相差一个定向）；
- 在 U'_A上，原因是 W 等于 ∂_θ，因此轨道是圆（$\rho =$ 常数、$\varphi =$常数）。

由此可知，区域 U'_A 和 U $-\mathsf{U}'_A$ 在 W 的流下是不变的，并且这些区域中 W 的所有轨道都是周期性的。这就证明了第 (2) 和第 (3) 项。

因此，我们只需验证第 (1) 项，即向量场 W 与纤维$\{\mathsf{S}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{S}^1}$的横截性。令 $\nu \in \mathbb{S}^1$固定。

- 考虑区域 U $-\mathsf{U}_A$。向量场 W与单位切丛 $U \to S$ 在 $U - U_A$中的纤维相切。因此，W 与曲面 S_r、ν以及 S_ℓ、ν 在 $U - U_A$ 上横截（回想一下，S_r、ν 和 S_r、ν 是单位切丛的部分截面）。由此可知，W 与曲面 S_ν 在 U $-\mathsf{U}_A$上横截。
- 现在转而考虑区域 U_A。注意，W 在 ∂_ρ 方向上没有分量。这意味着，只需在每个环面 $T_{\rho_0} = \{\rho = \rho_0\}$ 内检查 W与曲面 S_ν 在 U_A 上的横截性，其中 $\rho_0 \in [-\epsilon、\ \epsilon]$。– 对于 $\rho_0 > 0$，我们注意到，向量场 W 在环面 T_{ρ_0}上的限制，沿基 $(\partial\theta、\ \partial\varphi)$指向右上象限。另一方面，由公式（2）可知，$S_\nu \cap T_{\rho_0} = S_r、_\nu \cap T_{\rho_0}$ 是一个递减函数 $\varphi = s_r、_\nu(\theta)$的图像。由此可知，$W$ 与 S_ν 在 T_{ρ_0}中横截。– 对于 $\rho_0 < 0$，论证类似，但 W 在 T_{ρ_0} 上的限制指向右下象限，而公式（3）表明，$S_\nu \cap T_{\rho_0} = S_\ell、_\nu \cap T_{\rho_0}$是一个递增函数 $\varphi = s_\ell、_\nu(\theta)$的图像，这意味着 W 再次与 S_ν 在 T_{ρ_0}中横截。

– 最后，对于 $\rho_0 = 0$，向量场 W 在环面 $T_0 = T$ 上的限制等于 ∂_θ。我们在第3.4小节中的分析表明，$(S_\nu \cap T) - (d^- \cup d^+)$ 由两条纤维弧组成，因此与 ∂_φ 相切。特别地，W 与 S_ν 在 $T_0 - \tilde{d}^{\pm}$ 中横截。

上述三项表明，向量场 W 在 $U_A - \tilde{d}^{\pm}$ 上与曲面 S_ν 横截。将所有对象经 i 推移后，可得向量场 W 在 $U_A - \mathsf{d}^{\pm}$ 上与曲面 S_ν 横截。

- 最后，向量场 W 在轨道 $\mathsf{d}^{\pm}$ 附近也与曲面 S_ν 横截，因为 S_ν 与 $\mathsf{d}^{\pm}$ 横截，并且由构造可知，$\mathsf{d}^{\pm}$ 是 W 的轨道。

因此我们已证明，向量场 W 处处与曲面 S_ν 横截。这就完成了第 (1) 项的证明以及该引理的证明。□

下文我们将记 $A_0 = U_A \cap S_0$ 与 $A_0' = U_A' \cap S_0$。显然，A_0 与 A_0' 是曲面 S_0, 中曲线 d_0 的两个领形邻域，且 $A_0' \subset A_0$。

命题 3.34. 庞加莱回归映射 $f_{\mathscr{W}}$：$\mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$ 支撑于 $\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_0'$，并且通过一个支撑于 $\mathcal{A}_0$, 的同痕与 $\tau^{-2}{}_{d_0}$，同痕，其中 τ_{d_0} 是沿曲面 $\mathcal{S}_0$ 中曲线 d_0 的左 *Dehn* 扭转。

作为直接推论，我们得到：

推论 3.35。 纤维化 $p : \mathcal{U} \to \mathbb{S}^1$ 的单值化是 *Dehn* 扭转 $\tau^{-2}{}_{d_0}$.

命题 *3.34* 的证明。引理 3.33 的第 (2) 项表明，环带 A_0 和 A_0' 在回归映射 $f_{\mathscr{W}}$ 下是不变的。第 (3) 项表明，$f_{\mathscr{W}}$ 的支撑位于 $A_0 - A_0'$ 上。

因此，我们只需分析 $f_{\mathscr{W}}$ 在 $A_0 - A_0'$ 的两个连通分支上的限制。利用同胚 i，这等价于分析向量场 W 在 $\mathsf{i}^{-1}(A_0 - A_0') \subset (S_0 \cap (U_A - U_A')$ 上的回归映射 f_W。为此，我们将使用向量场 $W = \mathsf{i}_*^{-1}\mathsf{W}$ 的显式表达式，并使用 (ρ, θ, φ)-坐标系（引理 3.33 的第 (4) 项）。

曲面 $S_0 \cap U_0$ 是环带 $A = \{(\rho, \theta) \in [-\epsilon, \epsilon] \times \mathbb{S}^1\}$ 上的图像，因此，常数 $> 0\}$ 环面 $\{\rho =$ 在环带 $S_{r,0} \cap (U_A \sqsupset U_A')$ 上诱导出一个圆叶状结构。其叶同痕于 $\partial S_{r,0}$，即 U 中 $S_{r,0}$ 的边界。在命题 3.17 的证明中对 $S_{r,0}$ 边界的描述表明，该圆叶状结构的叶属于与切于 $\xi_+ := \partial_\theta - \partial_\varphi$ 的圆相同的同伦类。

根据引理 3.33 的第 (4) 项，向量场 W 在 $U_r - U_1$ 上的限制为

$$W(\rho, \theta, \varphi) = \lambda(\rho, \theta, \varphi) \left(\partial_\theta - \frac{\sin(\chi(\rho))}{\cos(\chi(\rho)) + \sin(\chi(\rho))} \xi^+ \right).$$

这表明，W 在圆（$\rho =$ 为常数）上的回归映射（按 ξ^+ 定向）是角度为下列值的刚性旋转：

$$-2\pi \frac{\sin(\chi(\rho))}{\cos(\chi(\rho)) + \sin(\chi(\rho))}$$

当 ρ 从 ϵ' 变化到 ϵ 时，角度从 0 递减至 -2π。回顾一下，S_0 的定向定义为将 S 的定向提升到 $S_{r,0}$ 后得到的定向。该定向使得 (∂_ρ, ξ^+) 构成正向基。因此，P_W 在环带 $S_0 \cap \{\epsilon' \leqslant \rho \leqslant \epsilon\}$ 上的限制的同痕类是沿环带核心的右德恩扭转 τ^{-1}。进一步可得，W 在环带 $S_0 \cap \{\epsilon' \leqslant \rho \leqslant -\epsilon\}$ 上的限制的同痕类为 $\tau^{-1}{}_{d_0}$。

类似地，$\{\rho =$ 常数$\}$ 在环带 $S_0 \cap \{-\epsilon \leqslant \rho \leqslant -\epsilon'\} \subset S_{\ell,\,0}$ 上诱导出圆叶状结构，其叶与切于 $\xi^- := -\partial_\theta - \partial_\varphi$ 的圆同伦。记

$$W(\rho, \theta, \varphi) = \lambda(\rho, \theta, \varphi) \left(\partial_\theta - \frac{\sin(\chi(\rho))}{\cos(\chi(\rho)) - \sin(\chi(\rho))} \xi^- \right),$$

我们看到，由向量 ξ^- 定向的圆（ρ =常数）上的回归映射是旋转，角度为：

$$-2\pi\frac{\sin(\chi(\rho))}{\cos(\chi(\rho))-\sin(\chi(\rho))}.$$

当 ρ 从 $-\epsilon$ 变化到 $-\epsilon'$时，该角从 2π 减小到 0。定向 S_0 使得 (∂_ρ,ξ^-) 为正向基。由此可知，W 在环带$\{-\epsilon\leqslant\rho\leqslant-\epsilon'\}$ 上的回归映射与右 Dehn 扭转 $\tau^{-1}{}_{d_0}$ 同痕。

最后，$f_{\mathscr{W}}$ 在 A_0 中同痕于：

$$\tau_{d_0}^{-1}\circ\tau_{d_0}^{-1}=\tau_{d_0}^{-2}.$$

至此完成命题 3.34 的证明。 □

定理 *3.1* 的证明。 向量场 W 的流给出一个显式微分同胚

$$\Phi_{\mathscr{W}}:\mathscr{U}\to\mathscr{M}:=\mathcal{S}_0\times[0,2\pi]_{/(x,2\pi)\sim(f_{\mathscr{W}}(x),0)}.$$

由命题 3.34，$f_{\mathscr{W}}$ 支撑于环带 A_0, 中，并且在该环带中与 Dehn 扭转$\tau^{-2}{}_{d_0}$同痕（特别地，M 可视为 $\tau^{-2}{}_{d_0}$的映射环面）。将阿诺索夫向量场 X 沿 $\Phi_{\mathscr{W}}$推移，我们得到 M 上的一个阿诺索夫向量场 Y。根据命题 3.31 和命题 3.32，曲线 $\Phi_{\mathscr{W}}(a_\ell)$、 $\Phi_{\mathscr{W}}(a_r)$、 $\Phi_{\mathscr{W}}(b_\ell)$、 $\Phi_{\mathscr{W}}(b_r)$和 $\Phi(c)$ 是阿诺索夫向量场 Y 的周期轨道，分别包含于曲面 $S_0\times\{0\}$、$S_0\times\{0\}$、$S_0\times\{\frac{3\pi}{2}\}$、$S_0\times\{\frac{3\pi}{2}\}$和 $S_0\pitchfork\{0\}$中。命题 3.31 和命题 3.32 还保证上述前四条轨道的局部稳定流形是水平的，并且轨道 $\Phi_{\mathscr{W}}(c)$ 的局部稳定流形相对于曲面 $S_0\times\{0\}$ 的扭转数为 $+1$。

令 $\mathrm{pr}:S_0\times[0,\ 2\pi)\to S_0$为垂直投影，并将周期轨道 $\Phi_{\mathscr{W}}(a_\ell)$, $\Phi_{\mathscr{W}}(a_r)$, $\Phi_{\mathscr{W}}(b_\ell)$, $\Phi_{\mathscr{W}}(b_r)$ 和 $\Phi(c)$ 在该投影下的像分别记为 $a_{\ell,\ 0}$，$a_{r,\ 0}$，$b_{\ell,\ 0}$，$b_{r,\ 0}$，$c_0\subset S_0$。

断言 3.36。 配备曲线 $a_{\ell,\ 0}$,$a_{r,\ 0}$,$b_{\ell,\ 0}$, $b_{r,\ 0}$,c_0,d_0 的曲面 S_0与配备曲线 $a_\ell, b_\ell, a_r, b_r, c, d$ 的曲面 S微分同胚。

断言 3.36 给出一个微分同胚

$$\Psi:\mathscr{M}\to M:=S\times[0,\pi]/_{(x,2\pi)\sim(\tau_d^{-2}(x),0)}$$

使得：

– Y 在 Ψ 下的推前是 M 上的传递阿诺索夫向量场 Y；– Y 的轨道 $\Phi_{\mathscr{W}}(a_\ell)$, $\Phi_{\mathscr{W}}(a_r)$, $\Phi_{\mathscr{W}}(b_\ell)$, $\Phi_{\mathscr{W}}(b_r)$ 和 $\Phi(c)$ 在 Ψ 下的像恰为曲线 $a_\ell\times\{0\}$, $b_\ell\times\{\frac{3\pi}{2}\}$, $a_r\times\{0\}$, $b_r\times\{\frac{3\pi}{2}\}$和 $c\times\{0\}$；显然，这些曲线是阿诺索夫向量场 Y 的周期轨道；– 上述前四条轨道的局部稳定流形是水平的，并且轨道 $c\times\{0\}$ 的局部稳定流形相对于曲面 $S\times\{0\}$ 的扭转数为 $+1$,

从而完成了定理 3.1 的证明。因此我们只需证明断言 3.36。根据标准的曲面拓扑论证，只需证明曲面 S_0 上曲线 $a_{\ell,0}, a_{r,0}, b_{\ell,0}, b_{r,0}, c_0, d_0$ 的“配置”与曲面 S 上曲线$a_\ell, b_\ell, a_r, b_r, c, d$ 的“配置”相同。更确切地说，断言 3.36 可由以下事实推出：

(1) S_0 是一个闭可定向二亏格曲面；(2) d_0 是一条简单闭曲线，将 S_0 分成两个一次穿孔环面，其中一个包含曲线 $a_{\ell,0}$ 和 $b_{\ell,0}$，另一个包含曲线 $a_{r,0}$ 和 $b_{r,0}$；(3) $a_{\ell,0}$（分别地，$a_{r,0}$）与 $b_{\ell,0}$（分别地，$b_{r,0}$）横截相交于单个点，且不与 $a_{r,0}$、$b_{r,0}$ 和 c_0 （分别地，$a_{\ell,0}$、$b_{\ell,0}$ 和 c_0）相交；

(4) $b_{\ell,0}$（分别地，$b_{r,0}$）与 $a_{\ell,0}$（分别地，$a_{r,0}$）及 c_0 横截相交于单个点，且不与 $a_{r,0}$ 和 $b_{r,0}$（分别地，$a_{\ell,0}$ 和 $b_{\ell,0}$）相交；(5) c_0 与 d_0 横截相交于两点。

第 1 项和第 2 项由命题 3.29 得出。第 2 项意味着 $a_{\ell,0}$ 和 $b_{\ell,0}$ 不与 $a_{r,0}$ 和 $b_{r,0}$ 相交。回顾一下，在区域 $U - U_A$ 中，向量场 W 的轨道与单位切丛的纤维重合，且曲面 S_0 与单位切丛的曲面截面 S_0 重合。曲线 $a_{\ell,0}$ 和 $b_{\ell,0}$ 包含于此区域中。因此，曲线 $a_{\ell,0}$ 和 $b_{\ell,0}$ 分别与沿单位切丛纤维的提升测地线 $\tilde{a}_\ell$ 和 b_ℓ 在 S_0 上的投影重合，而这两条投影在单一点处横截相交。因此，$a_{\ell,0}$ 和 $b_{\ell,0}$ 在单一点处横截相交。对 $a_{r,0}$ 和 $b_{r,0}$ 应用同样的论证。类似地，c_0 包含于 U_A 中的部分与提升测地线 $\tilde{c} \subset S_0$重合。因此，$a_{\ell,0}$（分别地，$a_{r,0}$）不与 c_0, 相交，而 $b_{\ell,0}$（分别地，$a_{r,0}$）与 c_0 在单一点处横截相交。提升测地线 $\tilde{c}$ 位于 $S_0 - \tilde{d}^{\pm}$中，因此 c 位于 S_0, 中，从而 $c_0 = c$。另一方面，d_0 是 ∂S_0 在 U 中的像（通过典范识别 $i: U - \tilde{d}^{\pm} \to U - d^{\pm}$）。我们知道，$\tilde{c}$ 与 ∂S_0 横截相交于恰好两点（即点 $\tilde{p}$ 和$\tilde{q}$）。因此，c_0 和 d_0 在两点处横截相交。这就完成了第 3 项和第 4 项以及定理的证明。□

注 3.37。 前述证明的困难在于，曲面 S_0 与抽象曲面 S之间不存在自然识别。事实上，自然识别 $i^{-1}: U - d^{\pm}$ 的限制与单位切丛投影 $\pi: U \to S$ 的复合，给出了 $S_0 - d_0 \to S - d$之间的自然微分同胚。但这个微分同胚不能延拓为从 S_0 到 S的微分同胚，因为它在曲面的右半部上的限制是保向的，而在曲面的左半部上的限制是反向的。这是因为单位切丛 U 的纤维与截面 S_0 在左侧部分和右侧部分相交的方向相反（相对于 S_0的定向）。由此可知，断言 3.36 中的微分同胚不能保持所有曲线的定向（参见注 3.2）。

4. 从亏格二到任意亏格

在第 3 节中，我们构造了一个特定的纤维化流形，其纤维的亏格为二，并承载着一个传递阿诺索夫流。本节中，我们将使用覆盖技巧，推导出一个类似的结果，使纤维的亏格可以任意大。

对于 $g \geqslant 3$，令 S_g 为亏格 g 的闭定向曲面，并配备如下图 17 所示的无向简单闭曲线系统。记 τ_{a_i}、τ_{b_j}、τ_{c_k} 和 τ_{d_l} 为沿 a_i、b_j、c_k 和 d_l 在 S_g 上的左 Dehn 扭转，分别对应 $1 \leqslant i, j \leqslant g$ 和$1 \leqslant k, l \leqslant g-1$。令 $\hat{\tau}_d := \tau_{d_1}^{-2}\tau_{d_2}^{-2}\ldots, \tau_{d_{g-1}}^{-2}$。注意，由于该乘积中 Dehn 扭转的支撑两两不相交，所以乘积是交换的。

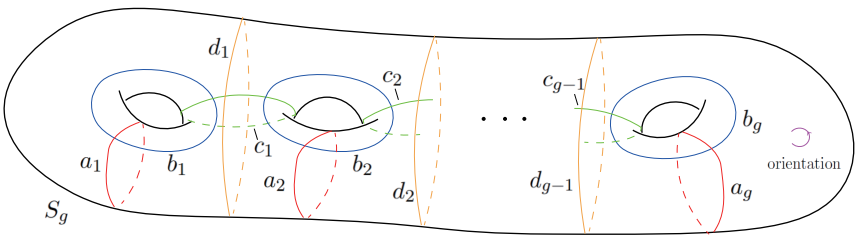


图 17. S_g 上的简单闭曲线 a_i, b_j, c_k, d_l , 对应 g。

定理 4.1。 映射环面

$$S_g \times [0, 2\pi]_{/(x,2\pi)\sim(\hat{\tau}_d(x),0)}$$

~承载一个传递 *Anosov* 流 Y，其稳定叶状结构和不稳定叶状结构均可定向。记 p：$M \to \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 为由 $S_g \times [0$ 在 $2\pi]$ 的第二个坐标上的投影所诱导的纤维化，其中 $1 \leqslant i$、$j \leqslant g$、$1 \leqslant k \leqslant g-1$，

(1) M 上的水平曲线 $a_i \times \{0\}$、$b_j \times \{\frac{3\pi}{2}\}$ 和 $c_k \times \{0\}$ 是 $\widetilde{Y}^t$ 的周期轨道；*(2)* 轨道 $a_i \times \{0\}$ 和 $b_j \times \{\frac{3\pi}{2}\}$ 的局部稳定流形相对于纤维化 p 是水平的；*(3)* 轨道 $c_k \times \{0\}$ 的局部稳定流形相对于纤维化 p 的扭转数等于 1。

4.1. **一个显式覆盖**。 对于 $g \geqslant 3$，令 S_g 为亏格 g 的闭定向曲面，其上标记了无向曲线 a_i、b_j、c_k和 d_l，其中 $1 \leqslant i$、$j \leqslant g$、$1 \leqslant k$、$l \leqslant g-1$，如图 17 所示。令 S_2 为亏格 2 的闭定向曲面，其上标记了无向曲线 a_ℓ、a_r、b_ℓ、b_r、c、d，如图 18 所示。

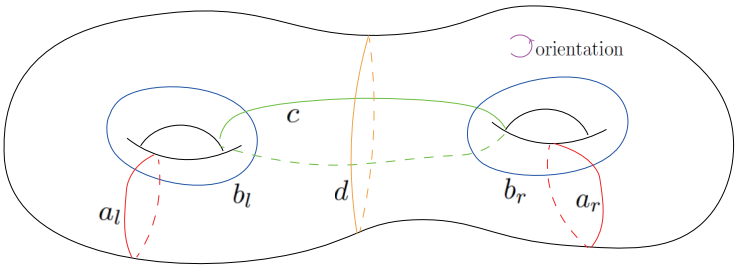
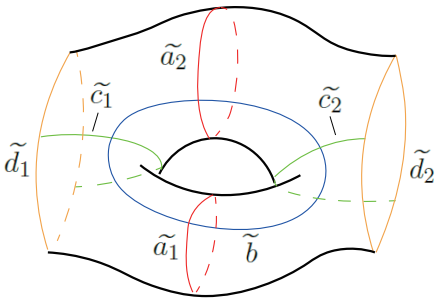


图 18. 带有标记曲线的亏格 2 曲面 S_2

命题 4.2. 对于每个 $g \geqslant 3$，都存在一个保定向覆盖映射Ψ：$S_g \to S_2$，它将：

- 曲线 a_i 映至曲线 a_ℓ，当 i 为奇数时；当 i 为偶数时，则映至曲线 a_r；
- 曲线 b_j 映至曲线 b_ℓ，当 j 为奇数时；当 j 为偶数时，则映至曲线 b_r；
- 对于每个 k，曲线 c_k 都映至曲线 c；
- 对于每个 l，曲线 d_l 都映至曲线 d。

回想一下， S_ℓ 和 S_d 分别是$S_2 - d$的左、右连通分支。令 $S_{1,\,2}$ 表示亏格为 1、具有两个边界分支的曲面，其上带有图 19 左侧所示的标记无向弧系。将曲线 $c \subset S_2$的左半部和右半部分别记为 $c_\ell = c \cap S_\ell$ 和$c_r = c \cap S_r$。



~ ~ ~图 19。$S_{1,\,2}$及带有标记的弧系 $\widetilde{a}_1$，$\widetilde{a}_2$，b，$\widetilde{c}_1$，$\widetilde{c}_2$，d_1，d_2

引理 4.3. 存在一个保向二重覆盖映射 $\iota_\ell : S_{1,2} \to \widetilde{S_\ell}$，它将 $\widetilde{a_i}$ 映到 a_ℓ，将 b 映到 b_ℓ，将 d_i 映到 d，并将 $\widetilde{c_i}$ 映到 c_ℓ。类似地，存在一个保向二重覆盖映射 $\iota_r : S_{1,2} \to S_r$，它将 $\widetilde{a_i}$ 映到 a_r，将 b 映到 b_r，将 d_i 映到 d，并将 $\widetilde{c_i}$ 映到 c_r。

证明。 覆盖映射 ι_ℓ 和 ι_r 由绕图 20 所示轴旋转π 角后得到的商映射给出。□

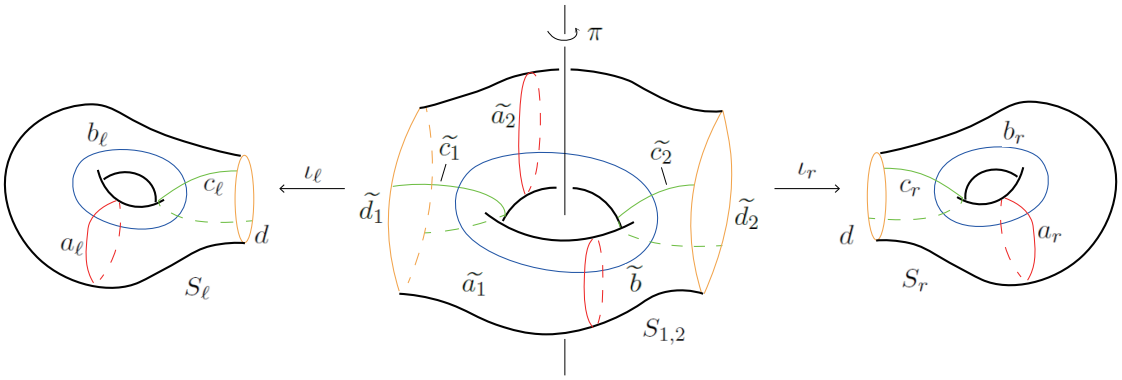


图 20. 覆盖映射 $\iota_\ell : S_{1,2} \to S_\ell$ 与 $\iota_r : S_{1,2} \to S_r$

命题 4.2 的证明。我们假设 g 为偶数。当 g 为奇数时，论证类似。覆盖映射 Ψ 给出如下。沿曲线 d_1，……，d_{g-1} 切割 S_g，我们将得到 g 个带边界曲面。将这些曲面标记为 A_1、A_2，……，A_g，其中 A_1 以 d_1 为边界，A_s 对于 $2 \leqslant s \leqslant g-1$ 以 d_{s-1} 与 d_s 为边界，而 A_g 以 d_{g-1} 为边界。Ψ 到 A_1 的限制将是把 A_1 映到 S_ℓ 的平凡一重覆盖映射。对于 $\{2, \ldots\ldots, g-1\}$ 中的偶数 s，Ψ 到 A_s 的限制将是把 A_s 映到 S_r 的二重覆盖映射 ι_r。对于 $\{2, \ldots\ldots, g-1\}$ 中的奇数 s，Ψ 到 A_s 的限制将是把 A_s 映到 S_ℓ 的二重覆盖映射 ι_ℓ。最后，Ψ 到 A_g 的限制将是把 A_g 映到 S_r 的平凡一重覆盖映射。情形 $g = 4$ 的图示见图 21。可以验证，按此方式定义的映射 Ψ 确实是一个覆盖映射。由构造，曲线 a_i、b_j、c_k、d_l 满足命题 4.2 的陈述所要求。□

4.2. **定理 4.1 的证明。**

定理 *4.1* 的证明。令 $\Psi\colon\ S_g \to S_2$ 为命题 4.2 提供的覆盖映射。左 Dehn 扭转的乘积 $\hat{\tau}_d := \tau_{d_1}^{-2}\tau_{d_2}^{-2}\cdots\tau_{d_{g-1}}^{-2}\colon\ S_g \to S_g$ 是 Dehn 扭转 $\tau_d^{-2}\colon\ S_2 \to S_2$ 在 Ψ 下的提升，即 $\Psi \circ \tau_d^{-2} = \hat{\tau}_d \circ \Psi$。由此可知，$\Psi$ 诱导出一个覆盖映射

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}\colon\ M_{S_g,\hat{\tau}_d} &\longrightarrow M_{S_2,\tau_d^{-2}} \\ (x,t) &\longmapsto (\Psi(x),t) \end{aligned}$$

其中

$$M_{S_g,\hat{\tau}_d} := S_g \times [0,2\pi]_{/(x,2\pi)\sim(\hat{\tau}_d(x),0)} \quad \text{and} \quad M_{S_2,\tau_d^{-2}} := S_2 \times [0,2\pi]_{/(x,2\pi)\sim(\tau_d^{-2}(x),0)}.$$

令 Y^t 为 $M_{S_2,\tau_d^{-2}}$ 上满足定理 3.1 所列性质的传递 Anosov 流。通过 $\widetilde{\Psi}$ 提升 Y^t，我们得到 $M_{S_g,\hat{\tau}_d}$ 上的 Anosov 流 $\widetilde{Y}^t$。接下来只需验证定理 4.1 中的条件 $(1),(2),(3)$ 成立。定向曲线 $a_i \times \{0\}, b_j \times \{\frac{3\pi}{2}\}, c_k \times \{0\}$ 是定向曲线 $a_\ell \times \{0\}$、$a_r \times \{0\}$、$b_\ell \times \{\frac{3\pi}{2}\}$、$b_r \times \{0\}$ 和 $c_k \times \{0\}$ 在 Ψ 下的提升，而后者是流 Y^t 的周期轨道。因此，$a_i \times \{0\}$，$b_j \times \{\frac{3\pi}{2}\}, c_k \times \{0\}$ 是流 $\widetilde{Y}^t$ 的周期轨道。此外，根据 Ψ 的构造,一轨道 $a_i \times \{0\}$ 和

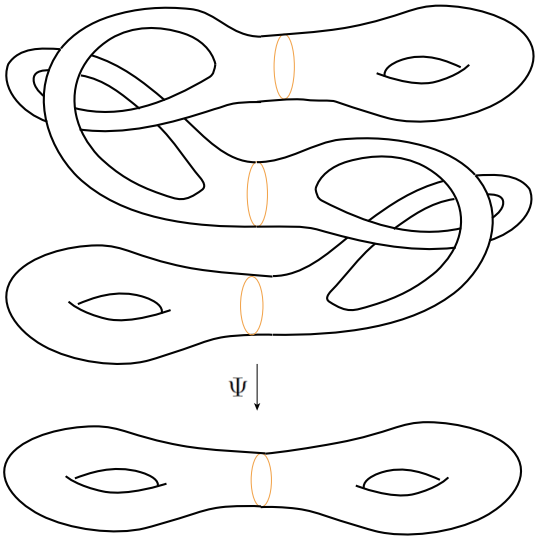


图 21. 覆盖映射 $\Psi\colon S_4 \to S_2$

$\sim c_k \times \{0\}$ 存在一个邻域，在该邻域上 Ψ 是一一映射（即在其像上是同胚）。由于扭转数是一个局部性质，这说明条件 (3) 以及条件 (2) 中关于 $a_i \times \{0\}$ 的$\widetilde{}$部分成立。根据构造，Ψ 在 $b_j \times \{\frac{3\pi}{2}\}$ 的某个邻域上是一个 2 叶或 1 叶覆盖映射（参见定理 4.2 的证明）。如果 $\widetilde{\Psi}$ 是 1 叶的，那么按照上文关于 $a_i \times \{0\}$ 和 $c_k \times \{0\}$ 的相同论证，$b_j \times \{\frac{3\pi}{2}\}$ 是水平的。如果 $\widetilde{\Psi}$ 在 $b_j \times \{\frac{3\pi}{2}\}$ 的某个邻域上是 2 叶的，那么相对于 $M_{S_g,\hat{\tau}_d}$ 上的水平纤维化，局部稳定流形的扭转数是相对于 $M_{S_{2,\tau_d^{-2}}}$ 上的水平纤维化，$b_{\ell/r} \times \{\frac{3\pi}{2}\}$ 的局部稳定流形扭转数的两倍。后者等于零，因此前者也等于零。证明完毕。□

5. 定理 1.8 的证明

定理 *1.8* 的证明。设 S_g 为亏格 g 的闭定向曲面，且$a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g,c_1,\ldots,c_{g-1},d_1,\ldots,d_{g-1}$ 为图 17 上所表示的简单闭曲线。设 τ_{a_i}、τ_{b_j}、τ_{c_k}、τ_{d_l}分别为沿曲线 a_i,b_j,c_k,d_l的左 Dehn 扭转，并设 $\hat{\tau}_d = \tau_{d_1}^{-2}\tau_{d_2}^{-2}\cdots\tau_{d_{g-1}}^{-2}$。回顾一下，我们考虑 Dehn 扭转乘积的这一族

$$\mathcal{T} := \left\{ \hat{\tau}_d^{-2}\tau_{b_1}^{q_1}\ldots\tau_{b_g}^{q_g}\tau_{c_1}^{r_1}\ldots\tau_{c_{g-1}}^{r_{g-1}}\tau_{a_1}^{p_1}\ldots\tau_{a_g}^{p_g} \right\}_{\substack{r_1,\ldots,r_{g-1}=0 \text{ or } -2 \\ q_1,\ldots,q_g\in\mathbb{Z} \\ p_1,\ldots,p_q\in\mathbb{Z}}}$$

以及由 T 中元素构成的非平凡乘积 $\varphi \in \mathrm{Homeo}^+(S_g)$。为简化记号，我们将对

$$\varphi = \sigma_1\circ\sigma_2\circ\cdots\circ\sigma_l$$

其中每个 σ_i 属于该子族

$$\mathcal{T}_0 := \{\hat{\tau}_d\} \cup \{\hat{\tau}_d\tau_{a_i}^{\pm 1}\}_{1\leqslant i\leqslant g} \cup \{\hat{\tau}_d\tau_{b_j}^{\pm 1}\}_{1\leqslant j\leqslant g} \cup \{\hat{\tau}_d\tau_{c_k}^{-2}\}_{1\leqslant k\leqslant g-1},$$

T 的，并在证明末尾说明如何得到一般情形。

根据定理 4.1，在映射环面上存在一个传递 Anosov 流 Y^t

$$M = S_g \times [0,2\pi]_{/(x,2\pi)\sim(\hat{\tau}_d(x),0)}.$$

映射环面

$$\widehat{M}=\left(\bigcup_{s=0}^{l-1}S_g\times[2s\pi,2(s+1)\pi]\right)\Big/\begin{array}{l}(x,2s\pi^-)\sim(\hat{\tau}_d(x),2s\pi^+),\ 1\leqslant s\leqslant l-1\\(x,2l\pi)\sim(\hat{\tau}_d(x),0).\end{array}$$

是 l 重覆盖 M 的自然覆盖。提升传递 Anosov 流 Y^t，我们得到定义在 $\widehat{M}$ 上的传递 Anosov 流 $\widehat{Y}^t$。令 pr 为 $S_g\times[0,\ 2\pi]$ 到 M 的投影，并令 $\widehat{}$pr 为 $S_g\times[0,\ 2l\pi]$ 到 $\widehat{M}$ 的投影。由于沿纤维化 $M\to\mathbb{S}^1$ 的 $\mathbb{S}^1-$方向取有限覆盖，不会改变包含在纤维中的周期轨道 γ 相对于该纤维化的扭转数，定理 4.1 推出：

- 对于每个 $i,\ j\in\{1,\ .....,\ g\}$，向量场 Y 的周期轨道 $\mathrm{pr}(a_i\times\{0\})$ 和 $\mathrm{pr}(b_j\times\{\frac{3\pi}{2}\})$ 提升为周期轨道

$$\hat{\mathrm{pr}}(a_i\times\{s\pi\})\text{ and }\hat{\mathrm{pr}}(b_j\times\{\tfrac{3\pi}{2}+s\pi\}),\ s\in\{1,\dots,k\},$$

$\widehat{}$向量场 Y 的轨道，且这些提升轨道的局部稳定流形相对于纤维化 $\widehat{M}\to\mathbb{S}^1$ 是水平的。

- 对于每个 $k\in\{1,\dots,g-1\}$，向量场 Y 的周期轨道 $\mathrm{pr}(c_k\times\{0\})$ 提升为周期轨道

$$\hat{\mathrm{pr}}(c_l\times\{s\pi\}),\ s\in\{1,\dots,k\},$$

$\widehat{}$向量场 Y 的周期轨道，以及这些提升轨道的局部稳定流形相对于纤维化 $\widehat{M}\to S^1$ 的扭转数，均等于 $+1$。

对于每个 $s\in\{1,\dots,l\}$，我们如下进行 Dehn–Fried 手术。

- 如果对于某个 $i\in\{1,\dots,g\}$ 和 $\omega=\pm1$ 满足 $\sigma_s=\hat{\tau}_d\tau_{a_i}^{\omega}$（分别地，如果对于某个 $j\in\{1,\dots,g\}$ 和 $\omega=\pm1$ 满足 $\hat{\tau}_d\tau_{b_j}^{\omega}$），那么我们在周期轨道 $\widehat{}\mathrm{pr}(a_i\times\{s\pi\})$（分别地，在轨道 $\widehat{}\mathrm{pr}(b_j\times\{\frac{3\pi}{2}+s\pi\})$）上进行指数为 ω 的 Dehn–Fried 手术。• 如果对于某个 k 满足 $\sigma_s=\hat{\tau}_d\tau_{c_k}^{-2}$，我们在周期轨道 $\widehat{}\mathrm{pr}(c_k\times\{s\pi\})$ 上进行指数为 $+2$ 的 Dehn–Fried 手术。

我们注意到，上述所有 Dehn-Fried 手术都满足命题 2.18 和命题 2.19 的假设：

- 由于轨道 $\widehat{}\mathrm{pr}(a_i\times\{s\pi\})$ 和 $\widehat{}\mathrm{pr}(b_j\times\{\frac{3\pi}{2}+s\pi\})$ 的局部稳定流形是水平的，因此对这些轨道进行任何 Dehn-Fried 手术都属于命题 2.18；• 由于轨道 $\widehat{}\mathrm{pr}(c_k\times\{s\pi\})$ 的局部稳定流形相对于纤维化的扭转数等于 $+1$，因此对该轨道进行指数为 $+2$ 的 Dehn-Fried 手术属于命题 2.19 的情形 1。

令 $(\widehat{M}',\hat{Y}'^t)$ 为对 $(\widehat{M},\hat{Y}^t)$ 上的每个 s 都进行上述 Dehn–Fried 手术后得到的流形和拓扑 Anosov 流。根据注记 2.22 中陈述的命题 2.20 的推广，M' 与 φ 的映射环面同胚。并且，根据 Shannon（[21]）的研究，$\hat{Y}'^t$ 与真正的传递 Anosov 流轨道等价。因此，φ 的映射环面承载一个传递 Anosov 流。这就完成了 φ 是 $\mathbb{T}_0$ 中元素的乘积时定理 1.8 的证明。

在一般情况下，若 φ 是 T 中元素 σ_1、.....、σ_l 的乘积（而非 $\mathbb{T}_0$），只需进行更多 Dehn-Fried 手术。具体而言，对于每个 s，若

$$\sigma_s=\hat{\tau}_d^{-2}\tau_{b_1}^{q_{s,1}}\dots\tau_{b_g}^{q_{s,g}}\tau_{c_1}^{r_{s,1}}\dots\tau_{c_{g-1}}^{r_{s,g-1}}\tau_{a_1}^{p_{s,1}}\dots\tau_{a_g}^{p_{s,g}},$$

那么必须对轨道 $a_i\times\{s\}$ if p_s 进行指数 $p_{s,\ i}$ Dehn-Fried 手术，对轨道 $c_i\times\{s\}$ if r_s 进行指数 $-r_{s,\ i}=2$ Dehn-Fried 手术，并对轨道 $b_i\times\{\frac{3\pi}{2}\}$ if q_s 进行指数 $q_{s,\ i}$Dehn-Fried 手术。这些轨道两两不相交，因此可以应用命题 2.20 和注记 2.22。证明的其余部分与前一种情形完全遵循相同的论证。□

6. Dehn 扭转生成 $Sp(2g,\ Z)$的有限指数子群

令 $g \geqslant 2$ 和 S_g 为亏格 g的闭连通可定向曲面。考虑曲面 S_g 上的简单闭曲线 a_1、...、a_g，b_1、.....、b_g，c_1、.....、c_{g-1}，如图 22 所示。我们为 S_g 选取定向，使得 Int $(a_i,\ b_i) = -1$。我们将沿 a_i，b_i 和 c_i的左 Dehn 扭转记为 τ_{a_i}，τ_{b_i}，τ_{c_i}。

对于 Mod(S_g) 的任意元素 f，我们将 $f \in \mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg},\ \mathbb{Z}))$ 记作 f 在 S_g 的第一同调群（系数取 $\mathbb{Z}$）上的作用（$\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg},\ \mathbb{Z})$上的辛结构由交叉形式给出）。我们将由 Dehn 扭转生成的 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg},\ \mathbb{Z}))$的子半群记作 Γ

$$\bar{\tau}_{a_1}^{\pm 1}, \ldots, \bar{\tau}_{a_g}^{\pm 1}, \bar{\tau}_{b_1}^{\pm 1}, \ldots, \bar{\tau}_{b_g}^{\pm 1}, \bar{\tau}_{c_1}^{-2}, \ldots, \bar{\tau}_{c_{g-1}}^{-2}.$$

（注意 $\bar{\tau}_{c_i}$'s 上的幂 -2）。起初，Γ 是一个子半群，但不一定是子群，因为生成元集并不对称（$\bar{\tau}_{c_1}^{-2}$是一个生成元，但 $\bar{\tau}_{c_1}^{2}$不是）。我们的目标是证明：

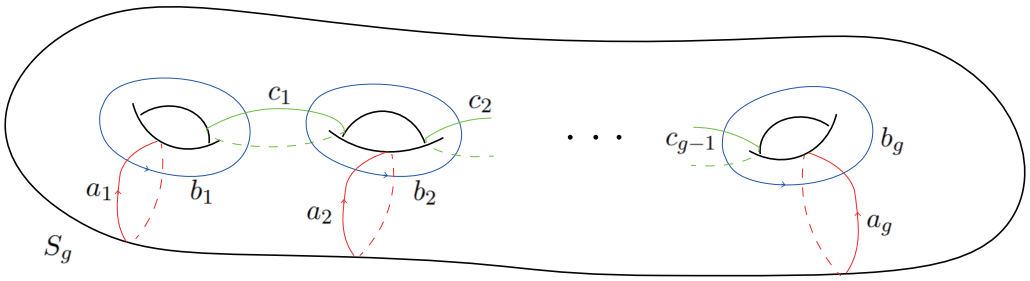


图 22. S_g上的简单闭曲线 a_1、.....、a_g、b_1、.....、b_g、c_1、.....、c_{g-1}

命题 6.1. Γ 是 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg}, \mathbb{Z}))$中的有限指数子群。

我们分两步进行：首先证明 Γ 是一个子群（而不只是一个子半群），然后证明该子群在 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg}, \mathbb{Z}))$ 中具有有限指数。

6.1. Γ **是一个子群。**

命题 6.2. 半群 Γ 实际上是 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg}, \mathbb{Z}))$的一个子群。

备注 6.3. 注意，Γ 不是 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg}, \mathbb{Z}))$的正规子群。事实上，根据定义，$\Gamma$ 包含沿简单闭曲线 a_1的 Dehn 扭转。众所周知，对于每条非分离简单闭曲线 e，都存在曲面 S_g的一个同胚 f，将 a_1映到 e，这意味着 $\bar{\tau}_e = \bar{f}\bar{\tau}_{a_1}\bar{f}^{-1}$。因此，若 Γ是正规子群，那么它将包含沿 S_g任意简单闭曲线的 Dehn 扭转。但众所周知，S_g 的映射类群由沿简单闭曲线的 Dehn 扭转生成，因此 Γ 将等于整个群 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg}, \mathbb{Z}))$，这显然不成立。事实上，由于 $\tau_{c_i}^{-2}$在 $\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, 上作用恒等，模 2 的 Γ中任意元素相对于基 $\{[a_1], [b_1], [a_2], \cdots, [a_g], [b_g]\}$都具有 diag$\{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}2, \cdots, \mathrm{M}_g\}$ 的形式，其中M_i 是一个 2×2 辛矩阵。但我们知道，$\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$中的并非所有元素都具有这种形式。

命题 *6.2* 的证明。回顾一下，根据定义，Γ 是 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg}, \mathbb{Z}))$的子半群，由 $\bar{\tau}_{a_1}^{\pm 1}, \ldots, \bar{\tau}_{a_g}^{\pm 1}$, $\bar{\tau}_{b_1}^{\pm 1}, \ldots, \bar{\tau}_{b_g}^{\pm 1}$, $\bar{\tau}_{c_1}^{-2}, \ldots, \bar{\tau}_{c_{g-1}}^{-2}$.生成。因此，为了证明 Γ是一个子群，只需证明 $\bar{\tau}_{c_i}^{2}$ 对每一个 $i \in \{1, \ldots, g-1\}$都可以表示为上述生成元的乘积。

我们从 $\bar{\tau}_{c_1}^{2}$ 的情形开始。我们考虑曲线链 c_1，b_1，a_1（见图 23）。$c_1 \cup b_1 \cup a_1$ 的一个小正则邻域的边界由两条曲线 d 和

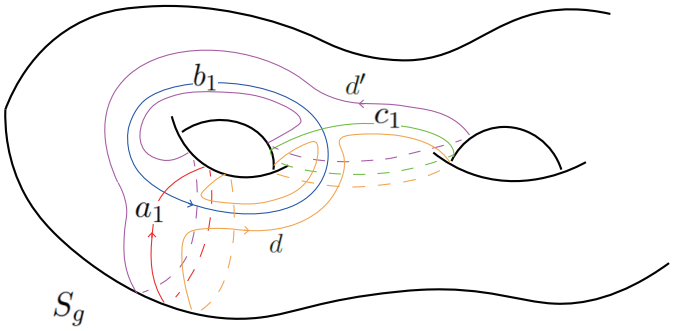


图 23. $a_1 \cup b_1 \cup c_1$ 在 S_g上的边界曲线

d'、w 此处这两条边界曲线按该邻域的边界定向（见
图3）。

Mod(S_g) 中的链关系（见 [7, 第 4.4 节1]）指出

$$\left(\tau_{c_1}^2 \tau_{b_1} \tau_{a_1}\right)^3 = \tau_d \tau_{d'}.$$

我们注意到， d 与初始曲线 a_2同伦，且 d' 与图 24 中所绘的曲线 a_2'同伦。因此，在 Mod(S_g) 中，

$$\left(\tau_{c_1}^2 \tau_{b_1} \tau_{a_1}\right)^3 = \tau_{a_2} \tau_{a_2'}.$$

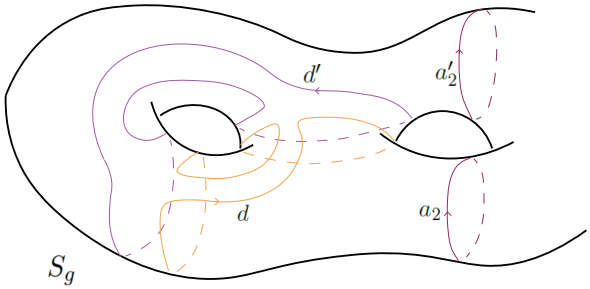


图 24。曲线 d、d' 分别与曲线 a_2、a_2' 同伦

然后我们注意到，曲线 a_2 和 a_2' 围成 S_g 的一个子曲面，因此 a_2' 与 a_2^{-1} 同调。沿一条曲线的左 Dehn 扭转不依赖于该曲线的定向，而沿两条同调曲线的 Dehn 扭转在 Sp(H$_1$(Sg、 $\mathbb{Z}$)) 中具有相同的像（例如参见 [7, 命题 6.3]）。因此，在 Sp(H$_1$(Sg、 $\mathbb{Z}$)) 中，

$$\bar{\tau}_{a_2} = \bar{\tau}_{a_2'}.$$

因此

$$\left(\bar{\tau}_{c_i}^2 \bar{\tau}_{b_i} \bar{\tau}_{a_i}\right)^3 = \tau_{a_2}^2$$

或者等价地

$$\bar{\tau}_{a_2}^2 \left(\bar{\tau}_{a_1}^{-1} \bar{\tau}_{b_1}^{-1} \bar{\tau}_{c_1}^{-2}\right)^2 \bar{\tau}_{a_1}^{-1} \bar{\tau}_{b_1}^{-1} = \bar{\tau}_{c_1}^2$$

特别地， $\bar{\tau}_{c_1}^2 \in \Gamma$ 正如所需。

$\bar{\tau}_{c_{g-1}}^2$ 的情形完全类似（将 a_1, b_1, c_1 替换为 a_g, b_g, c_{g-1}），因此它属于 Γ。

因此，我们只需考虑 $\bar{\tau}_{c_i}^2$ 在 $2 \leqslant i \leqslant g-2$的情形。与上述情形类似，我们可以得出结论，但需要稍微改变所考虑的曲线。为此，考虑曲线链 a_i， b_i， c_i （见图 25），以及围成 $c_i \cup b_i \cup a_i$ 的正则邻域的两条曲线 d， d' （见图 25）。

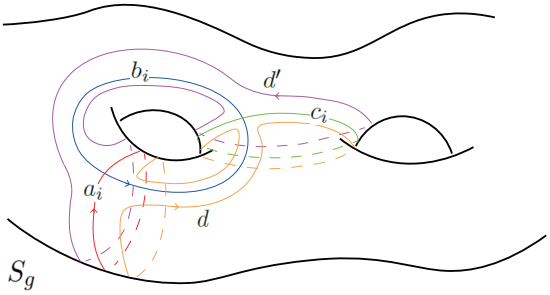


图 25。 d， d' 在 S_g 上的边界曲线

根据在 $\bar{\tau}_{c_1}^2$ 的情形中已用过的链关系（见 [7, 第 4 节 4.4.1]），我们在 $\mathrm{Mod}(S_g)$中有:

$$\left(\tau_{c_i}^2 \tau_{b_i} \tau_{a_i}\right)^3 = \tau_d \tau_{d'}.$$

接着，我们注意到曲线 d 和 d' 与图 26 中所画的曲线 a_{i+1} 和 a'_{i+1} 同伦。因此，在 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 中，

$$\left(\tau_{c_i}^2 \tau_{b_i} \tau_{a_i}\right)^3 = \tau_{a_{i+1}} \tau_{a'_{i+1}}$$

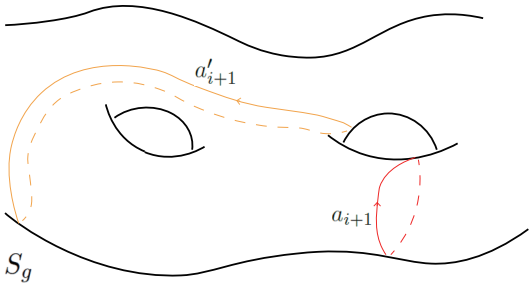


图 26。曲线曲线 d， d' 与曲线 a_{i+1}， a'_{i+1} 同伦

曲线 a_{i+1} 和 a'_{i+1} 围成一个子曲面（一个双重穿孔环面），因此在 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg},\ \mathbb{Z}))$

$$\bar{\tau}_{a_{i+1}} = \bar{\tau}_{a'_{i+1}}.$$

因此，

$$\left(\bar{\tau}_{c_i}^2 \bar{\tau}_{b_i} \bar{\tau}_{a_i}\right)^3 = \bar{\tau}_{a_{i+1}}^2,$$

或等价地，

$$\bar{\tau}_{a_{i+1}}^2 \left(\bar{\tau}_{a_i}^{-1} \bar{\tau}_{b_i}^{-1} \bar{\tau}_{c_i}^{-2}\right)^2 \bar{\tau}_{a_i}^{-1} \bar{\tau}_{b_i}^{-1} = \bar{\tau}_{c_i}^2$$

这意味着 $\bar{\tau}_{c_i}^2 \in \Gamma$。

因此我们已证明，对 $i = 1$，……，$g-1$，$\bar{\tau}_{c_i}^2 \in \Gamma$ 成立。由此可知，Γ 实际上是 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg},\ \mathbb{Z}))$ 中由 $\bar{\tau}_{a_1}^{\pm 1}$，……，$\bar{\tau}_{a_g}^{\pm 1}$，$\bar{\tau}_{b_1}^{\pm 1}$，……，$\bar{\tau}_{b_g}^{\pm 1}$，$\bar{\tau}_{c_1}^{\pm 2}$，……，$\bar{\tau}_{c_{g-1}}^{\pm 2}$. □生成的子群

6.2. Γ **具有有限指数**。回顾一下，对 $q \geqslant 2$，$\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg},\ \mathbb{Z}))$ 的层为 q 的主合同子群（记为 $\Gamma(q)$）按定义是模 p 约化同态 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg},\ \mathbb{Z})) \to \mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg},\ \mathbb{Z}/\mathrm{q}\mathbb{Z}))$ 的核。我们将证明如下

命题 6.4。 Γ 包含$\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg},\ \mathbb{Z}))$的层为 2^{2g-2} 的主合同子群。特别地， Γ 在$\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{Sg},\ \mathbb{Z}))$中具有有限指数。

一个直接的计数论证表明，， $\mathbb{Z})$) 的 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{S}_\mathrm{g}$ 的主合同子群 $\Gamma(q)$ 的指数满足

$$[\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{S}_\mathrm{g},\mathbb{Z}):\Gamma(\mathrm{q})] = |\,\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{S}_\mathrm{g},\mathbb{Z}/\mathrm{q}\mathbb{Z}))| = |\,\mathrm{Sp}(2\mathrm{g},\mathbb{Z}/\mathrm{q}\mathbb{Z}))| \leqslant |\mathrm{M}_{2\mathrm{g}}(\mathbb{Z}/\mathrm{q}\mathbb{Z})| = \mathrm{q}^{4\mathrm{g}^2}.$$

结合命题 6.4，该公式给出我们的子群 Γ 的指数的如下上界

$$[\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{S}_\mathrm{g},\mathbb{Z}):\Gamma] \leqslant 2^{8\mathrm{g}^3}.$$

注意，即使当 g 很小时，这个界也相当大（对于 $g=2$ 约为一百亿）。对主合同子群 $\Gamma(2^{2g-2})$ 的指数作更仔细的估计可得到更好的界 2^{7g^2}，但无论如何， Γ 的指数的实际值很可能远小于此类论证所给出的任何界。

命题 *6.4* 的证明。我们将用 $(e_1,\ldots,e_{2g})$ 表示 $\mathbb{Z}^{2g}$ 的典范基，并用 $E_{i,j}$ 表示 $M_{2g,2g}(\mathbb{Z})$ 中在位置 (i,j) 处为 1、其余各处为 0 的矩阵。我们选取 $([a_1],\ldots,[a_g],[b_1],\ldots,[b_g])$ 作为 $\mathrm{H}_1(\mathrm{S}_\mathrm{g},\mathbb{Z})$ 的一个基（基中元素的顺序很重要）。该基给出了 $\mathrm{H}_1(\mathrm{S}_\mathrm{g},\mathbb{Z})$ 与 $\mathbb{Z}^{2g}$ 的一个识别。注意到：

- 同调类 $[a_i]$ 等同于向量 e_i ，同调类 $[b_i]$ 等同于向量 e_{g+i}；
- $\mathrm{H}_1(\mathrm{S}_\mathrm{g},\mathbb{Z})$ 上的交叉形式等同于辛形式

$$\sum_{i=1}^{g}[e_i]^*\wedge[e_{g+i}]^*$$

在 $\mathbb{Z}^{2g}$上。该辛形式的矩阵为

$$J=\begin{pmatrix}0 & I_g\\ -I_g & 0\end{pmatrix};$$

- 群 $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{S}_\mathrm{g},\mathbb{Z}))$ 等同于群

$$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})=\{M\in\mathrm{GL}(2g,\mathbb{Z})\mid M^TJM=J\};$$

- 对任意 $q\geqslant 2$， $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathrm{S}_\mathrm{g},\mathbb{Z}))$ 的 q 层主合同子群等同于 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$的子群

$$\{M\in\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})\mid M\equiv I_{2g}\pmod q\}$$

- Dehn 扭转 $\bar{\tau}_{a_i}$、 $\bar{\tau}_{b_i}$、 $\bar{\tau}_{c_i}$ 关于基$([a_1],\ldots,[a_g],[b_1],\ldots,[b_g])$ 的矩阵分别为

$$\begin{aligned}A_i &:= I_{2g}+E_{i,g+i},\\ B_i &:= I_{2g}-E_{g+i,i},\\ C_i &:= I_{2g}-E_{i,g+i}-E_{i+1,g+i+1}+E_{i+1,g+i}+E_{i,g+i+1}.\end{aligned}$$

由于 Γ由 Dehn 扭转 $\bar{\tau}_{a_1}^{\pm1},\ldots,\bar{\tau}_{a_g}^{\pm1}$、 $\bar{\tau}_{b_1}^{\pm1},\ldots,\bar{\tau}_{b_g}^{\pm1}$和 $\bar{\tau}_{c_1}^{\pm2},\ldots,\bar{\tau}_{c_{g-1}}^{\pm2}$生成，因此 Γ 等同于由这些矩阵生成的 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 的子群

$$A_1^{\pm1},\ldots,A_g^{\pm1},\ B_1^{\pm1},\ldots,B_g^{\pm1}\text{ and }C_1^{\pm2},\ldots,C_{g-1}^{\pm2}$$

（注意 C_i 上的幂次 ±2 ；这正是我们所有麻烦的根源。）

我们将使用 Tits 在 [23]，中证明的一般性结果的一个特例，该结果依赖于 Bass、Milnor 和 Serre 此前的工作（[2]）。我们将先如实引用 Tits 的一般性陈述，然后解释如何将其具体化，以适用于我们的情形。不熟悉代数群概形语言的读者，只需理解其在我们情形下的具体化结果（推论 6.6），不必完全理解命题 6.5 的陈述。

对于每个环 B、 B 的每个理想 $\mathfrak{p}$ ，以及定义在 B 上的每个群概形 X ，记 $X^{(\mathfrak{p})}$ 为通过约化模 $\mathfrak{p}$ 态射 $X(B) \to X(B/\mathfrak{p})$ 的核所得到的 “ 同余子群 ”。

命题 6.5 ([23]的命题 4。设 A 是算术型戴德金整环， $\mathfrak{q}$ 是 A的非零理想。设 G 是秩为 $\geqslant 2$ 的几乎单的切瓦莱概形， Φ 是 G 的根系。对于 $\alpha \in \Phi$，记 U_α 为与 α 相关联的 $G(A)$ 的单参数子群，并回顾一下， $U_\alpha^{(\mathfrak{q})}$是 U_α模 $\mathfrak{q}$ 约化的核。记 $F(\mathfrak{q})$ 为由 $G(A)$ 中当 α遍历 Φ时的各个 $U_\alpha^{(\mathfrak{q})}$生成的子群。

那么， $F(\mathfrak{q})$ 在 $G(A)$中具有有限指数。此外，如果 A 不是全虚域的整数环，且 G 是单连通的，那么 $F(\mathfrak{q})$ 就是 $G(A)$ 中由这样一些元素构成的子群：它们模 $\mathfrak{q}^2$ 约化后属于当 $\alpha \in \Phi$取值时， $G(A/\mathfrak{q}^2)$的子群 $U_\alpha^{(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2)}$的（直）乘积。

请注意，最后一句尤其意味着 $F(\mathfrak{q})$ 包含同余子群 $G^{(\mathfrak{q}^2)}$。我们将在以下特定情形中应用命题 6.5。

- 环 A 将是 $\mathbb{Z}$，它确实是一个算术型戴德金整环（例如参见 [2,第 83] 页），并且不是全虚数域的整数环。• 理想 $\mathfrak{q}$ 将是 $2^{g-1}\mathbb{Z}$。• 群概形 G 将是 $\mathrm{Sp}(2g)$，它确实是一个秩为 g 的几乎单、单连通切瓦莱概形（例如参见 [6, 第 22] 章，或 [15, 第 18.25] 段）。• 因此，群 $G(A)$ 将是 $\mathrm{Sp}(2g$，而同余子群 $G^{(\mathfrak{q}^2)}$ 将是 $\mathrm{Sp}(2g$ 的层为 2^{2g-2} 的主同余子群 $\Gamma(2^{2g-2})$ 。• 与经典根系 $\mathrm{Sp}(2g)$ 中各元素相对应的 $\mathrm{Sp}(2g$ 的单参数子群为（例如参见 [6, 第 22] 章，或 [15, 第 18.25] 段，或 [20, 第 110] 页）：

$$
\begin{aligned}
&\left\{V_i^t = I_{2g} + tE_{i,g+i}\right\}_{t\in\mathbb{Z}}, \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant g,\\
&\left\{W_i^t = I_{2g} + tE_{g+i,i})\right\}_{t\in\mathbb{Z}} \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant g,\\
&\left\{X_{j,k}^t = I_{2g} + t(E_{j,k} - E_{g+k,g+j})\right\}_{t\in\mathbb{Z}} \text{ for } 1 \leqslant j \neq k \leqslant g,\\
&\left\{Y_{j,k}^t = I_{2g} + t(E_{g+j,k} + E_{g+k,j})\right\}_{t\in\mathbb{Z}} \text{ for } 1 \leqslant j < k \leqslant g,\\
&\left\{Z_{j,k}^t = I_{2g} + t(E_{j,g+k} + E_{k,g+j})\right\}_{t\in\mathbb{Z}} \quad \text{for } 1 \leqslant j < k \leqslant g.
\end{aligned}
$$

因此，在我们的情形下，命题 6.5 中考虑的子群 $F(\mathfrak{q})$ 将是由矩阵生成的 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ 的子群

$$
\begin{aligned}
&V_i^{2^{g-1}} = I_{2g} + 2^{g-1}E_{i,g+i} \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant g,\\
&W_i^{2^{g-1}} = I_{2g} + 2^{g-1}E_{g+i,i} \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant g,\\
&X_{j,k}^{2^{g-1}} = I_{2g} + 2^{g-1}(E_{j,k} - E_{g+k,g+j}) \text{ for } 1 \leqslant j \neq k \leqslant g,\\
&Y_{j,k}^{2^{g-1}} = I_{2g} + 2^{g-1}(E_{g+j,k} + E_{g+k,j}) \text{ for } 1 \leqslant j < k \leqslant g,\\
&Z_{j,k}^{2^{g-1}} = I_{2g} + 2^{g-1}(E_{j,g+k} + E_{k,g+j}) \quad \text{for } 1 \leqslant j < k \leqslant g.
\end{aligned}
$$

在这一具体情形下，命题 6.5 可具体表述如下：

推论 6.6。由矩阵 $V_i^{2^{g-1}}$和 $W_i^{2^{g-1}}$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$ ，矩阵 $X_{j\,k}^{2^{g-1}}$ ，（ $1 \leqslant j \neq k \leqslant g$ ），以及矩阵 $Y_{j\,k}^{2^{g-1}}$,和 $Z_{j\,k}^{2^{g-1}}$ ，$(1 \leqslant j < k \leqslant g$ ）生成的 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ 的子群包含主合同子群 $\Gamma(2^{2g-2})$。

根据推论 6.6，我们只需证明：

引理 6.7。 $1 \leqslant i \leqslant g$的矩阵 $V_i^{2^{g-1}}$和 $W_i^{2^{g-1}}$、 $1 \leqslant j \neq k \leqslant g$ 的矩阵 $X_{j\,k}^{2^{g-1}}$ ，以及 $1 \leqslant j < k \leqslant g$ 的矩阵 $Y_{j\,k}^{2^{g-1}}$ ，和 $Z_{j\,k}^{2^{g-1}}$ ，都属于我们的子群

Γ，也就是说，所有这些矩阵都可以写成 Γ的生成元 $A_1^{\pm1}$、…、$A_g^{\pm1}$、$B_1^{\pm1}$、…、$B_g^{\pm1}$、$C_1^{\pm2}$、…、$C_{g-1}^{\pm2}$ 的乘积。

引理 *6.7* 的证明。矩阵 $V_i^{2^{g-1}}$ 和 $W_i^{2^{g-1}}$ 的情形显然，正如下述观察所指出的：

观察 A。对于 $i=1,\dots,g$，有 $V_i=A_i$ 和 $W_i=B_i^{-1}$。

为处理矩阵 $X_{j\,k}^{2^{g-1}}$，的情形，我们对 $i=1,\dots,g-1$ 引入矩阵

$$D_i := A_i^2B_{i+1}^2(A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1})C_i^2(A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1})^{-1}.$$

我们先证明

命题 B。对于 $i=1,\dots,g-1$，有

$$D_i = I_{2g}+2(E_{i,i+1}-E_{g+i+1,g+i}) = X_{i,i+1}^2.$$

证明。等式 $D_i = I_{2g}+2(E_{i,i+1}-E_{g+i+1,g+i})$ 可通过暴力计算得到：根据矩阵 A_i、A_{i+1}、B_i、B_{i+1} 和 C_i的定义，计算乘积即可得到 D_i。不过，下面我们会尝试给出一种稍微不那么晦涩的解释。

- 首先注意到，D_i 保持基中的每个元素不变，除非是e_i, e_{i+1}, e_{g+i} 和 e_{g+i+1}，因为 A_i、$A_{i+1}^{\pm1}$、$B_{i+1}^{\pm1}$、C_i都具有这一性质。
- 一个关键观察是，$A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1}$ 是在平面$\langle e_i, e_{g+i}\rangle$内旋转角 $\pi/2$ 的旋转。因此，$A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1}$ 将 e_{i+1} 映到 $-e_{g+i+1}$，将 e_{g+i+1} 映到 e_{i+1}，并保持 e_i 和 e_{g+i}不变。
- C_i^2将 e_{g+i} 映到 $e_{g+i}-2e_i+2e_{i+1}$，将 e_{g+i+1} 映到 $e_{g+i+1}+2e_i-2e_{i+1}$，并保持 e_i 和 e_{i+1} 不变。
- B_{i+1}^2 将 e_{i+1} 映到 $e_{i+1}-2e_{g+i+1}$。
- A_i^2将 e_{g+i} 映到 $e_{g+i}+2e_i$。

因此

$$\begin{aligned}
&e_i \xmapsto{(A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1})^{-1}} e_i \xmapsto{C_i^2} e_i \xmapsto{A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1}} e_i \xmapsto{B_{i+1}^2} e_i \xmapsto{A_i^2} e_i,\\
&e_{g+i} \xmapsto{(A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1})^{-1}} e_{g+i} \xmapsto{C_i^2} e_{g+i}-2e_i+2e_{i+1} \xmapsto{A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1}} \dots\\
&\dots e_{g+i}-2e_i-2e_{g+i+1} \xmapsto{B_{i+1}^2} e_{g+i}-2e_i-2e_{g+i+1} \xmapsto{A_i^2} e_{g+i}-2e_{g+i+1},\\
&e_{i+1} \xmapsto{(A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1})^{-1}} e_{g+i+1} \xmapsto{C_i^2} e_{g+i+1}+2e_i-2e_{i+1} \xmapsto{A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1}} \dots\\
&\dots e_{i+1}+2e_i+2e_{g+i+1} \xmapsto{B_{i+1}^2} e_{i+1}+2e_i \xmapsto{A_i^2} e_{i+1}+2e_i,\\
&e_{g+i+1} \xmapsto{(A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1})^{-1}} -e_{i+1} \xmapsto{C_i^2} -e_{i+1} \xmapsto{A_{i+1}B_{i+1}A_{i+1}} e_{g+i+1} \xmapsto{B_{i+1}^2} \dots\\
&\dots e_{g+i+1} \xmapsto{A_i^2} e_{g+i+1}.
\end{aligned}$$

因此，D_i 将 e_{i+1} 映射到 $e_{i+1}+2e_i$，将 e_{g+i} 映射到 $e_{g+i}-2e_{g+i+1}$，并保持基中的其他元素不变。由此可得 $D_i = I_{2g}+2(E_{i,\ i+1}-E_{g+i+1,\ g+i}) = X_{i,\ i+1}^2$。□

现在我们证明

命题 C。对于 $1\leqslant j<j+\ell\leqslant g-1$，我们有

$$\left[X_{j,j+\ell}^{2^\ell}, X_{j+\ell,j+\ell+1}^2\right] = X_{j,j+\ell+1}^{2^{\ell+1}}.$$

证明。 回忆一下

$$X_{j,j+\ell}^{\pm 2^\ell} = I_{2g} \pm 2^\ell E_{j,j+\ell} \mp 2^\ell E_{g+j+\ell,g+j}$$

and

$$X_{j+\ell,j+\ell+1}^{\pm 2} = I_{2g} \pm 2E_{j+\ell,j+\ell+1} \mp 2E_{g+j+\ell+1,g+j+\ell}.$$

因此

$$\begin{aligned} X_{j,j+\ell}^{2^\ell} X_{j+\ell,j+\ell+1}^{2} &= I_{2g} + 2^\ell E_{j,j+\ell} - 2^\ell E_{g+j+\ell,g+j} \\ &\quad + 2E_{j+\ell,j+\ell+1} - 2E_{g+j+\ell+1,g+j+\ell} + 2^{\ell+1} E_{j,j+\ell+1} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} X_{j,j+\ell}^{2^\ell} X_{j+\ell,j+\ell+1}^{2} X_{j,j+\ell}^{-2^\ell} &= I_{2g} + 2E_{j+\ell,j+\ell+1} - 2E_{g+j+\ell+1,g+j+\ell} \\ &\quad + 2^{\ell+1} E_{j,j+\ell+1} - 2^{\ell+1} E_{g+j+\ell+1,g+j} \end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned} \left[X_{j,j+\ell}^{2^\ell}, X_{j+\ell,j+\ell+1}^{2}\right] &= X_{j,j+\ell}^{2^\ell} X_{j+\ell,j+\ell+1}^{2} X_{j,j+\ell}^{-2^\ell} X_{j+\ell,j+\ell+1}^{-2} \\ &= I_{2g} - 2^{\ell+1} E_{g+j+\ell+1,g+j} + 2^{\ell+1} E_{j,j+\ell+1} = X_{j,j+\ell+1}^{2^{\ell+1}} \end{aligned}$$

如前所述。 □

断言 B 和 C、矩阵 D_i 的定义以及一个简单的归纳法表明，对于$1 \leqslant j < k \leqslant g$，矩阵 $X_{j\,k}^{2^{k-j}}$，（因此矩阵 $X_{j\,k}^{2^{g-1}}$，）可以写成矩阵 $A_1^{\pm 1},\ldots,A_g^{\pm 1}$、 $B_1^{\pm 1},\ldots,B_g^{\pm 1}$、 $C_1^{\pm 2},\ldots,C_{g-1}^{\pm 2}$ 的乘积。 $1 \leqslant k < j \leqslant g$ 的情形可以用类似的论证处理，只需对断言 B 和 C 作如下变体:

命题 B'. 对于 $i = 2$，……，g，若我们记

$$D_i' := (A_{i-1}B_{i-1}A_{i-1})C_{i-1}^{-2}(A_{i-1}B_{i-1}A_{i-1})^{-1}B_{i-1}^{-2}A_i^{-2}$$

then

$$D_i' = I_{2g} - 2(E_{i,i-1} - E_{g+i-1,g+i}) = X_{i,i-1}^{-2}$$

命题 C'. 对于 $2 \leqslant j - \ell < j \leqslant g$，我们有

$$\left[X_{j,j-\ell}^{2^\ell}, X_{j-\ell,j-(\ell+1)}^{2}\right] = X_{j,j-(\ell+1)}^{2^{\ell+1}}.$$

现在我们转向矩阵 $Z_{j\,k}^{2^{g-1}}$，的情形。下面的命题处理 $j = k-1$ 的情形。

命题 D. 对于 $2 \leqslant k \leqslant g$，我们有

$$Z_{k-1,k}^{2} = \left[V_k, D_{k-1}^{-1}\right] V_{k-1}^{4}.$$

证明. 回顾

$$V_k^{\pm} = I_{2g} \pm E_{k,g+k} \quad \text{and} \quad D_{k-1}^{\pm} = X_{k-1,k}^{\pm 2} = I_{2g} \pm 2E_{k-1,k} \mp 2E_{g+k,g+k-1}.$$

因此

$$V_k D_{k-1}^{-1} = I_{2g} + E_{k,g+k} - 2E_{k-1,k} + 2E_{g+k,g+k-1} + 2E_{k,g+k-1},$$

因此

$$V_k D_{k-1}^{-1} V_k^{-1} = I_{2g} - 2E_{k-1,k} + 2E_{g+k,g+k-1} + 2E_{k,g+k-1} + 2E_{k-1,g+k},$$

因此

$$\left[V_k, D_{k-1}^{-1}\right] = V_k D_{k-1}^{-1} V_k^{-1} D_{k-1} = I_{2g} + 2E_{k,g+k-1} + 2E_{k-1,g+k} - 4E_{k-1,g+k-1},$$

最后

$$\left[V_k, D_{k-1}^{-1}\right] V_{k-1}^{4} = I_{2g} + 2E_{k,g+k-1} + 2E_{k-1,g+k} = Z_{k-1,k}^{2}.$$

□

一般情形（即$Z_{j\,k}^{2^{g-1}}$，对于 $1\leqslant j<k\leqslant g$ 的情形）将由命题 D 和下面的断言 E 得出：

断言 E. 对于 $1\leqslant k-(\ell-1)<k\leqslant g$，我们有

$$Z_{k-\ell,k}^{2^{\ell}}=\left[Z_{k-(\ell-1),k}^{2^{\ell-1}},D_{k-\ell}^{-1}\right].$$

证明. 回想一下

$$Z_{k-(\ell-1),k}^{\pm 2^{\ell-1}}=I_{2g}\pm 2^{\ell-1}E_{k-(\ell-1),g+k}\pm 2^{\ell-1}E_{k,g+k+(\ell-1)}$$

and

$$D_{k-\ell}^{\pm 1}=X_{k-\ell,k-(\ell-1)}^{\pm 2}=I_{2g}\pm 2E_{k-\ell,k-(\ell-1)}\mp 2E_{g+k-(\ell-1),g+k-\ell}.$$

因此

$$\begin{aligned}Z_{k-(\ell-1),k}^{2^{\ell-1}}D_{k-\ell}^{-1} &= I_{2g}+2^{\ell-1}E_{k-(\ell-1),g+k}+2^{\ell-1}E_{k,g+k+(\ell-1)}\\ &\quad -2E_{k-\ell,k-(\ell-1)}+2E_{g+k-(\ell-1),g+k-\ell}+2^{\ell}E_{k,g+k-\ell},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&Z_{k-(\ell-1),k}^{2^{\ell-1}}D_{k-\ell}^{-1}Z_{k-(\ell-1),k}^{-2^{\ell-1}}\\ =\;& I_{2g}-2E_{k-\ell,k-(\ell-1)}+2E_{g+k-(\ell-1),g+k-\ell}+2^{\ell}E_{k,g+k-\ell}+2^{\ell}E_{k-\ell,g+k},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left[Z_{k-(\ell-1),k},D_{k-\ell}^{-1}\right] &= Z_{k-(\ell-1),k}^{2^{\ell-1}}D_{k-\ell}^{-1}Z_{k-(\ell-1),k}^{-2^{\ell-1}}D_{k-\ell}\\ &= I_{2g}+2^{\ell}E_{k,g+k-\ell}+2^{\ell}E_{k-\ell,g+k}=Z_{k-\ell,k}^{2^{\ell}}.\end{aligned}$$

□

由断言 A、D 和 E、矩阵 $D_{k-\ell}$ 的定义，以及对 ℓ 进行的直接归纳法可知，对于 $1\leqslant j<k\leqslant g$，矩阵 $Z_{j\,k}^{2^{k-j}}$，（因此矩阵 $Z_{j\,k}^{2^{g-1}}$，它是 $Z_{j\,k}^{2^{k-j}}$，的幂）可以写成矩阵 $A_1^{\pm 1}$、……、$A_g^{\pm 1}$、$B_1^{\pm 1}$、……、$B_g^{\pm 1}$和 $C_1^{\pm 2}$、……、$C_{g-1}^{\pm 2}$的乘积。

最后，矩阵 $Y_{j\,k}^{2^{g-1}}$，的情形将由以下观察得到：

观察 F. 对于 $1\leqslant j<k\leqslant g$，矩阵 $Y_{j,\,k}$ 是矩阵 $Z_{j\,k}^{-1}$，在矩阵 $\prod_{i=1}^{g}A_iB_iA_i$下的共轭矩阵。

证明. 我们已经注意到，对于 $i=1,\ldots\ldots,g$，矩阵 $A_iB_iA_i$将 e_i映射到$-e_{g+i}$，将 e_{g+i} 映射到 e_i，并保持基的其他元素不变。因此，对于每个 $i\in\{1,\ldots\ldots,g\}$[4]，矩阵 $\prod_{i=1}^{g}A_iB_iA_i$ 将 e_i映射到 $-e_{g+i}$，并将 e_{g+i}映射到 e_i。由此可知，矩阵 $Z_{j}^{-1}{}_{,\,k}=I_{2g}-E_{j,\,g+k}-E_{k,\,g+j}$ 在矩阵$\prod_{i=1}^{g}A_iB_iA_i$ 下的共轭矩阵为矩阵 $I_{2g}+E_{g+j,\,k}+E_{g+k,\,j}=Y_{j,\,k}$。□

由于我们已经知道，对于 $1\leqslant j<k\leqslant g$，矩阵 $Z_{j\,k}^{2^{g-1}}$，可以写成生成元 $A_1^{\pm 1},\ldots,A_g^{\pm 1}$，$B_1^{\pm 1},\ldots,B_g^{\pm 1}$和 $C_1^{\pm 2},\ldots,C_{g-1}^{\pm 2}$的乘积，因此根据观察 F 可推知，矩阵 $Y_{j\,k}^{2^{g-1}}$，也可以如此表示。由此完成引理 6.7 的证明。□

引理 6.7 和推论 6.6 表明，我们的子群 Γ 包含层 2^{2g-2} 的主同余子群 $\mathrm{Sp}(H_1(S_g,\ \mathbb{Z}))$，从而完成命题 6.4 的证明。□

当然，命题 6.1 可由命题 6.2 和命题 6.4 合并推出。

[4]这意味着 $\prod_{i=1}^{g}A_iB_iA_i$ 实际上等于辛形式的矩阵 J。

参考文献

[1] Ian Agol。虚拟哈肯猜想。《数学文献》，18：1045–1087，2013。附录由 Agol、Daniel Groves 和 Jason Manning 撰写。[2] Hyman Bass、John Milnor 和 Jean-Pierre Serre。$\mathrm{SL}_n\,(n \geqslant 3)$ 和 $\mathrm{Sp}_{2n}\,(n \geqslant 2)$的同余子群问题的解。高等科学研究院数学出版物，33：59–137，1967。[3] Jonathan Bowden 和 Kathryn Mann。 C^0 边界作用的稳定性与不等价的阿诺索夫流。《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑），55(4)：1003–1046，2022。[4] Peter Buser。紧黎曼曲面的几何与谱。现代 Birkhäuser 经典丛书。Birkhäuser Boston, Ltd.，马萨诸塞州波士顿，2010。1992 年版重印。[5] Francois Béguin 和 Bin Yu。双曲三维流形上任意多个非$\mathbb{R}$覆盖阿诺索夫流的存在性。arXiv：2402.06551。[6] Claude Chevalley、Pierre Cartier、Alexandre Grothendieck 和 Michel Lazard。半单代数群的分类 = 半单代数群的分类 / Claude Chevalley；P. Cartier、A. Grothendieck、M. Lazard 协作；P. Cartier 修订文本。文集。施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约（纽约州），C 2005。[7] Benson Farb 和 Dan Margalit。映射类群入门，普林斯顿数学丛书第 49 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2012。[8] Sérgio R. Fenley。三维流形上的阿诺索夫流。《数学年刊》（第 2 辑），139(1)：79–115，1994。[9] David Fried。传递阿诺索夫流与伪阿诺索夫映射。《拓扑学》，22(3)：299–303，1983。[10] David Gabai。叶状结构与三维流形拓扑。《微分几何学杂志》，18(3)：445–503，1983。[11] Étienne Ghys。圆纤维化三维流形上的阿诺索夫流。《遍历理论与动力系统》，4(1)：67–80，1984。[12] Sue Goodman。阿诺索夫流上的 Dehn 手术。载于《几何动力学》（里约热内卢，1981），《数学讲义》第 1007 卷，第 300–307 页。施普林格出版社，柏林，1983。[13] Matthew Hedden、Katherine Raoux 和 Jeremy Van Horn-Morris。私人通信，2025。[14] Yi Liu。论可填充接触结构的欧拉类一猜想。arXiv：2409.14504。[15] James S. Milne。约化群，2018。参见 www.jmilne.org/math/。[16] Athanase Papadopoulos。同调的伪阿诺索夫微分同胚与辛自同构。《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑），15(3)：543–546，1982。[17] Rafael Potrie。鲁棒动力学、不变结构与拓扑分类。载于《2018 年国际数学家大会论文集——里约热内卢》，第三卷，特邀报告，第 2063–2085 页。World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2018。[18] Igor Rivin。群上的游走、可约矩阵、多项式、曲面自同构与自由群自同构的计数。《杜克数学杂志》，142(2)：353–379，2008。[19] Dale Rolfsen。《纽结与链环》。普林斯顿大学出版社，1976。[20] Wulf Rossmann。李群，牛津数学研究生教材第 5 卷。牛津大学出版社，牛津，2002。通过线性群介绍。[21] Mario Shannon。三维传递阿诺索夫流上的 Dehn 手术与光滑结构。博士论文，勃艮第-弗朗什-孔泰大学，2020。[22] William P. Thurston。三维流形同调的一个范数。《美国数学会回忆录》，59(339)：i–vi 及 99–130，1986。[23] Jacques Tits。同余群的生成系。《巴黎科学院报告》A-B辑，283(9)：Ai，A693–A695，1976。[24] Amy Wilkinson。《几何、动力学与刚性》。普林斯顿大学出版社，2026。[25] Mehdi Yazdi。论 Thurston 欧拉类一猜想。《数学学报》，225(2)：313–368，2020。

François Béguin索邦巴黎北大学 分析、几何与应用实验室，法国国家科学研究中心，联合研究组 7539 F-93430，维勒塔讷兹，法国电子邮箱：beguin@math.univ-paris13.fr

Christian Bonatti勃艮第欧洲大学 法国国家科学研究中心，勃艮第数学研究所（联合研究组5584）21000 第戎，法国电子邮箱：bonatti@u-bourgogne.fr

Biao Ma数学科学学院 智能计算与应用重点实验室（同济大学），教育部 同济大学，上海 200092，中国电子邮箱：24024@tongji.edu.cn

Bin Yu数学科学学院 智能计算与应用重点实验室（同济大学），教育部 同济大学，上海 200092，中国电子邮箱：binyu1980@gmail.com